

**CAPITOLO 1****Statica dei fluidi**

**Introduzione** Come sovente accade, anche in questa trattazione introduttiva alla meccanica dei fluidi partiremo dallo studio della statica, cioè dei fenomeni che caratterizzano i fluidi in quiete. Questo approccio ci consentirà infatti di introdurre il concetto di fluido come un *mezzo continuo* e di familiarizzare con alcuni operatori differenziali e con alcune tecniche matematiche che verranno utilizzate anche in seguito.

Dopo la parte introduttiva, enunceremo la legge fondamentale della statica dei fluidi illustrandone alcuni corollari, costituiti dalle leggi di Stevino, di Pascal e di Archimede, assieme ad alcune applicazioni significative come il calcolo della distribuzione di pressione nell'atmosfera o il funzionamento degli strumenti per la misura di pressione in un fluido. Pur nella loro apparente semplicità, le leggi della statica dei fluidi rivestono un enorme interesse dal punto di vista tecnico e applicativo: l'importanza del loro studio e di una loro adeguata comprensione non deve quindi essere sottovalutata.

**1.1 Proprietà dei fluidi**

Nella nostra introduzione alla dinamica dei fluidi considereremo il fluido come un *continuo*. Questa assunzione significa che tutte proprietà del fluido che saranno oggetto della nostra analisi sono riferite al comportamento macroscopico e fenomenologico del fluido. In realtà, a causa della struttura discreta della materia, il fluido è costituito da un numero molto grande di particelle microscopiche: gli atomi e le molecole. Tutte queste particelle interagiscono fra loro conformemente ai principi della meccanica di un sistema di punti materiali, ma l'enorme grandezza del loro numero rende praticamente impossibile procedere a una descrizione individuale dettagliata del loro movimento.

Come è proprio della descrizione di sistemi macroscopici nell'ambito della termodinamica, limitiamo allora l'analisi a variabili che rappresentano il *valore medio* delle grandezze: la media è effettuata su un numero molto grande di atomi o molecole. Il nostro studio dei fluidi sia in condizioni di equilibrio sia in movimento sarà pertanto valido solo fino a una scala spaziale che risulti molto maggiore della distanza che caratterizza i vari fenomeni che si verificano a livello microscopico.

Per stabilire in modo più preciso questa condizione di applicabilità del modello del fluido come continuo, si deve introdurre il **libero cammino medio**. Questa grandezza rappresenta la distanza media percorsa dalle molecole fra due urti successivi ed è indicata con  $\lambda$ . Tipicamente, nell'aria in condizioni standard (temperatura  $T = 300$  K e pressione atmosferica  $P = 1.01 \times 10^5$  Pa) il valore del libero cammino medio è  $\lambda = 10^{-7}$  m, mentre nell'acqua alle stesse condizioni, con le molecole che si muovono rimanendo sempre molto vicine, esso è più difficile da definire e viene arbitrariamente assunto uguale ad alcune distanze intermolecolari, per cui il libero cammino medio è dell'ordine di  $10^{-10}$  m.

Il valore di  $\lambda$  nelle condizioni termodinamiche della corrente in esame è poi confrontato con una **lunghezza caratteristica** del problema studiato, che indichiamo con  $L$ , ad esempio la dimensione di un corpo immerso nel fluido. Il rapporto fra queste due grandezze, cioè

$$\text{Kn} = \frac{\lambda}{L},$$

si chiama **numero di Knudsen** della corrente in esame. La descrizione secondo il modello continuo di tale corrente sarà valida a condizione di avere  $\text{Kn} \ll 1$ . In caso





contrario, sarà necessario ricorrere a una descrizione molto più dettagliata del fenomeno nella quale dovranno necessariamente giocare un ruolo anche aspetti legati alla struttura microscopica del fluido (**teoria cinetica** dei gas e dei liquidi).

## Il fluido come mezzo continuo

Con queste premesse, definiamo **fluido** un **mezzo continuo** mobile e deformabile quando esso, in condizioni di quiete o di moto rigido, non è in grado di esercitare al suo interno alcuna azione di *taglio*, ma esclusivamente azioni di tipo normale. Ciò significa che le forze interne agiscono su ogni superficie nella stessa direzione della sua normale. In questa definizione per moto rigido si intende il moto che risulta dalla combinazione di una traslazione lungo una direzione qualunque e di una rotazione attorno a un asse qualunque.

## Pressione

La conseguenza immediata di questa proprietà del fluido è che, sotto le condizioni di moto indicate, la forza interna  $\mathbf{s}$ , per unità di area, agente su ogni superficie elementare può essere espressa come il prodotto di una grandezza scalare  $P$ , chiamata **pressione**, e del vettore  $\hat{\mathbf{n}}$  normale alla superficie  $\Delta S$  considerata. Scriveremo pertanto

$$\mathbf{s} = -P \hat{\mathbf{n}},$$

dove il segno meno è necessario in quanto  $\mathbf{s}$  indica la forza (per unità di area) esercitata dal fluido che si trova nella parte verso cui punta  $\hat{\mathbf{n}}$ , sul fluido che è dall'altra parte (ovviamente  $P > 0$ ), come mostrato in figura 1.1. Il valore della pressione  $P$  risulta dipendere in generale dalla posizione  $\mathbf{r}$  in cui si trova la superficie  $\Delta S$ , per cui la pressione sarà in realtà una funzione di  $\mathbf{r}$ , ossia avremo

$$P = P(\mathbf{r}).$$

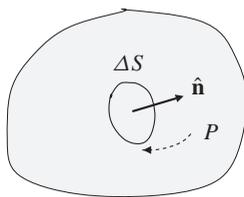
In effetti il problema fondamentale della statica dei fluidi consiste nel determinare l'andamento del **campo di pressione**  $P(\mathbf{r})$  nelle condizioni specifiche del problema considerato.

In base alla definizione, la grandezza pressione ha le dimensioni di una forza per unità di superficie e quindi le pressioni sono misurate in newton per metro quadro. L'unità di misura della pressione si chiama **pascal** ed è indicata dal simbolo Pa, ovvero si ha

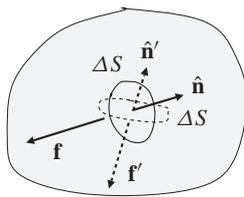
$$\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Notare che la pressione è una grandezza *scalare* per cui *non* è una forza per unità di superficie, dato che la forza è un vettore, ma ha solo le *dimensioni* di una forza per unità di superficie. In effetti, nota la pressione in un punto, esistono infinite forze dovute alla pressione che agiscono in quel punto a seconda della superficie elementare scelta passante per il punto. Infatti, per ciascuna di tali superfici, ad esempio la superficie  $\Delta S$  con normale  $\hat{\mathbf{n}}$ , si avrà una forza dovuta alla pressione, data da  $\mathbf{f} = -P \Delta S \hat{\mathbf{n}}$ . Se si cambia la giacitura della superficie e con essa la direzione della sua normale  $\hat{\mathbf{n}}$ , come mostrato nella figura 1.2 considerando ad esempio un'altra direzione  $\hat{\mathbf{n}}'$ , allora la forza, sempre nello stesso punto, sarà data da  $\mathbf{f}' = -P \Delta S \hat{\mathbf{n}}'$ , che è quindi diversa da  $\mathbf{f}$  tranne quando  $\hat{\mathbf{n}}'$  coincide con  $\hat{\mathbf{n}}$ .

Fissata l'area  $\Delta S$  della superficie avremo comunque sempre  $|\mathbf{f}'| = |\mathbf{f}|$ , qualunque sia la direzione di  $\hat{\mathbf{n}}$ . Questa indipendenza dell'intensità della forza dovuta alla pressione dalla direzione della normale alla superficie attraverso la quale la forza si esercita è indicata talvolta come “principio di isotropia della pressione”. Questa dizione è scorretta dato che la pressione è una grandezza *scalare* e quindi non ha senso collegare a essa l'idea di una direzione. La proposizione deve quindi essere intesa nel senso che ogni forza associabile alla pressione ha la medesima *intensità* qualunque sia la direzione  $\hat{\mathbf{n}}$  della normale alla superficie  $\Delta S$ . Potremo dunque a ragione parlare di **isotropia degli sforzi dovuti alla pressione**.



**Figura 1.1** Azione della pressione del fluido su una superficie elementare  $\Delta S$  con normale  $\hat{\mathbf{n}}$



**Figura 1.2** La pressione esercita una forza su ogni superficie con normale diretta in qualunque direzione





## Densità

Oltre alla pressione, le proprietà del fluido sono caratterizzate anche da un'altra grandezza macroscopica: la **densità (di massa)**, detta anche **massa volumica** o **massa specifica**, che rappresenta il rapporto fra la massa e il volume di una particella di fluido, ossia di una sua porzione sufficientemente piccola. La densità è indicata con  $\rho$  e le sue dimensioni sono una massa per unità di volume, per cui nelle unità del Sistema Internazionale il valore di  $\rho$  sarà espresso in  $\text{kg}/\text{m}^3$ . Naturalmente, anche la densità dipende in generale dalla posizione  $\mathbf{r}$  in cui si trova la porzione di fluido, per cui la densità è una funzione dello spazio e scriveremo quindi  $\rho(\mathbf{r})$ . In effetti, la risoluzione dei problemi della statica dei fluidi richiederà di determinare anche l'andamento spaziale della densità ovvero di calcolare la funzione

$$\rho = \rho(\mathbf{r}).$$

Nella tabella 1 sono riportati i valori della densità  $\rho$  di alcuni fluidi tipici in condizioni termodinamiche standard, ovvero alla temperatura di  $T = 300 \text{ K}$  e alla pressione atmosferica  $P = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ : il mercurio (simbolo chimico Hg), l'acqua ( $\text{H}_2\text{O}$ ) allo stato liquido e di vapore, e l'aria. Nella stessa tabella sono indicati anche i valori delle grandezze viscosità dinamica  $\mu$  e della viscosità cinematica  $\nu \equiv \mu/\rho$  delle varie sostanze nelle condizioni termodinamiche indicate. La viscosità dinamica  $\mu$  sarà definita più avanti nel paragrafo 5.1.

**Tabella 1.** Proprietà meccaniche di alcuni fluidi alla temperatura di  $T = 300 \text{ K}$  e alla pressione atmosferica  $P = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ , a meno che non sia diversamente specificato

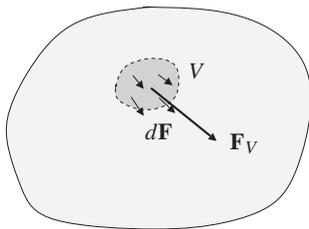
Fluido	$\rho$ densità $\text{kg}/\text{m}^3$	$\mu$ viscosità dinam. $\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$	$\nu$ viscosità cinem. $\text{m}^2/\text{s}$
mercurio, Hg	13 550	$1.56 \times 10^{-3}$	$0.115 \times 10^{-6}$
acqua, $\text{H}_2\text{O}$	998	$1.0 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-6}$
vapore, $\text{H}_2\text{O}$ a $100^\circ\text{C}$	0.60	$12.3 \times 10^{-6}$	$20.5 \times 10^{-6}$
aria	1.18	$18.5 \times 10^{-6}$	$15.6 \times 10^{-6}$

Nelle applicazioni, si utilizza sovente la grandezza  $\gamma = \rho g$  chiamata **peso specifico** del fluido, dove  $g = 9.81 \text{ N}/\text{kg}$ , che rappresenta la forza peso per unità di *volume* del fluido vicino alla superficie terrestre. Ad esempio, il peso specifico dell'acqua e dell'aria in condizioni standard valgono rispettivamente  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 998 \times 9.81 = 9790.4 \text{ N}/\text{m}^3$  e  $\gamma_{\text{aria}} = 1.18 \times 9.81 = 11.58 \text{ N}/\text{m}^3$ .

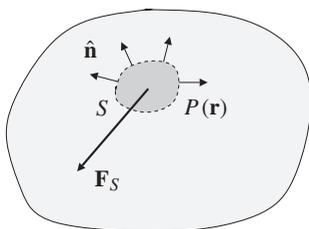
## 1.2 Equazione di equilibrio di un fluido

Per determinare il comportamento di un fluido in condizioni di equilibrio sono necessari i principi della statica dei fluidi espressi in forma di relazioni matematiche. Dalle leggi della statica dei corpi solidi, è evidente che la condizione di equilibrio di un fluido che occupa una determinata regione dello spazio richiederà che sia in equilibrio *ogni* particella del fluido. Conformemente all'ipotesi del modello continuo, per **particella di fluido** intendiamo qui e nel seguito una porzione piccola del fluido, di dimensioni comunque macroscopiche, ovvero che contiene un grandissimo numero di atomi o molecole del liquido o gas considerato. In un sistema di riferimento inerziale, l'equilibrio di ogni particella del fluido richiede che la risultante di tutte le forze agenti su di essa sia nulla. Come noto, questa condizione non basta per garantire che la particella non si muova: infatti, affinché un corpo, su cui agisce una forza risultante nulla, rimanga fermo è necessario che anche la sua *velocità iniziale* sia nulla. La statica dei fluidi è interessata allo studio dei fluidi a riposo, per cui in tale ambito si suppone implicitamente che la condizione di quiete iniziale sia sempre soddisfatta, come sarà fatto in tutto il capitolo.





**Figura 1.3** Forza di volume  $\mathbf{F}_V$  esercitata dal campo di forze  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  sul fluido nella regione  $V$



**Figura 1.4** Forza di superficie  $\mathbf{F}_S$  che il fluido esterno esercita sul fluido nella regione  $V$

In realtà, ogni moto rigido può essere visto come stato di quiete rispetto a un osservatore opportuno. I ragionamenti che seguono sono pertanto validi per fluidi in moto rigido, avendo però l'accortezza di includere fra le forze di volume anche le forze apparenti qualora il sistema di riferimento sia non inerziale.

Per formulare la condizione di equilibrio di ogni particella di fluido dobbiamo considerare le forze che agiscono su di essa. Nel caso dei fluidi tali forze comprendono le **forze esterne**, che sono causate da azioni a distanza (come, per esempio, la forza gravitazionale o la forza elettrica), le **forze interne** che sono causate dall'azione delle parti di fluido adiacenti alla particella considerata. e infine le **forze di contatto** che sono causate dalle superfici di corpi in contatto con il fluido. Le forze esterne sono dette anche **forze di volume** mentre le forze di interne e di contatto sono dette anche **forze di superficie**, per i motivi che risulteranno chiari fra un momento.

Supponiamo allora che sulla particella di fluido posta nella posizione  $\mathbf{r}$  agiscano delle forze esterne di volume la cui risultante è espressa dal campo di forze  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ : per essere precisi  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  rappresenta la forza *per unità* di massa, per cui il prodotto  $\rho(\mathbf{r}) \mathbf{g}(\mathbf{r})$  rappresenterà la *forza per unità di volume* e la *forza* agente su una particella di volume elementare  $dV$  che si trova in  $\mathbf{r}$  sarà data da  $\rho(\mathbf{r}) \mathbf{g}(\mathbf{r}) dV$ . Ad esempio,  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  potrebbe rappresentare il **campo di gravità** in prossimità della superficie terrestre e in tal caso avremmo più in dettaglio  $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{g} = -g \hat{\mathbf{z}}$ , dove  $g = 9.81 \text{ N/m}$ , l'asse verticale  $z$  essendo diretto verso l'alto.

Consideriamo un volume determinato  $V$  di fluido. Per quanto detto, la forza di volume complessiva dovuta al campo di forze  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  esterne che agisce su questa porzione finita di fluido è data da

$$\mathbf{F}_V = \iiint_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{g}(\mathbf{r}) dV,$$

dove l'elemento di volume infinitesimo  $dV$  potrà eventualmente essere espresso in coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  in termini degli infinitesimi dei tre integrali, ovvero  $dV = dx dy dz$ .

Accanto alla forza di volume, abbiamo l'azione dovuta alle forze, interne o di contatto, che agiscono sulla particella di fluido attraverso la superficie  $S = \partial V$  che racchiude il volume  $V$ . In condizioni di equilibrio, ovvero quando la velocità del fluido è nulla in ogni punto, le forze interne sono dovute alla sola azione della pressione e quindi la forza interna totale agente attraverso tutta la superficie che delimita la porzione di fluido sarà ottenuta sommando i contributi dovuti a ciascun elemento di superficie  $dS$ , come mostrato nella figura 1.4,

$$\mathbf{F}_S = \oiint_S -P(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS,$$

dove  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$  indica il vettore normale nel punto  $dS$  uscente dal volume  $V$ . Le presenza del segno meno è dovuta chiaramente al fatto che la relazione esprime la forza dovuta alla pressione che il fluido all'esterno di  $V$  esercita sul quello che si trova all'interno di  $V$  ( $P > 0$ ).

La condizione di equilibrio per la porzione di fluido considerata si scrive quindi

$$\mathbf{F}_V + \mathbf{F}_S = 0$$

e corrisponde alla relazione seguente

$$\iiint_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{g}(\mathbf{r}) dV - \oiint_S P(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS = 0.$$

Consideriamo ora il **teorema del gradiente**

$$\iiint_V \nabla f dV = \oiint_S f \hat{\mathbf{n}} dS,$$





che riduce il calcolo dell'integrale di volume del gradiente di una funzione qualsiasi (derivabile) al calcolo dell'integrale della funzione sulla superficie del contorno del volume (notare la presenza del versore normale  $\hat{\mathbf{n}}$  uscente dalla superficie chiusa). Utilizzando questo teorema in senso inverso, l'integrale di superficie che compare nella condizione di equilibrio può essere trasformato in integrale di volume e potremo quindi scrivere, invertendo l'ordine dei due termini,

$$\iiint_V [-\nabla P(\mathbf{r}) + \rho(\mathbf{r}) \mathbf{g}(\mathbf{r})] dV = 0.$$

D'altra parte, il volume  $V$  può essere scelto in modo arbitrario, per cui l'annullamento dell'integrale per ogni scelta di  $V$  richiede che sia nulla la funzione integranda.

Infatti, se una funzione continua  $f$  soddisfa  $\iiint_V f(\mathbf{r}) dV = 0$  per qualunque dominio  $V$ , allora  $f(\mathbf{r}) = 0$  in tutti i punti  $\mathbf{r}$  di  $V$ , in quanto, se esistesse un punto  $\mathbf{r}_0$  tale che  $f(\mathbf{r}_0) \neq 0$ , ad esempio  $f(\mathbf{r}_0) > 0$ , allora, per la continuità della funzione  $f$ , essa sarebbe positiva in tutti i punti appartenenti a un intorno  $B$  con centro in  $\mathbf{r}_0$  sufficientemente piccolo, per cui  $\iiint_B f(\mathbf{r}) dV$  sarebbe maggiore di zero, contraddicendo l'ipotesi.

In altre parole, l'equazione di **equilibrio in forma globale** espressa dalla relazione precedente è equivalente alla seguente equazione di **equilibrio in forma locale**

$$-\nabla P(\mathbf{r}) + \rho(\mathbf{r}) \mathbf{g}(\mathbf{r}) = 0,$$

che deve essere soddisfatta in tutti i punti  $\mathbf{r}$  del fluido. In questa equazione il campo vettoriale  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  è noto mentre le due funzioni scalari  $P(\mathbf{r})$  e  $\rho(\mathbf{r})$  sono le variabili incognite da determinare.

Adottiamo ora una convenzione assai frequente nel calcolo differenziale per la quale si indicano le variabili indipendenti delle funzioni solo per le *funzioni note* mentre le *variabili incognite* sono indicate senza alcun argomento. In base a tale convenzione, l'equazione che esprime l'equilibrio del fluido in forma locale si scrive nel modo seguente

$$-\nabla P + \rho \mathbf{g}(\mathbf{r}) = 0.$$

Questa è una equazione *differenziale del primo ordine*, contenente derivate parziali, nella quale compaiono *due* funzioni incognite, la pressione e la densità. Essendo l'equazione di carattere vettoriale, si hanno *tre* equazioni scalari. Essendovi un numero di equazioni maggiore di quello delle incognite l'equazione potrebbe non ammettere soluzione. Cioè, per un campo di forze arbitrariamente assegnato, l'equilibrio del fluido potrebbe essere *impossibile*. In effetti, notando che risulta  $\nabla P = \rho \mathbf{g}(\mathbf{r})$  e ricordando che  $\nabla \times \nabla f = 0$  per qualunque funzione  $f$  (derivabile), si ricava che potranno esistere soluzioni solo se  $\nabla \times [\rho \mathbf{g}(\mathbf{r})] = 0$ .

### Fluido in un campo di forze conservative

Consideriamo ora il caso particolare di un campo di forze  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  tale per cui

$$\nabla \times \mathbf{g}(\mathbf{r}) = 0.$$

Un campo vettoriale che soddisfa questa condizione si dice **irrotazionale** e, nel caso in cui rappresenti un campo di forze, esso è detto **conservativo**. Dall'identità differenziale

$$\nabla \times \left( \frac{\nabla P}{\rho} \right) = \nabla \left( \frac{1}{\rho} \right) \times \nabla P + \frac{1}{\rho} \nabla \times \nabla P = -\frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla P,$$

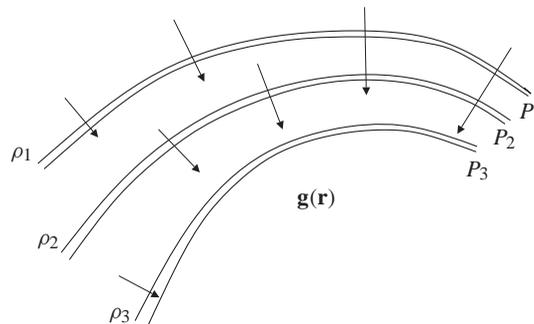
e dall'equazione di equilibrio  $\nabla P / \rho = \mathbf{g}(\mathbf{r})$  segue che, in un campo di forze conservative, ossia tali che  $\nabla \times \mathbf{g}(\mathbf{r}) = 0$ , deve essere soddisfatta la seguente relazione vettoriale





$$\nabla\rho \times \nabla P = 0.$$

Per la definizione di prodotto vettoriale, questa equazione dice che i due campi vettoriali  $\nabla\rho$  e  $\nabla P$  sono paralleli in ogni punto del fluido in equilibrio, oppure che è nullo uno dei due o lo sono entrambi. Escludiamo ovviamente questi ultimi casi banali. Dato che il vettore gradiente di qualunque funzione è sempre perpendicolare alle sue superfici di livello, la condizione  $\nabla\rho \times \nabla P = 0$  equivale a dire che le superfici di livello della densità e della pressione sono le stesse e quindi, essendo  $\nabla P$  parallelo a  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ , anche le superfici di livello della densità sono perpendicolari alla direzione del campo di forze  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  in ogni punto del fluido, come mostrato nella figura 1.5.



**Figura 1.5** In un fluido in quiete in un campo di forze esterne conservative, le superfici di livello della densità e quelle della pressione sono entrambe perpendicolari alle linee del campo e quindi coincidono

Di conseguenza entrambe le funzioni  $\rho = \rho(\mathbf{r})$  e  $P = P(\mathbf{r})$  varieranno solo muovendosi lungo le linee del campo vettoriale  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ . Pertanto esisterà un legame fra queste due variabili e potremo scrivere  $P = P(\rho)$  ovvero  $\rho = \rho(P)$ . L'implicazione di questo risultato è che l'equazione di equilibrio nel campo di forze conservative assume la forma più chiara

$$\frac{\nabla P}{\rho(P)} = \mathbf{g}(\mathbf{r}), \quad \text{se } \nabla \times \mathbf{g}(\mathbf{r}) = 0,$$

che ha una sola variabile incognita,  $P = P(\mathbf{r})$ .

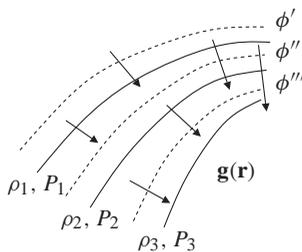
Quando il campo di forze  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  è conservativo, allora esiste un potenziale  $\phi(\mathbf{r})$  che permette di esprimere il campo come gradiente, secondo la nota relazione

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}),$$

e l'equazione di equilibrio diventa

$$\frac{\nabla P}{\rho(P)} = -\nabla\phi(\mathbf{r}).$$

Quindi sulle superfici di livello della densità e della pressione anche il potenziale assume un valore costante, come mostrato nella figura 1.6.



**Figura 1.6** In un fluido in quiete in un campo di forze esterne conservative, le superfici equipotenziali coincidono con le superfici di livello sia della densità sia della pressione

### Approfondimento 1 Integrazione dell'equazione di equilibrio

È interessante notare che l'equazione di equilibrio può essere integrata formalmente in virtù del seguente ragionamento. Vale la seguente identità differenziale

$$\frac{d}{ds} \int^{p(s)} f(q) dq = f(p(s)) \frac{dp(s)}{ds}.$$

Infatti, considerando la funzione primitiva  $F(p)$  di  $f(p)$ , ossia l'integrale indefinito  $F(p) = \int^p f(q) dq$ , risulta

$$\frac{d}{ds} \int^{p(s)} f(q) dq = \frac{d}{ds} F(p(s)) = \frac{dF(p(s))}{dp} \frac{dp(s)}{ds} = f(p(s)) \frac{dp(s)}{ds}.$$





L'identità si generalizza in modo ovvio al caso in cui la variabile scalare  $s$  è sostituita dal vettore posizione  $\mathbf{r}$  e la derivata diventa il gradiente:

$$\nabla \int^{P(\mathbf{r})} f(q) dq = f(P(\mathbf{r})) \nabla P(\mathbf{r}).$$

Se applichiamo questa relazione con la sostituzione  $f(q) \rightarrow \frac{1}{\rho(q)} \rightarrow \frac{1}{\rho(Q)}$ , otteniamo

$$\nabla \int^{P(\mathbf{r})} \frac{dQ}{\rho(Q)} = \frac{1}{\rho(P(\mathbf{r}))} \nabla P(\mathbf{r}) = \frac{\nabla P(\mathbf{r})}{\rho(P(\mathbf{r}))}.$$

In virtù di questa identità, l'equazione di equilibrio del fluido nel campo di forze esterne conservative si integra immediatamente e fornisce:

$$\int^{P(\mathbf{r})} \frac{dQ}{\rho(Q)} + \phi(\mathbf{r}) = \text{costante},$$

dove la costante può essere presa nulla, dato che può essere inglobata in  $\phi$  che è definita a meno di una costante. Se introduciamo la funzione primitiva  $F(P) = \int^P dQ/\rho(Q)$ , allora la relazione precedente dice che

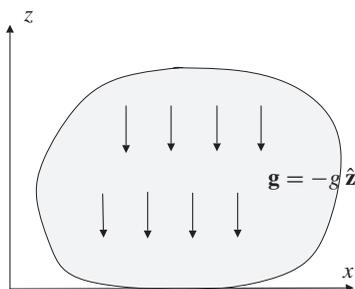
$$F(P(\mathbf{r})) = -\phi(\mathbf{r}) \quad \text{ovvero} \quad P(\mathbf{r}) = F^{-1}(-\phi(\mathbf{r})),$$

dove  $F^{-1}$  indica la funzione inversa di  $F = F(P)$ . Questa relazione fornisce la distribuzione della pressione del fluido in quiete nel campo di forze conservative descritto dal potenziale  $\phi(\mathbf{r})$ . È evidente che le superfici equipotenziali sono anche superfici di livello della pressione: precisamente, alla superficie equipotenziale  $\phi(\mathbf{r}) = C$  corrisponde la superficie isobara  $P(\mathbf{r}) = F^{-1}(-C)$ . In altre parole, abbiamo ricavato il legame diretto fra le due variabili  $P$  e  $\phi$ , che è semplicemente

$$P = P(\phi) = F^{-1}(-\phi).$$

**Osservazione** Le condizioni di equilibrio di un fluido richiederebbero di considerare anche l'equazione di bilancio dell'energia interna del fluido. Infatti, se la temperatura nel fluido è disuniforme esiste un flusso di energia sotto forma di calore fra le particelle del fluido che si trovano a temperature diverse. Questo flusso è governato dalle legge di conservazione dell'energia, la cui versione per un fluido fermo dovrebbe essere inclusa assieme all'equazione di equilibrio che abbiamo qui discusso. In questo primo capitolo preferiamo tuttavia non formulare il problema dell'equilibrio del fluido in modo completo perché l'equazione di bilancio dell'energia, anche nel caso di fluido in quiete, ha una natura matematica che intendiamo affrontare solo più avanti.

## 1.3 Fluido in equilibrio vicino alla superficie terrestre



**Figura 1.7** Campo di gravità uniforme che agisce su un fluido vicino alla superficie della Terra

Consideriamo ora la situazione particolare di un fluido che si trova nel campo di gravitazione della Terra in prossimità della sua superficie. In questo caso, il campo di forza  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  è, con buona approssimazione, un campo uniforme diretto verticalmente verso il basso, come mostrato nella figura 1.7. Il campo assume allora la forma molto semplice  $\mathbf{g} = -g \hat{\mathbf{z}}$ , dove la direzione positiva dell'asse verticale  $z$  è stata presa verso l'alto e dove  $g = 9.81 \text{ N/kg}$  è il valore del **campo di gravità** terrestre al livello del mare. Questo campo uniforme è irrotazionale e può essere espresso in termini dell'energia potenziale gravitazionale  $\phi(\mathbf{r}) = \phi(z) = gz$  per unità di massa, per cui avremo  $\mathbf{g} = -\nabla\phi = -\nabla(gz) = -g \hat{\mathbf{z}}$ . L'equazione di equilibrio del fluido diventa allora

$$\nabla P + \rho g \hat{\mathbf{z}} = 0.$$





Quindi la pressione  $P$  potrà variare solo con  $z$ , ovvero  $P(\mathbf{r}) = P(z)$  e la condizione  $\nabla\rho \times \nabla P = 0$  impone anche alla densità di essere funzione della sola  $z$ , ovvero  $\rho(\mathbf{r}) = \rho(z)$ . Pertanto, l'equazione vettoriale di equilibrio si riduce a una semplice relazione scalare

$$\frac{dP}{dz} + \rho(z)g = 0,$$

in cui la derivata parziale è sostituita dalla derivata ordinaria. Questa equazione differenziale del primo ordine potrà essere integrata per determinare la soluzione  $P(z)$  solo se l'andamento della densità con la quota  $z$  è noto oppure se si può almeno ipotizzare l'esistenza di un legame fra  $\rho$  e la variabile incognita  $P$ .

L'equazione scritta deve comunque essere completata da una opportuna condizione al contorno. Tale condizione determina il valore della costante di integrazione che si incontra nel procedimento di risoluzione, come si vedrà fra un momento.

### Equilibrio di un fluido con densità uniforme

Il caso più semplice di fluido in equilibrio vicino alla superficie terrestre è quello di un liquido la cui densità è indipendente dalla quota, per cui l'equazione scalare di equilibrio si riduce a

$$\frac{dP}{dz} = -\bar{\rho}g,$$

dove  $\bar{\rho}$  rappresenta la densità uniforme del fluido. Ad esempio, possiamo considerare il problema molto importante dell'equilibrio dell'acqua sulla superficie terrestre. L'integrazione dell'equazione precedente è immediata

$$P(z) = P_0 - \int_0^z \bar{\rho}g dz \quad \text{per } z < 0,$$

dove  $P_0$  rappresenta la pressione alla quota  $z = 0$ . L'integrale è ovvio e la relazione diventa

$$P(z) = P_0 - \bar{\rho}gz, \quad \text{per } z < 0,$$

che è nota con il nome di **legge di Stevino**. Quindi la pressione nel fluido che si trova nel campo gravitazionale uniforme vicino alla superficie della Terra assume lo stesso valore in tutti i punti di ogni superficie orizzontale. Questo principio è noto come **legge di Pascal** e costituisce il principio dell'**idrostatica**. In particolare, la superficie libera di un liquido che è in contatto con l'aria deve essere orizzontale.

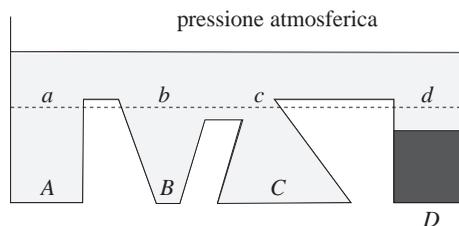
Se consideriamo, ad esempio, una piscina e scegliamo il sistema di riferimento con l'origine sulla superficie libera dell'acqua, il valore di  $P_0$  sarà allora coincidente con quello della pressione atmosferica esterna  $P_{\text{atm}}$  alla quota  $z = 0$ , che vale  $P_{\text{atm}} = 1.0325 \times 10^5$  Pa. Notiamo che, in accordo con l'intuizione e con l'esperienza di chi nuota sott'acqua, scendendo in profondità ( $z < 0$ ) la pressione aumenta rispetto al valore della pressione esterna e tale crescita è *lineare* con la profondità.

In base alla legge di Stevino, la pressione in un fluido in quiete nel campo di gravità dipende solo dalla profondità, qualunque sia la forma del recipiente, a condizione che le varie regioni del fluido siano fra loro comunicanti: è questo il cosiddetto **principio dei vasi comunicanti**. Questo fatto è illustrato nella figura 1.8 che mostra come la pressione ha lo stesso valore in tutti punti  $a, b, c$  e  $d$  che si trovano allo stesso livello, e ha un valore (maggiore) nei punti  $A, B$  e  $C$  che sono sul fondo del recipiente bagnato dal fluido. Invece, dato che il fluido nell'ultimo settore a destra del recipiente è di densità maggiore di quello che riempie il resto del recipiente, la pressione nel punto  $D$  è maggiore di quella negli altri punti sul fondo del recipiente.



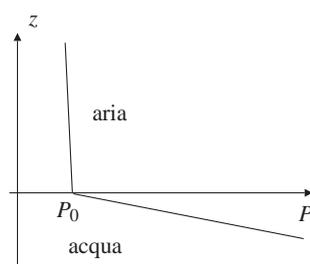


**Figura 1.8** In tutti i punti che sono alla stessa quota di un fluido in quiete, la pressione è uguale. Invece, in fluidi diversi la pressione è differente anche in punti aventi la stessa quota



La relazione che esprime la legge di Stevino può essere estesa facilmente anche nella zona al di sopra della superficie libera del liquido dove è presente l'aria. Se consideriamo una regione sufficientemente bassa da potere ritenere uniforme la densità dell'aria, per  $z > 0$  avremo  $\rho(z) = \bar{\rho}_{\text{aria}}$  e quindi l'integrazione dell'equazione di equilibrio nell'aria conduce alla soluzione:

$$P(z) = \begin{cases} P_0 - \bar{\rho}_{\text{H}_2\text{O}} g z, & z < 0, \\ P_0 - \bar{\rho}_{\text{aria}} g z, & z > 0. \end{cases}$$

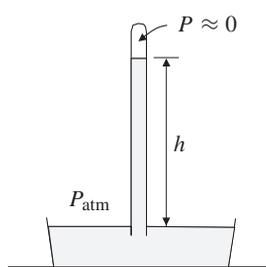


**Figura 1.9** Pressione nell'aria e dentro l'acqua sulla superficie terrestre (qualitativo, non in scala)

L'andamento qualitativo della pressione  $P(z)$  nell'aria e dentro l'acqua vicino alla superficie terrestre è mostrato nella figura 1.9. Nell'aria quindi la pressione diminuisce con la quota ( $z > 0$ ). In base ai valori della densità in condizioni standard  $\bar{\rho}_{\text{H}_2\text{O}} = 998 \text{ kg/m}^3$  e  $\bar{\rho}_{\text{aria}} = 1.2 \text{ kg/m}^3$ , la rapidità di variazione di  $P$  con la quota nell'aria è circa un millesimo di quella nell'acqua.

La soluzione nell'aria basata sull'ipotesi di densità uniforme diventa tuttavia inaccettabile per  $z$  grande in quanto la pressione diventerebbe negativa, il che è impossibile. In realtà, il nostro modello di fluido con densità uniforme non è adeguato a descrivere l'aria su grandi distanze, dell'ordine dei chilometri. Inoltre, anche l'ipotesi di considerare il campo di gravità costante, con il valore di  $g$  preso al livello del mare, deve essere abbandonata se vogliamo studiare l'equilibrio dell'atmosfera attorno alla Terra.

## 1.4 Misura della pressione nei fluidi in quiete



**Figura 1.10** Barometro a colonna di mercurio

Un'applicazione importante della relazione che lega la pressione con la quota e con la densità uniforme del fluido in un campo di forze pure uniforme è quella degli strumenti per la misurazione della pressione basati su colonne di liquido. Il principio di funzionamento su cui si fondano questi strumenti è piuttosto semplice.

Lo strumento più semplice è costituito da un tubo pieno di mercurio, che viene rovesciato in una vaschetta contenente lo stesso liquido, facendo in modo che si formi il vuoto nella parte superiore chiusa del tubo, come mostrato nella figura 1.10. Essendo la tensione di vapore del mercurio a temperatura ambiente molto bassa, si può ritenere nulla la pressione nell'estremità superiore chiusa del tubo per cui l'altezza  $h$  della colonnina di mercurio nel tubo rispetto alla sua superficie libera nella vaschetta permette di misurare la pressione dell'aria  $P_{\text{aria}}$  all'esterno. Questo strumento si basa quindi sul fatto che il valore di una delle due pressioni è nota e gli strumenti di questo tipo sono chiamati **barometri**.

Il legame fra la pressione esterna  $P_{\text{aria}}$  e l'altezza  $h$  della colonnina di mercurio nel barometro è

$$P_{\text{aria}} = \rho_{\text{Hg}} g h.$$

Quando la pressione esterna vale  $P_{\text{aria}} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ , la colonna di mercurio raggiunge un'altezza  $h = P_{\text{aria}} / (\rho_{\text{Hg}} g) = 1.013 \times 10^5 / (13550 \times 9.81) = 0.762 \text{ m}$ .

In relazione all'impiego di questo strumento sono introdotte delle unità di misura delle pressioni che sono molto usate in pratica. Una di queste è l'**atmosfera**, indicata



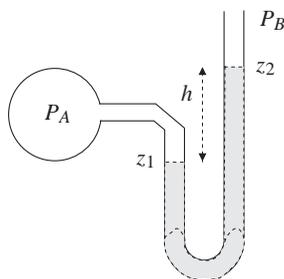


Figura 1.11 Manometro con tubo a U

con atm, che è la pressione media dell'aria al livello del mare e corrisponde al valore  $1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ . Un'altra unità della pressione è il millimetro di mercurio che si indica con **mmHg** ed è uguale alla differenza di pressione pari a un mm di Hg, cioè  $1 \text{ mmHg} = 133 \text{ Pa}$ . Questa unità è detta anche **torr**, in onore di Torricelli che fu l'inventore del barometro. Infine un'ultima unità per le pressioni che si incontra è il **bar**, che è semplicemente una "versione intera" di 1 atm ed è definita da  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ .

Una seconda categoria di strumenti per misurare le pressioni nei fluidi in quiete è costituita da un tubo a forma di U, riempito di un liquido, come mostrato nella figura 1.11. Agli estremi del tubo esistono due pressioni, entrambe sconosciute, di cui si vuole misurare la differenza. Gli strumenti di questo tipo sono chiamati **manometri** e il liquido che si trova al loro interno è detto **liquido manometrico**. Grazie alla legge vista nel paragrafo 1.3, la differenza di pressione  $\Delta P$  misurata alle due superfici libere è pari a

$$\Delta P = \bar{\gamma} \Delta z,$$

dove  $\bar{\gamma}$  è il peso specifico del fluido utilizzato nello strumento mentre  $\Delta z$  è la differenza di altezza fra i due peli liberi. La pressione sarà chiaramente maggiore laddove il pelo libero è più basso e minore in corrispondenza dell'altro pelo libero. Più precisamente, se indichiamo rispettivamente con  $P_1, z_1$  e  $P_2, z_2$  la pressione e la quota in corrispondenza dei due peli liberi, possiamo scrivere che

$$P_2 - P_1 = \bar{\gamma} (z_1 - z_2),$$

da cui

$$P_2 + \bar{\gamma} z_2 = P_1 + \bar{\gamma} z_1.$$

Esistono numerose versioni di questo tipo di strumenti sia in funzione della geometria del tubo, sia del sistema utilizzato per la lettura, sia del liquido manometrico utilizzato. Un esempio importante, per la sensibilità caratteristica dello strumento, è quello del **manometro di Betz**, in cui all'interno di uno dei due rami del tubo a U è presente un galleggiante cui è appesa una scala graduata opportunamente tarata. La lettura viene effettuata attraverso un oculare che ingrandisce la scala graduata permettendo di apprezzare variazioni di altezza dell'ordine dei due decimi di millimetro. Se il liquido manometrico è acqua in condizioni normali, la sensibilità dello strumento è pari a  $\bar{\gamma}_{\text{H}_2\text{O}} \Delta z = 9.81 \times 998 \times 0.0002 = 2 \text{ Pa}$ .

Due sono i difetti principali dei manometri a liquido rispetto ai più diffusi trasduttori di pressione: da una parte la lentezza intrinseca della risposta, dall'altra l'impossibilità di asservirli a un calcolatore digitale.

## 1.5 Equilibrio dell'atmosfera terrestre

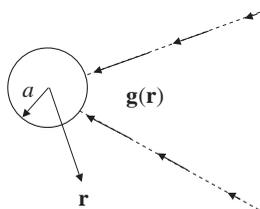


Figura 1.12 Campo di gravità attorno alla Terra

Il campo di gravità della Terra all'esterno della sua superficie, che supporremo per semplicità sferica e di raggio  $a = 6400 \text{ km}$ , deriva dalla celebre **legge di gravitazione universale di Newton** ed è dato dalla relazione

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{ga^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad r > a,$$

dove  $g = 9.81 \text{ N/kg}$  è sempre il campo di gravità sulla superficie della Terra mentre  $\hat{\mathbf{r}}$  rappresenta il versore radiale diretto verso l'esterno.

La condizione di equilibrio di un fluido in questo campo di gravità si scriverà quindi

$$\nabla P + \rho \frac{ga^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = 0.$$





Data la simmetria sferica del campo di forze, è conveniente riscrivere questa relazione in coordinate sferiche, per cui la relazione vettoriale si riduce all'equazione scalare

$$\frac{dP}{dr} + \rho \frac{ga^2}{r^2} = 0,$$

dove entrambe le variabili  $P$  e  $\rho$  dipenderanno solo dalla distanza  $r$  dal centro della Terra. Ricordiamo che il problema studiato è comunque all'esterno della Terra, ossia per  $r > a$ .

La soluzione del problema dell'equilibrio dell'aria dipende inoltre dalla legge con cui varia la temperatura dell'atmosfera con la quota. In una prima approssimazione si può ritenere che la temperatura sia costante mentre una seconda approssimazione, valida in alcuni intervalli di quota limitati, consiste nell'assumere un andamento della temperatura lineare con la quota.

### Atmosfera con temperatura uniforme

Se la temperatura dell'atmosfera può essere considerata uniforme, abbiamo la cosiddetta **atmosfera isoterma**. Supponendo che il comportamento termodinamico del gas costituente l'atmosfera sia descritto in modo adeguato dall'equazione di stato dei gas ideali, avremo

$$Pv = P/\rho = R_{\text{aria}}T,$$

dove  $v$  indica il volume specifico (massa per unità di volume) e  $R_{\text{aria}} = 280 \text{ m}^2/(\text{s}^2\text{K})$  è la costante dei gas perfetti dell'aria. Nel caso di temperatura costante, cioè se  $T = \bar{T}$ , questa legge dei gas fornisce un legame diretto fra le due variabili  $P$  e  $\rho$  per cui potremo ricavare immediatamente  $\rho(P) = P/(R_{\text{aria}}\bar{T})$ . Sostituendo nell'equazione di equilibrio si ottiene

$$\frac{dP}{dr} + \frac{ga^2}{R_{\text{aria}}\bar{T}} \frac{P}{r^2} = 0.$$

La costante  $\frac{ga^2}{R_{\text{aria}}\bar{T}}$  ha necessariamente le dimensioni di una lunghezza e per semplicità conviene indicarla sinteticamente come  $b = \frac{ga^2}{R_{\text{aria}}\bar{T}}$ . L'equazione diventa allora

$$\frac{dP}{dr} = -b \frac{P}{r^2},$$

ed è a variabili separabili, per cui,

$$\frac{dP}{P} = -b \frac{dr}{r^2}.$$

La sua integrazione è immediata e fornisce

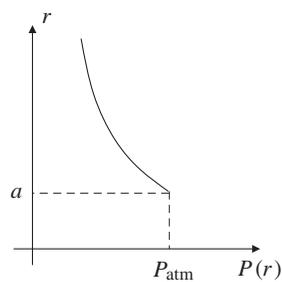
$$(\ln P)|_{P_{\text{atm}}}^P = \frac{b}{r} \Big|_a^r,$$

dove  $P_{\text{atm}}$  indica la pressione atmosferica sulla superficie della Terra. Valutando le funzioni agli estremi si ottiene

$$\ln \frac{P}{P_{\text{atm}}} = \frac{b}{r} - \frac{b}{a},$$

da cui, risolvendo rispetto a  $P$ :

$$P(r) = P_{\text{atm}} e^{\frac{b}{r} - \frac{b}{a}} = P_{\text{atm}} e^{-\frac{b(r-a)}{ar}}, \quad \text{per } r > a.$$



**Figura 1.13** Andamento della pressione nell'atmosfera con temperatura assunta uniforme





Si vede che la pressione decresce dal valore  $P_{\text{atm}}$  sulla superficie terrestre al valore  $P_{\text{atm}} e^{-b/a} = P_{\text{atm}} e^{-ga/R_{\text{aria}}\bar{T}}$  (positivo) per  $r \rightarrow \infty$ , ossia a grande distanza dalla Terra.

Se si considera una regione limitata vicina alla superficie terrestre, allora conviene introdurre la quota  $z = r - a \ll a$ , così che nel denominatore dell'argomento dell'esponenziale si potrà approssimare  $r$  con il raggio  $a$  della Terra. In tal caso risulterà

$$P(z) = P_{\text{atm}} e^{-z/z_s}, \quad \text{per } 0 < z \ll a,$$

dove  $z_s = \frac{a^2}{b} = \frac{R_{\text{aria}}\bar{T}}{g}$  rappresenta la **scala delle altezze** tipiche per cui si hanno variazioni apprezzabili della pressione nell'atmosfera isoterma vicino alla superficie terrestre. La diminuzione esponenziale della pressione nell'atmosfera isoterma con la quota  $z$  è all'origine della denominazione di **atmosfera esponenziale**.

### Atmosfera con temperatura lineare con la quota

Più complicato è l'andamento della pressione nelle zone in cui la temperatura dell'aria varia con la quota. In certe zone dell'atmosfera la temperatura dipende in modo all'incirca *lineare* con la distanza  $r$  dal centro, per cui si può considerare un'approssimazione locale del tipo

$$T(r) = T_1[1 + \alpha(r - r_1)],$$

dove  $T_1$  è il valore della temperatura a una determinata distanza  $r = r_1$  mentre  $\alpha$  è proporzionale al gradiente verticale della temperatura nella zona considerata. Utilizzando allora l'equazione di stato

$$\rho(P, r) = \frac{P}{R_{\text{aria}}T(r)} = \frac{P}{R_{\text{aria}}T_1[1 + \alpha(r - r_1)]},$$

nell'equazione di equilibrio in direzione radiale si ottiene

$$\frac{dP}{dr} = -b_1 \frac{P}{[1 + \alpha(r - r_1)]r^2},$$

dove  $b_1 = ga^2/(R_{\text{aria}}T_1)$ . L'equazione è ancora a variabili separabili per cui

$$\frac{dP}{P} = -b_1 \frac{dr}{[1 + \alpha(r - r_1)]r^2}$$

e l'integrazione dei due membri conduce alla soluzione

$$\ln \frac{P}{P_1} = -b_1 \int_{r_1}^r \frac{dr}{[1 + \alpha(r - r_1)]r^2},$$

dove  $P_1$  è il valore della pressione per  $r = r_1$ . Il calcolo dell'integrale nel secondo membro può essere affrontato ricorrendo alla tecnica di **decomposizione in frazioni parziali** i cui dettagli analitici sono descritti nel prossimo esempio. In ogni caso, risolvendo rispetto a  $P$  si ottiene

$$P(r) = P_1 e^{-b_1 \int_{r_1}^r \frac{dr}{[1 + \alpha(r - r_1)]r^2}}.$$

### Approfondimento 1 Metodo di decomposizione in frazioni parziali

Calcolare l'integrale

$$\int_{r_1}^r \frac{dr}{[1 + \alpha(r - r_1)]r^2}$$

mediante il metodo di decomposizione in frazioni parziali.





**Soluzione** Questo metodo si basa nella riduzione di un rapporto fra polinomi il cui denominatore è almeno di secondo grado, ma fattorizzato in polinomi di grado inferiore, alla somma di frazioni di polinomi con denominatore di grado inferiore. Nel caso considerato, un fattore del denominatore è un quadrato per cui la somma delle frazioni della riduzione deve contenere due termini e sarà del tipo

$$\frac{1}{[1 + \alpha(r - r_1)]r^2} = \frac{A}{1 + \alpha(r - r_1)} + \frac{B}{r} + \frac{C}{r^2},$$

dove  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono delle costanti da determinare in modo che l'uguaglianza precedente sia verificata identicamente. Facendo denominatore comune si ottiene l'equazione

$$Ar^2 + B[1 + \alpha(r - r_1)]r + C[1 + \alpha(r - r_1)] = 1,$$

che si riduce alla seguente forma

$$(A + \alpha B)r^2 + [(1 - \alpha r_1)B + \alpha C]r + (1 - \alpha r_1)C - 1 = 0.$$

Affinché questo polinomio di secondo grado in  $r$  sia identicamente nullo devono essere soddisfatte le seguenti tre equazioni

$$\begin{cases} A + \alpha B = 0 \\ (1 - \alpha r_1)B + \alpha C = 0 \\ (1 - \alpha r_1)C = 1 \end{cases}$$

La soluzione si ottiene facilmente ed è

$$A = \frac{\alpha^2}{(1 - \alpha r_1)^2}, \quad B = -\frac{\alpha}{(1 - \alpha r_1)^2}, \quad C = \frac{1}{1 - \alpha r_1}.$$

Introducendo la costante  $k \equiv \frac{1}{1 - \alpha r_1}$ , la decomposizione ricercata si potrà scrivere

$$\frac{1}{[1 + \alpha(r - r_1)]r^2} = \frac{\alpha^2 k^2}{\frac{1}{k} + \alpha r} - \frac{\alpha k^2}{r} + \frac{k}{r^2},$$

e quindi l'integrale richiesto sarà calcolato come

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^r \frac{dr}{[1 + \alpha(r - r_1)]r^2} &= \int_{r_1}^r \left[ \frac{\alpha^2 k^2}{\frac{1}{k} + \alpha r} - \frac{\alpha k^2}{r} + \frac{k}{r^2} \right] dr \\ &= \alpha k^2 \left[ \ln \left| \frac{1}{k} + \alpha k \right| - \ln r \right] \Big|_{r_1}^r - \frac{k}{r} \Big|_{r_1}^r. \end{aligned}$$

Valutando le funzioni agli estremi si ricava

$$\int_{r_1}^r \frac{dr}{[1 + \alpha(r - r_1)]r^2} = \frac{-\alpha}{(1 - \alpha r_1)^2} \ln \left| \alpha r_1 + (1 - \alpha r_1) \frac{r_1}{r} \right| - \frac{1 - \frac{r_1}{r}}{(1 - \alpha r_1)r_1}.$$

L'andamento della pressione nel tratto di atmosfera in cui la temperatura varia in modo lineare è quindi:

$$P(r) = P_1 \left| \alpha r_1 + (1 - \alpha r_1) \frac{r_1}{r} \right|^{\frac{b_1 \alpha}{(1 - \alpha r_1)^2}} \exp \left[ \frac{b_1 (1 - \frac{r_1}{r})}{(1 - \alpha r_1)r_1} \right].$$





## 1.6 Caratteristiche dell'atmosfera terrestre

Abbiamo fin qui esaminato le proprietà che caratterizzano uno strato di gas perfetto soggetto a un campo gravitazionale come quello terrestre, quando siano soddisfatte certe proprietà sulla distribuzione della temperatura con la quota. Può essere interessante, a questo punto, una breve panoramica sulla struttura dell'**atmosfera** della Terra.

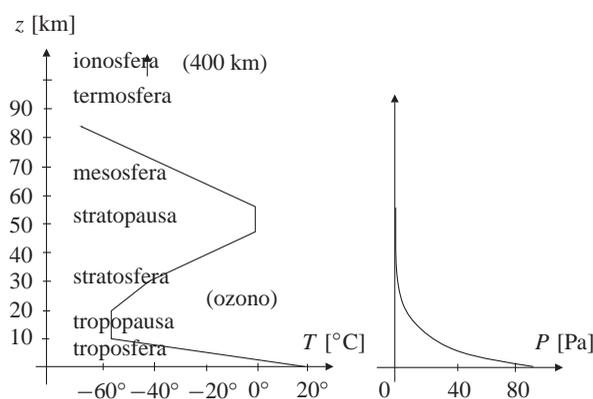
L'atmosfera è quel sottile strato di gas, una miscela composta principalmente di azoto e ossigeno, che circonda la Terra. Lo spessore dell'atmosfera è dell'ordine di 100 km ed è quindi molto piccolo rispetto al diametro della Terra. L'atmosfera non è, come si potrebbe pensare, un tutt'uno omogeneo ma presenta una struttura a strati caratterizzata sia dall'andamento della temperatura sia dalla distribuzione delle varie componenti chimiche presenti alle varie quote.

Lo strato più vicino alla superficie terrestre, quello all'interno del quale avviene la maggior parte dei fenomeni meteorologici, è detto **troposfera**. Essa si estende dal suolo fino a un'altezza di circa 11 km. In questo strato la temperatura ha un andamento approssimativamente lineare e decresce con la quota con un rateo di circa 6.5 K/km.

All'altezza di circa 11 km inizia uno strato caratterizzato da una temperatura all'incirca costante con la quota chiamato **tropopausa**. La temperatura nella tropopausa assume il valore di circa 216 K =  $-57^\circ\text{C}$ .

Per altezze maggiori, la temperatura inizia ad aumentare fino a una quota di circa 50 km. Questo strato è denominato **stratosfera**. A cavallo fra la tropopausa e la stratosfera si trova lo strato di ozono, anche detto **ozonosfera**, una fascia di gas ricca di una molecola composta da tre atomi di ossigeno, detta appunto ozono. L'ozonosfera è importante per la vita e per la salute umana poiché è in grado di schermare la superficie terrestre dai raggi ultravioletti provenienti dal Sole.

**Figura 1.14** Andamento della temperatura (sinistra) e della pressione (destra) nell'atmosfera terrestre in funzione della quota  $z$



Al di sopra della stratosfera abbiamo un sottile strato in cui la temperatura è uniforme, ed è chiamato **stratopausa**. La stratopausa si trova a circa 50 km dal livello del mare. Successivamente la temperatura riprende a diminuire nella **mesosfera** fino a un'altitudine di circa 80 km. La mesosfera è il più freddo degli strati dell'atmosfera. A sua volta è suddivisa in due zone: in quella sottostante la temperatura diminuisce con un rateo di 2.8 K/km, nell'altra con un rateo di 2 K/km. Al di sopra della mesosfera vi è un ulteriore strato di gas in cui la temperatura è approssimativamente costante con la quota, la **mesopausa**. Successivamente la temperatura riprende a salire nella **termosfera**. Se negli strati inferiori dell'atmosfera la concentrazione di azoto e ossigeno è all'incirca costante con la quota, nella termosfera si ha un effetto di stratificazione che rende le concentrazioni non uniformemente distribuite. Occorre aggiungere inoltre che, a causa della forte concentrazione di molecole ionizzate, la parte superiore dell'atmosfera è detta anche **ionosfera**. La struttura dell'atmosfera terrestre è riassunta nella tabella seguente.





Tabella 2. Caratteristiche dell'atmosfera terrestre.

Strato	$z$ [km]	$\frac{dT}{dz}$ [ $\frac{K}{km}$ ]	$T$ [K]
Ionosfera	400		
Termosfera	86	-2.0	180
Mesosfera	71	-2.8	
Stratopausa	51	0	
	47	2.8	271
Stratosfera	32		
(Ozono)	20	1	
Tropopausa	11	0	
Troposfera	0	-6.5	216
	0		288

## 1.7 Forze di galleggiamento: legge di Archimede

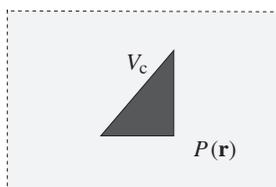


Figura 1.15 Corpo solido di volume  $V_c$  immerso in un fluido in equilibrio

È molto frequente l'esperienza di osservare corpi che galleggiano all'interno di un fluido, si pensi ad esempio a una nave in porto oppure a un palloncino nell'aria. Poiché questi corpi, in quanto dotati di massa, sono soggetti alla forza peso, la loro condizione di equilibrio indica la presenza di un'altra forza che equilibra il peso, detta **forza di galleggiamento**, che è nota anche con il nome di **spinta idrostatica**. È anche esperienza comune il fatto che la spinta idrostatica dipenda dalla natura del fluido in cui è immerso il corpo. Un tronco d'albero galleggia nell'acqua ma non nell'aria, pur essendo il suo peso sempre lo stesso.

Il problema che abbiamo di fronte è quello di determinare l'entità della spinta idrostatica esercitata da un fluido su un corpo immerso, problema cui Archimede diede risposta più di duemila anni fa.

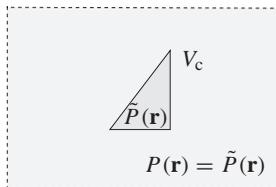
Consideriamo un fluido soggetto alla forza peso per unità di volume, dovuta al campo di gravità, data da  $\rho(\mathbf{r}) \mathbf{g}(\mathbf{r})$ . Supponiamo che nel fluido sia immerso un corpo di volume  $V_c$  e di superficie  $S_c$  e che esso sia in condizioni di equilibrio, come mostrato nella figura 1.15.

Detta allora  $P(\mathbf{r})$  la distribuzione della pressione all'interno del fluido, la forza agente sul corpo sarà data dall'integrale esteso alla superficie chiusa  $S_c$  del corpo, interamente bagnato dal fluido, della forza causata dalla pressione agente su ogni elemento di superficie, ovvero:

$$\mathbf{F}_c^{\text{idro}} = \iint_{S_c} P(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS,$$

dove  $\hat{\mathbf{n}}$  indica il versore normale alla superficie  $S_c$  del corpo, diretto verso il suo interno, e quindi diretto verso l'esterno della regione occupata dal fluido, in accordo con la convenzione standard della direzione verso l'esterno per ogni superficie chiusa che è il contorno di una regione.





**Figura 1.16** Il corpo solido  $V_c$  è tolto dal fluido e il suo posto è riempito da fluido in quiete come in tutta la regione

La distribuzione della pressione all'interno del fluido dipende solamente dalla posizione. In altre parole, in condizioni di equilibrio la pressione non è influenzata dal fatto che nel fluido sia presente il corpo oppure che esso sia tolto e il suo posto sia riempito da una determinata quantità del medesimo fluido supposto ugualmente in equilibrio.

Per risolvere questo problema conviene allora procedere al seguente esperimento concettuale. Supponiamo di sostituire il corpo immerso con un volume uguale di fluido della stessa natura di quello circostante, come mostrato nella figura 1.16. La distribuzione della densità e della pressione nel fluido aggiunto saranno analoghe a quelle del fluido circostante in condizioni di equilibrio per quanto appena detto. Indichiamo con  $\tilde{\rho}(\mathbf{r})$  la densità e con  $\tilde{P}(\mathbf{r})$  la pressione nel fluido in questa configurazione virtuale da noi immaginata. Con essa è stata quindi ripristinata virtualmente la continuità del fluido che era inizialmente violata dalla presenza del corpo. Ovviamente, in ogni punto  $\mathbf{r}$  all'esterno del volume  $V_c$  del corpo risulterà  $\tilde{P}(\mathbf{r}) = P(\mathbf{r})$  e  $\tilde{\rho}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$ .

Nel nostro esperimento immaginario possiamo applicare l'equazione della statica dei fluidi in ogni punto del fluido, anche all'interno della regione  $V_c$  originariamente occupata dal corpo. Possiamo perciò scrivere l'equazione di equilibrio, sia in forma locale

$$-\nabla\tilde{P}(\mathbf{r}) + \tilde{\rho}(\mathbf{r})\mathbf{g}(\mathbf{r}) = 0.$$

sia in forma globale che, nel caso particolare del volume  $V_c$ , sarà data dall'equazione seguente

$$-\iint_{S_c} \tilde{P}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}}_c(\mathbf{r}) dS + \iiint_{V_c} \tilde{\rho}(\mathbf{r}) \mathbf{g}(\mathbf{r}) dV = 0,$$

dove  $\hat{\mathbf{n}}_c(\mathbf{r})$  è il versore normale *uscende* dalla superficie  $S_c$  del corpo.

A questo punto ricordiamo quanto osservato in precedenza, e cioè che la distribuzione di pressione nel fluido in condizioni statiche all'esterno del volume  $V_c$  non dipende dalla presenza o meno del corpo e quindi il suo valore sulla superficie  $S_c$  di  $V_c$  sarà lo stesso nel caso reale e nell'esperimento immaginario in cui è stata ripristinata la continuità del fluido. Avremo pertanto:

$$\mathbf{F}_c^{\text{idro}} = \iint_{S_c} P(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS = \iint_{S_c} \tilde{P}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS = - \iint_{S_c} \tilde{P}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}}_c(\mathbf{r}) dS,$$

essendo ovviamente  $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{n}}_c$ . Ricavando l'integrale di superficie dall'equazione di equilibrio relativa al volume  $V_c$  del fluido virtuale e sostituendo nell'ultima relazione, si ottiene quindi

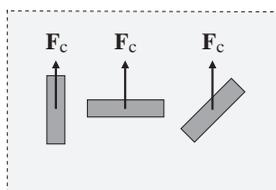
$$\mathbf{F}_c^{\text{idro}} = - \iiint_{V_c} \tilde{\rho}(\mathbf{r}) \mathbf{g}(\mathbf{r}) dV.$$

Pertanto il fluido esercita sul corpo immerso una forza che è *opposta* (e ha lo stesso punto di applicazione) del peso agente su una quantità dello stesso fluido atta a riempire il volume del corpo considerato. Questa legge è nota con il nome di **principio di Archimede**.

Un caso particolarmente importante di questa legge si ha quando la densità del fluido è uniforme, ossia  $\rho(\mathbf{r}) = \bar{\rho}$ , ed è uniforme anche il campo di gravità, come ad esempio il campo di gravità terrestre vicino alla superficie della Terra, di modo che  $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -g \hat{\mathbf{z}}$ . In questo caso risulta

$$\mathbf{F}_c^{\text{idro}} = - \iiint_{V_c} \bar{\rho} (-g \hat{\mathbf{z}}) dV = \bar{\rho} g \iiint_{V_c} dV \hat{\mathbf{z}} = \bar{\rho} V_c g \hat{\mathbf{z}}.$$





**Figura 1.17** La spinta di galleggiamento non dipende dall'orientazione del corpo nel fluido

Se introduciamo la massa di fluido spostata dal corpo di volume  $V_c$ , cioè  $m.f._{V_c} = \bar{\rho} V_c$ , e il peso della massa di fluido spostata dal corpo  $V_c$ , che indichiamo con  $p.m.f._{V_c} = m.f._{V_c} g$ , otteniamo

$$\mathbf{F}_c^{\text{idro}} = p.m.f._{V_c} \hat{\mathbf{z}},$$

dove si deve notare che il verso della spinta idrostatica agente sul corpo è verso l'alto. Quindi, la spinta di Archimede dipende solo dal volume del corpo e non dalla forma né dall'orientazione del corpo nel fluido, come illustrato nella figura accanto.





## CAPITOLO 2

# Equazioni della dinamica dei fluidi

**Introduzione** In questo capitolo si introducono inizialmente i concetti cinematici fondamentali per lo studio del moto dei fluidi. Successivamente, a partire da determinati principi fisici si deducono le leggi fondamentali della dinamica dei fluidi, esprimendole in forma matematica mediante gli strumenti del calcolo differenziale vettoriale.

## 2.1 Rappresentazione del moto di un fluido

Supponiamo che una regione dello spazio tridimensionale sia riempita da un fluido, un liquido o un gas, il quale è in movimento. Tale moto può essere descritto in due modi diversi. Si potrebbe tentare di determinare la posizione  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(a, b, c, t)$  in ogni istante di tempo  $t$  di una “particella” del fluido che si trovava nel punto  $(a, b, c)$  all’istante iniziale  $t = 0$ . Questo è il **punto di vista lagrangiano**. In alternativa, si potrebbe tentare di determinare la velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , la densità  $\rho(\mathbf{r}, t)$  e altre variabili fisiche come la pressione  $P(\mathbf{r}, t)$ , in ogni istante  $t$  e in ogni punto  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  della regione occupata dal fluido. Questo è il **punto di vista euleriano**.

Noi considereremo il secondo metodo e descriveremo pertanto il moto del fluido mediante la funzione (vettoriale)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$$

che fornisce la velocità del fluido in ogni punto  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  della regione.

Il campo della velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  ci dice quindi come si muovono tutte le particelle del fluido in ogni istante. Di solito la determinazione di questo campo è il nostro obiettivo principale, che in generale risulta essere alquanto difficile. Nel sistema di coordinate cartesiane  $xyz$  le componenti della velocità  $\mathbf{u}$  saranno indicate con  $u, v, w$ , ovvero  $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{x}} + v\hat{\mathbf{y}} + w\hat{\mathbf{z}}$ , per cui l’espressione precedente è una forma compatta per rappresentare le tre relazioni seguenti

$$u = u(x, y, z, t), \quad v = v(x, y, z, t), \quad w = w(x, y, z, t).$$

### Correnti di tipo particolare

Esistono alcune classi di correnti con caratteristiche particolari, che sono più semplici del caso generale fin qui considerato.

Una corrente è chiamata **stazionaria** se risulta

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$$

per cui  $\mathbf{u}$  dipende solo da  $\mathbf{r}$ , ovvero

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}).$$

In altre parole, fissato un punto qualsiasi dello spazio, la velocità è costante sia in modulo sia in direzione.

Una corrente è detta **piana** o **bidimensionale** se il campo della velocità è della forma

$$\mathbf{u} = [u(x, y, t), v(x, y, t), 0],$$

ovvero se  $\mathbf{u}$  è indipendente da una coordinata spaziale (qui la coordinata  $z$ ) e non ha componente in quella direzione.

Infine una corrente è **stazionaria e bidimensionale** se è della forma

$$\mathbf{u} = [u(x, y), v(x, y), 0].$$





### Esempio 1 Campo di velocità della rotazione rigida

Come semplice esempio di moto stazionario consideriamo un fluido in moto con una velocità di rotazione angolare costante  $\Omega$  attorno all'asse  $z$ . Se il moto rotatorio è come quello di un solido in rotazione, allora il campo della velocità del fluido rotante con velocità angolare  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{z}}$  sarà

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{u}(x, y) = -\Omega y \hat{\mathbf{x}} + \Omega x \hat{\mathbf{y}}.$$

Siccome la velocità è la stessa in tutti i piani normali all'asse  $z$  e la componente  $z$  della velocità è nulla, il campo  $\mathbf{u}$  può essere considerato come un campo vettoriale piano. Alcuni vettori di questo campo sono mostrati nella figura 2.1.

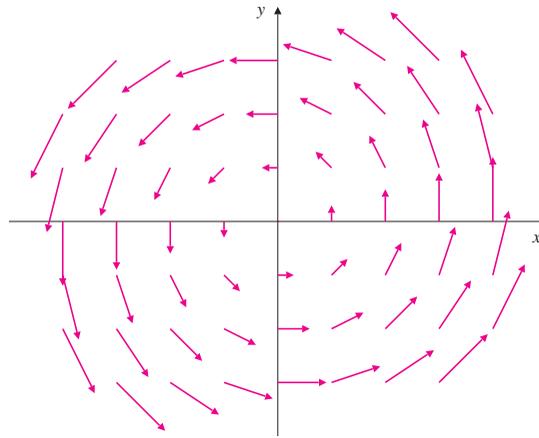


Figura 2.1

Campo della velocità del moto di rotazione rigida attorno all'asse  $z$

Tutti gli esempi mostrati sono idealizzazioni. Nessuna corrente reale può essere esattamente bidimensionale o perfettamente stazionaria. Tuttavia, considerando ad esempio la corrente attorno a un'ala di grande apertura e sezione trasversale uniforme, potremo ritenere che essa sia approssimata in modo adeguato da una corrente bidimensionale attorno alla sezione tranne che in prossimità delle estremità alari.

### Esempio 2 Velocità della rotazione rigida in coordinate cilindriche

A causa della sua “struttura cilindrica” il campo di velocità della rotazione rigida considerato nell'esempio 1 è descritto in modo naturale utilizzando le coordinate cilindriche  $(R, \theta, z)$ , dove  $R$  indica la distanza del punto  $\mathbf{r}$  dall'asse di rotazione  $z$ . In queste coordinate un generico vettore  $\mathbf{v}$  è espresso mediante la relazione

$$\mathbf{v} = v_R \hat{\mathbf{R}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + v_z \hat{\mathbf{z}}.$$

Il campo della velocità della rotazione rigida sarà allora dato da

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u_\theta(\mathbf{r}) \hat{\boldsymbol{\theta}} = u_\theta(R) \hat{\boldsymbol{\theta}} = \Omega R \hat{\boldsymbol{\theta}},$$

dove si deve ricordare che il versore  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  (come pure  $\hat{\mathbf{R}}$ ) non è costante poiché la sua direzione dipende dall'angolo  $\theta$ , ovvero  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta)$ .

### Linee di corrente

Per descrivere le correnti è utile introdurre il concetto di linea di corrente. Una **linea di corrente** di un campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  è una curva avente la stessa direzione del vettore  $\mathbf{u}$  in ogni punto  $\mathbf{r}$  del fluido in un istante di tempo determinato  $t$ . In altre parole, le linee di corrente sono semplicemente le linee del campo vettoriale nel caso particolare del campo di velocità istantaneo  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Allora, dal punto di vista matematico, una linea di corrente  $\mathbf{S}(p) = [X(p), Y(p), Z(p)]$  del campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  può essere ottenuta risolvendo l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{d\mathbf{S}}{dp} = \lambda(p) \mathbf{u}(\mathbf{S}, t)$$





nella funzione incognita  $\mathbf{S}(p)$ , dove  $\lambda(p)$  è una funzione arbitraria la cui forma determina la scelta della parametrizzazione della curva. Questa equazione vettoriale esprime la condizione che la curva  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(p)$  sia parallela in ogni punto al campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Esplicitando le componenti cartesiane, si hanno le seguenti tre equazioni differenziali scalari

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dp} &= \lambda(p) u(X, Y, Z, t), \\ \frac{dY}{dp} &= \lambda(p) v(X, Y, Z, t), \\ \frac{dZ}{dp} &= \lambda(p) w(X, Y, Z, t),\end{aligned}$$

che sono accoppiate fra loro. Una scelta possibile del parametro per descrivere la curva è prendere come variabile indipendente del sistema differenziale una delle tre coordinate, ad esempio  $x$ , supponendo che sia  $u \neq 0$ . In questo modo si può eliminare la funzione arbitraria  $\lambda(p)$  dal problema dividendo fra loro le equazioni e ottenendo il seguente sistema di due equazioni

$$\frac{dY}{dx} = \frac{v(x, Y, Z, t)}{u(x, Y, Z, t)}, \quad \frac{dZ}{dx} = \frac{w(x, Y, Z, t)}{u(x, Y, Z, t)},$$

nelle due incognite  $Y = Y(x)$  e  $Z = Z(x)$ . La risoluzione di questo sistema in un determinato istante  $t$  fornisce le linee di corrente in quell'istante.

Nel caso di campo di velocità stazionario  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$  le linee di corrente non dipendono dal tempo e sono anche chiamate **curve integrali** del campo vettoriale. Esse sono definite dal sistema

$$\frac{d\mathbf{S}}{dp} = \lambda(p) \mathbf{u}(\mathbf{S})$$

che, espanso nelle componenti cartesiane, assume la forma

$$\frac{dX}{dp} = \lambda(p) u(X, Y, Z), \quad \frac{dY}{dp} = \lambda(p) v(X, Y, Z), \quad \frac{dZ}{dp} = \lambda(p) w(X, Y, Z).$$

Nel caso di correnti in due dimensioni con  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = u(x, y, t) \hat{\mathbf{x}} + v(x, y, t) \hat{\mathbf{y}}$  (problemi piani) le linee di corrente sono definite da  $\mathbf{S}(p) = [X(p), Y(p)]$  e si ottengono risolvendo il sistema di due equazioni

$$\frac{dX}{dp} = \lambda(p) u(X, Y, t), \quad \frac{dY}{dp} = \lambda(p) v(X, Y, t).$$

L'eliminazione della funzione arbitraria  $\lambda(p)$  legata alla parametrizzazione conduce a una singola equazione differenziale:

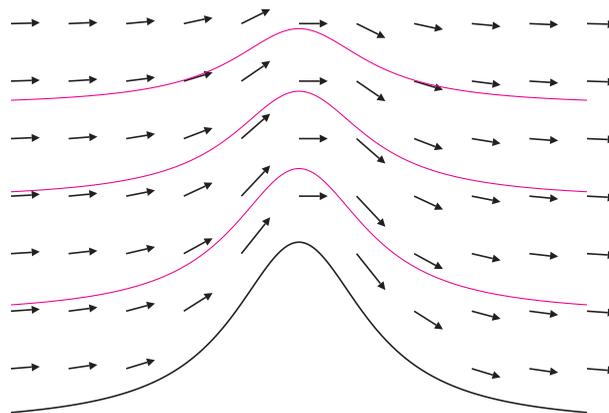
$$\frac{dY}{dx} = \frac{v(x, Y, t)}{u(x, Y, t)}.$$

nella sola funzione incognita  $Y = Y(x)$ . Nel caso di corrente stazionaria  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}) = u(x, y) \hat{\mathbf{x}} + v(x, y) \hat{\mathbf{y}}$  questa equazione si semplifica in

$$\frac{dY}{dx} = \frac{v(x, Y)}{u(x, Y)}.$$

Un esempio delle linee di corrente (di una sezione) del campo di velocità del vento che soffia in modo stazionario sopra una collina è mostrato nella figura 2.2.





**Figura 2.2** Il campo di velocità del vento che soffia sopra una collina

**Esempio 3** Linee di corrente del campo di velocità di rotazione

Determinare le linee del campo di velocità della rotazione rigida  $\mathbf{u} = \Omega(-y \hat{\mathbf{x}} + x \hat{\mathbf{y}})$  dell'esempio 1.

**Soluzione** Le linee del campo soddisfano l'equazione differenziale

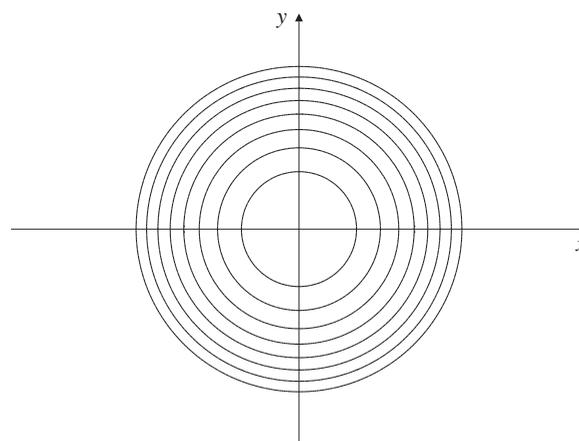
$$\frac{dY}{dx} = \frac{v(x, Y)}{u(x, Y)} = \frac{\Omega x}{-\Omega Y} = -\frac{x}{Y}.$$

Possiamo separare le variabili di questa equazione per ottenere

$$Y dY = -x dx.$$

L'integrazione allora fornisce  $Y^2/2 = -x^2/2 + C$ , ossia  $Y^2 + x^2 = 2C$ . Quindi le linee del campo sono dei cerchi con centro nell'origine nel piano  $xy$ , come si vede chiaramente dal disegno del campo dei vettori nella figura 2.1 e come è mostrato nella figura 2.3. Se si considera  $\mathbf{u}$  come campo vettoriale nello spazio tridimensionale, le linee del campo sono circonferenze nei piani orizzontali con centro sull'asse  $z$ :

$$x^2 + y^2 = C_1, \quad z = C_2.$$



**Figura 2.3** Linee di corrente del campo di moto della rotazione rigida





### Traiettorie

Un modo semplice di seguire le correnti non stazionarie consiste nel marcare una particella del fluido in modo da poterla riconoscere da tutte le altre e seguire poi il suo moto registrando la sua posizione negli istanti successivi. Esistono diversi modi per realizzare la marcatura ma ciò che rende utile questa tecnica è la possibilità di registrare agevolmente la posizione della particella marcata, ad esempio mediante una macchina fotografica o addirittura una videocamera. Dal punto di vista matematico le posizioni successive della particella costituiscono la sua **traiettoria**  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$  che si ottiene risolvendo il seguente problema del moto

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{R}, t),$$

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0,$$

con la velocità della particella data dal campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  del fluido. Nel caso di corrente non stazionaria, le traiettorie delle varie particelle  $p = 1, 2, 3, \dots$  che passano nello stesso punto  $\mathbf{R}_0$  in istanti diversi  $t_1 < t_2 < t_3 \dots$  sono differenti in quanto le funzioni  $\mathbf{R}_p(t)$  corrispondenti soddisfano la medesima equazione differenziale  $d\mathbf{R}_p/dt = \mathbf{u}(\mathbf{R}_p, t)$  ma la loro condizione iniziale è specificata in istanti di tempo diversi:  $\mathbf{R}_1(t_1) = \mathbf{R}_0$ ,  $\mathbf{R}_2(t_2) = \mathbf{R}_0$ ,  $\mathbf{R}_3(t_3) = \mathbf{R}_0, \dots$

Nel caso di corrente stazionaria, l'equazione della traiettoria è soluzione del problema

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{R}),$$

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0,$$

e quindi, fissato il punto di partenza  $\mathbf{R}_0$ , la stessa funzione  $\mathbf{R}(t)$  caratterizza la sola traiettoria passante per  $\mathbf{R}_0$ , indipendentemente dall'istante di tempo iniziale scelto per la sua rappresentazione parametrica. Si noti che la direzione tangente alla curva  $\mathbf{R}(t)$  è parallela alla direzione della velocità in ogni punto, per cui nelle correnti stazionarie le traiettorie coincidono con le linee di corrente.

### Curve di emissione (streakline)

Un terzo modo utile per descrivere il moto dei fluidi consiste nel marcare in istanti di tempo successivi le particelle del fluido che passano per un unico punto fisso  $\mathbf{r}_e$ , chiamato **punto di emissione**. Il rilevamento delle loro diverse posizioni è poi eseguito collettivamente a uno stesso istante di tempo. La descrizione matematica di questo procedimento è la seguente.

Supponiamo di marcare in vari istanti di tempo successivi  $t_1, t_2, \dots, t_k$  le particelle di fluido che passano per uno stesso punto  $\mathbf{r}_e$ . Nel caso di una corrente non stazionaria, le particelle marcate si muoveranno percorrendo ciascuna una traiettoria diversa. Indicando le traiettorie delle varie particelle con le funzioni  $\mathbf{R}_1(t)$ ,  $\mathbf{R}_2(t)$ ,  $\dots$   $\mathbf{R}_k(t)$ , queste saranno soluzione dei seguenti problemi ai valori iniziali

$$\frac{d\mathbf{R}_1}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{R}_1, t), \quad \frac{d\mathbf{R}_2}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{R}_2, t), \quad \dots \quad \frac{d\mathbf{R}_k}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{R}_k, t),$$

$$\mathbf{R}_1(t_1) = \mathbf{r}_e; \quad \mathbf{R}_2(t_2) = \mathbf{r}_e; \quad \dots \quad \mathbf{R}_k(t_k) = \mathbf{r}_e;$$

La **curva di emissione**, chiamata in inglese **streakline**, è la curva formata dalla posizione delle particelle in un determinato istante di tempo  $t > t_k$  che è lo stesso per tutte le particelle. Quindi la curva di emissione all'istante  $t$  è data dall'insieme delle posizioni

$$\{\mathbf{R}_k(t), \mathbf{R}_{k-1}(t), \dots, \mathbf{R}_2(t), \mathbf{R}_1(t)\}$$





Nel caso di correnti stazionarie, le particelle marcate nel punto  $\mathbf{r}_e$  si muoveranno tutte sulla medesima traiettoria. Infatti, indicando sempre con  $\mathbf{R}_1(t)$ ,  $\mathbf{R}_2(t)$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{R}_k(t)$  le traiettorie delle varie particelle marcate nel punto  $\mathbf{r}_e$  negli istanti di tempo successivi, queste funzioni saranno soluzione dei seguenti problemi ai valori iniziali, per  $p = 1, 2, \dots, k$ ,

$$\frac{d\mathbf{R}_p}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{R}_p), \quad \mathbf{R}_p(t_p) = \mathbf{r}_e.$$

Siccome il campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  non dipende dal tempo, tutte le soluzioni possono essere ricavate dalla prima  $\mathbf{R}_1(t)$  mediante un semplice cambiamento dell'origine del tempo e avremo

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2(t) &= \mathbf{R}_1(t - (t_2 - t_1)) \\ \mathbf{R}_3(t) &= \mathbf{R}_1(t - (t_3 - t_1)) \\ &\dots \\ \mathbf{R}_{k-1}(t) &= \mathbf{R}_1(t - (t_{k-1} - t_1)) \\ \mathbf{R}_k(t) &= \mathbf{R}_1(t - (t_k - t_1)) \end{aligned}$$

Di conseguenza la curva di emissione della corrente stazionaria sarà data da

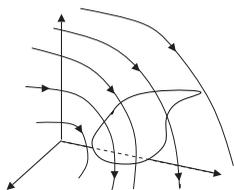
$$\{\mathbf{R}_1(t - (t_k - t_1)), \mathbf{R}_1(t - (t_{k-1} - t_1)), \dots, \mathbf{R}_1(t - (t_3 - t_1)), \mathbf{R}_1(t - (t_2 - t_1)), \mathbf{R}_1(t)\}$$

ovvero

$$\{\mathbf{R}_1((t - t_k) + t_1), \mathbf{R}_1((t - t_{k-1}) + t_1), \dots, \mathbf{R}_1((t - t_3) + t_1), \mathbf{R}_1((t - t_2) + t_1), \mathbf{R}_1(t)\}$$

Queste posizioni sono semplicemente i punti in istanti di tempo successivi della traiettoria passante per  $\mathbf{r}_e$  al tempo  $t_1$ . Pertanto nelle correnti stazionarie le linee di emissione coincidono con le traiettorie e quindi anche con le linee di corrente.

## 2.2 Equazione di conservazione della massa



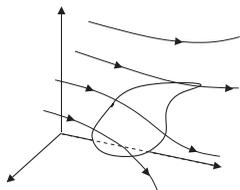
**Figura 2.4** Volume di controllo le linee istantanee di corrente del moto del fluido al tempo  $t$

Mostriamo ora come alcune leggi fisiche fondamentali relative al moto di un fluido possano essere tradotte in equazioni matematiche equivalenti per mezzo del teorema della divergenza. In tutta la nostra analisi supporremo che la velocità  $\mathbf{u}$ , la densità  $\rho$  e la pressione  $P$  siano funzione della posizione  $\mathbf{r}$  e del tempo  $t$ , ovvero,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ , etc., e che dipendano con regolarità da tutte queste variabili. Supporremo che il fluido sia costituito da una sola sostanza caratterizzata da proprietà definite, nel senso che escludiamo dalla nostra analisi miscele di fluidi diversi e fluidi nei quali si possono verificare reazioni chimiche.

Consideriamo una superficie chiusa immaginaria  $S$  dentro il fluido e che delimita una determinata regione  $V$  dello spazio, come mostrato nella figura 2.4. La superficie  $S$  è detta “immaginaria” in quanto non costituisce in nessun modo una barriera al movimento del fluido. Tale superficie è fissa nello spazio e non si muove con il fluido. Il moto del fluido è in generale instazionario per cui il campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t')$  all'istante  $t' > t$ , mostrato nella figura 2.5 sarà in generale diverso da quello all'istante  $t$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , mostrato nella precedente figura 2.4.

La legge di **conservazione della massa** afferma che un fluido non può essere né creato né distrutto da nessuna parte, ovvero che non esistono né sorgenti né pozzi per la massa del fluido. In termini quantitativi tale legge potrà allora essere espressa nel modo seguente: la rapidità di variazione della massa di fluido contenuta nella regione  $V$  è uguale alla rapidità con cui il fluido entra in  $V$  attraverso  $S$ . Per fluido *entrante* intendiamo la quantità *netta* di fluido che entra in  $V$ .





**Figura 2.5** Volume di controllo e andamento delle linee di corrente istantanee in un istante di tempo  $t' \neq t$

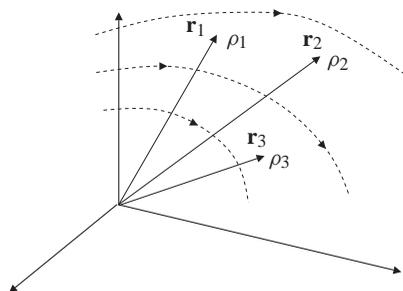
La massa di fluido in un elemento di volume  $dV$  nella posizione  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  al tempo  $t$  è  $\rho(x, y, z, t) dV = \rho(\mathbf{r}, t) dV$ , dove  $\rho$  è la densità (di massa), ovvero la massa per unità di volume. Allora la massa contenuta in  $V$  al tempo  $t$  è data da

$$M_V(t) = \iiint_V \rho(\mathbf{r}, t) dV.$$

Se l'integrale è calcolato in coordinate cartesiane, naturalmente risulta  $\rho(\mathbf{r}, t) dV = \rho(x, y, z, t) dx dy dz$ . L'integrale sul volume  $V$  è un integrale triplo, ma la presenza dei tre simboli per indicare tale integrazione rende l'espressione precedente piuttosto pesante. Può essere quindi conveniente semplificare la notazione utilizzando un solo simbolo di integrazione per cui scriveremo

$$\iiint_V dV \rightarrow \int_V dV.$$

L'integrazione su un volume  $V$  di una funzione di  $\mathbf{r}$  significa scomporre  $V$  in tanti piccoli volumi elementari  $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots$ , posti rispettivamente nei punti  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$ , in ognuno dei quali la densità al tempo  $t$  può avere valor diversi, ad esempio  $\rho_1 = \rho(\mathbf{r}_1, t)$ ,  $\rho_2 = \rho(\mathbf{r}_2, t)$ ,  $\dots$ , come mostrato nella figura 2.6. In altre parole, l'integrale sulla regione  $V$  significa calcolare la somma di tutte le masse elementari  $\rho(\mathbf{r}_1, t)\Delta V_1 + \rho(\mathbf{r}_2, t)\Delta V_2 + \dots$ . Notiamo che solo nel caso particolare di densità uniforme, indipendente dalla posizione (e per semplicità anche dal tempo)  $\rho(\mathbf{r}, t) = \bar{\rho}$ , la funzione integranda  $\bar{\rho}$  può uscire dal segno di integrale e quindi risulta  $M_V = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \bar{\rho} dV = \bar{\rho} V$ , dove  $V$  indica il volume della regione  $V$ .



**Figura 2.6** Corrente di un fluido la cui densità  $\rho(\mathbf{r})$  è non uniforme, ma può dipendere dalla posizione

Introduciamo ora una convenzione per semplificare l'espressione degli integrali che risulterà molto comoda nel seguito, dove dovremo considerare integrali di funzioni alquanto complicate. Stabiliamo di scrivere gli integrali *omettendo l'elemento di integrazione infinitesimo* a condizione di indicare esplicitamente il dominio di integrazione come pedice del simbolo di integrale stesso. Useremo pertanto la ulteriore semplificazione notazionale

$$\int_V dV \rightarrow \int_V.$$

Combinando assieme le due semplificazioni introdotte, avremo allora la riduzione

$$\iiint_V dV \rightarrow \int_V.$$

Ricorrendo a questa notazione semplificata, la massa di fluido contenuta nel dominio  $V$  al tempo  $t$  sarà scritta nella forma sintetica

$$M_V(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t).$$





È importante ricordare che l'eliminazione del volume infinitesimo di integrazione è solo un espediente per scrivere delle espressioni più facilmente leggibili. In ogni caso, siccome il dominio di integrazione  $V$  compare di fianco al simbolo d'integrale, la presenza di  $dV$  a moltiplicare la funzione integranda è comunque sottintesa. Questa presenza sottintesa è ovviamente richiesta per potere garantire anche la correttezza dimensionale della relazione. Ad esempio, il primo membro della relazione precedente è una massa e il secondo membro sembra essere una densità (massa per unità di volume) solo se dimentichiamo che è sottintesa la presenza dell'elemento di volume infinitesimo  $dV$  di fianco alla funzione integranda  $\rho(\mathbf{r}, t)$ .

La massa contenuta nella regione fissa  $V$  considerata cambia con una rapidità che è espressa dalla sua derivata rispetto al tempo, cioè,

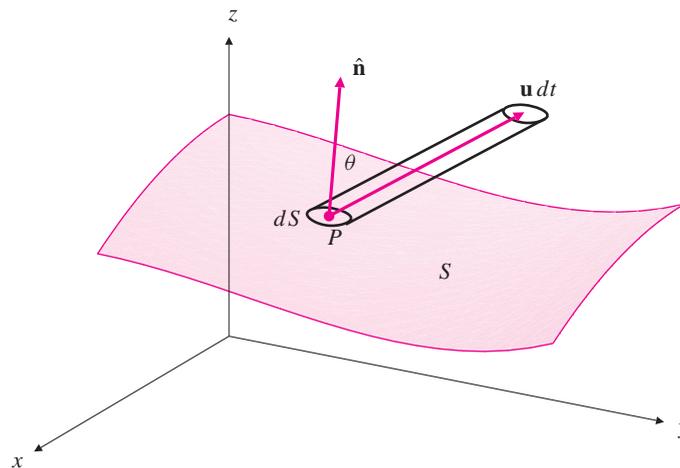
$$\frac{dM_V(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.$$

Si noti che la derivata ordinaria rispetto a  $t$ , passando sotto il segno d'integrale, diventa parziale perché la massa  $M_V(t)$  contenuta nel volume  $V$  è dipende solo dal tempo  $t$ , mentre la funzione integranda  $\rho(\mathbf{r}, t)$  dipende anche dalla posizione  $\mathbf{r}$ .

Il volume netto di fluido *uscende* da  $V$  attraverso l'elemento di area  $dS$ , nella posizione  $\mathbf{r}$ , nell'intervallo di tempo da  $t$  a  $t + dt$ , è dato da

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS dt,$$

dove  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$  è la normale unitaria in  $\mathbf{r}$  su  $S$  *uscende* da  $V$  (vedi figura 2.7).



**Figura 2.7** Il fluido che attraversa  $dS$  nell'intervallo di tempo  $dt$  riempie il volume del tubo disegnato

Di conseguenza la massa che attraversa  $dS$ , andando verso l'esterno, nell'intervallo di tempo considerato è  $\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS dt$  e la *rapidità* con cui la massa esce da  $V$  attraverso  $S$  al tempo  $t$  è

$$\oiint_S \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS.$$

Il cerchio sul simbolo di integrale doppio significa che la superficie  $S$  considerata è **chiusa** nel senso che essa è il contorno di un volume  $V$  finito, ossia contenuto in una regione limitata. Anche il simbolo dell'integrale doppio può essere scritto in modo semplificato utilizzando un solo segno di integrale, ovvero l'integrale su una superficie chiusa può essere indicato anche nel modo più semplice

$$\oiint_S \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS \quad \longrightarrow \quad \oint_S \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS.$$





Infine, sempre per migliorare la leggibilità delle espressioni, proprio come nel caso dell'integrale di volume, si adotta la convenzione di *omettere l'elemento di superficie infinitesimo*  $dS$ , a condizione che la superficie di integrazione  $S$  sia esplicitamente indicata ponendo questo simbolo come pedice dell'integrale, ovvero si adotta la seguente notazione semplificata

$$\iint_S \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS \longrightarrow \oint_S \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS \longrightarrow \oint_S \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}).$$

Ricorrendo a questa notazione, la rapidità con cui la massa esce da  $V$  attraverso  $S$  al tempo  $t$  sarà indicata più semplicemente con

$$\oint_S \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}).$$

La rapidità con cui la massa *entra* in  $V$  è l'opposto della rapidità appena scritta dato che la direzione del vettore  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$  normale a qualunque superficie chiusa  $S$  è, per convenzione, sempre uscente dal volume  $V$  racchiuso da  $S$ .

L'espressione matematica della legge di conservazione della massa relativamente al volume  $V$  è quindi che l'aumento per unità di tempo della massa contenuta in  $V$  deve essere uguale alla massa che nell'unità di tempo entra in  $V$  attraverso la sua frontiera  $S$ , ovvero sia

$$\int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = - \oint_S \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}).$$

Possiamo riscrivere la legge di conservazione della massa in una forma più facile da leggere eliminando le variabili indipendenti  $\mathbf{r}$  e  $t$  dalle funzioni che si integrano, e quindi scriveremo:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

Si dovrebbe comunque essere sempre in grado di ricostruire la presenza delle variabili da cui dipendono le varie funzioni in base agli operatori differenziali presenti nella relazione e ai domini di integrazione indicati.

Utilizziamo ora il teorema della divergenza per sostituire l'integrale di superficie del secondo membro con un integrale di volume:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}).$$

Quindi risulta

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] = 0.$$

Questa equazione deve valere per *qualunque* dominio  $V$  nel fluido.

D'altra parte, come già visto nel capitolo 1 per la forma locale e la forma globale della condizione di equilibrio, se una funzione continua  $f$  soddisfa  $\int_V f(\mathbf{r}) = 0$  per qualunque dominio  $V$ , allora  $f(\mathbf{r}) = 0$  in tutti i punti  $\mathbf{r}$ , in quanto, se esistesse un punto  $\mathbf{r}_0$  tale che  $f(\mathbf{r}_0) \neq 0$ , ad esempio  $f(\mathbf{r}_0) > 0$ , allora, per la continuità della funzione  $f$ , essa sarebbe positiva in tutti i punti appartenenti a un intorno sferico  $I$  con centro in  $\mathbf{r}_0$  sufficientemente piccola ma con raggio positivo, per cui  $\int_I f(\mathbf{r})$  sarebbe maggiore di zero. Applicando questo principio, si deve avere

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

in tutto il fluido. Questa è chiamata **equazione di continuità** del fluido. Essa esprime la conservazione della massa in forma locale ed è valida sempre, per ogni tipo di fluido e di corrente, nell'ipotesi di regolarità delle funzioni  $\rho$  e  $\mathbf{u}$ .





## 2.3 Equazione della quantità di moto

Esaminiamo ora l'equazione che governa il moto del fluido. Essa deriva dall'applicazione della **seconda legge di Newton** a ogni particella di fluido. In questo paragrafo supporremo che il fluido sia *non viscoso*. Tale ipotesi rappresenta solo una prima approssimazione delle proprietà osservate negli esperimenti, per cui avremo un modello matematico semplificato, ossia idealizzato, del reale comportamento del fluido.

La seconda legge di Newton, detta anche **legge fondamentale della dinamica** afferma che in qualunque sistema di riferimento *inerziale* la rapidità di variazione della quantità di moto (chiamata nei testi inglesi *linear momentum* o anche più semplicemente *momentum*) di una particella è uguale alla somma delle forze agenti su di essa. L'applicazione diretta di tale legge a una determinata porzione di fluido in movimento è un po' complicata poiché la sua quantità di moto è data dell'integrale sul volume della particella e questo *si muove* nello spazio: di conseguenza il calcolo della rapidità di variazione della quantità di moto della porzione di fluido considerata richiede di sapere calcolare la derivata di un integrale su un volume in movimento e di forma variabile. Questo argomento sarà affrontato solo nel paragrafo 9.1; in particolare nel paragrafo 9.4 la seconda legge di Newton sarà utilizzata in modo diretto per ricavare l'equazione di moto del fluido.

In questo paragrafo seguiamo un procedimento leggermente diverso considerando invece il fluido contenuto in un volume  $V$  *fisso* nello spazio. In ogni istante  $t$  la quantità di moto del fluido contenuto in  $V$  è

$$\mathbf{Q}_V(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int_V \rho \mathbf{u}.$$

La quantità di moto del fluido contenuto nella regione  $V$  varia con una rapidità

$$\frac{d\mathbf{Q}_V(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}),$$

essendo la regione  $V$  fissa. Siccome il fluido contenuto in  $V$  è costituito da porzioni di fluido sempre diverse, la rapidità di variazione di  $\mathbf{Q}_V(t)$  è causata in parte dalla quantità di moto che entra in  $V$  o esce da  $V$  attraverso la sua superficie  $S$  (la quantità di moto del fluido che attraversa  $S$ ) e in parte da tutte le forze agenti sul fluido contenuto in  $V$ . Queste forze comprendono: le **forze di superficie** agenti sul fluido in  $V$  attraverso la superficie  $S$  le quali, essendo il fluido non viscoso, sono dovute all'azione della sola pressione [le forze dovute alla viscosità del fluido saranno descritte e incluse nei capitoli 5 e 10] e tutte le **forze di volume** esterne (come la forza gravitazionale o quella elettromagnetica) agenti sul fluido. Esaminiamo separatamente ciascuna di queste cause di variazione di  $\mathbf{Q}_V(t)$ .

La quantità di moto entra in  $V$  attraverso  $S$  con una rapidità

$$- \oint_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}).$$

La pressione agente sul fluido contenuto in  $V$  si esercita attraverso  $S$  nella direzione della normale interna  $-\hat{\mathbf{n}}$ . Quindi questa parte della forza agente sul fluido non viscoso contenuto in  $V$  è

$$- \oint_S P \hat{\mathbf{n}}.$$

Le forze di volume dovute a campi esterni (ad esempio il campo di gravità) sono espresse in termini della **forza specifica**  $\mathbf{g}$ , che è la forza per unità di massa. La forza di volume totale agente sul fluido contenuto in  $V$  è pertanto

$$\int_V \rho \mathbf{g}.$$





La seconda legge di Newton implica che

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) = - \oint_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \oint_S P \hat{\mathbf{n}} + \int_V \rho \mathbf{g}.$$

Questa è l'equazione di bilancio della quantità di moto del fluido in forma globale, riferita a una regione geometrica  $V$  fissa. Come per la conservazione della massa, vogliamo ora ricavare la forma locale del bilancio della quantità di moto, per cui è necessario trasformare i due integrali di superficie (doppi) in integrali sul volume  $V$  (tripli). A tale fine, il teorema del gradiente fornisce immediatamente

$$\oint_S P \hat{\mathbf{n}} = \int_V \nabla P.$$

Per quanto riguarda invece l'integrale contenente  $\rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}})$ , non è possibile applicare direttamente il teorema della divergenza come abbiamo fatto per la conservazione della massa, dato che  $\rho \mathbf{u}$  è una quantità vettoriale. Possiamo tuttavia prendere le sue componenti cartesiane e applicare il teorema della divergenza a ciascuna di esse, separatamente. Considerando, ad esempio, la componente  $x$ , ovvero  $\rho u (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}})$ , il teorema della divergenza implica

$$\begin{aligned} \oint_S \rho u (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) &= \int_V \nabla \cdot (\rho u \mathbf{u}) = \int_V \nabla \cdot (u \rho \mathbf{u}) \\ &= \int_V [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla u + u \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})]. \end{aligned}$$

Sommiamo ora vettorialmente le relazioni relative alle tre componenti cartesiane della velocità  $u$ ,  $v$  e  $w$ , e otteniamo

$$\begin{aligned} \oint_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) &= \int_V [(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla u + u \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})) \hat{\mathbf{x}} \\ &\quad + (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla v + v \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})) \hat{\mathbf{y}} \\ &\quad + (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla w + w \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})) \hat{\mathbf{z}}] \\ &= \int_V [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla u \hat{\mathbf{x}} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla v \hat{\mathbf{y}} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla w \hat{\mathbf{z}} \\ &\quad + u \hat{\mathbf{x}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + v \hat{\mathbf{y}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + w \hat{\mathbf{z}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})]. \end{aligned}$$

Abbiamo pertanto

$$\oint_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = \int_V [\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})].$$

La trasformazione dei due integrali di superficie in integrali di volume conduce alla relazione

$$\int_V \left[ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \mathbf{u} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla P - \rho \mathbf{g} \right] = 0.$$

Sviluppando la derivata temporale del prodotto  $\rho \mathbf{u}$  si ottiene

$$\int_V \left[ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla P - \rho \mathbf{g} \right] = 0,$$

che permette di eliminare il secondo e il terzo termine dell'integrando in virtù dell'equazione di continuità, per cui abbiamo

$$\int_V \left[ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla P - \rho \mathbf{g} \right] = 0.$$





Poiché la regione  $V$  è completamente arbitraria, dobbiamo allora avere

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla P = \rho \mathbf{g}.$$

Dividendo questa relazione per  $\rho$  si ottiene infine

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho} = \mathbf{g}.$$

Questa è l'**equazione di moto** di un fluido che si è supposto idealmente non viscoso, ed è detta anche **equazione della quantità di moto**. Si osservi che essa è un'equazione differenziale alle derivate parziali *non lineare*: il termine  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  quadratico in  $\mathbf{u}$  mentre il termine  $(\nabla P)/\rho$  è non lineare a causa della presenza della variabile incognita  $\rho$  nel denominatore.

## 2.4 Sulle ipotesi di incomprimibilità e di viscosità nulla

L'obiettivo principale delle discipline scientifiche è di costruire modelli matematici della realtà. Anche in fluidodinamica, come abbiamo visto nelle pagine precedenti, si introduce un certo numero di versioni approssimate o ridotte delle equazioni che governano il movimento dei fluidi. In particolare, sono state considerate correnti di tipo *incomprimibile*, oppure sono stati considerati moti di fluidi supposti *ideali* nel senso che si è supposto che la loro viscosità e conducibilità termica possano essere trascurate.

Queste due ipotesi di lavoro, da una parte l'incomprimibilità e dall'altra viscosità e conducibilità termica nulle, hanno una natura fondamentale diversa ed è importante comprendere questa differenza per potere utilizzare i corrispondenti modelli matematici entro i loro ristretti domini di validità.

### Fluidi ideali

L'ipotesi di potere trascurare la viscosità del fluido e anche la sua conducibilità termica è normalmente indicata come ipotesi di 'fluido ideale', dal momento che qualunque fluido ha viscosità e conducibilità termica diverse da zero, per quanto piccole, per cui nella realtà non esistono fluidi non viscosi e non conduttori del calore.<sup>1</sup>

L'ipotesi di viscosità e conducibilità termica nulle implica il *trascurare* alcuni termini presenti nelle equazioni di Navier–Stokes complete che governano il moto del fluido reale. Siamo di fronte quindi a una *riduzione* di un modello teorico che è in partenza sufficientemente comprensivo da rappresentare un gran numero di fenomeni che si verificano nei fluidi, sia liquidi sia gassosi. Precisamente, questa riduzione del modello matematico corrisponde alla sostituzione del sistema di equazioni di Navier–Stokes comprimibili introdotte nel paragrafo precedente con le equazioni di Eulero della *gasdinamica* descritte nel paragrafo 2.5.

Come conseguenza dell'omissione di alcuni *termini* delle equazioni costituenti il modello, esso non riuscirà più a descrivere i fenomeni reali in modo completamente soddisfacente. Nel caso considerato, questa inadeguatezza può manifestarsi in *due* maniere differenti: in alcuni casi il modello ridotto risulta fornire dei valori teorici non sufficientemente accurati rispetto ai risultati delle misure sperimentali, mentre in altri casi il modello conduce addirittura a soluzioni completamente sbagliate, cioè in contrasto con i risultati ottenuti in laboratorio.

In ogni modo, la caratteristica saliente dell'ipotesi di fluido ideale consiste nel considerare una situazione *limite*, puramente immaginaria — appunto l'assenza di

<sup>1</sup> Il comportamento superfluido che alcune sostanze allo stato liquido manifestano per temperature vicine allo zero assoluto va oltre gli scopi della presente trattazione.





viscosità — come utile per cogliere alcuni aspetti importanti, seppure parziali, del comportamento dei fluidi reali basandosi su un modello matematicamente più semplice e quindi fisicamente incompleto del comportamento reale del fluido.

Può essere utile ricordare che sfortunatamente l'aggettivo 'ideale' è usato spesso in ambito fluidodinamico anche per contraddistinguere un comportamento termodinamico particolare di un *gas*, appunto quello del *gas ideale* o *perfetto*, associato alla ben nota equazione termodinamica di stato  $Pv = RT$ , con ovvio significato dei simboli. In questo caso, il significato dell'aggettivo 'ideale' non ha alcun rapporto con le proprietà viscosità e di conducibilità termica del gas, che potrà quindi essere trattato come viscoso oppure no, in base a considerazioni di altra natura.

### Correnti incomprimibili

L'ipotesi di incomprimibilità di una corrente corrisponde ad assumere che il suo campo di velocità abbia *divergenza nulla* in ogni punto del fluido (campo vettoriale solenoidale) e in ogni istante e quindi che il moto del fluido sia governato dalle equazioni di Navier–Stokes incomprimibili introdotte nel paragrafo 2.7. D'altra parte, noi sappiamo che il moto del fluido è governato da un sistema chiuso di equazioni, le equazioni di Navier–Stokes complete appena ricordate. Sotto opportune condizioni, questo sistema ammette una soluzione, non necessariamente unica, per cui il campo di moto risulta essere determinato da tali equazioni e la divergenza della velocità sarà, in generale, diversa da zero, ovvero la corrente risulterà non essere incomprimibile.

Supporre che una corrente sia incomprimibile rappresenta pertanto un'assunzione *in più*, per così dire *esterna*, rispetto alle leggi che governano il moto del fluido. Si tratta quindi di una richiesta che costituisce una *violazione* delle leggi generali della dinamica dei fluidi. Di conseguenza, non sarà possibile accettare una tale ipotesi se non al prezzo di rinunciare a qualche elemento costitutivo della teoria stessa. In effetti, la forzata intromissione dell'ipotesi d'incomprimibilità può essere accettata solo a condizione di attribuire un significato *nuovo* alla variabile *pressione*. Nello studio delle correnti incomprimibili questa grandezza viene deprivata della sua ordinaria connotazione termodinamica, propria delle equazioni complete delle correnti comprimibili, e assume il ruolo, e quindi anche il significato, di semplice grado di libertà messo a disposizione per potere soddisfare il vincolo d'incomprimibilità. Da questo punto di vista, l'ipotesi d'incomprimibilità della corrente rappresenta un'autentica *violazione* dei principi termodinamici perché li estromette del tutto dallo studio del moto del fluido supposto incomprimibile. Possiamo allora dire che nessuna corrente *reale* potrà mai essere incomprimibile e qualunque corrente incomprimibile è inevitabilmente *irreale*.

L'approssimazione di corrente incomprimibile è certamente 'irrealistica'. Infatti, il nuovo modello matematico è privato di alcune equazioni e la variabile pressione che compare in esso deve essere *reinterpretata* in senso non termodinamico. Nonostante questo, il modello incomprimibile ha un notevole interesse pratico, poiché è in grado di descrivere in modo sufficientemente accurato un gran numero di fenomeni fluidodinamici, seppure nell'ambito ristretto delle correnti a numero di Mach molto minorie di 1. Questo significa che esiste un'ampia categoria di fenomeni fluidodinamici nei quali le proprietà termodinamiche del fluido non entrano in gioco in maniera determinante, per cui esse possono essere ignorate senza pregiudicare la correttezza della descrizione teorica dei fenomeni, se non in modo marginale.

In conclusione, la caratteristica saliente dell'ipotesi di corrente incomprimibile consiste nell'immaginare una situazione fisicamente *impossibile* — appunto l'incomprimibilità — come utile per cogliere alcuni fenomeni fluidodinamici, basandosi su un modello esterno al sistema di equazioni complete che descrivono il comportamento effettivo dei fluidi reali.





## CAPITOLO 3

# Correnti incomprimibili non viscose

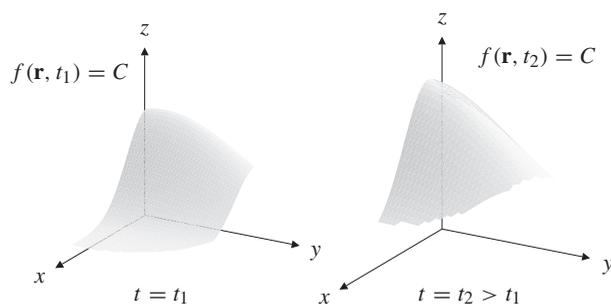
**Introduzione** In questo capitolo studieremo le equazioni che governano le correnti incomprimibili, supponendo di potere trascurare gli effetti causati dalla viscosità del fluido. Perciò, laddove si parlerà per concisione di “fluido non viscoso” si deve intendere una corrente in cui gli effetti della viscosità sono trascurabili. Dopo avere alcuni concetti preliminari riguardanti i campi di velocità variabili nel tempo, ricaveremo le equazioni di Eulero incomprimibili seguendo un procedimento diverso da quello adottato nel paragrafo 2.5. Infatti, supporremo fin dall’inizio che la corrente sia incomprimibile e che la densità del fluido sia uniforme. Applicheremo poi la legge fondamentale della dinamica alle particelle del fluido nella corrente considerata. Per seguire il nuovo procedimento è necessaria l’espressione dell’accelerazione delle particelle del fluido e quest’ultima può essere ricavata a partire dal concetto di rapidità di variazione seguendo il moto del fluido.

Dopo avere riottenuto le equazioni di Eulero che governano le correnti incomprimibili del fluido supposto non viscoso, introdurremo le condizioni supplementari, iniziali e al contorno, per formulare un problema matematicamente completo, da cui è possibile partire per risolvere le equazioni di moto dei fluidi. Analizzeremo poi il caso di correnti stazionarie per ricavare il teorema di Bernoulli, considerando le sue due versioni valide per correnti rotazionali e irrotazionali.

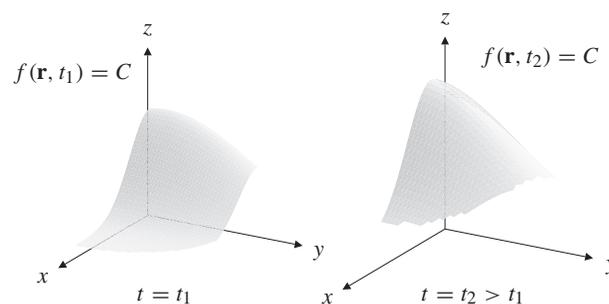
Nell’ultima parte del capitolo, si introducono alcune variabili utili per la descrizione del moto dei fluidi. In particolare, si definisce la vorticità per le correnti in due e tre dimensioni e si introduce la funzione di corrente che permette di rappresentare il campo della velocità nelle correnti incomprimibili piane. In termini di queste due nuove variabili è possibile riformulare le equazioni di Eulero incomprimibili in due dimensioni come un sistema di due sole equazioni con due incognite scalari nel quale non compare più il vincolo di incomprimibilità.

## 3.1 Rapidità di variazione “segundo il fluido”

Sia  $f(\mathbf{r}, t)$  una proprietà riguardante un fluido in movimento. Ad esempio  $f$  potrebbe essere la densità  $\rho$  o la pressione  $P$  del fluido oppure una componente cartesiana della sua velocità  $\mathbf{u}$ . Al variare del tempo, in ogni punto  $\mathbf{r}$  fissato il valore della grandezza  $f$  cambia, ossia  $f$  assumerà valori in generali diversi, come illustrato dalla superficie di livello  $f(\mathbf{r}, t) = C$  in per due istanti successivi  $t = t_1$  e  $t = t_2$  nelle figure 3.1–3.2.

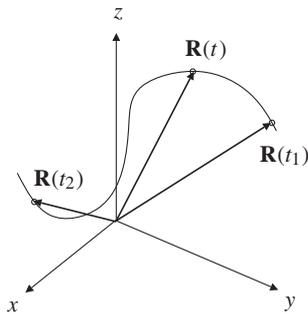


**Figura 3.1** Superficie di livello  $f(\mathbf{r}, t) = C$  a un istante  $t_1$  determinato



**Figura 3.2** Superficie di livello  $f(\mathbf{r}, t) = C$  a un istante successivo  $t_2 > t_1$





**Figura 3.3** Traiettorie di un punto che si muove nello spazio secondo una legge del moto  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$  assegnata

La derivata parziale  $\partial f / \partial t$  rappresenta la rapidità di variazione di  $f$  in un punto fissato  $\mathbf{r}$ , cioè in una determinata posizione dello spazio.

Consideriamo ora un corpo di dimensioni molto piccole, idealmente un punto materiale, immerso nel fluido, che si muove dentro di esso (senza perturbarne in alcun modo il campo di velocità) in base a una legge del moto assegnata, ad esempio,  $\mathbf{R}(t) = [X(t), Y(t), Z(t)]$ , come mostrato in figura 3.3. Le tre funzioni  $X(t)$ ,  $Y(t)$  e  $Z(t)$  sono note e il moto di tale corpo non è in alcun modo legato a quello del fluido circostante. Come esempio possiamo immaginare che il corpo sia un insetto che vola liberamente nell'aria, la quale si muove a sua volta come descritto dal campo di velocità  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

Se si vuole determinare come varia la grandezza  $f$  per un osservatore solidale con il corpo (nell'esempio considerato, l'insetto) occorre introdurre la funzione **composta** (funzione di funzione)

$$F(t) \equiv f(\mathbf{R}(t), t).$$

Questa (nuova) funzione di una sola variabile descrive come varia la grandezza  $f$  per l'osservatore in moto. La rapidità di variazione di  $f$  percepita dall'osservatore sarà allora data dalla derivata della funzione  $F(t)$

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{df(\mathbf{R}(t), t)}{dt}.$$

La derivata (ordinaria) può essere calcolata mediante la regola di derivazione delle funzioni composte che fornisce

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} &= \frac{df(\mathbf{R}(t), t)}{dt} = \frac{df(X(t), Y(t), Z(t), t)}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dX(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dY(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dZ(t)}{dt} \\ &= \frac{\partial f(\mathbf{R}(t), t)}{\partial t} + [\nabla f(\mathbf{R}(t), t)] \cdot \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt}, \end{aligned}$$

dove nella seconda riga della formula  $f$  è un'abbreviazione di  $f(X(t), Y(t), Z(t), t)$ . Introducendo la velocità istantanea della particella

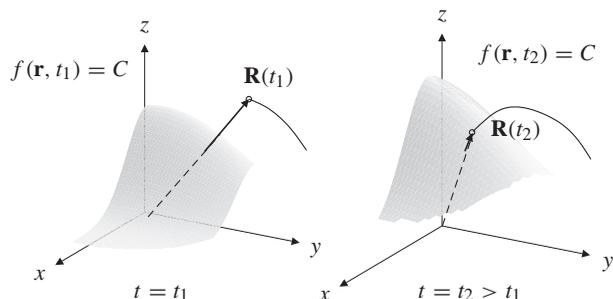
$$\mathbf{V}(t) \equiv \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt},$$

e sfruttando la simmetria del prodotto scalare, la rapidità di variazione considerata si scrive anche come

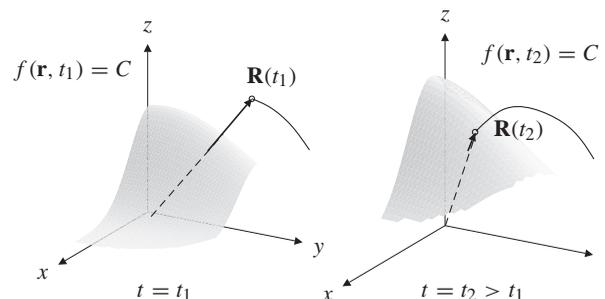
$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{\partial f(\mathbf{R}(t), t)}{\partial t} + \mathbf{V}(t) \cdot \nabla f(\mathbf{R}(t), t).$$

I due termini del membro di destra rappresentano la rapidità di variazione di  $f$  percepita dall'osservatore in conseguenza, rispettivamente, della variazione temporale del campo scalare  $f(\mathbf{r}, t)$  nel punto  $\mathbf{r}$  e del movimento proprio dell'osservatore, che ha la velocità  $\mathbf{V}(t)$  all'istante  $t$ . L'effetto complessivo di queste due variazioni è illustrato nelle figure 3.4–3.5.





**Figura 3.4** La variazione nel tempo di  $f$  percepita da un osservatore in moto  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$



**Figura 3.5** La variazione di  $f$  dipende sia dal moto dell'osservatore sia dal cambiamento della superficie di livello

Consideriamo ora un osservatore che si muove con la *stessa* velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  del fluido nel punto  $\mathbf{r}$ . In questo caso, potremo interpretare la somma dei due termini

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla f(\mathbf{r}, t)$$

come la **rapidità di variazione di  $f$  “seguendo il fluido”** nel punto  $\mathbf{r}$  all'istante  $t$ . Questo argomento mostra l'opportunità di definire il seguente operatore differenziale *composito*

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla,$$

mediante il quale intenderemo, per definizione,

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f.$$

L'espressione

$$\frac{Df(\mathbf{r}, t)}{Dt}$$

è talvolta chiamata **“derivata” materiale** o anche **“derivata” sostanziale**. Si tratta di una denominazione impropria, in quanto l'operatore  $\frac{D}{Dt}$  non è affatto una derivata. Infatti le derivate possono essere di due tipi: ordinarie o parziali. Il simbolo  $\frac{D}{Dt}$  rappresenta solo una *combinazione* di due derivate parziali, una rispetto al tempo e l'altra rispetto allo spazio. Quest'ultima è *proporzionale* alla **derivata direzionale** nella direzione della velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ; infatti, come noto, la derivata direzionale è definita in relazione a un versore  $\hat{\mathbf{v}}$  tramite l'espressione  $\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla$ , mentre in  $\mathbf{u} \cdot \nabla$  compare il vettore velocità, che non è un versore.

Come vedremo, l'operatore  $\frac{D}{Dt}$  permette di scrivere in modo leggermente più compatto alcune equazioni della dinamica dei fluidi. Tuttavia questo operatore sottintende sempre la presenza di un campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , in assenza del quale esso è privo di significato. In altre parole, una notazione più corretta richiederebbe di precisare il campo della velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  e potrebbe quindi essere la seguente

$$\frac{D_{\mathbf{u}}}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla.$$





In virtù della sua definizione, l'operatore  $\frac{D}{Dt}$  risulta comodo nei casi in cui una grandezza fisica relativa a una proprietà del fluido in movimento, indicata ad esempio con  $f$ , rimanga costante *per un determinato elemento di fluido*. Quando ciò accade, la funzione  $f(\mathbf{r}, t)$  soddisfa l'equazione

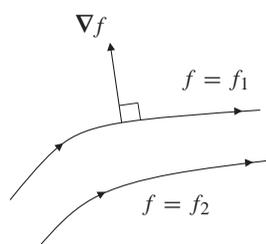
$$\frac{Df}{Dt} = 0.$$

Questa equazione significa solo che il valore di  $f$  relativo a ciascun elemento di fluido rimane sempre lo stesso, mentre elementi differenti del fluido possono comunque avere valori differenti di  $f$ .

Un caso particolare del mantenimento dello stesso valore di una proprietà del fluido da parte delle sue particelle si ha quando la corrente è stazionaria. In questo caso risulterà ovviamente  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$  come pure  $f = f(\mathbf{r})$ , per cui  $\partial f / \partial t = 0$ . In questo caso, l'equazione  $\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0$ , che esprime la costanza di  $f$  per ogni particella del fluido, diventa la seguente equazione stazionaria

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot \nabla f(\mathbf{r}) = 0.$$

Siccome il membro di sinistra è proporzionale alla derivata direzionale, il suo annullamento significa che  $f$  non varia lungo tutta la linea di corrente passante per  $\mathbf{r}$ . Quindi, se la grandezza  $f$  soddisfa l'equazione appena scritta, tutte le particelle di fluido relative a una linea di corrente del moto stazionario hanno lo stesso valore di  $f$ .



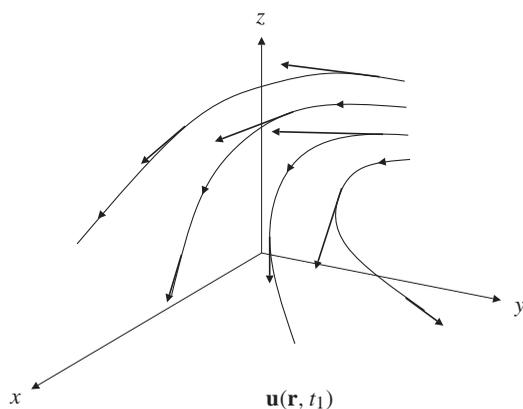
**Figura 3.6** Quando  $\mathbf{u} \cdot \nabla f = 0$  la grandezza  $f$  ha lo stesso valore in tutti i punti di ogni linea di corrente, ma su linee di corrente differenti  $f$  assume valori in generale diversi,  $f_1 \neq f_2$

**Osservazione** L'equazione  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot \nabla f(\mathbf{r}) = 0$  non comporta che tutte le linee di corrente debbano avere lo stesso valore di  $f$  e in generale  $f$  avrà valori differenti su linee di corrente differenti. Supponiamo, ad esempio, che la corrente sia in direzione  $x$  ovunque per cui l'equazione precedente diventa  $u \partial f / \partial x = 0$ , per cui, se  $u \neq 0$ , deve essere  $\partial f / \partial x = 0$ . Questa equazione dice che  $f$  è indipendente da  $x$  ma non dà alcuna indicazione su come  $f$  possa dipendere da  $y$  o  $z$  o da entrambi.

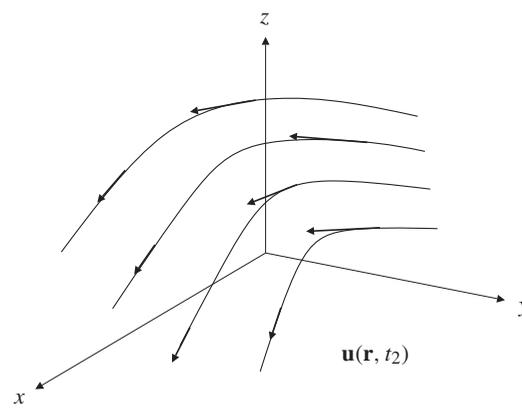
### Accelerazione del fluido

Il concetto di rapidità di variazione seguendo il fluido può essere applicato anche alla velocità stessa del fluido per definire l'accelerazione delle sue particelle in moto qualsiasi. Consideriamo una corrente di un fluido che a un certo istante  $t$  è rappresentata dal campo di velocità  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  mostrato in figura 3.7. Notiamo che le curve disegnate sono le linee di corrente *istantanee* e non devono essere confuse con le traiettorie percorse dalle particelle del fluido, tranne nel caso particolare di corrente stazionaria.

In generale, se la corrente è instazionaria, in un istante di tempo  $t_2$  successivo a  $t_1$  il campo di moto sarà diverso, come mostrato, ad esempio, nella figura 3.8. Ovverosia, fissato un punto  $\mathbf{r}$  qualunque, la velocità in quel punto al tempo  $t_2$  sarà in generale diversa dalla velocità nello stesso punto al tempo  $t_1$ , sia in direzione sia in modulo, cioè  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t_2) \neq \mathbf{u}(\mathbf{r}, t_1)$ .



**Figura 3.7** Campo di velocità a un istante  $t_1$



**Figura 3.8** Campo di velocità a un istante  $t_2 > t_1$





Applichiamo ora la definizione di rapidità di variazione della funzione  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f$$

a ciascuna delle componenti cartesiane del vettore velocità, che indichiamo con  $u$ ,  $v$  e  $w$ , ossia  $\mathbf{u} = u \hat{\mathbf{x}} + v \hat{\mathbf{y}} + w \hat{\mathbf{z}}$ . Ad esempio possiamo considerare la rapidità con cui varia la componente  $x$  della velocità, cioè  $u$ , seguendo il fluido, che sarà data da

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u,$$

e analogamente per le altre due componenti  $v$  e  $w$ :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w.$$

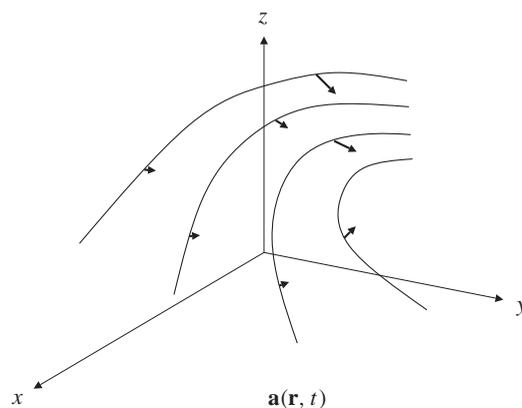
Sommando vettorialmente le tre espressioni si ottiene l'espressione vettoriale

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

che rappresenta la rapidità di variazione del vettore velocità  $\mathbf{u}$  seguendo la particella di fluido, ovvero sia l'**accelerazione** del fluido nel punto  $\mathbf{r}$  e all'istante  $t$ . Scriveremo quindi

$$\mathbf{a} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

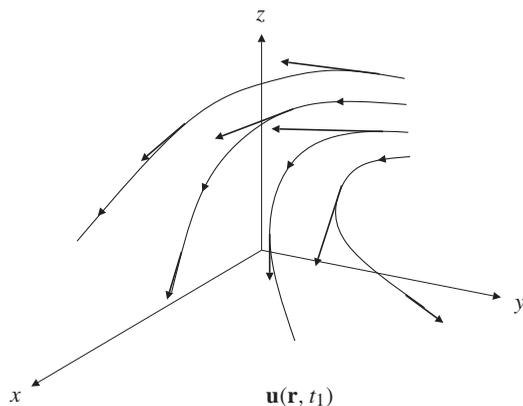
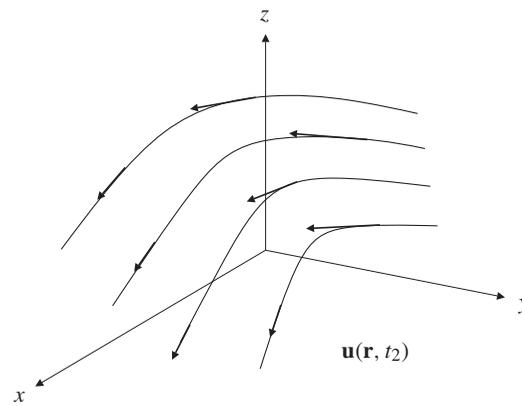
L'accelerazione  $\mathbf{a}$  definita da questa espressione rappresenta quindi un campo vettoriale, ovvero  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ , proprio come accade per la velocità  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . La figura 3.9 mostra il campo dell'accelerazione del fluido relativo al moto del fluido rappresentato nelle figure 3.7–3.8.



**Figura 3.9**  
Campo di accelerazione istantaneo

Naturalmente il campo di accelerazione non può essere stabilito in base all'andamento del solo campo di velocità istantaneo, tranne nel caso particolare di corrente stazionaria. Infatti, nella definizione di  $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$  è presente il contributo della derivata parziale  $\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) / \partial t$ , che rappresenta la rapidità di variazione della velocità in un punto fisso. Se, ad esempio, nell'istante di tempo  $t = t_1$  il campo di velocità è lo stesso della figura 3.7, ma nell'istante  $t = t_2$  il campo di velocità è quello mostrato nella figura 3.11, differente da quello considerato nella precedente figura 3.8, l'accelerazione all'istante  $t_2$  sarà diversa dal caso precedente.



Figura 3.10 Campo di velocità a un istante  $t_1$ Figura 3.11 Campo di velocità a un istante  $t_2 > t_1$ 

Al contrario, nel caso di correnti stazionarie il campo dell'accelerazione del fluido è determinato dalla sola derivata spaziale del campo di moto ed è dato semplicemente da

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = (\mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot \nabla)\mathbf{u}(\mathbf{r}), \quad \text{corrente stazionaria.}$$

### Esempio 1 Accelerazione del campo di velocità della rotazione rigida

Come semplice verifica della relazione dell'accelerazione appena ottenuta consideriamo un fluido in moto con la velocità di rotazione rigida e velocità angolare costante,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = -\Omega y \hat{\mathbf{x}} + \Omega x \hat{\mathbf{y}},$$

studiato negli esempi 1 e 2 del paragrafo 2.1.

In questo caso il campo  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  è stazionario e quindi  $\partial\mathbf{u}/\partial t = 0$ , per cui risulta

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= \left( -\Omega y \frac{\partial}{\partial x} + \Omega x \frac{\partial}{\partial y} \right) (-\Omega y, \Omega x, 0) \\ &= -\Omega^2(x, y, 0) = -\Omega^2 \mathbf{r}_\perp, \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{r}_\perp$  rappresenta il componente del vettore posizione  $\mathbf{r}$  normale all'asse  $z$ , ovvero

$$\mathbf{r}_\perp = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}}.$$

Questo è proprio quanto ci attendevamo: il vettore  $-\Omega^2 \mathbf{r}_\perp$ , o meglio il campo vettoriale

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = -\Omega^2 \mathbf{r}_\perp,$$

rappresenta la ben nota accelerazione centripeta, che in modulo vale  $\Omega^2 r_\perp$  ed è diretta verso l'asse di rotazione  $z$ .





### Esempio 2 Accelerazione della rotazione rigida in coordinate cilindriche

Il termine  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  può essere calcolato anche partendo dal campo di velocità della rotazione rigida espresso in coordinate cilindriche:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \Omega R \hat{\boldsymbol{\theta}},$$

e ricorrendo all'operatore  $\nabla$  espresso nelle stesse coordinate:

$$\nabla = \hat{\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial R} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Risulta

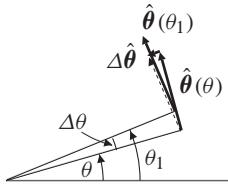
$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = u_{\theta}(R) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_{\theta}(R) \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta)) = \frac{[u_{\theta}(R)]^2}{R} \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta)}{d\theta}.$$

Ricordando ora la ben nota proprietà

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta)}{d\theta} = -\hat{\mathbf{R}}(\theta)$$

del versore  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta)$  variabile ma tale che  $|\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta)| = 1$ , si ottiene

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{[\Omega R]^2}{R} \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta)}{d\theta} = -\Omega^2 R \hat{\mathbf{R}}(\theta).$$



**Figura 3.12** Ad illustrazione della derivata  $d\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta)/d\theta = -\hat{\mathbf{R}}(\theta)$ : notare che  $|\Delta\hat{\boldsymbol{\theta}}| = \Delta\theta$ , per cui  $|d\hat{\boldsymbol{\theta}}/d\theta| = 1$

Quindi si è ottenuta la stessa accelerazione centripeta calcolata mediante le coordinate cartesiane nell'esempio precedente.

### Esempio 3 Accelerazione in coordinate cartesiane

Le componenti cartesiane del vettore accelerazione  $\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{x}} + a_y \hat{\mathbf{y}} + a_z \hat{\mathbf{z}}$  delle particelle di fluido sono date dalle relazioni

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u$$

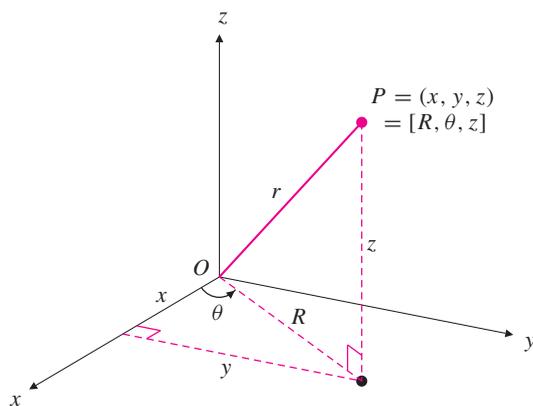
$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w$$

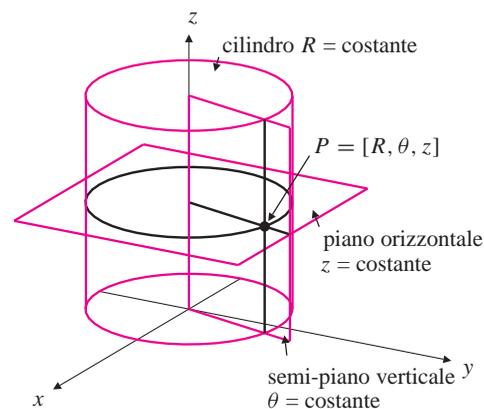
dove l'operatore di advezione scalare in coordinate cartesiane è definito da

$$\mathbf{u} \cdot \nabla u = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}.$$





**Figura 3.13**  
Coordinate cilindriche di un punto



**Figura 3.14**  
Superfici coordinate delle coordinate cilindriche

### Approfondimento 1 Accelerazione in coordinate cilindriche

Il vettore accelerazione delle particelle del fluido

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

espresso nelle sue componenti in coordinate cilindriche (vedi figure 3.13–3.14)

$$\mathbf{a} = a_R \hat{\mathbf{R}} + a_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + a_z \hat{\mathbf{z}},$$

può essere calcolato ricordando l'espressione del termine di advezione vettoriale sempre in coordinate cilindriche

$$(\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \left[ \mathbf{c} \cdot \nabla u_R - \frac{c_\theta u_\theta}{R} \right] \hat{\mathbf{R}} + \left[ \mathbf{c} \cdot \nabla u_\theta + \frac{c_\theta u_R}{R} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + [\mathbf{c} \cdot \nabla u_z] \hat{\mathbf{z}}.$$

Sostituendo in essa l'operatore di advezione scalare

$$\mathbf{c} \cdot \nabla f = c_R \frac{\partial f}{\partial R} + \frac{c_\theta}{R} \frac{\partial f}{\partial \theta} + c_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{u} = & \left[ c_R \frac{\partial u_R}{\partial R} + \frac{c_\theta}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} + c_z \frac{\partial u_R}{\partial z} - \frac{c_\theta u_\theta}{R} \right] \hat{\mathbf{R}} \\ & + \left[ c_R \frac{\partial u_\theta}{\partial R} + \frac{c_\theta}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + c_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{c_\theta u_R}{R} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ & + \left[ c_R \frac{\partial u_z}{\partial R} + \frac{c_\theta}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + c_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned}$$

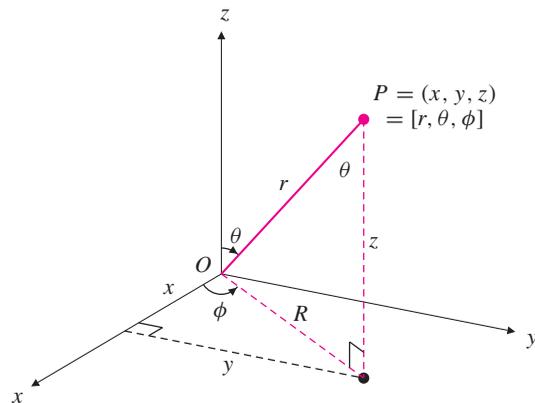
ovverosia, riordinando alcuni termini,

$$\begin{aligned} (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{u} = & \left[ c_R \frac{\partial u_R}{\partial R} + \frac{c_\theta}{R} \left( \frac{\partial u_R}{\partial \theta} - u_\theta \right) + c_z \frac{\partial u_R}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{R}} \\ & + \left[ c_R \frac{\partial u_\theta}{\partial R} + \frac{c_\theta}{R} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_R \right) + c_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ & + \left[ c_R \frac{\partial u_z}{\partial R} + \frac{c_\theta}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + c_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

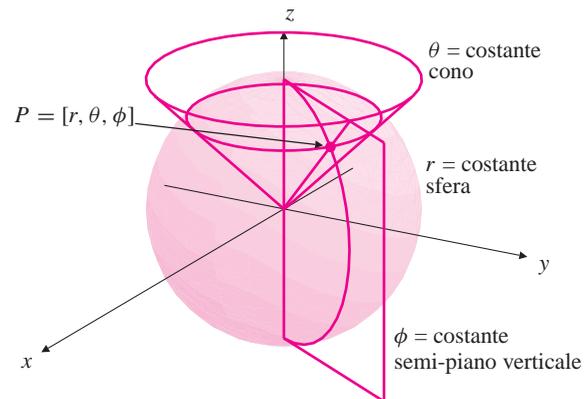
Le componenti dell'accelerazione del fluido in coordinate cilindriche sono quindi

$$\begin{aligned} a_R &= \frac{\partial u_R}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_R}{\partial R} + \frac{u_\theta}{R} \left( \frac{\partial u_R}{\partial \theta} - u_\theta \right) + u_z \frac{\partial u_R}{\partial z}, \\ a_\theta &= \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_\theta}{\partial R} + \frac{u_\theta}{R} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_R \right) + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \\ a_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_z}{\partial R} + \frac{u_\theta}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned}$$





**Figura 3.15**  
Coordinate sferiche di un punto



**Figura 3.16**  
Superfici coordinate delle coordinate sferiche

### Approfondimento 2 Accelerazione in coordinate sferiche

Le componenti sferiche (vedi figure 3.15–3.16) del vettore accelerazione

$$\mathbf{a} = a_r \hat{\mathbf{r}} + a_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + a_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

delle particelle di fluido si ottengono utilizzando l'espressione in coordinate sferiche del termine di advezione vettoriale  $(\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{u}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{u} = & \left[ \mathbf{c} \cdot \nabla u_r - \frac{c_\theta u_\theta + c_\phi u_\phi}{r} \right] \hat{\mathbf{r}} \\ & + \left[ \mathbf{c} \cdot \nabla u_\theta + \frac{c_\theta u_r - \cot \theta c_\phi u_\phi}{r} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ & + \left[ \mathbf{c} \cdot \nabla u_\phi + \frac{c_\phi (u_r + \cot \theta u_\theta)}{r} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned}$$

dove il termine scalare di advezione  $\mathbf{c} \cdot \nabla f$  è definito da

$$\mathbf{c} \cdot \nabla f = c_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{c_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{c_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}.$$

Le componenti sferiche dell'accelerazione si ottengono usando questa espressione con  $\mathbf{c} = \mathbf{u}$ , per cui

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{\partial u_r}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r}, \\ a_\theta &= \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{\cot \theta u_\phi^2}{r}, \\ a_\phi &= \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_\phi + \frac{u_r u_\phi}{r} + \frac{\cot \theta u_\theta u_\phi}{r}. \end{aligned}$$

Sostituendo infine l'espressione in coordinate sferiche del termine di advezione scalare si ha

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{u_\phi}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - u_\phi \right), \\ a_\theta &= \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \cos \theta u_\phi \right), \\ a_\phi &= \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \cos \theta u_\theta \right) + u_r \right]. \end{aligned}$$





## 3.2 Vincolo di incomprimibilità

Supponiamo che la corrente sia **incomprimibile** nel senso che la densità  $\rho$  del fluido può essere supposta costante,<sup>2</sup> indipendente sia dal tempo sia dalla posizione spaziale, ovvero  $\rho = \bar{\rho}$ , dove  $\bar{\rho}$  indica una costante (positiva) determinata. Come abbiamo visto nel paragrafo 2.5, in questo caso particolare la legge di conservazione della massa si riduce semplicemente alla condizione d'incomprimibilità  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  che deve essere soddisfatta dal campo della velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  in ogni punto  $\mathbf{r}$  e in ogni istante  $t$ .

Vogliamo ora ricavare la stessa equazione utilizzando il principio di conservazione della massa e sfruttando immediatamente l'ipotesi che la densità del fluido è costante. Consideriamo come nel paragrafo 2.2 una superficie chiusa  $S$  che delimita una regione fissa  $V$  contenuta nello spazio in cui si muove il fluido. Il fluido entra nella regione  $V$  attraverso alcune parti della superficie  $S$  e ne esce da altre. Indicando con  $\hat{\mathbf{n}}$  la normale uscente da  $V$  in un punto generico di  $S$ , la componente della velocità  $\mathbf{u}$  normale alla superficie sarà data da  $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ . Pertanto la quantità di *volume* di fluido che esce dall'elemento di superficie  $dS$  per unità di tempo è  $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$ . La rapidità con cui il volume (netto) di fluido esce da  $V$  attraverso  $S$  è quindi

$$\oint_S \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

usando sempre la convenzione di omettere l'elemento infinitesimo di superficie  $dS$  dell'integrale. Ma, nel caso di corrente incomprimibile con densità del fluido uniforme in ogni suo punto, questa quantità, una volta moltiplicata per la densità costante  $\bar{\rho}$  è semplicemente la rapidità con cui la massa (netta) del fluido esce da  $V$

$$\bar{\rho} \oint_S \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

La legge di conservazione della massa dice che questa quantità è necessariamente nulla perché il fluido, essendo la sua densità sempre la stessa in ogni istante e in ogni punto, deve avere un flusso netto di massa nullo attraverso la superficie chiusa  $S$ . Pertanto, dividendo per la costante  $\bar{\rho} > 0$ , la conservazione della massa per la corrente incomprimibile è espressa dalla condizione

$$\oint_S \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$$

valida per qualunque superficie chiusa  $S$ . L'applicazione del teorema della divergenza fornisce immediatamente

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Per l'arbitrarietà della regione  $V$  e supponendo che la funzione integranda sia continua, si deduce immediatamente che la funzione  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  deve essere nulla in ogni punto, ovvero:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

per ogni  $\mathbf{r} \in V$  e ogni  $t$ . Come già indicato, questa equazione costituisce la **condizione di incomprimibilità** e rappresenta un vincolo che il campo della velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  deve soddisfare in ogni punto  $\mathbf{r}$  e, nel caso di corrente effettivamente variabile nel tempo, per ogni istante  $t$ .

<sup>2</sup> Le difficoltà che presenta l'introduzione di tale ipotesi e le sue effettive conseguenze saranno discusse solo molto più avanti, nel paragrafo 9.3.





### 3.3 Equazioni di Eulero incomprimibili

Nel caso di corrente incomprimibile con un fluido di densità *uniforme*, l'equazione della quantità di moto del fluido può essere ricavata in una maniera semplificata dalla seconda legge della dinamica considerando un elemento infinitesimo di fluido contenuto nel volume  $\delta V$  e quindi avente massa elementare  $\delta m = \bar{\rho} \delta V$ . La seconda legge di Newton applicata a questo elemento di fluido permette allora di scrivere  $\delta m \mathbf{a} = \bar{\rho} \delta V \mathbf{a} = \delta \mathbf{f}$ , dove  $\mathbf{a}$  è l'accelerazione dell'elementino di fluido e  $\delta \mathbf{f}$  rappresenta la risultante delle forze agenti su di esso.

Come già visto nel caso statico discusso nel capitolo 1 e nel caso dinamico discusso nel paragrafo 2.3, per un fluido non viscoso la forza agente sull'elemento di fluido contenuto in  $\delta V$  comprenderà la forza dovuta alla pressione esercitata sulla superficie dell'elemento di fluido da parte del fluido all'esterno e le forze di volume agenti sull'elemento di fluido, come ad esempio la forza gravitazionale. La risultante  $\delta \mathbf{f}$  di queste forze elementari è quindi data dalla seguente somma vettoriale

$$\delta \mathbf{f} = -(\nabla P) \delta V + \bar{\rho} \delta V \mathbf{g}.$$

Ricordando l'espressione dell'accelerazione delle particelle del fluido ricavata nel paragrafo 3.1, la legge fondamentale della dinamica applicata all'elemento di fluido considerato fornisce

$$\bar{\rho} \delta V \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = (-\nabla P + \bar{\rho} \mathbf{g}) \delta V.$$

Semplificando il fattore comune  $\delta V$  e dividendo per la costante  $\bar{\rho}$  si ottiene l'equazione contenente la velocità e la pressione

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\bar{\rho}} = \mathbf{g},$$

valida per una corrente incomprimibile di un fluido supposto di densità uniforme e viscosità nulla. Il termine con  $\nabla P$  è scritto nel primo membro dell'equazione perché la pressione  $P$  è una variabile incognita.

Questa equazione deve essere messa a sistema con la condizione d'incomprimibilità dedotta dal principio di conservazione della massa, supponendo la densità uniforme, nel paragrafo precedente. Otteniamo quindi il sistema di equazioni

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\bar{\rho}} = \mathbf{g},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

note con il nome di **equazioni di Eulero per le correnti incomprimibili**. Le incognite del sistema sono il campo vettoriale della velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  e il campo della pressione con il nome  $P(\mathbf{r}, t)$ , mentre la densità  $\bar{\rho}$  è una costante nota. Il sistema è costituito da due equazioni, la prima vettoriale e la seconda scalare, per cui abbiamo un numero di equazioni uguale al numero di incognite. Il campo della forza esterna  $\mathbf{g}$  potrà anche essere diverso dal campo gravitazionale e in generale potrà dipendere dallo spazio ed eventualmente anche dal tempo, ovvero,  $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$ .

Queste equazioni di Eulero incomprimibili sono coincidenti con quelle già ricavate nel paragrafo 2.5

#### Approfondimento 1 Equazioni di Eulero in coordinate cilindriche

Se la regione in cui si muove il fluido è assisimmetrica, ossia è invariante per rotazioni attorno a un asse che chiameremo asse  $z$ , allora è conveniente utilizzare un sistema di coordinate cilindriche per descrivere il moto del fluido. Ricordando l'espressione





dell'accelerazione in coordinate cilindriche vista nell'esempio <undefined> del paragrafo 3.1, le equazioni di Eulero per le correnti incomprimibili assumono la forma seguente

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_R}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_R}{\partial R} + \frac{u_\theta}{R} \left( \frac{\partial u_R}{\partial \theta} - u_\theta \right) + u_z \frac{\partial u_R}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} &= g_R(R, \theta, z), \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_\theta}{\partial R} + \frac{u_\theta}{R} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_R \right) + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{\rho R} \frac{\partial P}{\partial \theta} &= g_\theta(R, \theta, z), \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_z}{\partial R} + \frac{u_\theta}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= g_z(R, \theta, z), \\ \frac{1}{R} \frac{\partial (R u_R)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0.\end{aligned}$$

La forza di volume esterna  $\mathbf{g}$  è stata espressa in termini delle sue componenti in coordinate cilindriche.

Nel caso particolare in cui il campo di forza  $\mathbf{g}$ , il campo di velocità iniziale  $\mathbf{u}_0$  e le condizioni al contorno siano assisimmetrici, ossia indipendenti da  $\theta$ , per cui  $\mathbf{g} = \mathbf{g}(R, z)$  e  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(R, z)$ , sono possibili soluzioni aventi la stessa invarianza per rotazioni attorno all'asse, del tipo  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(R, z, t)$  e  $P = P(R, z, t)$ . Questi campi sono allora governati dalle equazioni di Eulero per le correnti incomprimibili assisimmetriche ottenute dalle precedenti eliminando tutti i termini contenenti la derivata rispetto a  $\theta$ , ovvero,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_R}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_R}{\partial R} + u_z \frac{\partial u_R}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{R} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} &= g_R(R, z), \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_\theta}{\partial R} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_\theta u_R}{R} &= g_\theta(R, z), \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_z}{\partial R} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= g_z(R, z), \\ \frac{1}{R} \frac{\partial (R u_R)}{\partial R} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0.\end{aligned}$$

### Approfondimento 2 Equazioni di Eulero in coordinate sferiche

Se la regione in cui si muove il fluido è delimitata da due superfici sferiche concentriche, allora è conveniente utilizzare un sistema di coordinate sferiche per descrivere il moto del fluido. Ricordando l'espressione dell'accelerazione in coordinate sferiche vista nell'esempio <undefined> del paragrafo 3.1, le equazioni di Eulero per le correnti incomprimibili assumono la forma seguente

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{u_\phi}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - u_\phi \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} &= g_r \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \cos \theta u_\phi \right) + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} &= g_\theta \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \cos \theta u_\theta \right) + u_r \right] + \frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} &= g_\phi \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} &= 0.\end{aligned}$$

Naturalmente la forza di volume esterna  $\mathbf{g}$  è stata espressa in termini delle sue componenti in coordinate sferiche, e tali componenti saranno a loro volta funzione delle stesse variabili, ossia  $\mathbf{g} = \mathbf{g}(r, \theta, \phi)$ .





Nel caso particolare in cui il campo di forza  $\mathbf{g}$ , il campo di velocità iniziale  $\mathbf{u}_0$  e le condizioni al contorno siano assisimmetrici, ossia indipendenti da  $\phi$ , per cui  $\mathbf{g} = \mathbf{g}(r, \theta)$  e  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(r, \theta)$ , sono possibili soluzioni aventi la stessa invarianza per rotazioni attorno all'asse  $z$ , del tipo  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, \theta, t)$  e  $P = P(r, \theta, t)$ . Questi campi sono governati dalle equazioni di Eulero per le correnti incompressibili assisimmetriche ottenute dalle precedenti eliminando tutti i termini contenenti la derivata rispetto a  $\phi$ , ovvero,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) - \frac{u_\phi^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} &= g_r(r, \theta), \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) - \frac{\cot \theta u_\phi^2}{r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} &= g_\theta(r, \theta), \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r} (\cot \theta u_\theta + u_r) &= g_\phi(r, \theta), \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) &= 0. \end{aligned}$$

### 3.4 Condizione iniziale e condizione al contorno

Le equazioni di Eulero sono delle equazioni differenziali alle derivate parziali e da sole non costituiscono ancora un problema completo. Infatti, come in qualunque problema differenziale, è necessario specificare determinate condizioni supplementari per ottenere un problema ben posto, avente una sola soluzione (in un senso opportuno) almeno nei casi più semplici.

La stessa necessità di introdurre condizioni supplementari si incontra nella risoluzione dei problemi di dinamica di un punto materiale. Infatti la legge fondamentale della dinamica

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$$

richiede di specificare le due **condizioni iniziali**  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$  e  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$  per potere determinare il moto del corpo.

Nel caso delle equazioni di Eulero è invece necessario specificare una *sola* condizione iniziale: la **velocità iniziale** del fluido in ogni punto, ovvero,

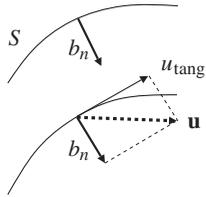
$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}),$$

dove  $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$  è un campo di velocità noto. In effetti, l'equazione evolutiva della velocità è del primo ordine nel tempo, dato che la posizione delle particelle del fluido è estranea alla descrizione euleriana del suo moto. Non esiste invece nessuna condizione iniziale per la pressione dato che non c'è alcuna equazione d'evoluzione per questa variabile, che sappiamo essere nelle correnti incompressibili un semplice moltiplicatore di Lagrange.

Ma il sistema delle equazioni di Eulero è differenziale anche dal punto di vista *spaziale* dato che contiene derivate rispetto alle coordinate spaziali: il gradiente e la divergenza, oltre all'operatore di derivata direzionale. Come conseguenza, per ottenere un problema che possa avere una sola soluzione occorre specificare delle **condizioni al contorno**. Il tipo di condizioni che possono o debbono essere fornite dipende dal tipo di equazioni e dalla natura del contorno nel problema in esame.

Senza alcuna pretesa di analizzare questo aspetto in modo completo, nel caso delle equazioni per correnti incompressibili non viscosi abbiamo una sola condizione al contorno scalare da imporre su tutta la frontiera del dominio  $V$  in cui si studia il moto





**Figura 3.17** Nei fluidi non viscosi solo la componente normale della velocità può essere imposta sul contorno (figura superiore); la velocità della soluzione avrà in generale anche una componente tangente al contorno diversa da zero (figura inferiore)

del fluido. La condizione consiste nello specificare il valore della componente della velocità normale alla frontiera  $S = \partial V$ . Questa condizione al contorno per l'incognita  $\mathbf{u}$  sarà scritta allora nel modo seguente

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|_S = b_n(\mathbf{r}_S, t)$$

con  $\mathbf{r}_S \in S$ . Il **valore al contorno**  $b_n(\mathbf{r}_S, t)$  della componente normale della velocità deve essere specificato per ogni punto  $\mathbf{r}_S \in S$  e ogni istante  $t > 0$ . Notare che  $b_n(\mathbf{r}_S, t)$  rappresenta una funzione scalare e che la sua variabile spaziale è indicata con  $\mathbf{r}_S$  per evidenziare che il dominio della funzione è limitato alla sola frontiera  $S$ .

È importante osservare che nel caso di problemi con una corrente non viscosa la condizione al contorno della velocità riguarda solo la componente normale. Questo non significa però che la velocità  $\mathbf{u}$  della soluzione debba essere normale al contorno. Infatti il campo di moto che si ottiene dalla risoluzione delle equazioni di Eulero avrà in generale la componente tangente al contorno diversa da zero, come illustrato in figura 3.17.

Nel caso particolare in cui una parte del contorno coincide con un corpo solido fermo, che non permette il passaggio del fluido attraverso la sua superficie, la condizione su questa superficie diventa omogenea

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|_{\text{solido fermo}} = 0$$

e si chiama condizione al contorno di **non penetrabilità**. Questa condizione lascia comunque la velocità libera di avere componenti tangenti al contorno diverse da zero, per cui il modello fisico descritto dalle equazioni di Eulero permette uno slittamento del fluido sulle pareti dei corpi solidi, ovverosia potrà risultare, in generale,

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|_{\text{solido fermo}} \neq 0.$$

È necessario sottolineare che tutte le condizioni supplementari sono altrettanto importanti quanto le equazioni differenziali che governano il moto del fluido. In realtà, il tipo di condizioni che è lecito e necessario imporre è legato strettamente alla natura delle equazioni differenziali stesse, sicché le condizioni iniziali e al contorno possono essere considerate come una parte integrante delle equazioni medesime. Ad esempio, un elemento distintivo delle due equazioni di Eulero è l'assenza di un termine con derivata temporale (prima) nella seconda equazione, cioè nella condizione d'incomprimibilità. Corrispondentemente, in questo sistema la pressione iniziale non può essere imposta, anzi sarebbe sbagliato pensare di farlo.

Una volta introdotte le condizioni supplementari iniziali e al contorno, il sistema delle equazioni di Eulero costituirà il seguente *problema completo*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho} &= \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{r}), \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|_S &= b_n(\mathbf{r}_S, t). \end{aligned}$$

Questo problema presenta una particolarità che sembra costituire un paradosso. Se i campi  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  e  $P(\mathbf{r}, t)$  soddisfano le equazioni e le condizioni del problema, e quindi forniscono una sua soluzione, allora anche la coppia  $[\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), P(\mathbf{r}, t) + C(t)]$ , dove  $C(t)$  è una funzione arbitraria, è soluzione delle medesime equazioni e condizioni. Questo si verifica facilmente sostituendo questi campi nelle equazioni e nelle condizioni e osservando che  $\nabla C(t) = 0$ , poiché  $C(t)$  non dipende da  $\mathbf{r}$ .





Pertanto, data una soluzione del problema delle equazioni di Eulero incomprimibili, esistono infinite altre soluzioni che differiscono soltanto per il valore di riferimento della pressione, che può essere scelto arbitrariamente in ogni istante. Questa situazione è conseguenza dell'ipotesi d'incomprimibilità, alla base delle equazioni in esame, e deriva dall'aver anche considerato un problema nel quale la velocità normale è prescritta su *tutto* il contorno  $S$ , come richiesto tipicamente se il fluido si muove in una regione delimitata completamente da pareti rigide. Le correnti di questo tipo sono dette **correnti confinate**.

Dal punto di vista fisico, un cambiamento del valore *assoluto* della pressione influisce sul valore di altre variabili termodinamiche del fluido, per cui esiste un'incongruenza fra la descrizione teorica fornita dalle equazioni di Eulero incomprimibili e i principi della termodinamica. In effetti, come già accennato nei paragrafi 2.4 e 2.5, l'introduzione dell'ipotesi di incomprimibilità ha comportato l'esclusione di qualunque considerazione termodinamica dal quadro matematico adottato per descrivere il moto del fluido. Pertanto il paradosso dell'arbitrarietà del livello della pressione nelle correnti incomprimibili in regioni confinate è una conseguenza dell'ipotesi di incomprimibilità e scomparirà nella dinamica dei fluidi comprimibili, dove la termodinamica risulterà giocare un ruolo fondamentale.

Le condizioni al contorno considerate, con la velocità normale specificata su tutto il contorno, sono le più semplici dal punto di vista matematico nella teoria delle equazioni incomprimibili: in questo caso l'unicità della soluzione delle equazioni di Eulero (possibile in certi casi, sotto opportune condizioni) è da intendersi nel senso che la pressione è definita a meno di una funzione additiva  $C(t)$  del tutto arbitraria. Tale funzione non ha comunque alcuna conseguenza sul moto del fluido perché la forza (per unità di volume) causata dalla pressione è data da  $\nabla P$ .

Notiamo infine che nei problemi in cui il fluido entra nel dominio (correnti aperte e correnti esterne) è possibile e si deve specificare il valore della pressione su una parte del contorno al posto della velocità normale. In questi casi il campo di pressione della soluzione delle equazioni incomprimibili non ha più l'arbitrarietà caratteristica delle correnti confinate e la pressione è definita univocamente in modo assoluto poiché la variabile  $P$  compare anche in qualche condizione al contorno, oltre che come argomento dell'operatore gradiente.

### Condizioni di compatibilità dei e fra i dati

La presenza del vincolo d'incomprimibilità implica che i dati delle condizioni iniziali e al contorno  $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$  e  $b_n(\mathbf{r}_S, t)$  delle equazioni di Eulero incomprimibili non possono essere assegnati in modo del tutto libero e indipendentemente l'uno dall'altro. Gli effetti di questa limitazione riguardano direttamente il campo della velocità iniziale  $\mathbf{u}_0$  che dovrà essere necessariamente a divergenza nulla, a causa dell'incomprimibilità della corrente. In altre parole la velocità iniziale  $\mathbf{u}_0$  deve soddisfare la condizione di compatibilità

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0.$$

Ma anche il dato al contorno  $b_n(\mathbf{r}_S, t)$  non può essere scelto in modo completamente arbitrario. Infatti, integrando la condizione al contorno su tutta la superficie  $S$ , si ottiene immediatamente

$$\oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|_S = \oint_S b_n(\mathbf{r}_S, t),$$

per ogni istante di tempo  $t > 0$ . D'altra parte, in virtù del teorema della divergenza l'integrale al primo membro si può trasformare in un integrale di volume, ovvero,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \oint_S b_n(\mathbf{r}_S, t).$$





Siccome il campo della velocità deve essere a divergenza nulla per  $\forall t > 0$ , l'integrale al primo membro è nullo e quindi deve necessariamente essere

$$\oint_S b_n(\mathbf{r}_S, t) = 0$$

per ogni  $t > 0$ . Questa è una condizione di compatibilità globale che il dato al contorno  $b_n(\mathbf{r}_S, t)$  deve rispettare per ogni  $t > 0$  affinché il campo di velocità possa soddisfare sempre il vincolo d'incomprimibilità.

Esiste infine un'ulteriore condizione che esprime la compatibilità fra il dato iniziale e il dato al contorno, su  $S$  e per  $t = 0$ . Quest'ultima condizione di compatibilità ha la forma seguente

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}_0(\mathbf{r})|_S = b_n(\mathbf{r}_S, 0).$$

L'insieme delle tre condizioni di compatibilità è quindi dato da

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0,$$

$$\oint_S b_n(\mathbf{r}_S, t) = 0,$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}_0(\mathbf{r})|_S = b_n(\mathbf{r}_S, 0).$$

Nel caso dei problemi *stazionari*, non esiste alcun dato iniziale e il valore prescritto sul contorno per la velocità normale non dipende dal tempo, abbiamo cioè  $b_n = b_n(\mathbf{r}_S)$ . Allora vi sarà la sola condizione di compatibilità globale

$$\oint_S b_n(\mathbf{r}_S) = 0.$$

### 3.5 Equazione della quantità di moto con la vorticità

L'equazione della quantità di moto per una corrente incomprimibile può essere scritta in una forma alternativa, ma del tutto equivalente, introducendo il rotore del campo di velocità, cui si dà il nome di **vorticità** e che si indica con  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{u},$$

Questa forma dell'equazione è particolarmente utile nel caso di correnti stazionarie e irrotazionali. Mediante l'identità vettoriale<sup>2</sup>

$$\nabla(|\mathbf{u}|^2) = 2 \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u} + 2 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 2 \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + 2 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

il termine non lineare  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  dell'equazione della quantità di moto può essere riscritto nella forma seguente

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla(|\mathbf{u}|^2) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla(|\mathbf{u}|^2).$$

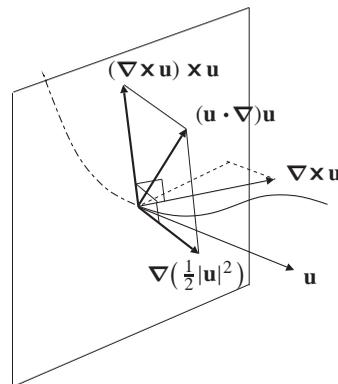
Il termine  $(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} \equiv \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$  che compare nell'identità vettoriale in esame si chiama **forma rotazionale** del termine non lineare in quanto contiene il *rotore* della velocità.

<sup>2</sup> Questa identità vettoriale è semplicemente il caso particolare per  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  della seguente identità  $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \nabla \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \nabla \times \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a}$ , che è riportata nel paragrafo A.10 dell'appendice A.





**Figura 3.18** Rappresentazione geometrica dell'identità vettoriale  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla(\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2)$ : il termine rotazionale  $(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u}$  è normale alle linee di corrente in ogni punto del campo di moto



L'interpretazione geometrica di questa identità vettoriale è mostrata nella figura 3.18. L'identità esprime il termine non lineare  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  come somma di due vettori, di cui il primo  $(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u}$  è diretto perpendicolarmente sia alla velocità, e quindi alla linea di corrente, sia alla vorticità. Notiamo che il secondo termine ha invece componenti non nulle in direzione sia tangente sia normale alla linea di corrente. Quindi questa decomposizione *non* è una decomposizione ortogonale.

Per mezzo della forma rotazionale, l'equazione della quantità di moto per correnti incomprimibili vista nel paragrafo 3.4 può essere scritta nella forma seguente

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) = \mathbf{g}.$$

Supponiamo ora che la forza specifica esterna dovuta al campo  $\mathbf{g}$  sia conservativa e possa quindi essere espressa mediante un'energia potenziale specifica  $\chi$ , ovvero  $\mathbf{g} = -\nabla\chi$ . L'esempio tipico è quando il campo esterno  $\mathbf{g}$  è il campo di gravità terrestre, per cui risulta  $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}} = -\nabla(gz)$ , con  $g = 9.81$  N/kg, e quindi  $\chi = gz$ , avendo scelto l'asse  $z$  verticale e con verso positivo diretto verso l'alto. Utilizzando l'energia potenziale  $\chi$ , l'operatore gradiente potrà includere tre termini e l'equazione della quantità di moto diventa

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \chi \right),$$

e vale per una corrente incomprimibile di un fluido non viscoso sottoposto a un campo di forze di volume esterne conservative.

## 3.6 Correnti stazionarie e teorema di Bernoulli

Se esaminiamo ora il caso di una corrente stazionaria, l'equazione della quantità di moto precedente in forma rotazionale si semplifica in

$$(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \chi \right) \quad \text{corrente stazionaria,}$$

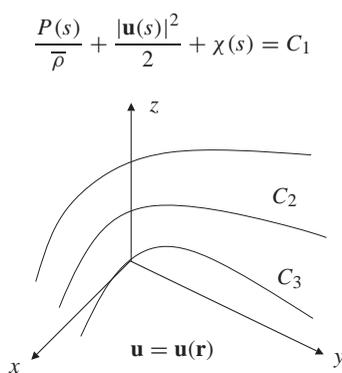
dove, nel caso in cui la forza di volume conservativa è dovuta solo al campo di gravità, risulta  $\chi(\mathbf{r}) = gz$ . Prendendo il prodotto scalare di questa equazione per la velocità  $\mathbf{u}$  e sfruttando la proprietà ovvia  $\mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = 0$ , si ottiene

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \left( \frac{P}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \chi \right) = 0,$$





Le linee di corrente di un campo di velocità stazionario sono definite nel paragrafo 2.1.



**Figura 3.19** In una corrente incomprimibile non viscosa stazionaria, ogni linea di corrente ha in generale un valore differente del trinomio di Bernoulli:  $C_1 \neq C_2 \neq C_3$

cioè il campo della velocità in ogni punto è *perpendicolare* al gradiente della funzione fra parentesi. Ciò è equivalente a dire che la funzione dentro l'operatore gradiente non cambia per spostamenti locali lungo ogni linea di corrente. Pertanto lungo una linea di corrente risulta

$$\frac{P}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \chi = C_{\text{linea di corrente}},$$

dove  $C_{\text{linea di corrente}}$  è una costante il cui valore dipende dalla linea di corrente considerata. Questa relazione si chiama **teorema di Bernoulli** o, più estesamente, **teorema della linea di corrente di Bernoulli**. Esso permette di determinare la pressione  $P$  lungo ciascuna linea di corrente mediante la relazione, valida per  $\mathbf{r}$  appartenente alla linea di corrente,

$$\frac{P(\mathbf{r})}{\rho} = -\frac{|\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2}{2} - \chi(\mathbf{r}) + C_{\text{linea di corrente}},$$

quando è nota la velocità lungo la linea considerata. Questa relazione deve essere correttamente interpretata nel senso che il vettore posizione  $\mathbf{r}$  è *vincolato* a percorrere una determinata linea di corrente e che la costante  $C_{\text{linea di corrente}}$  in generale assume valori diversi per le diverse linee di corrente, come mostrato nella figura 3.19. In altre parole, se una determinata linea di corrente è indicata con  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ , dove  $s$  rappresenta una parametrizzazione qualunque della curva, il teorema della linea di corrente di Bernoulli può essere scritto più precisamente come

$$\frac{P(\mathbf{r}(s))}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}(\mathbf{r}(s))|^2}{2} + \chi(\mathbf{r}(s)) = C_{\text{linea di corrente}}.$$

Nel caso particolare  $\chi(\mathbf{r}) = gz$  si introduce il cosiddetto **trinomio di Bernoulli**

$$\frac{P(\mathbf{r})}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2}{2} + gz,$$

e il teorema di Bernoulli esprime la costanza di detto trinomio lungo una linea di corrente nel modo seguente

$$\frac{P(\mathbf{r}(s))}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}(\mathbf{r}(s))|^2}{2} + gz(s) = \frac{P_0}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}_0|^2}{2} + gz_0,$$

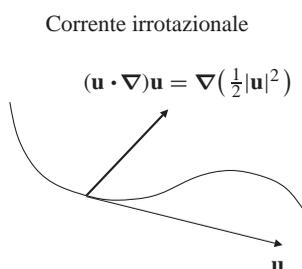
dove  $P_0 = P(\mathbf{r}(0))$ ,  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\mathbf{r}(0))$  e  $z_0 = z(0)$ ,  $\mathbf{r}(0)$  essendo un punto di riferimento sulla linea di corrente considerata. Dalla costanza della somma dei tre termini del trinomio di Bernoulli consegue che un aumento di una delle tre grandezze, pressione  $P$ , modulo della velocità  $|\mathbf{u}|$  e quota  $z$ , deve essere compensata lungo la linea di corrente da una diminuzione della somma delle altre due. In particolare, se la linea di corrente è in un piano orizzontale ( $z(s) = \text{costante}$ ), allora un aumento della pressione lungo la linea comporta una diminuzione della velocità in modulo mentre una diminuzione della pressione comporta un aumento della velocità.

### Versione irrotazionale del teorema di Bernoulli

Un caso particolare del teorema di Bernoulli si verifica quando il campo di velocità è **irrotazionale**, ovvero quando la vorticità è sempre nulla in tutto il fluido:  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0$ . In questo caso l'identità vettoriale esaminata nel paragrafo 3.5 si riduce a

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla(|\mathbf{u}|^2) \quad \text{corrente irrotazionale: } \nabla \times \mathbf{u} = 0.$$

ovverosia il campo di accelerazione della corrente stazionaria *irrotazionale* è dato dal gradiente dell'energia cinetica (per unità di massa) del fluido, come mostrato nella figura 3.20.

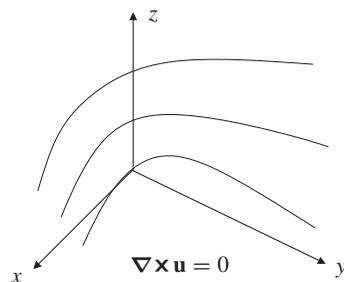


**Figura 3.20** Il campo di accelerazione  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  di una corrente stazionaria *irrotazionale* è esprimibile come gradiente dell'energia cinetica (per unità di massa) del fluido





$$\frac{P(\mathbf{r})}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2}{2} + \chi(\mathbf{r}) = C$$



**Figura 3.21** In una corrente (incomprimibile e stazionaria) irrotazionale il trinomio di Bernoulli assume lo stesso valore in tutto il campo di moto

Per una corrente irrotazionale la versione stazionaria dell'equazione della quantità di moto da cui siamo partiti si può allora scrivere come

$$\nabla \left( \frac{P}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + gz \right) = 0,$$

che si integra immediatamente fornendo

$$\frac{P(\mathbf{r})}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2}{2} + gz = C,$$

dove  $C$  è una costante che non dipende dalla linea di corrente. Il valore di  $C$  è determinato se in un punto del campo di moto, diciamo  $\mathbf{r}_1$ , sono note la pressione  $P_1$  e il modulo della velocità  $|\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}(\mathbf{r}_1)|$  del fluido. Avremo allora

$$\frac{P(\mathbf{r})}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2}{2} + gz = \frac{P_1}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}_1|^2}{2} + gz_1, \text{ corrente stazionaria irrotazionale.}$$

Questa equazione è la **versione del teorema di Bernoulli per correnti irrotazionali**. Ricordiamo che entrambi i teoremi di Bernoulli dimostrati in questo paragrafo valgono quando

- la corrente è stazionaria,
- la corrente è incomprimibile e con densità uniforme,
- il fluido è non viscoso,
- le forze di volume agenti sul fluido sono conservative.

Il teorema di Bernoulli permette di calcolare il campo della pressione se il campo di velocità è stato già determinato. Infatti, l'equazione di Bernoulli precedente risolta rispetto a  $P(\mathbf{r})$  fornisce la funzione esplicita

$$\frac{P(\mathbf{r})}{\rho} = \frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2} [|\mathbf{u}_1|^2 - |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2] + g(z_1 - z).$$

Un'applicazione banale del teorema di Bernoulli si ha nel caso di un condotto rettilineo di sezione costante. Prendiamo l'asse  $x$  parallelo al condotto. Essendo la sezione del condotto costante risulta  $\mathbf{u} = u(x) \hat{\mathbf{x}}$ . La condizione di incomprimibilità diventa  $du(x)/dx = 0$  e quindi  $u = \text{costante} = U$ . Se il tubo giace in un piano orizzontale, allora la legge di Bernoulli fornisce  $P = \text{costante}$ , contrariamente all'intuizione. Questo fatto apparentemente sorprendente è dovuto all'assenza di frenamento in virtù del carattere non viscoso nel fluido.

### Pressione in un condotto di sezione variabile

Più interessante del condotto a sezione costante è il caso di un condotto sempre rettilineo ma la cui sezione abbia un'area  $A(x)$  che varia lentamente con l'ascissa  $x$  lungo il canale. Consideriamo una corrente stazionaria in questo condotto e cerchiamo di determinare l'andamento della pressione lungo di esso. La velocità e la pressione del fluido dipenderanno dalla posizione  $\mathbf{r}$  nel condotto, ma a causa della geometria lentamente variabile del condotto siamo interessati all'andamento della pressione *media* su ogni sezione del condotto. Indichiamo allora con  $\langle \phi \rangle(x)$  il valore *medio* sulla sezione  $A(x)$  di qualunque variabile  $\phi = \phi(x, y, z)$ :

$$\langle \phi \rangle(x) \equiv \frac{1}{A(x)} \int_{A(x)} \phi(x, y, z) dy dz,$$

e determiniamo  $\langle P \rangle(x)$ .

La portata volumetrica  $P.V._{A(x)}$  del fluido attraverso la sezione di area  $A(x)$  è data dall'integrale

$$P.V._{A(x)} = \int_{A(x)} \mathbf{u}(x, y, z) \cdot \hat{\mathbf{x}} dy dz = \int_{A(x)} u_x(x, y, z) dy dz,$$





per cui si può esprimere tramite il valore medio della componente  $u_x$  della velocità lungo l'asse del condotto:  $P.V._{A(x)} = \langle u_x \rangle(x) A(x)$ . Essendo la densità del fluido uniforme, la legge di conservazione della massa implica che la portata volumetrica della corrente stazionaria è la stessa in ogni sezione, ossia P.V. è una costante nota e quindi risulta

$$\langle u \rangle(x) = \frac{P.V.}{A(x)}.$$

Scriviamo ora il teorema di Bernoulli relativamente alla corrente considerata

$$\frac{P(\mathbf{r})}{\bar{\rho}} + \frac{|\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2}{2} = C,$$

e valutiamo il suo integrale sull'area  $A(x)$ , ottenendo

$$\frac{\langle P \rangle(x)}{\bar{\rho}} + \frac{\langle |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2 \rangle(x)}{2} = C.$$

Il quadrato della velocità si può scrivere come  $|\mathbf{u}|^2 = u_x^2 + \mathbf{u}_\perp^2$ . Supponendo che la sezione sia lentamente variabile, ossia che risulti

$$\frac{1}{\sqrt{A(x)}} \frac{dA(x)}{dx} \ll 1,$$

la componente della velocità perpendicolare all'asse è trascurabile rispetto alla quella assiale,  $|\mathbf{u}_\perp| \ll |u_x|$ , per cui nel teorema di Bernoulli si può considerare con buona approssimazione la sola componente assiale della velocità e quindi scrivere

$$\frac{\langle P \rangle(x)}{\bar{\rho}} + \frac{\langle u_x^2 \rangle(x)}{2} = C.$$

D'altra parte, sempre in virtù della sezione lentamente variabile del condotto e del carattere non viscoso della corrente, su ogni sezione la componente assiale  $u_x(x, y, z)$  della velocità ha una distribuzione quasi costante, cioè che non dipende dalle coordinate  $y$  e  $z$ , per cui la media del quadrato è praticamente uguale al quadrato della media, ovvero si può ritenere

$$\langle u_x^2 \rangle(x) \approx [\langle u_x \rangle(x)]^2.$$

Sotto queste condizioni è pertanto possibile utilizzare la relazione (esatta) derivante dalla conservazione della massa nella forma (approssimata) del teorema di Bernoulli appena ricavata, ottenendo

$$\frac{\langle P \rangle(x)}{\bar{\rho}} = -\frac{1}{2} \left( \frac{P.V.}{A(x)} \right)^2 + C.$$

Questa relazione rappresenta l'andamento della pressione media lungo il condotto con sezione  $A(x)$  lentamente variabile.

Nel caso particolare in cui la sezione del condotto è circolare per ogni  $x$  (condotto assisimmetrico), l'area della sezione si scrive  $A(x) = \pi[a(x)]^2$ , dove  $a(x)$  è il raggio della sezione, e l'andamento della pressione media lungo il condotto lentamente variabile dipende dal raggio secondo la relazione

$$\frac{\langle P \rangle(x)}{\bar{\rho}} = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{(P.V.)^2}{[a(x)]^4} + C.$$





Questa relazione mostra che quando il raggio del condotto aumenta la pressione cresce e che essa diminuisce dove il raggio diventa maggiore. Pertanto, se il condotto ha un restringimento locale dopo il quale si allarga di nuovo, la pressione media nella corrente a monte è maggiore di quella nella gola, dove raggiunge un minimo locale, per poi aumentare nella corrente a valle. L'interpretazione dinamica di questo andamento della pressione nel condotto è evidente. La sovrappressione a monte è necessaria per accelerare la corrente stazionaria del fluido (di densità costante) nella zona dove il condotto si restringe mentre la sovrappressione a monte, rispetto alla pressione minima nella gola, causa il rallentamento del moto fluido nella zona dopo il restringimento, dove la sezione del condotto aumenta. Questo andamento della pressione (media) nel condotto lentamente variabile si basa sull'ipotesi di corrente non viscosa. Nelle correnti reali, l'effetto della viscosità del fluido non può essere trascurato e in un tubo di sezione circolare *costante* richiede, come sarà mostrato nel paragrafo 5.6, che la pressione abbia un gradiente lungo l'asse del tubo per potere avere una corrente stazionaria in presenza della forza viscosa di attrito. Quindi nel moto stazionario di un fluido reale la pressione nel condotto di sezione variabile varierà lungo il condotto in modo da includere sia le variazioni appena dedotte sulla base del modello di corrente non viscosa sia quelle che dedurremo sulla base del modello di fluido viscoso.

## 3.7 Vorticità

Riprendendo quanto detto in precedenza, dato un campo di velocità  $\mathbf{u}$ , il suo rotore si chiama **campo di vorticità** e si indica di solito con  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}.$$

La vorticità  $\boldsymbol{\omega}$  è una grandezza molto importante in dinamica dei fluidi. Ad esempio, la vorticità è nulla nelle **correnti irrotazionali**, le quali sono pertanto definite attraverso il soddisfacimento della condizione  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$  in tutti i punti della regione del fluido.

Nel caso di correnti piane, ovvero se il campo della velocità ha la forma propria dei moti bidimensionali, rappresentata da

$$\mathbf{u}(x, y, t) = [u(x, y, t), v(x, y, t), 0],$$

allora la sola componente non nulla del vettore  $\boldsymbol{\omega}$  è quella normale al piano del moto, cioè  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ , dove

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

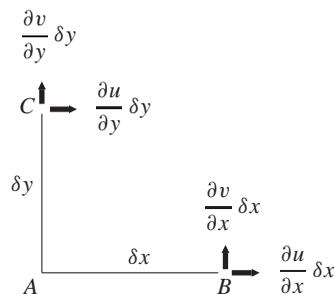
### Interpretazione cinematica della vorticità in correnti 2D

Il rotore  $\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r})$  misura quanto una paricella di fluido “stia ruotando” attorno al punto  $\mathbf{r}$ . Questa interpretazione cinematica è facile da verificare nel caso di correnti piane. Consideriamo una paricella di fluido con centro in  $A$  e due piccoli segmenti  $AB$  e  $AC$  al suo interno, perpendicolari tra loro in un certo istante. Senza alcuna perdita di generalità, la direzione di questi elementi può essere scelta parallela agli assi  $x$  e  $y$  per cui la loro lunghezza sarà indicata con  $\delta x$  e  $\delta y$ , come mostrato nella figura 3.22.

Determiniamo la velocità angolare  $\Omega_{loc}$  di rotazione locale della paricella calcolando il valore medio della velocità di rotazione nelle due direzioni perpendicolari. Per spostamenti in direzione  $x$ , la variazione della componente trasversale della velocità ( $v$ ) fra gli estremi dell'elemento  $\delta x$  è data dalla quantità

$$v(x + \delta x, y, t) - v(x, y, t) \approx \frac{\partial v}{\partial x} \delta x,$$





**Figura 3.22** Le frecce rappresentano le variazioni delle componenti della velocità nei punti  $B$  e  $C$  rispetto ai valori nel punto  $A$

per cui  $\partial v/\partial x$  rappresenta la velocità angolare istantanea valutata in direzione  $x$ . In modo analogo, per spostamenti in direzione  $y$  la variazione della componente trasversale della velocità ( $u$ ) fra gli estremi di  $\delta y$  è data da

$$u(x, y + \delta y, t) - u(x, y, t) \approx \frac{\partial u}{\partial y} \delta y,$$

per cui  $\partial u/\partial y$  rappresenta la velocità angolare istantanea, ma con verso di rotazione opposto, valutata in direzione  $y$ . La velocità angolare locale  $\Omega_{\text{loc}}$  della particella considerata è data dalla media dei valori nelle due direzioni, ovvero:

$$\Omega_{\text{loc}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\omega}{2}$$

per cui  $\omega = 2\Omega_{\text{loc}}$ , ovvero la vorticità è il doppio della velocità angolare *locale* della particella di fluido.

**Esempio 1** Consideriamo il campo di velocità corrispondente a una rotazione rigida attorno all'asse  $z$  con velocità angolare  $\Omega$  costante. Il vettore velocità angolare sarà  $\mathbf{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{z}}$  e quindi la velocità sarà

$$\mathbf{u}(x, y) = -\Omega y \hat{\mathbf{x}} + \Omega x \hat{\mathbf{y}}.$$

Si veda la figura 2.1 del paragrafo 2.1 e si determini la vorticità  $\omega$  di questo campo piano.

**Soluzione** In base alla definizione, la vorticità (scalare) è data da

$$\omega = \frac{\partial(\Omega x)}{\partial x} - \frac{\partial(-\Omega y)}{\partial y} = 2\Omega,$$

per cui il campo di velocità relativo alla rotazione rigida è caratterizzato da una velocità angolare locale *uniforme*.

Il campo di velocità della rotazione rigida appena visto non deve trarre in inganno facendo credere che una vorticità diversa da zero implichi la curvatura delle linee di corrente. Infatti esistono campi di velocità con rotore non nullo che sembrano privi di moto rotatorio, avendo linee di corrente diritte. Viceversa esistono campi di velocità con linee di corrente curve e con vorticità nulla. In altre parole non vi è alcun legame fra la vorticità e la forma delle linee di corrente.

I due esempi che seguono illustrano questi due casi. Il primo esempio studia il campo di velocità di un fluido le cui linee di corrente sono *linee rette*, pur avendo un rotore non nullo e quindi una velocità angolare locale diversa da zero.

**Esempio 2** Consideriamo il campo di velocità piano di un fluido

$$\mathbf{u}(x, y) = \frac{x}{\tau} \hat{\mathbf{y}}$$

dove  $\tau$  è una costante avente le dimensioni del tempo. È evidente che le particelle del fluido si muovono lungo rette parallele all'asse  $y$ . Tuttavia risulta

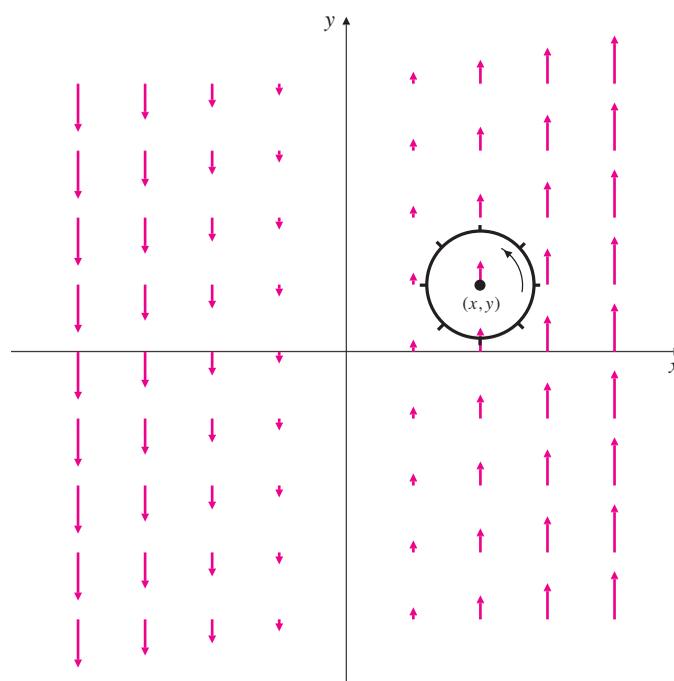
$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}(x, y) = \frac{1}{\tau} \hat{\mathbf{z}}$$

e

$$\mathbf{\Omega}(x, y) = \frac{1}{2} \omega(x, y) \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{2\tau} \hat{\mathbf{z}}.$$

Una rotellina di raggio  $\epsilon$  munita di palette, posta con il suo centro nella posizione  $(x, y)$  nel fluido (vedi figura 3.23), sarà trasportata dal fluido alla velocità  $\frac{x}{\tau} \hat{\mathbf{y}}$ , ma sarà anche messa in rotazione con velocità angolare  $\mathbf{\Omega}(x, y) = \frac{1}{2\tau} \hat{\mathbf{z}}$ , che è indipendente dalla posizione. Questa velocità angolare è causata dal fatto che il modulo della velocità del fluido alla destra della rotellina è maggiore del modulo della velocità alla sua sinistra.





**Figura 3.23** La corrente non solo trascina la rotellina ma la fa anche ruotare attorno al suo centro

L'esempio che segue illustra invece come un campo di velocità possa avere linee di corrente curve pur avendo vorticità nulla in tutti i punti in cui è definito. Si tratta della corrente del **vortice rettilineo**, che è un campo di velocità avente la simmetria cilindrica di un fluido le cui particelle si muovono su traiettorie circolari attorno a un asse fisso e con modulo della velocità inversamente proporzionale alla distanza dall'asse.

### Esempio 3 Vortice rettilineo e sua irrotazionalità

Supponiamo di descrivere il campo di velocità di un vortice rettilineo utilizzando le coordinate cartesiane e scegliamo l'asse  $z$  del sistema di riferimento coincidente con l'asse del vortice. Allora la distanza di ogni punto  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  dall'asse del vortice sarà  $\sqrt{x^2 + y^2}$  e il modulo della velocità in  $\mathbf{r}$  sarà dato dalla relazione  $|\mathbf{u}(\mathbf{r})| = A/\sqrt{x^2 + y^2}$ , dove  $A$  è una costante avente le dimensioni di un'area diviso il tempo.

Per scrivere l'espressione vettoriale del campo di velocità del vortice rettilineo occorre introdurre il vettore unitario  $\hat{\mathbf{t}}$  tangente alle circonferenze con centro sull'asse. Si vede facilmente che in ogni punto  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  tale versore è dato da

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{-y \hat{\mathbf{x}} + x \hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

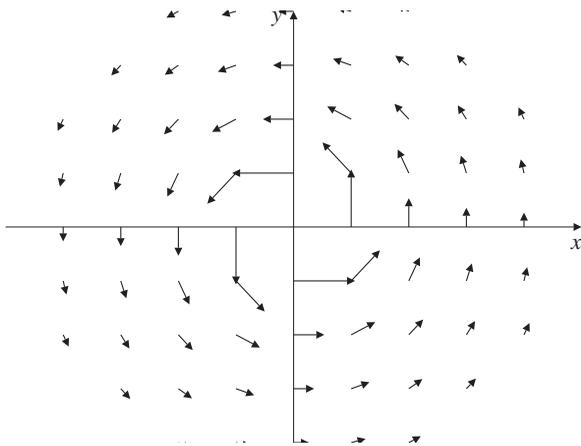
per cui il campo di velocità del vortice rettilineo è espresso dalla relazione

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{-Ay \hat{\mathbf{x}} + Ax \hat{\mathbf{y}}}{x^2 + y^2},$$

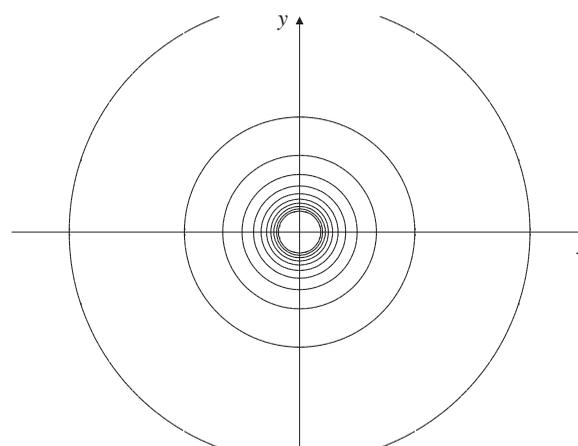
ed è mostrato nella figura 3.24. Calcoliamo la vorticità di tale campo:

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Ax}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-Ay}{x^2 + y^2} \right) \\ &= A \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + A \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$





**Figura 3.24**  
Campo di velocità del vortice rettilineo



**Figura 3.25**  
Linee di corrente del vortice rettilineo

Pertanto la vorticità nel vortice rettilineo è nulla ovunque tranne nei punti con  $R = 0$ , ovvero tranne che in tutti i punti del suo asse, dove né  $\mathbf{u}$  né  $\boldsymbol{\omega}$  sono definiti. Quindi, anche se le particelle di fluido da un punto di vista globale percorrono traiettorie circolari, la corrente è irrotazionale, poiché  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$  tranne che sull'asse. Di fatto ogni particella ha un movimento traslatorio lungo una traiettoria circolare. Nella figura 3.25 sono mostrate le linee di corrente del campo di velocità del vortice rettilineo.

#### **Esempio 4** Vortice rettilineo in coordinate cilindriche

Data la struttura cilindrica, il campo della velocità del vortice rettilineo dell'esempio 3 è descritto in modo particolarmente semplice impiegando le coordinate cilindriche  $(R, \theta, z)$ . Abbiamo infatti

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u_\theta(R) \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta) = \frac{A}{R} \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta),$$

per cui la sua vorticità (scalare) è data da

$$\omega = [\nabla \times \mathbf{u}]_z = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R u_\theta) - \frac{1}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (A) = 0.$$

### Circolazione

Si definisce con il termine **circolazione** la circuitazione della velocità lungo il percorso chiuso  $C$ , ovvero:

$$\Gamma_C = \oint_C \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

La vorticità e la circolazione sono legate dal teorema di Gauss che stabilisce la seguente relazione fra due integrali, uno di superficie e l'altro di linea,

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_{C=\partial S} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r},$$

dove  $S$  è una qualunque superficie dello spazio tridimensionale avente come contorno  $C$ , interamente contenuta nel dominio di definizione del campo vettoriale  $\mathbf{F}$ .

Quindi la circolazione è legata al flusso della vorticità dalla seguente relazione

$$\Gamma_C = \oint_C \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS,$$





che possiamo scrivere anche lasciando sottintesa la presenza degli elementi infinitesimi d'integrazione nel modo seguente

$$\Gamma_C = \oint_C \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} = \iint_S \nabla \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

dove  $\hat{\boldsymbol{\tau}}$  è il versore tangente alla linea chiusa  $C$ .

### Esempio 5 Circolazione del vortice rettilineo

Il vortice rettilineo considerato nell'esempio 3 e nell'esempio 4 ha un'intensità data dal valore del parametro  $A$ . Esiste tuttavia un altro parametro per caratterizzare l'intensità del vortice.

Nei due precedenti esempi si è dimostrato che la vorticità relativa al campo di velocità del vortice rettilineo è nulla in tutti i punti tranne che sul suo asse, dove  $\mathbf{u}$  e  $\boldsymbol{\omega}$  non sono nemmeno definiti. Questo significa che la circolazione  $\Gamma_C = \oint_C \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$  lungo ogni percorso chiuso  $C$  che non concatena l'asse del vortice è nulla. La circolazione può invece essere diversa da zero quando il percorso concatena tale asse. In questo caso, ogni superficie  $S$  avente come contorno il (solo) percorso  $C$  interseca necessariamente l'asse del vortice dove né il campo di velocità né la vorticità sono definiti, di modo che il teorema di Gauss non può essere applicato.

Consideriamo una circonferenza  $C_a$  di raggio  $a$  con centro sull'asse e calcoliamo lungo  $C_a$  la circolazione  $\Gamma_{C_a}$  del campo di velocità del vortice rettilineo:

$$\Gamma_{C_a} = \oint_{C_a} \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_a} \frac{A}{R} \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \frac{A}{R} R d\theta = 2\pi A.$$

La circolazione è la stessa qualunque sia il raggio  $a$  della circonferenza. Essendo  $\mathbf{u}$  irrotazionale, il valore della circolazione  $\Gamma = 2\pi A$  è lo stesso per ogni percorso chiuso di forma qualsiasi purché esso concatena l'asse del vortice una sola volta. Il parametro  $A$  che caratterizza l'intensità del vortice può allora essere sostituito dalla grandezza  $\Gamma$  in base alla relazione

$$A = \frac{\Gamma}{2\pi}.$$

In termini della circolazione  $\Gamma$  il campo di velocità del vortice rettilineo è scritto come:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{\Gamma}{2\pi R} \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta).$$

### Vortice di Rankine

Il campo di velocità della rotazione rigida definito negli esempi 1 e 2 del paragrafo 2.1 e il campo di velocità del vortice rettilineo definito negli esempi 3 e 4 del presente paragrafo possono essere combinati assieme nel modo seguente

$$u_\theta(R) = \begin{cases} \Omega R, & R < a \\ \frac{\Omega a^2}{R}, & R > a \end{cases}$$

Il campo di velocità di rotazione così definito si chiama **vortice di Rankine** e il suo andamento è mostrato nella figura 3.27

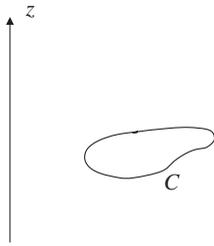
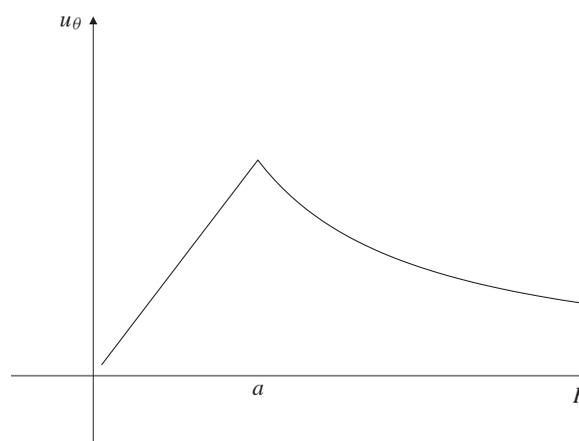


Figura 3.26 Percorso chiuso  $C$  che non concatena l'asse  $z$  del vortice





**Figura 3.27** Dipendenza della velocità  $u_\theta$  nel vortice di Rankine con la distanza  $R$  dall'asse del vortice



La vorticità  $\omega$  di tale vortice si calcola facilmente usando le coordinate cilindriche e vale

$$\omega(R) = \begin{cases} 2\Omega, & R < a \\ 0, & R > a \end{cases}$$

La circolazione  $\Gamma(R)$  lungo una circonferenza  $C_R$  di raggio  $R$  con il centro sull'asse  $z$  si ottiene con il semplice calcolo

$$\Gamma(R) = \oint_{C_R} u_\theta(R) R d\theta = u_\theta(R) R \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \begin{cases} \Omega R R, & R < a \\ \frac{\Omega a^2}{R} R, & R > a \end{cases}$$

da cui

$$\Gamma(R) = \begin{cases} 2\pi \Omega R^2, & R < a \\ 2\pi \Omega a^2, & R > a \end{cases}$$

Il vortice di Rankine costituisce un modello semplice di un vortice reale. Tipicamente i vortici reali hanno un **nucleo** centrale molto piccolo nel quale, per definizione, è concentrata la vorticità, mentre all'esterno del nucleo la corrente è essenzialmente irrotazionale. Di solito il nucleo non è esattamente circolare e la vorticità al suo interno non è proprio uniforme. Il vortice di Rankine rappresenta quindi solo un modello idealizzato del vortice reale.

## 3.8 Equazione della vorticità

L'equazione di Eulero della quantità di moto può essere scritta

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\nabla H,$$

dove  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  e dove si è introdotta la funzione scalare

$$H \equiv \frac{P}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \chi.$$

Prendendo il rotore dell'equazione è possibile eliminare il gradiente e fare così scomparire la quantità  $H$  che contiene la pressione ottenendo

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = 0.$$





Consideriamo ora l'identità  $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \nabla \cdot \mathbf{a}$  e usiamola prendendo  $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{b} = \mathbf{u}$ . Il terzo termine è nullo per l'incompressibilità ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ) e il quarto è nullo in virtù dell'identità di vorticità, ( $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u} = 0$ ) per cui otteniamo  $\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ . Sostituendo questo risultato nell'equazione precedente si ottiene

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u},$$

oppure, se si vuole ricorrere al simbolo di “derivata” materiale introdotto nel paragrafo 3.1,

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}.$$

L'equazione trovata è l'**equazione della vorticità** per correnti incompressibili in assenza di viscosità. Si noti che il termine contenente la pressione è scomparso; tuttavia l'equazione coinvolge i due campi vettoriali  $\mathbf{u}$  e  $\boldsymbol{\omega}$  che sono collegati fra loro anche dall'equazione

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}.$$

Consideriamo ora una particella di fluido caratterizzata dall'aver vorticità nulla in un determinato istante iniziale. L'equazione vettoriale di trasporto della vorticità appena dedotta ci dice che tale particella mantiene nulla la propria vorticità. In altre parole, possiamo dire che in una corrente incompressibile non viscosa non esiste alcun meccanismo che permetta il trasferimento di vorticità fra particelle diverse del fluido.

### Equazione della vorticità in 2D

Nel caso particolare di correnti in due dimensioni, cioè tali che

$$\mathbf{u} = u(x, y, t) \hat{\mathbf{x}} + v(x, y, t) \hat{\mathbf{y}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\omega} = \omega(x, y, t) \hat{\mathbf{z}},$$

allora

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0.$$

Di conseguenza l'equazione della vorticità per correnti piane sarà

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0$$

oppure, ricorrendo ancora alla notazione della “derivata” materiale,

$$\frac{D\omega}{Dt} = 0.$$

Si può quindi concludere che nelle correnti incompressibili non viscosi in due dimensioni, quando le forze di volume presenti sono conservative, la vorticità (scalare)  $\omega$  di ciascuna particella di fluido si conserva. Nel caso particolare di correnti stazionarie l'equazione precedente si riduce a

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0$$

per cui la vorticità  $\omega$  è costante lungo ciascuna linea di corrente.





### Irrotazionalità delle correnti 2D uniformi all'infinito

Un'applicazione interessante dell'equazione  $\mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0$  si ha nel caso di una corrente piana stazionaria incompressibile di un fluido supposto non viscoso che investe un corpo cilindro, provenendo da una regione lontana dove essa è uniforme. Il corpo cilindro è supposto idealmente di lunghezza infinita, in modo che la corrente possa essere descritta con buona approssimazione da un campo di velocità 2D in un piano perpendicolare all'asse del cilindro, ma la sezione del cilindro è di forma qualsiasi. In tale caso vale l'equazione della vorticità 2D appena scritta. Pertanto, visto che tutte le linee di corrente provengono dall'infinito dove la velocità  $\mathbf{u}$  è uniforme e il fluido ha vorticità nulla, allora  $\omega = 0$  in qualunque altro punto e quindi la corrente 2D considerata è irrotazionale.

## 3.9 Flussi piani incompressibili e funzione di corrente

Il campo della velocità di una corrente *incompressibile* in *due dimensioni* può essere descritto mediante una funzione scalare chiamata *funzione di corrente*. Si tratta di una grandezza molto utile in quanto, come indica lo stesso nome, questa funzione ha una relazione molto stretta con le linee di corrente del fluido.

Consideriamo un campo di velocità bidimensionale piano,

$$\mathbf{u}(x, y) = u(x, y) \hat{\mathbf{x}} + v(x, y) \hat{\mathbf{y}}$$

e supponiamo che la corrente descritta da esso sia incompressibile. In tale caso è possibile introdurre una funzione  $\psi = \psi(x, y)$ , che si chiama **funzione di corrente**, e scrivere

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Le componenti della velocità così definite soddisfano automaticamente la condizione di incompressibilità in *due dimensioni* in quanto si verifica immediatamente

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0,$$

in virtù del teorema di uguaglianza delle derivate seconde miste. Una proprietà importante della funzione di corrente  $\psi$  è conseguenza immediata della definizione della velocità  $\mathbf{u}$  in termini della stessa  $\psi$ :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \psi = u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$$

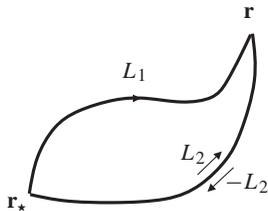
per cui  $\psi$  è costante lungo una linea di corrente. Questo significa che le curve  $\psi = \text{costante}$  sono semplicemente le linee di corrente del moto incompressibile piano del fluido rappresentato da  $\psi$ .

### Definizione della funzione di corrente

La funzione di corrente  $\psi(\mathbf{r}, t)$  di un campo di velocità incompressibile piano  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  è definita come la portata volumetrica del fluido che, in un determinato istante  $t$ , passa fra un punto di riferimento  $\mathbf{r}_* = (x_*, y_*)$  (scelto arbitrariamente) e il punto considerato  $\mathbf{r} = (x, y)$ . In realtà, essendo il campo di moto considerato piano, la portata è da intendersi per unità di lunghezza normale al piano del moto. In termini matematici, la portata volumetrica di fluido che passa fra i punti  $\mathbf{r}_*$  e  $\mathbf{r}$  (per unità di lunghezza) è data dall'integrale di linea

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbf{r}_*}^{\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{s}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s}),$$





**Figura 3.28** Il percorso  $L_1 + (-L_2)$  è una curva chiusa

dove  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s})$  è il versore normale alla curva nel punto di integrazione  $\mathbf{s}$  e dove si è omesso l'elemento infinitesimo  $ds$  nell'integrale, come usuale in questo testo. Se il campo di velocità  $\mathbf{u}$  è a divergenza nulla, l'integrale considerato non dipenderà dal percorso scelto ma solo dal punto iniziale  $\mathbf{r}_*$  e dal punto finale  $\mathbf{r}$ . Infatti, se consideriamo due percorsi diversi  $L_1$  e  $L_2$  che partono dallo stesso punto  $\mathbf{r}_*$  e terminano nello stesso punto  $\mathbf{r}$ , come mostrato in figura 3.28, possiamo prendere il percorso chiuso  $L_1 + (-L_2)$  ottenuto percorrendo prima  $L_1$  e poi  $L_2$  in senso inverso al suo senso originario. Calcolando l'integrale di linea lungo tale percorso chiuso avremo, in virtù del teorema della divergenza in due dimensioni,

$$\oint_{L_1+(-L_2)} \mathbf{u}(\mathbf{s}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s}) = \int_V \nabla \cdot \mathbf{u}$$

a condizione che la curva  $L_1 + (-L_2)$  costituisca l'intero contorno della regione  $V$  (ovvero se tutta la regione del piano compresa fra  $L_1$  e  $L_2$  appartiene al dominio di definizione del campo vettoriale  $\mathbf{u}$ ). In questo caso, essendo  $\mathbf{u}$  a divergenza nulla, l'integrale di volume è nullo e quindi

$$\oint_{L_1+(-L_2)} \mathbf{u}(\mathbf{s}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s}) = 0$$

da cui si ricava subito

$$\int_{\mathbf{r}_*; L_1}^{\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{s}_1, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s}_1) = \int_{\mathbf{r}_*; L_2}^{\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{s}_2, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s}_2)$$

con ovvio significato dei simboli.

Nel caso in cui invece la regione del piano compresa fra  $L_1$  e  $L_2$  contiene un'“isola” inaccessibile al fluido, ovvero se il dominio occupato dal fluido è molteplicemente connesso, allora si deve tenere conto che il contorno della regione in cui si applica il teorema della divergenza comprende anche la curva chiusa che rappresenta la “costa dell'isola”. Ma la componente di  $\mathbf{u}$  normale a questa parte del contorno è nulla per la condizione di non penetrazione, per cui si ha ancora l'uguaglianza fra l'integrale di linea lungo  $L_1 + (-L_2)$  e l'integrale di volume su  $V$ . Pertanto anche nel secondo caso l'integrale di linea della componente normale della velocità dipende solo dal punto iniziale  $\mathbf{r}_*$  e dal punto finale  $\mathbf{r}$ .

Una volta dimostrato che la definizione di  $\psi(x, y, t)$  identifica una vera funzione della posizione  $(x, y)$  dei punti del piano, in ogni istante di tempo  $t$ , rimane da verificare che questa definizione implica le due relazioni esprimenti le componenti cartesiane  $u$  e  $v$  della velocità in termini di  $\psi$ , che sono state scritte all'inizio del paragrafo.

Nella definizione di  $\psi(\mathbf{r}, t)$  possiamo esprimere il versore normale  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s})$  in termini del versore  $\hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{s})$  tangente alla curva di integrazione tenendo conto che i tre versori  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s})$ ,  $\hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{s})$  e  $\hat{\mathbf{z}}$  costituiscono una terna ortogonale destra, per cui  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s}) = \hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{s}) \times \hat{\mathbf{z}}$ . Un calcolo diretto mostra allora

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbf{r}_*}^{\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{s}, t) \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{s}) \times \hat{\mathbf{z}} = \int_{\mathbf{r}_*}^{\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{s}, t) \times \hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{s}) \cdot \hat{\mathbf{z}} = \int_{\mathbf{r}_*}^{\mathbf{r}} [\mathbf{u}(\mathbf{s}, t) \times d\mathbf{s}]_z,$$

dove è stato reintrodotta l'elemento infinitesimo *vettoriale*  $d\mathbf{s}$  la cui direzione è essenziale per la correttezza dell'espressione. Poiché  $\mathbf{u} = (u, v, 0)$  e  $d\mathbf{s} = (dx, dy, 0)$ , il prodotto vettoriale sotto il segno d'integrazione si calcola immediatamente

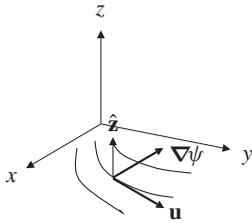
$$\psi(x, y, t) = \int_{(x_*, y_*)}^{(x, y)} [u(x, y, t) dy - v(x, y, t) dx]$$

per cui risulta:

$$u(x, y, t) = \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial y} \quad \text{e} \quad v(x, y, t) = -\frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial x}.$$

Per una definizione di dominio *molteplicemente connesso* si veda il paragrafo B.3 dell'appendice B.





**Figura 3.29** Campo di velocità incomprimibile piano  $\mathbf{u}(x, y)$  espresso mediante  $\nabla\psi$

Un modo molto conveniente di scrivere le due relazioni che definiscono il campo della velocità in termini della funzione di corrente è

$$\mathbf{u} = (\nabla\psi) \times \hat{\mathbf{z}}.$$

Questa relazione vettoriale può essere interpretata geometricamente: essa mostra che il campo di velocità piano  $\mathbf{u}$  è ottenuto, in ogni punto, facendo ruotare di 90 gradi il vettore gradiente  $\nabla\psi$  in senso orario attorno a un asse normale al piano.

Il vantaggio di questa relazione è il suo carattere vettoriale intrinseco che ne permette l'uso anche in un sistema di coordinate del piano diverso da quello cartesiano. Ad esempio, se si considerano le coordinate polari  $(r, \theta)$  e si ricorda l'espressione del gradiente in tali coordinate,  $\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$ , dalla relazione vettoriale è immediato dedurre che le componenti polari della velocità  $u_r$  e  $u_\theta$  sono espresse in termini della funzione di corrente  $\psi(r, \theta)$  dalle relazioni

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Un campo di velocità piano così definito soddisfa automaticamente la condizione di incomprimibilità che in coordinate polari si scrive

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0.$$

Infatti risulta

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0,$$

per l'uguaglianza delle derivate seconde miste. La medesima rappresentazione vale per un campo di velocità incomprimibile piano descritto in coordinate cilindriche  $(R, \theta)$ , nel quale caso la funzione di corrente  $\psi(R, \theta)$  permette di esprimere le componenti cilindriche non nulle della velocità tramite le relazioni

$$u_R = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial R}.$$

**Osservazione** La funzione di corrente può essere definita anche nel caso di correnti viscoso, purché siano sempre incomprimibili e bidimensionali.

### Equazione della funzione di corrente

La variabile funzione di corrente  $\psi$  è governata da un'equazione che interviene in certe formulazioni alternative delle equazioni delle correnti incomprimibili in due dimensioni. L'equazione si ottiene semplicemente calcolando la vorticità scalare  $\omega$  a partire dalla definizione di  $u$  e  $v$  in termini di  $\psi$ . Un calcolo diretto fornisce

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

e quindi avremo l'equazione di Poisson bidimensionale

$$\nabla^2 \psi = -\omega,$$

dove  $\nabla^2$  è l'operatore di Laplace nel piano  $x$ - $y$ . Questa equazione di Poisson per  $\psi$  può essere risolta soltanto se la vorticità del moto bidimensionale è nota, ovvero se si conosce la funzione scalare  $\omega = \omega(x, y, t)$ . Sfortunatamente questa variabile deve essere calcolata risolvendo l'equazione della vorticità 2D introdotta nel paragrafo precedente. È quindi necessario considerare le due equazioni assieme e costruire un sistema di due equazioni che dovranno essere soddisfatte contemporaneamente.





### Sistema vorticità–funzione di corrente

Nell'equazione della vorticità per correnti incomprimibili piane è presente il termine advettivo  $\mathbf{u} \cdot \nabla \omega$ . Se velocità  $\mathbf{u}$  a divergenza nulla è espressa mediante la funzione di corrente  $\psi$ , un calcolo diretto mostra che

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \omega = [(\nabla \psi) \times \hat{\mathbf{z}}] \cdot \nabla \omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

La combinazione quadratica delle derivate prime che è stata ottenuta è semplicemente il determinante della matrice jacobiana

$$\frac{\partial(\omega, \psi)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{bmatrix},$$

in quanto

$$\left| \frac{\partial(\omega, \psi)}{\partial(x, y)} \right| = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Questo determinante si chiama **jacobiano** della coppia di funzioni  $\omega(x, y)$  e  $\psi(x, y)$  e si indica sinteticamente con

$$J(\omega, \psi) = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

per cui il termine advettivo può essere scritto nel modo seguente

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \omega = J(\omega, \psi).$$

Quindi le correnti piane incomprimibili di un fluido non viscoso possono essere rappresentati dalle variabili scalari  $\omega(x, y, t)$  e  $\psi(x, y, t)$ . Queste **variabili non primitive** sono governate dall'equazione scalare della vorticità e dall'equazione di Poisson della funzione di corrente: queste due equazioni costituiscono infatti il seguente sistema di equazioni accoppiate:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega, \psi) &= 0, \\ \nabla^2 \psi + \omega &= 0. \end{aligned}$$

Il sistema di equazioni deve poi essere corredato dalle necessarie condizioni iniziale e al contorno per costituire un problema completo.

Nelle correnti non viscoso la vorticità rimane nulla se è nulla all'istante iniziale, per cui la funzione di corrente  $\psi$  è soluzione della semplice equazione di *Laplace*

$$\nabla^2 \psi = 0$$

completata da opportune condizioni al contorno.





## CAPITOLO 4

# Correnti incomprimibili non viscosse irrotazionali

**Introduzione** In questo capitolo studieremo il caso particolare delle correnti incomprimibili dei fluidi supposti non viscosi quando la vorticità è ovunque nulla. Queste correnti sono chiamate irrotazionali e, sotto una determinata condizione, il loro campo di moto può essere descritto attraverso una opportuna funzione scalare, chiamata potenziale cinetico. Ricaveremo l'equazione che governa questa variabile ausiliaria e mostreremo come l'equazione della quantità di moto, una volta determinata la velocità, diventi un'equazione per la sola incognita pressione che può essere risolta in modo esplicito anche nel caso generale di correnti non stazionarie.

## 4.1 Irrotazionalità della corrente e potenziale della velocità

Le correnti incomprimibili di un fluido supposto non viscoso sono governate dalle equazioni di Eulero descritte nel paragrafo 3.3, che sono riscritte qui per comodità:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho} = -\nabla \chi,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

dove  $\chi$  rappresenta l'energia potenziale per unità di massa del campo di forze di volume esterne, che si è supposto conservativo. Come si è visto nel paragrafo 3.5, il termine  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  dell'equazione della quantità di moto può essere sempre riscritto come  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla(|\mathbf{u}|^2)$  per cui l'equazione precedente si potrà scrivere anche nella forma seguente:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \chi \right).$$

Supponiamo ora che la corrente sia **irrotazionale**, ovvero che il campo della vorticità  $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{u}$  sia sempre nullo ovunque:

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0,$$

ossia in ogni punto  $\mathbf{r}$  del campo di moto e per ogni istante  $t > 0$ . In realtà non è necessario assumere per ipotesi questa condizione nella sua interezza ma è sufficiente che la vorticità sia nulla nell'istante iniziale  $t = 0$ , ovvero sia

$$\nabla \times \mathbf{u}_0 = 0,$$

dove  $\mathbf{u}_0$  è il campo di velocità iniziale. Infatti è possibile dimostrare che, in condizioni di regolarità, la forma dell'equazione della quantità di moto per la corrente incomprimibile di un fluido non viscoso garantisce che la vorticità rimarrà nulla in ogni istante successivo  $t > 0$ .

In virtù dell'ipotesi di irrotazionalità della corrente,  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ , l'equazione della quantità di moto si semplificherà allora in

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \chi \right).$$





Inoltre la condizione d'irrotazionalità  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$  permette un'altra semplificazione ancora più importante nella descrizione matematica del moto del fluido. Tale semplificazione del modello matematico è sempre permessa quando la regione in cui si muove il fluido è un dominio **semplicemente connesso**, ovverosia privo di fori che trapassano la regione stessa, vedi appendice B. Sotto questa ipotesi il campo della velocità irrotazionale  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  può essere espresso, ad ogni istante  $t$ , come il gradiente di una funzione scalare  $\phi(\mathbf{r}, t)$  mediante la relazione

$$\mathbf{u} = \nabla\phi,$$

e la funzione  $\phi(\mathbf{r}, t)$  è chiamata **potenziale cinetico**, o **potenziale della velocità** oppure più semplicemente **potenziale**. L'introduzione del potenziale corrisponde a un cambiamento di variabile nel senso che  $\phi$  è una nuova incognita che si può usare al posto della velocità  $\mathbf{u}$ . Il vantaggio di sostituire  $\mathbf{u}$  con  $\phi$  sta nel passare da un'incognita *vettoriale* a un'incognita *scalare*. Vedremo fra un momento che il costo di questa semplificazione sarà un aumento dell'ordine del problema differenziale da risolvere.

## 4.2 Corrente incompressibile ed equazione di Laplace

Sfruttando la rappresentazione della velocità irrotazionale  $\mathbf{u}$  in termini del potenziale, la condizione di incompressibilità  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  diventa

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi = 0.$$

Questa è l'**equazione di Laplace** per il potenziale  $\phi$  che deve essere completata da opportune condizioni al contorno. Nel paragrafo 3.4 abbiamo visto che per una corrente incompressibile di un fluido supposto non viscoso la condizione al contorno da imporre sulla velocità è  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|_S = b_n(\mathbf{r}_S, t)$ , dove  $b_n$  è la componente normale della velocità specificata su  $S$ . Scrivendo questa condizione come condizione al contorno per il potenziale  $\phi$  si ottiene

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t)}{\partial n}|_S = b_n(\mathbf{r}_S, t),$$

dove  $\frac{\partial}{\partial n}$  indica la **derivata normale** sulla frontiera  $S$ , ovvero la componente del gradiente normale alla superficie in ogni suo punto:  $\frac{\partial}{\partial n} \equiv \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla$ . Questo tipo di condizione al contorno che impone il valore della derivata normale si chiama **condizione di Neumann**. La condizione che impone invece il valore dell'incognita sul contorno si chiama **condizione di Dirichlet**, ma essa non interviene nel caso del potenziale della velocità.

L'equazione di Laplace completata della condizione di Neumann conduce al seguente **problema di Neumann** (funzione del tempo)

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi &= 0, \\ \frac{\partial\phi}{\partial n}|_S &= b_n(\mathbf{r}_S, t). \end{aligned}$$

Si tratta di un **problema ellittico** e più precisamente di un **problema armonico** in quanto l'operatore  $\nabla^2$  è il laplaciano e l'equazione è omogenea, ossia il suo termine noto è nullo. In realtà, ad ogni istante di tempo  $t$ , abbiamo un diverso problema di questo tipo poiché la velocità normale  $b_n(\mathbf{r}_S, t)$  imposta sul contorno dipende in generale dal tempo. Si ricorda che, come mostrato nel paragrafo 3.5, il dato al contorno  $b_n(\mathbf{r}_S, t)$  deve soddisfare la condizione di compatibilità globale

$$\oint_S b_n(\mathbf{r}_S, t) = 0$$





affinché una soluzione possa esistere. Inoltre il potenziale  $\phi$  nel problema di Neumann non è definito univocamente, proprio come la pressione  $P$  nelle equazioni per le correnti incomprimibili (con o senza viscosità). Infatti data una soluzione  $\phi(\mathbf{r}, t)$  del problema appena scritto, tutte le funzioni  $\phi(\mathbf{r}, t) + A(t)$ , con  $A(t)$  funzione arbitraria, soddisfano ugualmente l'equazione e la condizione di Neumann, perché l'incognita  $\phi$  compare in esse solo come argomento di operatori di derivazione spaziale. Questa arbitrarietà non pone tuttavia alcun problema dal punto di vista della determinazione del campo di velocità dal momento che  $\mathbf{u} = \nabla\phi$  e quindi la soluzione della velocità non dipende dalla funzione  $A(t)$  e sarà sempre unica.

### 4.3 Teorema di Bernoulli per correnti non stazionarie

Supponiamo ora che il problema di Neumann per il potenziale della velocità sia stato risolto, per cui  $\phi = \phi(\mathbf{r}, t)$  è un campo noto. Potremo allora sostituire il campo vettoriale  $\nabla\phi$  nell'equazione della quantità di moto per correnti irrotazionali al posto di  $\mathbf{u}$ , ottenendo

$$\frac{\partial \nabla\phi}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{P}{\rho} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + \chi\right).$$

Ma gli operatori differenziali  $\frac{\partial}{\partial t}$  e  $\nabla$  commutano per cui il termine nel membro di sinistra è il gradiente di  $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ . L'equazione si potrà allora scrivere nella forma

$$\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + \chi\right) = 0,$$

la cui integrazione (in senso spaziale) fornisce immediatamente

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + \chi = C(t),$$

dove  $C(t)$  è una funzione arbitraria del tempo. Questa relazione è detta talvolta **teorema di Bernoulli per le correnti irrotazionali potenziali dipendenti dal tempo**. La funzione arbitraria  $C(t)$  potrebbe essere fatta sparire dall'equazione assorbendola nel potenziale  $\phi$ , che è definito a meno di una funzione arbitraria del tempo: basterebbe infatti aggiungere a  $\phi$  la funzione di una sola variabile  $\Phi(t) = \int^t C(t') dt'$ , visto che in ogni caso  $\mathbf{u} = \nabla\phi$ . L'eliminazione della funzione arbitraria (e del tutto irrilevante)  $C(t)$  è però impossibile nel caso stazionario, per cui conviene lasciare inalterato il membro di destra dell'equazione appena trovata. Così essa potrà essere specializzata al caso stazionario sostituendo semplicemente la funzione arbitraria  $C(t)$  con una costante  $C$ .

Quando il potenziale  $\phi = \phi(\mathbf{r}, t)$  è già stato determinato, possiamo risolvere l'equazione di Bernoulli per correnti incomprimibili irrotazionali non stazionarie rispetto alla funzione incognita  $P$  ottenendo la seguente espressione esplicita della soluzione

$$\frac{P(\mathbf{r}, t)}{\rho} = -\frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \frac{|\nabla\phi(\mathbf{r}, t)|^2}{2} - \chi(\mathbf{r}) + C(t).$$

Pertanto, nelle correnti incomprimibili irrotazionali, la dipendenza dal tempo sia del campo della velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nabla\phi(\mathbf{r}, t)$  che del campo della pressione  $P = P(\mathbf{r}, t)$  è determinata completamente dalla dipendenza temporale della componente normale della velocità  $b_n(\mathbf{r}_S, t)$  imposta sul contorno del campo di moto.





L'equazione di Laplace per il potenziale della velocità assieme alla relazione precedente per la pressione permettono di determinare le correnti incomprimibili irrotazionali mediante un procedimento che affronta in successione due problemi *disaccoppiati*: prima si risolve il problema di Neumann per  $\phi(\mathbf{r}, t)$  e poi si calcola la pressione  $P(\mathbf{r}, t)$  tramite l'espressione esplicita scritta. Questo metodo consente quindi una grande semplificazione rispetto al procedimento da seguire nel caso più generale di correnti incomprimibili non viscosi con vorticità. Infatti queste ultime sono governate dal sistema costituito dalle due equazioni *accoppiate* scritte all'inizio del paragrafo 4.1. La soluzione di tale coppia di equazioni è molto difficile a causa della natura *vincolata* del problema e della presenza del termine non lineare  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  nell'equazione della quantità di moto.

### Ritorno al teorema di Bernoulli per correnti stazionarie

Nel caso particolare di una corrente stazionaria, la velocità normale imposta sul contorno  $S$  della regione del fluido non dipende dal tempo, ovvero  $b_n = b_n(\mathbf{r}_S)$ . Ne consegue che anche il potenziale non dipende da  $t$ , ovvero  $\phi = \phi(\mathbf{r})$  che sarà soluzione del seguente problema di Neumann

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial n}|_S &= b_n(\mathbf{r}_S),\end{aligned}$$

con il dato al contorno soggetto alla condizione globale  $\oint b_n(\mathbf{r}_S) = 0$ . La soluzione di questo problema armonico sarà ovviamente definita a meno di una costante additiva. In altri termini, se la funzione  $\phi(\mathbf{r})$  è una soluzione, lo sarà anche la funzione  $\phi(\mathbf{r}) + A$ , dove  $A$  è una costante qualsiasi.

Nel caso stazionario l'equazione di Bernoulli precedente si semplifica in

$$\frac{P}{\bar{\rho}} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + \chi = C,$$

dove il valore della costante  $C$  è determinato dal valore di  $P$ ,  $|\nabla\phi|$  e  $\chi$  in un punto del fluido, diciamo nel punto  $\mathbf{r}_1$ . In altre parole, il teorema di Bernoulli nel caso di una corrente irrotazionale potenziale stazionaria significa che

$$\frac{P(\mathbf{r})}{\bar{\rho}} + \frac{|\nabla\phi(\mathbf{r})|^2}{2} + \chi(\mathbf{r}) = C,$$

per qualunque punto  $\mathbf{r}$  nel fluido, dove  $C = (P(\mathbf{r}_1)/\bar{\rho}) + \frac{1}{2}|\nabla\phi(\mathbf{r}_1)|^2 + \chi(\mathbf{r}_1)$ . Questo risultato rappresenta una versione particolare del teorema di Bernoulli per correnti irrotazionali valida quando è possibile scrivere  $\mathbf{u} = \nabla\phi$ . Una tale rappresentazione di una corrente irrotazionale è sempre permessa se il fluido si muove in una regione semplicemente connessa mentre può essere impossibile per certi campi di moto in domini molteplicemente connessi. È utile ricordare che la presente **versione potenziale** del teorema di Bernoulli per correnti irrotazionali richiede quindi che

- la corrente sia stazionaria,
- la regione occupata dal fluido sia *semplicemente connessa*,
- il campo di velocità sia irrotazionale,
- il fluido sia non viscoso,
- la corrente sia incomprimibile di densità uniforme,
- le forze di volume agenti sul fluido siano conservative.





Risolviendo la relazione di Bernoulli rispetto a  $P(\mathbf{r})$  si ottiene il campo della pressione della corrente incomprimibile irrotazionale potenziale:

$$\frac{P(\mathbf{r})}{\rho} = \frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2} [|\nabla\phi_1|^2 - |\nabla\phi(\mathbf{r})|^2] + \chi_1 - \chi(\mathbf{r}),$$

dove  $P_1 = P(\mathbf{r}_1)$ ,  $\phi_1 = \phi(\mathbf{r}_1)$  e  $\chi_1 = \chi(\mathbf{r}_1)$ . Se il campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  è irrotazionale ma non è rappresentabile come gradiente di un potenziale (corrente irrotazionale con circolazione non nulla in un dominio molteplicemente connesso), la pressione potrà comunque essere calcolata in termini di  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  mediante la relazione

$$\frac{P(\mathbf{r})}{\rho} = \frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2} [|\mathbf{u}(\mathbf{r}_1)|^2 - |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2] + \chi_1 - \chi(\mathbf{r}).$$

### Coefficiente di pressione (incomprimibile)

Un'applicazione importante del teorema di Bernoulli riguarda le correnti attorno a un corpo fisso quando il campo di moto e la pressione a grande distanza dal esso possono essere considerati uniformi. In tale caso il valore della pressione in tutti i punti del fluido può essere espresso in forma adimensionale considerando la differenza fra la pressione nel punto e la pressione lontano dal corpo, dove la velocità è uniforme.

Indichiamo con  $P_\infty$  il valore della pressione del fluido nella regione lontana dal corpo e con  $\mathbf{U} = U \hat{\mathbf{x}}$  la velocità uniforme del fluido, sempre in tale zona. Si definisce allora **coefficiente di pressione**  $C_P(\mathbf{r})$  in un punto generico del fluido come la differenza fra la pressione  $P(\mathbf{r})$  e la pressione  $P_\infty$  lontano dal corpo, normalizzata rispetto al valore dell'energia cinetica per unità di volume del fluido in tale regione, ovvero, si pone

$$C_P(\mathbf{r}) = \frac{P(\mathbf{r}) - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2}.$$

Il coefficiente di pressione è quindi una *funzione adimensionale* i cui valori sono proporzionali alla differenza fra la pressione in un punto del fluido e la pressione a grande distanza dal corpo.

In particolare, se non esistono forze esterne, per cui  $\chi \equiv 0$ , la relazione di Bernoulli si può scrivere

$$\frac{P(\mathbf{r})}{\rho} = \frac{P_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} [U^2 - |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2].$$

Sostituendo il campo di pressione così ricavato dalla legge di Bernoulli nella definizione del coefficiente di pressione si ottiene la classica formula

$$C_P(\mathbf{r}) = 1 - \frac{|\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2}{U^2},$$

che è molto utilizzata nello studio delle correnti incomprimibili stazionarie e che dimostra che il coefficiente di pressione è sempre minore di 1 o al più uguale a 1 nei punti in cui la velocità è nulla, detti punti di **ristagno**.





## CAPITOLO 5

# Correnti incomprimibili viscosi

**Introduzione** Questo capitolo è dedicato allo studio delle correnti incomprimibili di un fluido viscoso. Nel primo paragrafo si descrive il fenomeno della viscosità nel caso semplice di una corrente che si muove in una sola direzione. Nel paragrafo 5.2 questa nozione primitiva di viscosità è estesa al caso generale per ricavare l'espressione della forza agente sulle particelle del fluido dovuta alla sua viscosità in una corrente tridimensionale, sempre incomprimibile. Nel paragrafo 5.3 il nuovo termine della forza viscosa è aggiunto nell'equazione della quantità di moto, così da potere scrivere il sistema delle equazioni di Navier–Stokes che governano le correnti incomprimibili viscosi. Le condizioni supplementari, iniziali e al contorno, necessarie per ottenere un problema matematicamente completo sono presentate nel paragrafo 5.4, assieme alle loro condizioni di compatibilità, analogamente a quanto visto nel capitolo 3 per il caso non viscoso e le equazioni di Eulero incomprimibili.

Nel paragrafo 5.5 si introduce la forma adimensionale delle equazioni di Navier–Stokes e si definisce il numero di Reynolds. Nei paragrafi successivi si ricavano alcune soluzioni analitiche delle equazioni in regioni dalla geometria molto semplice, per correnti incomprimibili viscosi, sia stazionarie sia variabili.

Per quanto riguarda le correnti stazionarie, il paragrafo 5.6 è dedicato allo studio della corrente unidirezionale di un fluido che riempie lo spazio fra due pareti piane parallele, di cui una eventualmente in moto con velocità costante, in presenza o meno di un gradiente di pressione uniforme in tutta la regione occupata dal fluido. Si considera anche la corrente di un fluido all'interno di un tubo causata dalla presenza di un gradiente di pressione parallelo all'asse del tubo. Si analizza inoltre il moto di uno strato di fluido che scorre su un piano inclinato a causa del campo di gravità terrestre.

Per quanto riguarda i problemi dipendenti dal tempo, nel paragrafo 5.7 si studia come un fluido inizia a muoversi in virtù dell'attrito viscoso a causa della traslazione improvvisa di una parete piana; di questo tipo di correnti unidirezionali considereremo due esempi particolari. Nel primo caso la regione occupata dal fluido è un semispazio, nel secondo caso è lo spazio compreso fra due lastre parallele.

Il paragrafo 5.8 è dedicato ad alcune soluzioni esatte delle equazioni incomprimibili in coordinate cilindriche quando il fluido si muove lungo traiettorie circolari. Si esamina dapprima la corrente stazionaria generata in una regione compresa fra due superfici cilindriche che possono ruotare con velocità angolari costanti diverse attorno allo stesso asse. Si analizza inoltre l'evoluzione di una colonna di fluido che all'istante iniziale ruota in modo rigido e che è frenata dall'arresto improvviso della parete cilindrica delimitante il fluido e infine il decadimento nel tempo di un vortice rettilineo e di un vortice attorno a un cilindro rigido la cui rotazione è arrestata istantaneamente.

Il paragrafo 5.9 è dedicato a una descrizione più articolata del fenomeno della viscosità. Per capire il meccanismo frenante dell'attrito interno in un fluido è necessario considerare la situazione più generale in cui esso può essere anche *comprimibile*. Presenteremo pertanto un'analisi che va oltre i confini stabiliti dall'ipotesi di corrente incomprimibile, per cui il paragrafo in questione può essere considerato un intruso in questo capitolo. Tuttavia le equazioni di Navier–Stokes incomprimibili sono molto importanti ed è necessario ricavare l'espressione della forza di attrito viscoso agente su un corpo fermo in una corrente incomprimibile secondo il procedimento rigoroso mostrato nel paragrafo 5.12.

Nel paragrafo 5.13 si studia invece come varia l'energia cinetica in una corrente incomprimibile viscosa. Inoltre si considera l'equazione che governa l'evoluzione dell'energia interna nelle correnti di questo tipo e che deriva dalla forma generale della





legge di conservazione dell'energia che sarà introdotta solo nel capitolo 9.

Gli ultimi due paragrafi del capitolo sono infine dedicati alla presentazione delle equazioni che governano la convezione naturale nei liquidi e le correnti incompressibili nei sistemi di riferimento rotanti.

## 5.1 Viscosità dinamica e viscosità cinematica

Le soluzioni della corrente stazionaria incompressibile e irrotazionale attorno a una sfera o a un cilindro circolare calcolate nel capitolo precedente mostrano che un fluido supposto idealmente non viscoso “scivola” sulla superficie del corpo attorno al quale scorre. Questo risultato è una conseguenza dell'ipotesi di viscosità nulla e si traduce matematicamente nel potere imporre la condizione al contorno solo sulla componente normale della velocità, che si annullerà quando la superficie è ferma.

L'esame delle correnti di qualunque fluido reale rivela invece che non si verifica alcuno scivolamento del fluido sulle superfici dei corpi solidi. Negli esperimenti si osserva infatti che sulla superficie dei corpi fermi la velocità del fluido è nulla, ovvero che si annulla oltre alla componente normale anche quella tangente. La regione in cui si verifica la riduzione del modulo della velocità dal valore asintotico, a grande distanza dal corpo, al valore nullo su di esso può essere di dimensioni confrontabili o addirittura maggiori di quelle caratteristiche del corpo stesso, oppure può essere una zona molto sottile in prossimità della sua superficie. Quando la zona di transizione in cui  $|\mathbf{u}|$  decresce rapidamente, ma comunque in modo continuo, da un valore assegnato fino al valore nullo è molto sottile è chiamata **strato limite**. Nello strato limite gli effetti della viscosità del fluido sono importanti e non possono più essere trascurati, per cui il modello di fluido non viscoso considerato finora deve essere abbandonato.

Per comprendere la situazione dobbiamo precisare cosa significa il termine “fluido viscoso”. A questo fine, consideriamo il caso di una semplice corrente cosiddetta **di taglio**, ovvero di un campo di velocità piano unidirezionale del tipo:

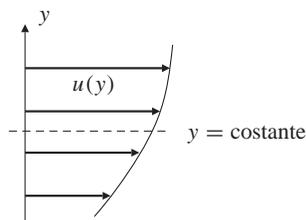


Figura 5.1 Campo di velocità di taglio

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = [u(y), 0, 0] = u(y) \hat{\mathbf{x}},$$

come mostrato di fianco. Nel caso di un fluido che si è supposto non viscoso il vettore **sforzo**,  $\mathbf{s}$ , cioè la forza per unità di area della superficie di contatto, che il fluido immediatamente sopra un piano  $y = \text{costante}$  esercita sul fluido immediatamente al di sotto, non ha alcuna componente tangente. Viceversa, per un fluido viscoso il vettore sforzo ha una componente tangente  $s_x$  tipicamente diversa da zero. Infatti la velocità del fluido nella zona superiore è maggiore di quella del fluido nella zona inferiore per cui il primo tenderà ad aumentare la velocità del secondo, grazie a una forza di taglio. A sua volta, il fluido immediatamente sotto il piano  $y = \text{costante}$  esercita una forza sul fluido al di sopra, ed essendo la sua velocità nella zona inferiore più piccola di quella nella zona superiore, il fluido sotto tenderà a ridurre la velocità di quello sopra. Nel caso particolare di fluido viscoso **newtoniano** la componente di taglio  $s_x$  del vettore  $\mathbf{s}$  è proporzionale alla derivata della velocità, ovvero, nel caso considerato, vale la relazione

$$s_x = \mu \frac{du}{dy},$$

dove  $\mu$  è una proprietà del fluido chiamata **viscosità dinamica** o più semplicemente **viscosità**. Molti fluidi reali, come l'acqua e l'aria, si comportano secondo la precedente relazione lineare, ma esistono anche molti altri fluidi viscosi, come le vernici, i polimeri, la maionese e il miele, che hanno un comportamento più complicato che è detto **non newtoniano**.

Da un punto di vista dinamico una grandezza molto importante risulta essere la **viscosità**





**cinematica** che è definita dal rapporto fra la viscosità dinamica e la densità del fluido

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Nella tabella 1 sono riportati i valori della densità  $\rho$ , della viscosità dinamica  $\mu$  e di quella cinematica  $\nu$  relativi al mercurio, all'acqua (allo stato liquido e di vapore) e all'aria in condizioni termodinamiche standard, ovvero alla temperatura di  $T = 300$  K e alla pressione atmosferica  $P_{\text{atm}} = 1.01 \times 10^5$  Pa.

**Tabella 1.** Proprietà meccaniche di alcuni fluidi alla temperatura di  $T = 300$  K e alla pressione atmosferica  $P_{\text{atm}} = 1.01 \times 10^5$  Pa

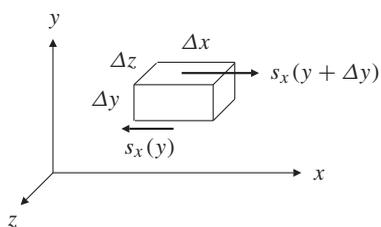
Fluido	$\rho$ densità kg/m <sup>3</sup>	$\mu$ viscosità dinamica kg/(m · s)	$\nu$ viscosità cinematica m <sup>2</sup> /s
mercurio, Hg	13 550	$1.56 \times 10^{-3}$	$0.115 \times 10^{-6}$
acqua, H <sub>2</sub> O	998	$1.0 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-6}$
vapore, H <sub>2</sub> O a 100 °C	0.60	$12.3 \times 10^{-6}$	$20.5 \times 10^{-6}$
aria	1.18	$18.5 \times 10^{-6}$	$15.6 \times 10^{-6}$

Come si mostrerà alla fine del paragrafo 10.1, il valore di  $\mu$  (e quindi anche di  $\nu$ ) può variare sensibilmente con la temperatura e dipende anche, seppure in modo meno sensibile, dalla pressione del fluido. Tuttavia, in tutto questo capitolo considereremo un modello di fluido in cui la densità  $\rho$  e la viscosità dinamica  $\mu$  sono costanti. Nei precedenti capitoli la condizione di densità uniforme e costante è stata sempre indicata esplicitamente scrivendo la densità come  $\bar{\rho}$ . In modo analogo, in questo capitolo indicheremo con  $\bar{\mu}$  la viscosità dinamica quando essa potrà essere considerata una costante caratteristica del fluido, indipendente cioè da temperatura e pressione. La viscosità cinematica  $\nu$  sarà invece indicata sempre senza alcuna soprallineatura dato che l'uso di questa grandezza è qui limitato al caso incomprimibile con fluidi di densità uniforme e con viscosità costante, per cui la definizione effettiva del **coefficiente di viscosità cinematica**  $\nu$  è

$$\nu = \frac{\bar{\mu}}{\bar{\rho}}$$

Solo nel paragrafo 5.9 considereremo il caso generale dei fluidi comprimibili nei quali l'intensità dell'attrito viscoso risulta dipendere dalle condizioni termodinamiche del fluido. In quel paragrafo il coefficiente di viscosità dinamica potrà dipendere dalle variabili termodinamiche  $T$  e  $P$ .

## 5.2 Forza di attrito viscoso

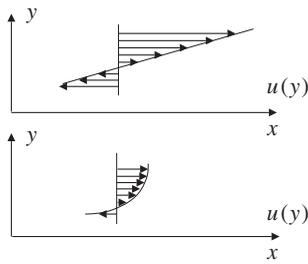


**Figura 5.2** Azione della componente  $x$  dello vettore sforzo viscoso  $\mathbf{s}$  nella corrente di taglio  $u = u(y)$

Lo sforzo viscoso nel caso della corrente di taglio ora considerata provoca una forza tangenziale per unità di volume parallela alla velocità. Consideriamo infatti un volumetto di fluido di forma prismatico con base  $\Delta x \Delta z$  e altezza  $\Delta y$  avente il vertice inferiore sinistro nel punto  $(x, y, z)$ , vedi figura 5.2. La componente nella direzione  $x$  del vettore sforzo viscoso che agisce sul fluido contenuto nel volumetto attraverso la faccia superiore è data da  $\mu \frac{du(y+\Delta y)}{dy}$ , dal momento che il fluido esterno più veloce tende ad aumentare la velocità del fluido nel volumetto. Al contrario la componente  $x$  di  $\mathbf{s}$  agente attraverso la faccia inferiore è data da  $-\mu \frac{du(y)}{dy}$  poiché il fluido esterno più lento tende a ridurre la velocità del fluido nel volumetto. La forza netta per unità di volume avrà allora la direzione dell'asse  $x$  e tale componente sarà data dalla differenza

$$F_x^{\text{visc}} = \left[ \left( \mu \frac{du}{dy} \right) \Big|_{y+\Delta y} - \left( \mu \frac{du}{dy} \right) \Big|_y \right] \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\left( \mu \frac{du}{dy} \right) \Big|_{y+\Delta y} - \left( \mu \frac{du}{dy} \right) \Big|_y}{\Delta y}$$





**Figura 5.3** Gradienti della velocità anche grandi possono causare nessun effetto viscoso (figura in alto) dato che la componente  $F_x^{\text{visc}}$  della forza viscosa per unità di volume non è determinata dalla pendenza della funzione  $u = u(y)$  ma dalla sua *curvatura* (figura in basso)

Facendo tendere a zero lo spessore orizzontale del volumetto, la componente non nulla della forza viscosa per unità di volume varrà

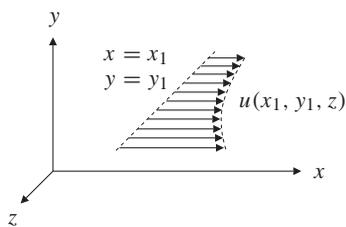
$$F_x^{\text{visc}} = \frac{d}{dy} \left( \mu \frac{du}{dy} \right).$$

Occorre però tenere presente che la velocità  $u$  dipende dalle tre coordinate spaziali, ovvero si ha in generale  $u = u(x, y, z)$ , per cui la derivata nella formula precedente è una derivata *parziale*, ovvero si risulta

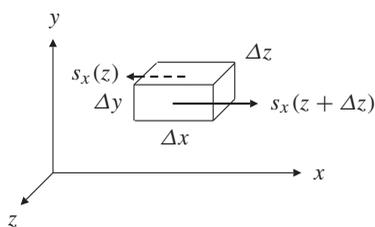
$$F_x^{\text{visc}} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Questo termine dovrà essere aggiunto nel secondo membro dell'equazione della quantità di moto, o meglio, nell'equazione relativa alla sua componente  $x$ . In particolare, se la viscosità dinamica è costante,  $\mu = \bar{\mu}$ , l'espressione precedente diventa

$$F_x^{\text{visc}} = \bar{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$



**Figura 5.4** La componente  $u$  della velocità varia in generale anche muovendosi parallelamente all'asse  $z$



**Figura 5.5** Contributo alla forza viscosa dovuto alla variazione di  $u$  lungo la direzione  $z$

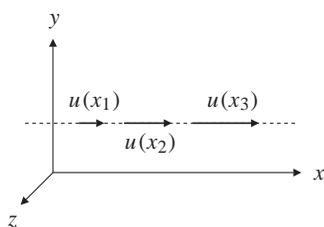
L'espressione del contributo di forza viscosa appena ricavato permette di capire perché gli effetti viscosi possono diventare molto importanti nello strato limite di una generica corrente viscosa. Il motivo è che il gradiente della velocità può diventare molto maggiore nello strato limite che non nelle altre parti della corrente, poiché in uno strato molto sottile può verificarsi una variazione molto grande della velocità in uno spessore molto sottile e quindi lo sforzo viscoso sarà corrispondentemente grande. A sua volta, la derivata dello sforzo viscoso potrà essere grande. Nello strato sottile in cui ciò si verifica, la forza viscosa deve pertanto essere tenuta in conto anche se la viscosità è tanto piccola da permettere di trascurarne gli effetti nelle altre regioni della corrente.

La forza per unità di volume appena trovata costituisce solo una parte della componente della forza lungo la direzione  $x$  dovuta alla viscosità del fluido. In realtà il campo di velocità, anche se ha solo la componente in direzione  $x$ , può variare anche muovendosi lungo l'altra direzione normale all'asse  $x$ , cioè parallelamente all'asse  $z$ , come mostrato in figura 5.4. È quindi necessario considerare anche la forza che agisce sul fluido contenuto nel volumetto attraverso le due superfici elementari verticali parallele all'asse  $x$ , di area  $\Delta x \Delta y$ . La componente nella direzione  $x$  del vettore sforzo viscoso che agisce sul fluido contenuto nel volumetto attraverso la faccia anteriore nella figura 5.5 è data da  $\mu \frac{\partial u(x, y, z + \Delta z)}{\partial z}$ , dal momento che il fluido davanti più veloce tende ad aumentare la velocità del fluido nel volumetto. Al contrario la componente  $x$  del vettore sforzo agente attraverso la faccia posteriore è data da  $-\mu \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z}$  poiché il fluido dietro più lento tende a ridurre la velocità del fluido nel volumetto. La componente  $x$  di questo secondo contributo della forza viscosa sarà allora data dalla differenza

$$\tilde{F}_x^{\text{visc}} = \left[ \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_{z+\Delta z} - \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_z \right] \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y \Delta z} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

avendo fatto tendere a zero lo spessore  $\Delta z$  del volumetto.

Da ultimo, la componente  $u$  della velocità potrà variare anche muovendosi lungo la direzione  $x$ , come schematizzato nella figura 5.6. Esiste un meccanismo di frenamento viscoso agente sulla velocità del fluido in direzione  $x$  che si esercita attraverso le due superfici elementari del volumetto perpendicolari alla direzione  $x$ , di area  $\Delta y \Delta z$ . Come sarà discusso nel paragrafo 5.9 nel caso generale comprimibile, questo frenamento viscoso, che si esercita sul fluido nella stessa direzione lungo la quale varia la velocità, fa intervenire anche un *altro* coefficiente di viscosità, diverso dal  $\mu$ . Tuttavia, nel caso particolare di correnti incompressibili, l'effetto di attrito viscoso in direzione parallela alla velocità fa intervenire solo il coefficiente di viscosità dinamica  $\mu$ , o meglio la sua



**Figura 5.6** La componente  $x$  della velocità varia in generale anche lungo la direzione  $x$





versione costante  $\bar{\mu}$ . Si mostrerà infatti che il terzo contributo alla componente  $x$  della forza viscosa per unità di volume è dato da

$$\tilde{F}_x^{\text{visc}} = \bar{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{corrente incomprimibile}$$

ovvero ha la stessa forma dei due precedenti associati alle variazioni trasversali della velocità. Sommando ora i tre contributi trovati si ottiene la componente  $x$  della forza viscosa per unità di volume agente in ogni punto del fluido:

$$F_x^{\text{visc}} = \bar{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bar{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \bar{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \bar{\mu} \nabla^2 u,$$

dove  $\nabla^2$  rappresenta quindi l'operatore laplaciano. Il risultato trovato è valido per ognuna delle tre componenti cartesiane della velocità. Sommando quindi le tre relazioni per le tre componenti cartesiane del vettore sforzo si ottiene l'espressione vettoriale della forza per unità di volume agente nel fluido in una corrente incomprimibile

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{visc}} &= (\bar{\mu} \nabla^2 u) \hat{\mathbf{x}} + (\bar{\mu} \nabla^2 v) \hat{\mathbf{y}} + (\bar{\mu} \nabla^2 w) \hat{\mathbf{z}} \\ &= \bar{\mu} \nabla^2 (u \hat{\mathbf{x}} + v \hat{\mathbf{y}} + w \hat{\mathbf{z}}) \\ &= \bar{\mu} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \text{corrente incomprimibile.} \end{aligned}$$

Dividendo questa grandezza per la densità uniforme  $\bar{\rho}$  del fluido, si ottiene la forza viscosa per unità di massa  $\mathbf{f}^{\text{visc}} = \mathbf{F}^{\text{visc}}/\bar{\rho}$  che risulta essere data dalla (notevolmente) semplice espressione:

$$\mathbf{f}^{\text{visc}} = \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \text{corrente incomprimibile.}$$

## 5.3 Equazioni di Navier–Stokes incomprimibili

Includendo la forza viscosa per unità di massa  $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$  nel secondo membro dell'equazione dinamica della velocità dedotta nel paragrafo 2.3, il sistema delle due equazioni che governano la corrente incomprimibile di un fluido viscoso (newtoniano) avente densità uniforme assume la forma seguente

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\bar{\rho}} &= \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned}$$

Questo sistema è noto con il nome di **equazioni di Navier–Stokes per le correnti incomprimibili**. Il sistema è costituito da due equazioni, la prima vettoriale e la seconda scalare, nelle due funzioni incognite  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  e  $P(\mathbf{r}, t)$ , essendo  $\bar{\rho}$  una costante nota. Pertanto il sistema ha tante equazioni quante incognite e può essere risolto una volta completato con le necessarie condizioni iniziali e al contorno.

Come nel caso delle equazioni di Eulero, per correnti incomprimibili, la pressione è presente nel sistema onde fornire i gradi di libertà necessari per potere imporre la condizione d'incomprimibilità sul campo della velocità. Tecnicamente si esprime questo fatto dicendo che  $P(\mathbf{r}, t)$  costituisce il **moltiplicatore di Lagrange** associato al vincolo  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  che deve essere soddisfatto dalla velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  in ogni punto  $\mathbf{r}$  e in ogni istante  $t$ .

Il campo della forza esterna  $\mathbf{g}$  potrà anche essere diverso dal campo gravitazionale e in generale potrà dipendere dallo spazio ed eventualmente anche dal tempo, ovvero,  $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$ .





### Approfondimento 1 Equazioni di Navier–Stokes in coordinate cilindriche

Se la regione in cui si muove il fluido è assisimmetrica, ossia è invariante per rotazioni attorno a un asse che chiameremo asse  $z$ , allora è conveniente utilizzare un sistema di coordinate cilindriche per descrivere il moto del fluido. Ricordando le equazioni di Eulero in coordinate cilindriche ricavate nel paragrafo 3.3, le equazioni di Navier–Stokes in coordinate cilindriche si ottengono aggiungendo il termine viscoso, che è riportato nel paragrafo A.8 dell’appendice A. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_R}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_R}{\partial R} + \frac{u_\theta}{R} \left( \frac{\partial u_R}{\partial \theta} - u_\theta \right) + u_z \frac{\partial u_R}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} \\ = \nu \left( \nabla^2 u_R - \frac{u_R}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_\theta}{\partial R} + \frac{u_\theta}{R} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_R \right) + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{\rho R} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ = \nu \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{R^2} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} \right), \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_z}{\partial R} + \frac{u_\theta}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \nu \nabla^2 u_z, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial (R u_R)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \end{aligned}$$

dove l’operatore laplaciano in coordinate cilindriche è

$$\nabla^2 u = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial u}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Nel caso particolare in cui il campo di velocità iniziale  $\mathbf{u}_0$  e le condizioni al contorno sono assisimmetrici, ossia indipendenti da  $\theta$ , sono possibili soluzioni del campo di moto aventi la stessa simmetria di invarianza per rotazioni attorno all’asse, del tipo

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(R, z, t) \quad \text{e} \quad P = P(R, z, t).$$

Questi campi sono governati dalle equazioni di Navier–Stokes per correnti incompressibili assisimmetriche che si ottengono dalle precedenti eliminando tutti i termini contenenti la derivata rispetto a  $\theta$ , ovvero,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_R}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_R}{\partial R} + u_z \frac{\partial u_R}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{R} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} = \nu \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial u_R}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 u_R}{\partial z^2} - \frac{u_R}{R^2} \right], \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_z}{\partial R} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \nu \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial u_z}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right], \\ \frac{1}{R} \frac{\partial (R u_R)}{\partial R} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_\theta}{\partial R} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_\theta u_R}{R} = \nu \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial u_\theta}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{u_\theta}{R^2} \right]. \end{aligned}$$

L’equazione per  $u_\theta$  è stata scritta per ultima perché in molte correnti assisimmetriche il fluido si muove solo nei piani assiali (assenza di “swirl”) per cui  $u_\theta = 0$ .





Se inoltre la componente di “swirl” è nulla e quindi la velocità è nei piani assiali, le equazioni di Navier–Stokes in coordinate cilindriche per correnti assisimmetriche diventano il seguente sistema di sole tre equazioni

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_R}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_R}{\partial R} + u_z \frac{\partial u_R}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} &= \nu \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial u_R}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 u_R}{\partial z^2} - \frac{u_R}{R^2} \right], \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_z}{\partial R} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= \nu \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial u_z}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right], \\ \frac{1}{R} \frac{\partial (R u_R)}{\partial R} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0.\end{aligned}$$

### Approfondimento 2 Equazioni di Navier–Stokes in coordinate sferiche

Se la regione in cui si muove il fluido è delimitata da due superfici sferiche concentriche, allora è conveniente utilizzare un sistema di coordinate sferiche per descrivere il moto del fluido. Ricordando le equazioni di Eulero in coordinate sferiche ricavate nel paragrafo 3.3, le equazioni di Navier–Stokes per le correnti incomprimibili in coordinate sferiche assumono la forma seguente

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{u_\phi}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - u_\phi \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \\ = \nu \left[ \nabla^2 u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right], \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \cos \theta u_\phi \right) + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ = \nu \left[ \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right], \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \cos \theta u_\theta \right) + u_r \right] + \frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} \\ = \nu \left[ \nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \right], \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = 0,\end{aligned}$$

dove l’operatore di Laplace in coordinate sferiche è

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}.$$

Nel caso particolare in cui il campo di velocità iniziale  $\mathbf{u}_0$  e le condizioni al contorno sono assisimmetrici, ossia indipendenti da  $\phi$ , sono possibili soluzioni del campo di moto aventi la stessa simmetria di invarianza per rotazioni attorno all’asse, del tipo

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, \theta, t) \quad \text{e} \quad P = P(r, \theta, t).$$





I campi  $\mathbf{u}(r, \theta, t)$  e  $P(r, \theta, t)$  sono allora governati dalle equazioni di Navier–Stokes per le correnti incompressibili assisimmetriche che si ottengono dalle precedenti eliminando tutti i termini contenenti la derivata rispetto a  $\phi$ , ovvero,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) - \frac{u_\phi^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \\ &= \nu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \right], \\ & \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) - \frac{\cot \theta u_\phi^2}{r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ &= \nu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right], \\ & \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r} (\cot \theta u_\theta + u_r) \\ &= \nu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \right) - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right], \\ & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) = 0. \end{aligned}$$

## 5.4 Condizione iniziale e condizione al contorno

Le equazioni di Navier–Stokes sono delle equazioni differenziali alle derivate parziali e da sole non costituiscono ancora un problema completo. Infatti, come in qualunque problema differenziale, queste equazioni richiedono la specificazione di alcune condizioni supplementari per ottenere un problema ben posto, un problema cioè che ammetta una soluzione unica (in un senso opportuno) almeno nei casi più semplici.

Come abbiamo già accennato nel capitolo 3 sulle equazioni di Eulero incompressibili, condizioni supplementari sono ad esempio necessarie per potere risolvere qualunque problema di dinamica di un punto materiale. In questo caso la legge fondamentale della dinamica  $d^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{f}(\mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt)$  è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine per l'incognita  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , che rappresenta il vettore posizione del corpo, la cui soluzione richiede di specificare le due *condizioni iniziali*  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$  e  $d\mathbf{r}(0)/dt = \mathbf{v}_0$ . Nel caso delle equazioni di Navier–Stokes è invece necessario specificare una *sola* condizione iniziale (vettoriale): la **velocità iniziale** del fluido in ogni punto, ovvero,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}),$$

dove  $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$  è un campo di velocità noto. In effetti, l'equazione evolutiva della velocità è del primo ordine nel tempo, dato che la posizione delle particelle del fluido è estranea alla descrizione euleriana del suo moto. Non esiste invece nessuna condizione iniziale per la pressione dato che non c'è alcuna equazione d'evoluzione per questa variabile, che sappiamo essere nelle correnti incompressibili un semplice moltiplicatore di Lagrange. È pertanto un errore credere che sia necessario specificare il campo di pressione iniziale.

Ma le equazioni di Navier–Stokes, come quelle di Eulero, sono differenziali anche dal punto di vista *spaziale* in quanto esse contengono anche le derivate rispetto alle coordinate spaziali: il gradiente, la divergenza, l'operatore di derivata direzionale ma



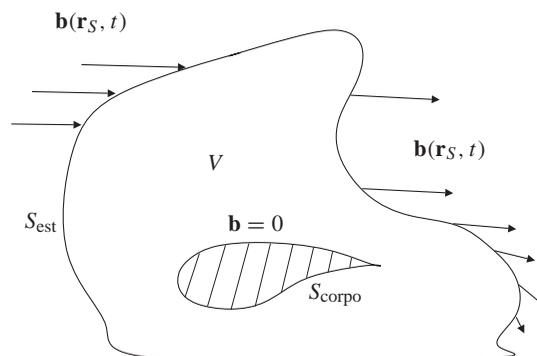


soprattutto l'operatore laplaciano. Come conseguenza, per ottenere un problema che possa avere una sola soluzione, occorre specificare le opportune *condizioni al contorno*. Il tipo di condizioni che possono o debbono essere fornite dipende dal tipo di equazioni e dalla natura del contorno nel problema in esame.

Senza alcuna pretesa di analizzare questo aspetto in modo completo, nel caso delle equazioni per correnti incompressibili di un fluido viscoso abbiamo una condizione al contorno *vettoriale* da imporre su tutta la frontiera del dominio  $V$  in cui si studia il moto del fluido. Questo deriva dal fatto che l'equazione della quantità di moto è vettoriale e in essa è presente il laplaciano dell'incognita  $\mathbf{u}$ . La condizione al contorno consiste allora nello specificare il vettore velocità  $\mathbf{u}$  su tutta la frontiera  $S = \partial V$  e sarà scritta nel modo seguente

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|_S = \mathbf{b}(\mathbf{r}_S, t)$$

con  $\mathbf{r}_S \in S$ . Il **valore al contorno**  $\mathbf{b}(\mathbf{r}_S, t)$  della velocità deve essere specificato per ogni punto  $\mathbf{r}_S \in S$  e ogni istante  $t > 0$ , come rappresentato schematicamente nella figura 5.7 riferita a un tipico problema di corrente attorno a un profilo alare. Si noti che la funzione  $\mathbf{b}(\mathbf{r}_S, t)$  è vettoriale e che la sua variabile spaziale è indicata con  $\mathbf{r}_S$  per evidenziare che il dominio di tale variabile è limitato alla sola frontiera  $S$ , che nel caso in figura diventa  $S = S_{\text{est}} \cup S_{\text{corpo}}$ .



**Figura 5.7** Dominio e condizioni al contorno per una corrente incompressibile viscosa

La condizione al contorno per il vettore velocità è molto più forte di quella che è stata usata nello studio delle correnti non viscoso. La differenza fondamentale è che l'inclusione del termine viscoso nell'equazione della quantità di moto ha aumentato l'ordine dell'equazione differenziale alle derivate parziali di uno. Pertanto la vera condizione al contorno della realtà fisica è inclusa nel modello di Navier–Stokes mentre non poteva essere soddisfatta nel modello delle equazioni di Eulero.

Nel caso particolare in cui una parte del contorno coincide con un corpo solido fermo che non permette né il passaggio del fluido attraverso la sua superficie né lo scivolamento del fluido su di esso, la condizione per la velocità su questa parte del contorno diventa omogenea

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|_{\text{corpo fermo}} = 0.$$

Questa condizione al contorno include:

- La condizione di annullamento della componente tangente della velocità, che si chiama condizione al contorno di **adesione** o di **aderenza**, in inglese **no slip condition**. Questa condizione è propria del modello fisico di fluido viscoso che non permette uno slittamento del fluido sulle pareti dei corpi solidi e vale per ogni fluido con viscosità  $\nu \neq 0$ , per quanto piccolo possa essere il valore di  $\nu$ .
- La condizione di annullamento della componente della velocità normale al corpo, detta di **non penetrazione**, che è invece comune a qualunque modello di fluido indipendentemente dal suo carattere viscoso o non viscoso.





Senza timore di essere ripetitivi, sottolineiamo che le condizioni supplementari sono altrettanto importanti delle equazioni differenziali che governano il moto del fluido. In realtà, il tipo di condizioni che è lecito e necessario imporre è legato strettamente alla natura delle equazioni differenziali stesse, sicché le condizioni iniziali e al contorno possono essere considerate come una parte integrante del sistema di equazioni da risolvere. Ad esempio, un elemento distintivo delle due equazioni di Navier–Stokes è l’assenza di un termine con derivata temporale (prima) nella seconda equazione, cioè nella condizione d’incompressibilità. Corrispondentemente, in questo sistema la pressione iniziale non può essere imposta, anzi sarebbe sbagliato pensare di farlo.

Una volta completato dalle sue condizioni supplementari, iniziali e al contorno, il sistema delle equazioni di Navier–Stokes costituirà il seguente *problema completo*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho} &= \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{r}), \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|_S &= \mathbf{b}(\mathbf{r}_S, t). \end{aligned}$$

I termini con il laplaciano della velocità e il gradiente della pressione sono scritti nel primo membro dell’equazione perché le due variabili  $\mathbf{u}$  e  $P$  sono entrambe incognite del sistema (la densità  $\bar{\rho}$  è invece una costante nota).

Questo problema presenta la stessa situazione paradossale che abbiamo incontrato nel paragrafo 3.4 discutendo le equazioni di Eulero per correnti incompressibili. Se i campi  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  e  $P(\mathbf{r}, t)$  soddisfano le equazioni e le condizioni del problema, e quindi forniscono una sua soluzione, allora anche la coppia  $[\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), P(\mathbf{r}, t) + C(t)]$ , dove  $C(t)$  è una funzione arbitraria, è soluzione delle medesime equazioni e condizioni. Questo si verifica facilmente sostituendo questi campi nelle equazioni e nelle condizioni e osservando che  $\nabla C(t) = 0$  in quanto la funzione  $C(t)$  non dipende da  $\mathbf{r}$ .

Pertanto, data una soluzione del problema delle equazioni di Navier–Stokes incompressibili, esistono infinite altre soluzioni che differiscono soltanto per il valore di riferimento della pressione, valore che può inoltre essere scelto arbitrariamente in ogni istante. Come nel caso non viscoso, questa situazione è conseguenza dell’ipotesi d’incompressibilità, posta alla base del sistema di equazioni in esame, ma deriva anche dall’aver considerato un problema in cui la velocità (o meglio la sua componente normale) è prescritta su *tutto* il contorno  $S$ ; quest’ultima situazione è tipica del moto di un fluido contenuto in una regione delimitata da pareti rigide (correnti confinate).

Dal punto di vista fisico, il valore *assoluto* della variabile termodinamica pressione non può essere variato senza che questo si rifletta sulle altre variabili termodinamiche del fluido. Quindi siamo di fronte a un’incongruenza fra la descrizione teorica fornita dalle equazioni di Navier–Stokes per correnti incompressibili e i principi della termodinamica. In effetti, come si è già accennato nei paragrafi 2.4 e 2.5, l’introduzione dell’ipotesi d’incompressibilità ha eliminato ogni considerazione termodinamica dal quadro descrittivo del moto del fluido. Pertanto il paradosso dell’arbitrarietà del livello della pressione delle correnti incompressibili in una regione confinata è una conseguenza diretta dell’ipotesi d’incompressibilità del fluido e questo paradosso scompare nell’ambito della dinamica dei fluidi comprimibili.

Notiamo infine che nei problemi in cui il fluido entra nel dominio (correnti aperte e correnti esterne) è possibile specificare il valore della pressione su una parte del contorno al posto di quello della velocità normale. In questi casi il campo di pressione relativo alla soluzione delle equazioni incompressibili non risente più dell’arbitrarietà riscontrata nel caso delle correnti confinate. Inoltre il campo trovato è definito univocamente in modo assoluto poiché la variabile  $P$  compare direttamente in una condizione al contorno e non solo come argomento dell’operatore gradiente.





### Condizioni di compatibilità dei e fra i dati

Analogamente a quanto visto nel paragrafo 3.4 per il problema incomprimibile di un fluido non viscoso, i dati delle condizioni supplementari iniziale e al contorno,  $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{b}(\mathbf{r}_S, t)$ , del problema incomprimibile viscoso considerato non possono essere assegnati in modo del tutto libero e indipendentemente l'uno dall'altro. Questa limitazione è del tutto evidente riguardo il campo della velocità iniziale  $\mathbf{u}_0$  che, essendo la corrente incomprimibile, dovrà necessariamente essere a divergenza nulla. In altre parole il campo di velocità iniziale  $\mathbf{u}_0$  deve soddisfare la condizione di compatibilità

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0.$$

Ma anche il dato al contorno  $\mathbf{b}(\mathbf{r}_S, t)$  non può essere scelto in modo completamente arbitrario. Infatti, integrando su tutta la superficie  $S$  la componente normale della velocità  $\mathbf{b}(\mathbf{r}_S, t)$  prescritta sul contorno, si ottiene immediatamente

$$\oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|_S = \oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}_S, t),$$

per ogni istante di tempo  $t > 0$ . D'altra parte, in virtù del teorema della divergenza l'integrale del primo membro si può trasformare in un integrale di volume, ovvero,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}_S, t),$$

e, siccome il campo della velocità deve essere a divergenza nulla  $\forall t > 0$ , tale integrale è nullo e quindi deve necessariamente essere

$$\oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}_S, t) = 0$$

per ogni  $t > 0$ . Questa è una condizione di compatibilità globale che la componente normale del dato al contorno  $\mathbf{b}(\mathbf{r}_S, t)$  deve rispettare per ogni  $t > 0$  affinché il campo di velocità possa soddisfare sempre il vincolo d'incomprimibilità.

Infine, esiste un'ulteriore condizione che esprime la compatibilità *fra* il dato iniziale e il dato al contorno, su  $S$  e per  $t = 0$ , che ha la forma seguente

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}_0(\mathbf{r})|_S = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}_S, 0),$$

e che risulta utile nello studio delle correnti attorno a corpi che partono in modo impulsivo, argomento sul quale non ci soffermiamo.

L'insieme delle tre condizioni di compatibilità nel caso del problema viscoso è quindi dato da

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0,$$

$$\oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}_S, t) = 0,$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}_0(\mathbf{r})|_S = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}_S, 0).$$

Nei problemi stazionari non esiste alcun dato iniziale e il valore prescritto sul contorno per la velocità non dipende dal tempo, abbiamo cioè  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{r}_S)$ , per cui esiste la sola condizione di compatibilità

$$\oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}_S) = 0.$$





## 5.5 Equazioni adimensionali: il numero di Reynolds

Consideriamo una corrente incompressibile attorno a un corpo di forma assegnata avente **lunghezza caratteristica**  $L$  e supponiamo che il fluido si muova con una **velocità caratteristico**  $U$ . Ad esempio, se consideriamo la corrente attorno a una sfera,  $L$  potrebbe essere il raggio della sfera o anche il suo diametro, e  $U$  potrebbe essere la velocità del fluido all'infinito. Supponiamo inoltre di conoscere i valori  $\bar{\rho}$  e  $\mu$  della densità e viscosità del fluido utilizzato in un determinato esperimento. Nelle equazioni e nelle condizioni al contorno che governano la corrente compaiono quattro parametri:  $L$ ,  $U$ ,  $\bar{\rho}$  e  $\mu$ . A prima vista sembrerebbe necessario esaminare una serie di casi, per valori diversi di  $L$ , poi di  $U$ , poi ancora di  $\bar{\rho}$  e così via, ma invece le cose non stanno in questo modo. Tutte le correnti possibili differenti corrispondono a valori differenti di un solo parametro. Questo è un fatto generale di notevole importanza per le correnti viscoso.

Una volta che sia stata stabilita la forma del corpo attorno al quale scorre il fluido, tutte correnti incompressibili viscoso possibili attorno a tale forma costituiscono una famiglia a un solo parametro di soluzioni. Ad esempio, la densità e la viscosità dinamica compaiono nell'equazione del momento della quantità di moto solo attraverso il loro rapporto  $\mu/\bar{\rho}$ , che definisce la viscosità cinematica  $\nu$ . Questo riduce a tre il numero di parametri indipendenti. Ma questa riduzione può essere sviluppata ulteriormente mediante un processo nel quale le varie grandezze aventi le loro proprie dimensioni fisiche vengono sostituite da variabili senza dimensioni (ovvero adimensionali) utilizzando alcune grandezze di riferimento che definiscono le scale della corrente considerata. La scelta dei valori di riferimento  $L$  e  $U$  determina una scala per la variabile temporale  $t$  mediante la relazione evidente  $T = L/U$ .

Una volta introdotta le grandezze caratteristiche  $L$  e  $U$ , possiamo misurare le grandezze  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{u}$  e  $t$  come frazioni rispetto alle quantità caratteristiche, introducendo le seguenti **variabili adimensionali**:

$$\tilde{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T} = \frac{Ut}{L}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{U}.$$

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte, la derivata parziale rispetto al tempo si trasformerà nel modo seguente

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d\tilde{t}}{dt} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$$

dove il primo operatore agisce su una funzione delle variabili  $\mathbf{r}$  e  $t$  mentre il secondo agisce su una funzione delle variabili adimensionali  $\tilde{\mathbf{r}}$  e  $\tilde{t}$ . Analogamente, per la derivata rispetto allo spazio risulta

$$\nabla = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\mathbf{r}} \tilde{\nabla} = \frac{1}{L} \tilde{\nabla},$$

dove  $\tilde{\nabla}$  rappresenta l'operatore gradiente rispetto alle coordinate adimensionali  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{\mathbf{r}}$ . In modo simile, ricordando che  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ , l'operatore laplaciano si trasformerà nel modo seguente

$$\nabla^2 = \frac{1}{L^2} \tilde{\nabla}^2.$$

Esprimiamo ora la velocità dimensionale, incognita originaria del problema incompressibile, in termini della corrispondente variabile adimensionale,  $\mathbf{u} = U \tilde{\mathbf{u}}$ , e sostituiamo nell'equazione della quantità di moto (privata del termine di forza esterna  $\mathbf{g}$ ):

$$\frac{1}{T} \frac{\partial(U \tilde{\mathbf{u}})}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{L} ((U \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \tilde{\nabla})(U \tilde{\mathbf{u}}) - \nu \frac{1}{L^2} \tilde{\nabla}^2(U \tilde{\mathbf{u}}) + \frac{1}{L} \frac{\tilde{\nabla} P}{\bar{\rho}} = 0.$$





Ricordando che  $T = L/U$  abbiamo

$$\frac{U^2}{L} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \frac{U^2}{L} (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}} - \nu \frac{U}{L^2} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{L} \frac{\tilde{\nabla} P}{\bar{\rho}} = 0.$$

Moltiplicando tutti i termini per  $L/U^2$  si ottiene

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}} - \frac{\nu}{LU} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\nabla} \tilde{P} = 0,$$

dove è stata introdotta la **pressione adimensionale**  $\tilde{P} = P/(\bar{\rho}U^2)$ . Il rapporto  $\nu/(LU)$  è un numero puro (privo cioè di dimensioni) e il suo reciproco è chiamato **numero di Reynolds**:

$$\text{Re} = \frac{LU}{\nu} = \frac{\bar{\rho}LU}{\mu}.$$

Esso permette di scrivere l'equazione della quantità di moto nella classica forma adimensionale

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}} - \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\nabla} \tilde{P} = 0.$$

In pratica, una volta effettuata la riduzione alle variabili adimensionali e introdotto il numero di Reynolds, tutte le variabili indipendenti e le variabili incognite sono scritte eliminando il simbolo tilde, per cui le equazioni di Navier–Stokes in forma adimensionale saranno scritte semplicemente

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla P &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned}$$

Per capire l'utilità del numero di Reynolds, consideriamo le correnti attorno a due sfere di raggi diversi, una corrente con una velocità  $U_\infty = 50$  m/s a grande distanza da una sfera di raggio  $a = 4$  cm e l'altra con  $U_\infty = 100$  m/s con raggio  $a = 2$  cm. Se scegliamo come  $L$  il raggio  $a$  e come  $U$  la velocità all'infinito  $U_\infty$ , allora il numero di Reynolds è lo stesso per entrambe le correnti. Le equazioni soddisfatte dalle variabili adimensionali sono quindi identiche per le due correnti.

Due correnti con la stessa geometria e lo stesso numero di Reynolds sono dette **simili**. Più precisamente, consideriamo i campi di velocità dimensionali  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  di due correnti nelle regioni  $V_1$  e  $V_2$  le quali sono in rapporto di scala secondo un fattore  $\lambda$ , così che  $L_1 = \lambda L_2$ . Supponiamo di avere scelto il valore  $U_1$  e  $U_2$  per ciascuna corrente e che le viscosità cinematiche dei rispettivi fluidi siano  $\nu_1$  e  $\nu_2$ . Se accade che

$$\text{Re}_1 = \text{Re}_2 \quad \text{ovvero} \quad \frac{L_1 U_1}{\nu_1} = \frac{L_2 U_2}{\nu_2},$$

allora i campi di velocità adimensionali  $\tilde{\mathbf{u}}_1$  e  $\tilde{\mathbf{u}}_2$  soddisfano esattamente le stesse equazioni nella stessa regione (adimensionale). Pertanto possiamo concludere che il campo della velocità dimensionale  $\mathbf{u}_1$  può essere ottenuto dalla soluzione  $\mathbf{u}_2$ , opportunamente riscalata, mediante la relazione  $\mathbf{u}_1 = \frac{U_1}{U_2} \mathbf{u}_2$ : in altre parole le due velocità  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  sono simili. Questo risultato è molto importante. Significa che possiamo determinare quale sia il moto di una corrente attorno a un'ala di aeroplano senza bisogno di costruire l'aeroplano e di provarlo. Possiamo invece realizzare un modello, tipicamente di dimensione ridotta, dell'aeroplano ed effettuare della misure utilizzando una velocità che dia lo stesso numero di Reynolds. È questo il principio che permette di utilizzare i risultati delle misure in galleria del vento su modelli di aeroplani o veicoli





per prevedere i valori delle grandezze corrispondenti negli oggetti reali. Ricordiamo che abbiamo trascurato la comprimibilità del fluido per cui il numero di Reynolds è il solo parametro che rimane nelle equazioni adimensionali, altrimenti interverrebbe un secondo numero adimensionale, dato dal rapporto della velocità di riferimento  $U$  e la velocità del suono nel fluido, chiamato numero di Mach, che è già stato introdotto nel paragrafo 2.8. Pertanto, quando la velocità del fluido è confrontabile con quella del suono al suo interno, le correnti in due situazioni diverse saranno uguali quando sia i loro numeri di Reynolds sono uguali sia i loro numeri di Mach sono uguali nelle due situazioni sperimentali.

Il significato fisico del numero di Reynolds  $Re$  è chiarito dal seguente ragionamento. Notiamo che le derivate delle componenti di  $\mathbf{u}$ , come ad esempio  $\partial u/\partial x$ , saranno tipicamente di ordine  $U/L$ , ovvero la componente  $u$  varia di una quantità di ordine  $U$  su distanze di ordine  $L$ . Tipicamente queste derivate avranno a loro volta variazioni di ordine  $U/L$  su distanze di ordine  $L$ , per cui le derivate seconde come  $\partial^2 u/\partial x^2$  saranno di ordine  $U/L^2$ . Infine il termine non lineare, chiamato spesso anche termine **inerziale**, avrà variazioni di ordine  $U \cdot U/L = U^2/L$ . Si ottengono così le seguenti stime dell'ordine di grandezza dei due termini principali dell'equazione della quantità di moto:

$$\text{termine non lineare : } |(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}| = O(U^2/L),$$

$$\text{termine viscoso : } |\nu \nabla^2 \mathbf{u}| = O(\nu U/L^2).$$

Se queste stime sono valide, si deduce che

$$\frac{\text{termine non lineare}}{\text{termine viscoso}} = O\left(\frac{U^2/L}{\nu U/L^2}\right) = O\left(\frac{LU}{\nu}\right) = O(Re).$$

Questo rapporto può essere interpretato

Il numero di Reynolds è quindi importante perché dà una stima indicativa della grandezza relativa dei due termini fondamentali dell'equazione della quantità di moto. Non sorprende pertanto che le correnti ad alto numero di Reynolds e quelle a basso numero di Reynolds abbiano caratteristiche generali del tutto diverse.

### Adimensionalizzazione alternativa

Esiste una scelta diversa della scala temporale per definire un tempo adimensionale che conduce ad una forma alternativa delle equazioni di Navier–Stokes adimensionali. Invece del tempo di riferimento  $L/U$  basato sulla lunghezza e sulla velocità di riferimento, è possibile prendere come scala temporale quella determinata dal fenomeno della diffusione viscosa della vorticità, che è data dal rapporto  $L^2/\nu$ . Questa scelta, assieme alle scale usuali  $L$  e  $U$  per le distanze e la velocità, e alla nuova scala  $\bar{\rho}\nu U/L$  per la pressione, permette di definire *nuove* variabili adimensionali secondo lo schema

$$\check{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{L}, \quad \check{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad \check{t} = t \frac{L^2}{\nu}, \quad \check{P} = P \frac{L}{\bar{\rho}\nu U}.$$

Esprimendo le grandezze e gli operatori dimensionali in termini delle nuove entità adimensionali, l'equazione della quantità di moto diventa

$$\frac{\nu U}{L^2} \frac{\partial \check{\mathbf{u}}}{\partial \check{t}} + \frac{U^2}{L} (\check{\mathbf{u}} \cdot \check{\nabla}) \check{\mathbf{u}} - \frac{\nu U}{L^2} \check{\nabla}^2 \check{\mathbf{u}} + \frac{\nu U}{L^2} \check{\nabla} \check{P} = 0.$$

Moltiplicando la relazione per  $L^2/(\nu U)$  si ottiene

$$\frac{\partial \check{\mathbf{u}}}{\partial \check{t}} + Re (\check{\mathbf{u}} \cdot \check{\nabla}) \check{\mathbf{u}} - \check{\nabla}^2 \check{\mathbf{u}} + \check{\nabla} \check{P} = 0,$$

che rappresenta una forma adimensionale alternativa a quella classica scritta in precedenza. Questa nuova forma è più comoda per analizzare il caso particolare di correnti nelle quali gli effetti associati al termine non lineare sono trascurabili, ovvero quando si considera il limite  $Re \rightarrow 0$ .





Nelle applicazioni si è molto interessati a correnti in cui il valore di  $Re$  è molto grande. Dobbiamo sottolineare che non si può dire che “se  $\nu$  è piccolo allora gli effetti viscosi non sono importanti”, in quanto questo ragionamento non considera le altre dimensioni del problema. In altre parole, “ $\nu$  è piccolo” è un’affermazione priva di significato fisico a meno che non sia stata scelta qualche scala per la lunghezza e la velocità, mentre “ $\frac{1}{Re}$  è piccolo” è un’affermazione avente significato.

### Correnti ad alti numeri di Reynolds

Il caso  $Re \gg 1$  corrisponde a una corrente di un fluido in cui gli effetti viscosi sono trascurabili rispetto a quelli inerziali del termine non lineare. Per le correnti incomprimibili di un fluido non viscoso attorno a una sfera o a un cilindro calcolate nel capitolo precedente il numero di Reynolds non può essere definito, ma questi problemi possono essere considerati come il caso limite per  $Re \rightarrow \infty$  e  $\mu \rightarrow 0$ . Tuttavia, anche con  $Re$  molto grande sono comunque sempre presenti effetti viscosi localizzati in uno strato sottile di fluido vicino alla superficie del corpo e in una scia a valle di esso. In queste regioni il valore molto grande delle variazioni locali del gradiente della velocità rende il termine viscoso maggiore della stima considerata in precedenza. Nel capitolo 6 si mostrerà che lo spessore tipico  $\delta$  nello strato di fluido vicino al corpo, chiamato **strato limite** è di ordine

$$\frac{\delta}{L} \propto \frac{1}{\sqrt{Re}}.$$

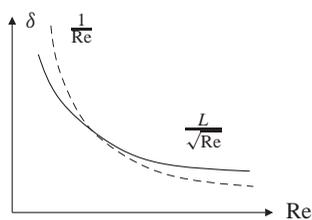
Tanto maggiore è il numero di Reynolds tanto minore è lo spessore dello strato limite, secondo la relazione di ordine che si scrive anche come  $\delta/L = O(Re^{-1/2})$ . poiché, dopo il

Un numero di Reynolds elevato è necessario per potere applicare la teoria delle correnti non viscosi nella maggior parte del campo di moto, ma non è sufficiente. Nelle correnti reali può verificarsi il fenomeno della **separazione dello strato limite** consistente nella deviazione improvvisa delle linee di corrente dalla superficie del corpo. Quando questo accade, la corrente osservata è molto diversa da quella ricavabile dalla teoria non viscosa **punto di separazione** della corrente, dietro al corpo è presente una **scia** e il moto del fluido può diventare instazionario. In effetti, ai numeri di Reynolds elevati le correnti stazionarie diventano spesso *instabili* alle perturbazioni. Questa instabilità spesso è il preludio della *transizione* della corrente a un regime *turbolento*. È stato proprio nel contesto dello studio dell’origine dell’instabilità che Reynolds introdusse per primo il parametro adimensionale (numero puro) che porta il suo nome.

### Correnti con numero di Reynolds tendente a zero

Nelle correnti a basso numero di Reynolds si può osservare un fenomeno molto interessante di reversibilità apparente del moto del fluido. Un esperimento che mostra tale fenomeno consiste nel marcare con del colorante una porzione, ad esempio di forma sferica, di un fluido trasparente, che riempie lo spazio compreso fra due superfici cilindriche di raggio diverso. Il fluido è inizialmente fermo e viene messo in movimento dalla lenta rotazione di una delle due superfici del contenitore, in modo che il numero di Reynolds sia molto piccolo, dell’ordine di  $10^{-2}$  o anche inferiore. Numeri di Reynolds di questo ordine si ottengono facilmente in fluidi molto viscosi, come ad esempio la glicerina e contraddistinguono campi di velocità estremamente regolari, per cui non c’è alcun segno di disordine nel moto del fluido.

Nel corso dell’esperimento la sfera di fluido colorata si deforma progressivamente e si allunga fino a formare un nastro molto sottile, avvolto anche più di una volta intorno all’asse. Se, dopo alcuni giri, il cilindro viene fatto ruotare lentamente in senso contrario per lo stesso numero di giri fino a ritornare nella posizione iniziale, la sfera colorata si ricompone quasi nella stessa configurazione iniziale. La *reversibilità* quasi completa delle correnti a bassissimo numero di Reynolds aiuta a comprendere il modo di “nuotare” piuttosto insolito adottato da certi organismi microscopici, come ad esempio gli spermatozoi.



**Figura 5.8** Spessore  $\delta$  dello strato limite in funzione del numero di Reynolds





## 5.6 Soluzioni esatte per correnti stazionarie parallele

In questo paragrafo presentiamo alcune soluzioni analitiche delle equazioni di Navier–Stokes incompressibili nel caso di correnti stazionarie e parallele. Una corrente è detta **parallela** se il vettore velocità ha la stessa direzione in ogni punto. Le soluzioni che esamineremo risultano essere molto semplici in virtù della semplicità geometrica dei contorni che delimitano la regione occupata dal fluido e del carattere di tali regioni che si estendono all'infinito in una o due direzioni. Le equazioni di Navier–Stokes per correnti incompressibili e stazionarie sono

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho} = \mathbf{g},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

saranno risolte, una volta completate da opportune condizioni al contorno.

### Equazioni del moto fra due lastre piane parallele

Il caso più semplice di corrente incompressibile viscosa descrivibile mediante una soluzione analitica esatta delle equazioni di Navier–Stokes stazionarie è la corrente di un fluido fra due lastre piane infinite, poste a distanza  $h$  fra loro, di cui una si muove con velocità  $U$  costante e parallela alle lastre mentre l'altra è tenuta ferma (vedi figura 5.9). Consideriamo un sistema cartesiano con l'asse  $x$  diretto nella stessa direzione della velocità della lastra in moto,  $\mathbf{U} = U\hat{\mathbf{x}}$ , l'asse  $y$  perpendicolare alle due lastre e l'origine del sistema posta in un punto qualunque della lastra ferma. Allora il piano  $y = 0$  coincide con la superficie della lastra ferma, mentre il piano  $y = h$  coincide con la superficie della lastra in moto.

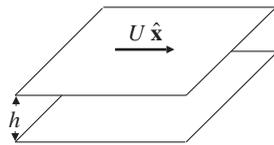


Figura 5.9 Regione della corrente fra due lastre piane parallele

Supponendo che il moto del fluido fra le due lastre sia bidimensionale, prenderemo l'asse  $z$  perpendicolare al piano del moto del fluido. In base alle condizioni di moto delle pareti che delimitano il fluido, si può supporre che la velocità  $\mathbf{u}$  abbia diversa da zero solo la componente  $x$ . Assumeremo quindi che le variabili incognite delle equazioni di Navier–Stokes per la corrente piana stazionaria siano della forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = [u(x, y), 0, 0] = u(x, y)\hat{\mathbf{x}} \quad \text{e} \quad P(\mathbf{r}) = P(x, y).$$

Tali incognite dovranno allora essere soluzione del seguente sistema di equazioni in due dimensioni

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

dove  $\nabla^2$  indica l'operatore di Laplace bidimensionale nel piano  $x$ - $y$  e dove abbiamo supposto di potere trascurare l'effetto della forza di volume esterna  $\mathbf{g}$  eventualmente presente. Nel caso in cui questa forza sia esprimibile mediante il gradiente di un'energia potenziale, il suo effetto potrebbe comunque essere tenuto in conto come una semplice correzione esplicita della pressione.

Vediamo quali sono le conseguenze delle due equazioni e dell'ipotesi  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u(x, y)\hat{\mathbf{x}}$ . Dalla condizione d'incompressibilità si ottiene

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

per cui la velocità può dipendere solo dalla coordinata  $y$ :  $u = u(y)$  e quindi avremo  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u(y)\hat{\mathbf{x}}$ . Allora, per quanto riguarda il termine convettivo non lineare, avremo

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = (u(y)\hat{\mathbf{x}} \cdot \nabla)(u(y)\hat{\mathbf{x}}) = u(y)\frac{\partial u(y)}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} = 0,$$





e quindi esso è nullo. Per quanto riguarda il termine viscoso avremo invece

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (u(y) \hat{\mathbf{x}}) = \frac{d^2 u(y)}{dy^2} \hat{\mathbf{x}},$$

dove si è usata la notazione delle derivate ordinarie. Tenendo conto di questi risultati, l'equazione (vettoriale) della quantità di moto diventa quindi

$$\nu \frac{d^2 u}{dy^2} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\nabla P}{\rho} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

nelle due funzioni incognite  $u = u(y)$  e  $P = P(x, y)$ , dove  $\bar{\mu} = \bar{\rho} \nu$ . La componente  $y$  di tale equazione è  $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$  per cui la pressione può dipendere solo dalla coordinata  $x$ , ovvero deve essere  $P(x, y) = P(x)$ , per cui l'equazione della componente  $x$  della quantità di moto diventa

$$\frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{dP}{dx} = 0.$$

Questa equazione è del tipo  $f(y) - g(x) = 0$ . Ma  $x$  e  $y$  sono variabili indipendenti, ovvero devono potere variare in modo indipendente, la relazione può essere soddisfatta solo se le funzioni  $f$  e  $g$  sono entrambe costanti e le due costanti coincidono. Introduciamo pertanto tale costante scrivendola come **gradiente di pressione**

$$G_P = \left( \frac{dP}{dx} \right)_{\text{cost}}$$

dove l'indice inferiore  $\text{cost}$  è usato per ricordare che la derivata della pressione non è una funzione di  $x$  ma deve essere una costante. Un gradiente positivo ( $G_P > 0$ ) comporta una spinta sul fluido nel verso negativo dell'asse  $x$  mentre un gradiente negativo ( $G_P < 0$ ) comporta una spinta nel verso positivo dell'asse  $x$ : il fluido è sempre spinto nella direzione in cui  $P$  diminuisce. La pressione lungo l'intercapedine fra le due lastre avrà quindi l'andamento lineare

$$P(x) = P_0 + G_P x,$$

dove  $P_0$  è una costante arbitraria, mentre la velocità  $u = u(y)$  fra le due piastre dovrà soddisfare l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{G_P}{\bar{\mu}}$$

assieme alle condizioni al contorno della velocità sulle due lastre.

### Corrente di Couette piana

Supponiamo ora che non esista alcun gradiente della pressione nel fluido fra le due lastre per cui  $G_P = 0$  e quindi  $P = \text{costante}$  e che inoltre le condizioni al contorno siano quelle con la lastra inferiore ferma e quella superiore traslante con velocità orizzontale  $U$  assegnata. In questo caso il problema da risolvere per  $u(y)$  è

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0, \quad u(0) = 0 \quad \text{e} \quad u(h) = U.$$

Integrando due volte l'equazione differenziale si ottiene immediatamente

$$u(y) = Ay + B.$$

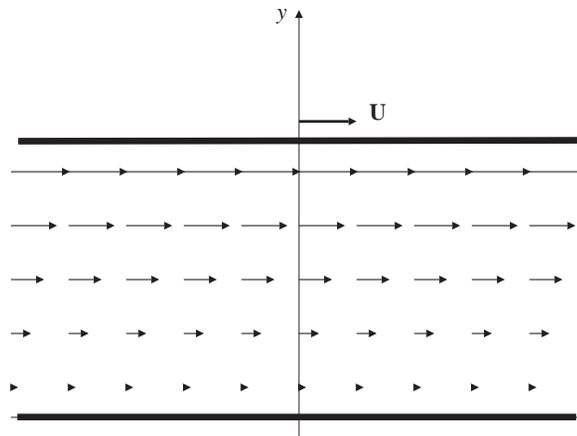




Imponendo prima la condizione al contorno sulla lastra ferma,  $u(0) = 0$ , si ottiene  $B = 0$ , e poi la condizione al contorno sulla lastra in moto,  $u(h) = U$ , si ottiene  $A = U/h$ , per cui la soluzione è

$$u(y) = U \frac{y}{h},$$

per  $0 \leq y \leq h$ , ovvero un profilo di velocità lineare fra le due lastre. Questa corrente si chiama **corrente di Couette (piana)** ed è mostrata nella figura 5.10.



**Figura 5.10** Campo di velocità della corrente di Couette (piana)

Calcoliamo ora il vettore sforzo viscoso nel fluido relativamente a superfici parallele ai piani delle lastre. Partiamo dalla relazione (vedi paragrafo 5.9)

$$\mathbf{s}_{\hat{\mathbf{n}}} = \bar{\mu} [2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}]$$

che esprime la forza per unità di area causato dall'attrito viscoso che il fluido da una parte di una superficie esercita attraverso di essa sul fluido posto dall'altra parte, essendo la normale  $\hat{\mathbf{n}}$  diretta verso il fluido agente. Se consideriamo una superficie parallela ai piani delle lastre, la normale uscente  $\hat{\mathbf{n}}$  è uguale a  $\hat{\mathbf{y}}$ , avremo quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{\hat{\mathbf{y}}} &= \bar{\mu} [2(\hat{\mathbf{y}} \cdot \nabla)(u(y) \hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{y}} \times \nabla \times (u(y) \hat{\mathbf{x}})] \\ &= \bar{\mu} \left[ 2 \frac{du(y)}{dy} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} \times \left( -\frac{du(y)}{dy} \hat{\mathbf{z}} \right) \right] \\ &= \bar{\mu} \left[ 2 \frac{du(y)}{dy} \hat{\mathbf{x}} - \frac{du(y)}{dy} \hat{\mathbf{x}} \right] = \bar{\mu} \frac{du(y)}{dy} \hat{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Sostituendo  $u(y) = Uy/h$  si ottiene

$$\mathbf{s}_{\hat{\mathbf{y}}} = \frac{\bar{\mu}U}{h} \hat{\mathbf{x}},$$

per cui il vettore sforzo  $\mathbf{s}_{\hat{\mathbf{y}}}$  tra le lastre è uniforme e diretto parallelamente alle lastre nella direzione della velocità, e sulla lastra superiore ha lo stesso valore, come si può trovare direttamente dalla relazione  $\mathbf{s}^{\text{lastra}} = -\bar{\mu} \hat{\mathbf{y}} \times [\nabla \times \mathbf{u}]^{\text{lastra}}$ . Il calcolo diretto fornisce  $\mathbf{s}^{\text{lastra}} = -\bar{\mu} \hat{\mathbf{y}} \times [\nabla \times (u(y) \hat{\mathbf{x}})]^{y=h} = -\bar{\mu} \hat{\mathbf{y}} \times [[\nabla u(y)]^{y=h} \times \hat{\mathbf{x}}] = -\frac{\bar{\mu}U}{h} \hat{\mathbf{y}} \times [\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}}] = \frac{\bar{\mu}U}{h} \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = \frac{\bar{\mu}U}{h} \hat{\mathbf{x}}$ . La forza viscosa per unità di volume sarà nulla in ogni punto del fluido.

**Osservazione** Il vettore sforzo appena calcolato,  $(\bar{\mu}U/h) \hat{\mathbf{x}}$ , rappresenta la forza esterna per unità di area che si deve applicare alla lastra superiore per riuscire a mantenere il valore  $U$  della sua velocità costante e quindi a mantenere la corrente di Couette fra le lastre. Una forza esterna, sempre per unità di area, uguale in modulo e direzione ma opposta in verso deve essere applicata alla lastra inferiore affinché rimanga ferma contrastando l'azione della viscosità del fluido che tenderebbe a trascinarla in direzione  $\hat{\mathbf{x}}$ .





È importante osservare che la forza esterna agente sulla lastra superiore effettua un lavoro in quanto il suo punto di applicazione si sposta con la lastra. Quantitativamente, dall'esterno deve allora essere fornita una potenza per unità di area pari a  $\bar{\mu}U^2/h$  affinché la lastra superiore continui a mantenere il moto stazionario del fluido fra le due lastre. Nasce a questo punto una domanda: dove finirà l'energia spesa per fornire la potenza richiesta? La risposta è: "nel fluido viscoso" il quale aumenta la sua energia interna e quindi la sua temperatura a causa dell'attrito interno dovuto alla viscosità del fluido.

Questo bilancio energetico indica che la descrizione del processo di riscaldamento del fluido a causa dell'attrito viscoso rende necessario considerare il principio di conservazione dell'energia. Formulando questo principio in forma locale, il riscaldamento interno del fluido potrebbe allora essere descritto correttamente e quindi si potrebbe anche determinare le variazioni conseguenti della densità e del coefficiente di viscosità  $\mu$ , che non potrebbero essere più ritenuti costanti. In altre parole, verrebbero a cadere le ipotesi che sono il fondamento del sistema di equazioni di Navier–Stokes per correnti incomprimibili con fluido di densità uniforme. Sarebbe pertanto necessario formulare un sistema di equazioni della fluidodinamica più generale, chiamate **equazioni di Navier–Stokes comprimibili o complete** o anche **equazioni di Navier–Stokes tout court**, che comprende, assieme all'equazione di conservazione della massa e a quella della quantità di moto, anche l'equazione di conservazione dell'energia: questo sistema governa il moto dei fluidi comprimibili e viscosi e tutte le sue equazioni sono in generale accoppiate fra loro.

Viceversa, se si accetta l'ipotesi di corrente incomprimibile, il sistema di equazioni di Navier–Stokes che si studia in questo capitolo può essere risolto indipendentemente da considerazioni relative all'energia interna del fluido: la distribuzione di questa energia nello spazio e la sua variazione nel tempo può essere infatti calcolata in una fase successiva, dopo avere determinato il campo di moto. Da un punto di vista sperimentale, affinché il modello semplificato di corrente incomprimibile possa essere adeguato sarà necessario mettere all'esterno delle pareti che contengono il fluido un insieme di apparati in grado di mantenere la sua temperatura costante e uniforme in ogni punto. Ad esempio, nel caso qui considerato di corrente incomprimibile fra due pareti, possiamo immaginare che esse siano mantenute a una determinata temperatura mediante un sistema di raffreddamento consistente in una corrente d'aria provocata da un ventilatore esterno. Il flusso dell'aria permette di evitare che l'energia interna del fluido fra le pareti continui ad aumentare e consente di smaltire verso l'esterno la potenza spesa per mantenere in moto la lastra superiore contro la forza di frenamento dovuta alla forza viscosa. Nel seguito il nostro studio delle correnti incomprimibili sarà sviluppato supponendo che la densità del fluido rimanga sempre esattamente uniforme. Come già accennato, per questo tipo di correnti l'equazione della quantità di moto e la condizione d'incomprimibilità costituiscono un sistema di equazioni pari al numero di incognite e quindi esso può essere risolto, con le necessarie condizioni iniziali e al contorno, prima di affrontare l'equazione che governa l'energia interna del fluido e che coinvolge anche le proprietà termodinamiche del fluido.

### Corrente di Poiseuille piana

Esaminiamo ora il caso in cui fra le due lastre esiste un gradiente della pressione il quale, come abbiamo visto, deve essere costante. Consideriamo dapprima la situazione più semplice, nella quale entrambe le lastre sono ferme. In questo caso il problema da risolvere è

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{G_P}{\bar{\mu}}, \quad u(0) = 0 \quad \text{e} \quad u(h) = 0,$$

con il parametro  $G_P \neq 0$  definito da

$$G_P = \left( \frac{dP}{dx} \right)_{\text{cost}}.$$





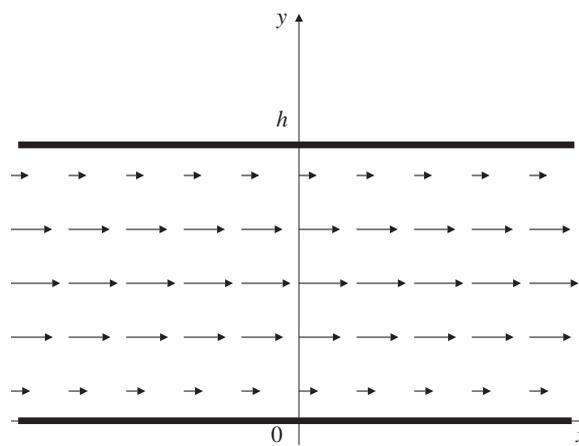
Integrando l'equazione si ha

$$u(y) = \frac{G_P}{2\bar{\mu}} y^2 + Ay + B,$$

dove le costanti d'integrazione sono determinate dalle condizioni al contorno. La prima condizione implica che  $B = 0$  e poi la seconda che  $A = -G_P h / (2\bar{\mu})$  per cui la soluzione è

$$u(y) = -\frac{G_P h^2}{2\bar{\mu}} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right),$$

per  $0 \leq y \leq h$ . Il campo di velocità fra le lastre ferme ha quindi un profilo parabolico come quello mostrato nella figura 5.11 nel caso  $G_P < 0$ . Questo tipo di corrente è chiamato **corrente di Poiseuille (piana)**.



**Figura 5.11** Campo di velocità della corrente di Poiseuille (piana)

Il vettore sforzo viscoso associato alla direzione  $\hat{y}$  vale quindi

$$\mathbf{s}_{\hat{y}}(y) = -\bar{\mu} \frac{du(y)}{dy} \hat{\mathbf{x}} = -\frac{G_P h}{2} \left(1 - \frac{2y}{h}\right) \hat{\mathbf{x}},$$

e ha un andamento lineare con  $y$ : se  $G_P < 0$  il segno di questa grandezza è positivo nella metà inferiore del canale e negativo nella metà superiore: ciò corrisponde a un effetto frenante dei filetti di fluido più vicini alle pareti su quelli più lontani e al contrario a un effetto accelerante di quelli più vicini al centro del canale su quelli più lontani dal centro.

Il profilo di velocità può essere espresso anche in forma adimensionale introducendo una velocità di riferimento per la corrente considerata. Ad esempio si può scegliere la velocità massima al centro del canale, ovvero,

$$u_{\max} = u(h/2) = -\frac{G_P h^2}{8\bar{\mu}} = -\frac{h^2}{8\bar{\mu}} \left(\frac{dP}{dx}\right)_{\text{cost}}.$$

Introducendo la velocità adimensionale  $\tilde{u} = u/u_{\max}$  e la coordinata verticale adimensionale  $\tilde{y} = y/h$ , la relazione del profilo di velocità in forma adimensionale diverrà, molto semplicemente,

$$\tilde{u}(\tilde{y}) = 4\tilde{y}(1 - \tilde{y}), \quad 0 \leq \tilde{y} \leq 1.$$

### Corrente ibrida di Couette–Poiseuille

Veniamo infine al caso ibrido della corrente fra le due lastre piane che è provocata dall'azione simultanea del moto della lastra superiore con velocità  $U$  e dalla presenza di un gradiente di pressione (costante) in direzione  $x$  lungo lo spazio fra le lastre. In tale caso dobbiamo risolvere il seguente problema

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{G_P}{\bar{\mu}}, \quad u(0) = 0 \quad \text{e} \quad u(h) = U,$$





con l'usuale significato dei simboli. La soluzione è

$$u(y) = \left[ U - \frac{G_P h^2}{2\mu} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \right] \frac{y}{h},$$

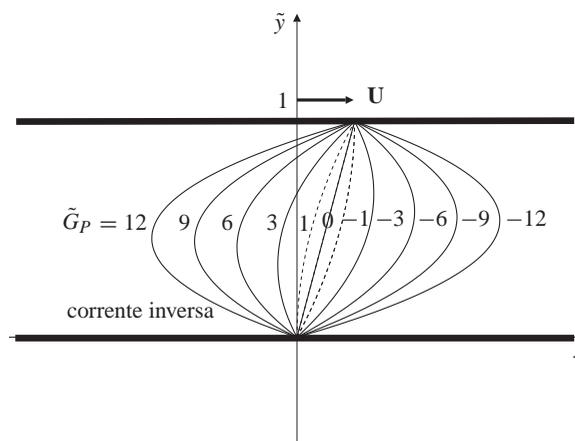
che, introducendo la velocità adimensionale (nuova)  $\tilde{u} = u/U$  e l'ordinata adimensionale  $\tilde{y} = y/h$ , può essere espressa in forma adimensionale:

$$\tilde{u}(\tilde{y}) = [1 - \tilde{G}_P(1 - \tilde{y})]\tilde{y}, \quad 0 \leq \tilde{y} \leq 1$$

Il parametro adimensionale  $\tilde{G}_P$  che appare in questa relazione è definito da

$$\tilde{G}_P = \frac{G_P h^2}{2\mu U} = \frac{h^2}{2\mu U} \left( \frac{dP}{dx} \right)_{\text{cost}},$$

e rappresenta l'importanza relativa dei due termini responsabili della corrente ibrida, ovvero il gradiente della pressione e il moto della lastra:  $\tilde{G}_P = 0$  corrisponde ad assenza di gradiente di pressione e quindi alla corrente di Couette,  $\tilde{G}_P < 0$  a un gradiente della pressione che spinge il fluido nello stesso verso della velocità  $U$  della lastra, e  $\tilde{G}_P > 0$  a un gradiente di pressione che spinge il fluido in verso opposto al moto della lastra (vedi figura 5.12).



**Figura 5.12** Profili della velocità  $\tilde{u}(\tilde{y})$  nella corrente piana di Couette–Poiseuille per valori diversi del parametro adimensionale  $\tilde{G}_P$

Può essere interessante sapere per quale valore del parametro  $\tilde{G}_P$  l'effetto della pressione con gradiente positivo, che quindi spinge il fluido nel verso negativo dell'asse  $x$ , riesce a provocare una corrente in verso opposto al moto della lastra, almeno in una parte del canale.

Dalla figura 5.12 si nota che tale corrente inversa sarà possibile solo a partire da quel valore di  $\tilde{G}_P$  per il quale è nulla la pendenza del profilo di velocità sulla superficie della lastra inferiore. Esprimendo la condizione in forma adimensionale  $d\tilde{u}(\tilde{y})/d\tilde{y} = 0$ , abbiamo

$$1 - \tilde{G}_P(1 - 2\tilde{y}) = 0,$$

che per  $\tilde{y} = 0$  fornisce  $\tilde{G}_P = 1$ . Quindi per  $\tilde{G}_P > 1$  esistono regioni di corrente inversa vicino alla lastra ferma e la loro estensione cresce al diminuire di  $\tilde{G}_P$ . Fisicamente una regione di corrente inversa esiste quando la forza viscosa per unità di volume è superata dal **gradiente di pressione avverso** o **adverso**, cioè con la pressione che aumenta nella verso positivo della corrente.

In modo simmetrico, si può verificare che per  $\tilde{G}_P < -1$  la velocità nella zona superiore del canale è maggiore della velocità della lastra.





### Corrente di Poiseuille in un tubo di sezione circolare

La presenza di un gradiente di pressione costante in un fluido è in grado di provocare un moto in una sola direzione anche quando il fluido è confinato all'interno di un tubo rettilineo di sezione costante. Il caso più semplice e anche più rilevante per le applicazioni è quello di un tubo di sezione circolare il cui raggio indicheremo con  $a$ . Consideriamo la situazione ideale in cui il tubo abbia lunghezza infinita e introduciamo un sistema di coordinate cilindriche con l'asse  $z$  coincidente con l'asse del tubo, come mostrato nella figura 5.13.

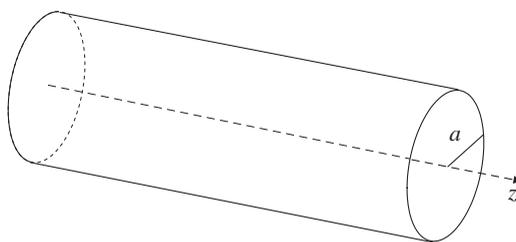


Figura 5.13

Tubo rettilineo di sezione circolare

Il moto stazionario del fluido sarà governato dalle seguenti equazioni e condizioni al contorno

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$\mathbf{u}|_{R=a} = 0,$$

dove il vettore velocità e tutti gli operatori sono espressi in coordinate cilindriche.

Data la geometria assisimmetrica, possiamo supporre che la velocità soluzione del problema abbia solo la componente assiale  $u_z$  e che non dipenda dalla variabile angolare  $\theta$ , per cui scriveremo

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u_z(R, z) \hat{\mathbf{z}},$$

e similmente per il campo della pressione

$$P(\mathbf{r}) = P(R, z).$$

In altre parole stiamo cercando una soluzione stazionaria che sia invariante per rotazioni attorno all'asse  $z$ . La condizione d'incomprimibilità, unita all'ipotesi di campo di velocità unidirezionale, implica che

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_z(R, z)}{\partial z} = 0,$$

per cui  $u_z$  non dipende da  $z$ , ovvero risulta  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u_z(R) \hat{\mathbf{z}}$ . Il termine non lineare dell'equazione della quantità di moto per la corrente unidirezionale è nullo anche in coordinate cilindriche in quanto

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = (u_z(R) \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla)(u_z(R) \hat{\mathbf{z}}) = u_z(R) \frac{\partial u_z(R)}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} = 0.$$

Riguardo al termine viscoso si vede subito che

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^2(u_z(R) \hat{\mathbf{z}}) = (\nabla^2 u_z(R)) \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left( R \frac{du_z}{dR} \right) \hat{\mathbf{z}}.$$





Le variabili incognite  $u_z(R)$  e  $P(R, z)$  devono quindi soddisfare l'equazione della quantità di moto

$$-\frac{\nu}{R} \frac{d}{dR} \left( R \frac{du_z}{dR} \right) \hat{\mathbf{z}} + \frac{\nabla P}{\rho} = 0,$$

con  $u_z(R)$  soggetta alla (sola) condizione al contorno

$$u_z(a) = 0.$$

La componente in direzione  $R$  dell'equazione della quantità di moto è semplicemente

$$\frac{\partial P}{\partial R} = 0$$

per cui la pressione  $P(R, z)$  può dipendere solo dalla coordinata assiale:  $P = P(z)$ . Di conseguenza, l'equazione della componente lungo  $R$  della quantità di moto si scriverà

$$-\frac{\nu}{R} \frac{d}{dR} \left( R \frac{du_z}{dR} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} = 0.$$

Questa equazione è della forma  $-f(R) + g(z) = 0$  per cui, essendo  $R$  e  $z$  variabili indipendenti, richiede che le funzioni  $f$  e  $g$  siano entrambe costanti e che le due costanti coincidano. Pertanto la pressione  $P(z)$  deve avere un gradiente assiale *costante* e scriveremo quindi

$$P(z) = P_0 + G_P z,$$

dove abbiamo introdotto il parametro (costante)

$$G_P = \left( \frac{dP}{dz} \right)_{\text{cost}}.$$

Si noti che per  $G_P < 0$  il fluido è spinto nel verso positivo dell'asse  $z$ . La differenza di pressione  $P(z_2) - P(z_1)$  fra due punti diversi  $z_1$  e  $z_2$  lungo il tubo si chiama **perdita di carico**. Il termine “perdita” indica proprio il fatto che la pressione diminuisce nella direzione in cui scorre il fluido.

Con la definizione del parametro  $G_P$ , il problema per la velocità assiale  $u_z(R)$  assume quindi la forma

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left( R \frac{du_z}{dR} \right) = \frac{G_P}{\mu}, \quad u_z(a) = 0.$$

Non deve destare troppa sorpresa che l'equazione differenziale del secondo ordine sia completata da una sola condizione al contorno, poiché l'estremo  $R = 0$  dell'intervallo  $0 \leq R \leq a$  in cui si cerca la soluzione non rappresenta un contorno sul quale la velocità possa essere prescritta. In altre parole, il valore  $u_z(0)$  è un elemento della soluzione che deve emergere dal procedimento di risoluzione dell'equazione. Verifichiamo se ciò accada effettivamente. Moltiplicando l'equazione per  $R \neq 0$  si ottiene

$$\frac{d}{dR} \left( R \frac{du_z}{dR} \right) = \frac{G_P}{\mu} R,$$

che può essere integrata immediatamente una volta, fornendo

$$R \frac{du_z}{dR} = \frac{G_P}{2\mu} R^2 + A,$$





dove  $A$  è la costante di integrazione. Dividendo ora per  $R \neq 0$  si ottiene l'equazione del primo ordine

$$\frac{du_z}{dR} = \frac{G_P}{2\bar{\mu}}R + \frac{A}{R},$$

che si integra ancora immediatamente:

$$u_z(R) = \frac{G_P}{4\bar{\mu}}R^2 + A \ln R + B,$$

dove  $B$  è la seconda costante d'integrazione. Ecco il punto: la prima costante  $A$  deve essere nulla affinché la soluzione sull'asse  $z$  sia limitata. Imponendo infine la condizione al contorno  $u_z(a) = 0$  si ottiene  $B = -G_P a^2 / (4\bar{\mu})$  per cui la soluzione è

$$u_z(R) = -\frac{G_P a^2}{4\bar{\mu}} \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right),$$

per  $0 \leq R \leq a$ , avente un profilo parabolico che è chiamata **corrente di Poiseuille** nel tubo a sezione circolare. La velocità massima è raggiunta sull'asse del tubo e vale

$$u_z^{\max} = u_z(0) = -\frac{G_P a^2}{4\bar{\mu}} = -\frac{a^2}{4\bar{\mu}} \left(\frac{dP}{dz}\right)_{\text{cost}}.$$

La velocità media  $\langle u_z \rangle$  su tutta la sezione del tubo si ottiene integrando la velocità  $u_z(R)$  su tutta l'area della sezione del tubo:

$$\begin{aligned} \langle u_z \rangle &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a -\frac{G_P a^2}{4\bar{\mu}} \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right) R dR d\theta \\ &= -\frac{G_P}{4\pi\bar{\mu}} 2\pi \int_0^a \left(R - \frac{R^3}{a^2}\right) dR \\ &= -\frac{G_P}{2\bar{\mu}} \left[ \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4a^2} \right] \Big|_0^a = -\frac{G_P a^2}{8\bar{\mu}} = \frac{u_z^{\max}}{2}. \end{aligned}$$

Determiniamo la portata in massa P.M., detta anche **portata massica**, che passa nel tubo. Essendo la velocità diretta lungo l'asse  $z$ , si deve calcolare l'integrale del flusso su tutta la superficie circolare  $S$  della sezione del tubo. Questo integrale è lo stesso, a meno di un fattore, di quello appena calcolato per determinare la velocità media, per cui, invece di ripetere i calcoli precedenti, possiamo trovare la portata utilizzando l'espressione della velocità media  $\langle u_z \rangle$  e tenendo conto che la densità del fluido è costante:

$$\text{P.M.} = \bar{\rho} \langle u_z \rangle \pi a^2 = -\bar{\rho} \frac{G_P a^2}{8\bar{\mu}} \pi a^2 = -\frac{\pi G_P a^4}{8\nu}.$$

La relazione finale

$$\text{P.M.} = -\frac{\pi G_P a^4}{8\nu}.$$

è nota con il nome di **legge di Poiseuille**.

Determiniamo ora la forza agente sul tubo in conseguenza della corrente di Poiseuille che scorre al suo interno. In base alla relazione per correnti incompressibili  $\mathbf{s}^s = -\bar{\mu} [\hat{\mathbf{n}}^s \times \nabla \times \mathbf{u}]^s$  dedotta nel paragrafo 5.9, dove  $\hat{\mathbf{n}}^s$  indica il versore normale alla superficie del tubo e diretto verso il fluido, avremo

$$\mathbf{s}^{\text{tubo}} = \bar{\mu} \hat{\mathbf{R}} \times \nabla \times \mathbf{u}|^{\text{tubo}},$$





essendo  $\hat{\mathbf{n}}^{\text{tubo}} = -\hat{\mathbf{R}}$ . Un calcolo diretto fornisce

$$\mathbf{s}^{\text{tubo}} = \bar{\mu} \hat{\mathbf{R}} \times \left[ -\frac{du_z(R)}{dR} \right]_{|R=a} \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{G_P R}{2} \Big|_{R=a} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{G_P a}{2} \hat{\mathbf{z}}.$$

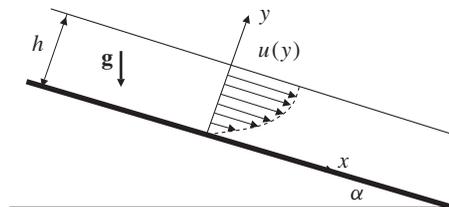
La forza per unità di lunghezza si ottiene integrando questa espressione lungo la circonferenza della sezione del tubo:

$$F_z = - \int_0^{2\pi} \frac{G_P a}{2} a d\theta = -\pi a^2 G_P.$$

Se il gradiente della pressione è negativo,  $G_P < 0$ , allora il segno di  $F_z$  è positivo: ciò è corretto in quanto il fluido si muove lungo il tubo nel verso positivo dell'asse  $z$  e quindi la forza che agisce sul tubo a causa della viscosità del fluido in moto ha lo stesso verso della corrente.

### Corrente lungo un piano inclinato causata dalla gravità

Consideriamo un altro caso di corrente unidirezionale, ma provocato questa volta dall'azione della forza gravitazionale agente sul fluido. Supponiamo di avere un piano infinito inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto al piano orizzontale e che uno strato di un fluido viscoso di spessore uniforme  $h$  si trovi sopra il piano inclinato. Vogliamo determinare il moto stazionario del fluido sempre nell'ipotesi che la corrente possa essere considerata incomprimibile. Introduciamo un sistema cartesiano con l'asse  $x$  diretto come la direzione di pendenza massima sul piano inclinato e con verso positivo diretto verso il basso, per cui l'asse  $x$  forma un angolo  $\alpha$  con il piano orizzontale, come mostrato nella figura 5.14.



**Figura 5.14** Corrente stazionaria con superficie libera lungo un piano inclinato

Prendiamo l'asse  $y$  in direzione perpendicolare al piano inclinato e con verso positivo al di sopra di tale piano, e scegliamo la posizione dell'origine in modo che la superficie del piano inclinato in contatto con il fluido corrisponda a  $y = 0$ . La direzione dell'asse  $z$  sarà allora orizzontale, perpendicolare al piano della figura e diretta verso il lettore. Studiamo il movimento discendente del fluido supponendo che il suo campo di velocità sia piano e quindi appartenente al piano  $x$ - $y$ . Supponiamo infine che il campo di moto della corrente considerata dipenda solo dalla coordinata  $y$  normale al piano, ovvero

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = [u(y), v(y), 0] = u(y) \hat{\mathbf{x}} + v(y) \hat{\mathbf{y}},$$

mentre la pressione è supposta essere indipendente solo dalla terza coordinata  $z$ :

$$P(\mathbf{r}) = P(x, y).$$

Sul fluido agisce la forza di volume esterna dovuta alla presenza del campo di gravità terrestre. Tale forza (per unità di volume) è data dal vettore campo di gravitazione  $\mathbf{g}$  che sarà espresso nel sistema cartesiano inclinato appena introdotto dalla relazione

$$\mathbf{g} = g \sin \alpha \hat{\mathbf{x}} - g \cos \alpha \hat{\mathbf{y}}.$$





Le equazioni di Navier–Stokes che governano il moto stazionario di un fluido viscoso sono:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho} = \mathbf{g},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

Notiamo subito che la condizione d'incompressibilità

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u(y)}{\partial x} + \frac{\partial v(y)}{\partial y} = \frac{dv(y)}{dy} = 0$$

implica che  $v = \text{costante}$  e, in virtù della condizione al contorno di non penetrazione  $v(0) = 0$  sulla superficie del piano inclinato,  $v = 0$ , identicamente.

Essendo allora la corrente unidirezionale con  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u(y) \hat{\mathbf{x}}$ , il termine non lineare  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  è nullo. Se teniamo poi conto della forma del termine viscoso e delle componenti del campo di gravità, l'equazione della quantità di moto assumerà la forma

$$-\nu \frac{d^2 u}{dy^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\nabla P}{\rho} = g \sin \alpha \hat{\mathbf{x}} - g \cos \alpha \hat{\mathbf{y}}.$$

Scrivendo esplicitamente le due componenti cartesiane di questa equazione abbiamo

$$-\nu \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = g \sin \alpha,$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = -g \cos \alpha.$$

La seconda di queste equazioni si integra immediatamente

$$P(x, y) = -\rho g \cos \alpha y + f(x),$$

dove  $f(x)$  è una funzione di  $x$  da determinare.

Consideriamo ora la superficie superiore dello strato di fluido. Essa è in realtà una superficie di separazione fra il fluido che scorre sul piano inclinato e l'aria soprastante. In generale, la superficie di separazione fra due fluidi differenti e non miscibili, come, ad esempio, acqua e olio oppure acqua e aria, si chiama **superficie di interfaccia**. La presenza di una superficie di questo tipo introduce delle difficoltà matematiche nel problema fluidodinamico che vanno oltre i limiti dello studio affrontato in questo testo. Infatti, la forma della superficie di interfaccia e il suo movimento non sono noti e devono essere determinati come parte della soluzione del problema. La posizione dei punti della superficie rappresenta quindi un'incognita supplementare che, per essere determinata, richiede di imporre un numero di condizioni al contorno doppio rispetto alle condizioni sui contorni ordinari, quali, ad esempio, la parete di un corpo o il contorno a grande distanza da esso. Nelle correnti viscoso, le condizioni al contorno su una superficie interfaccia consistono nella continuità sia della velocità sia del vettore sforzo totale (di pressione e viscoso) associato alla direzione normale alla superficie stessa.

Nel caso della corrente lungo il piano inclinato, è però possibile una semplificazione drastica rispetto al caso generale, per due ragioni. In primi luogo, i valori della densità e della viscosità dell'aria sono molto minori di quelli relativi al liquido che scorre sul piano inclinato e questo permette di trascurare l'inerzia e la viscosità dell'aria rispetto a quelle del liquido. Si parla allora di **superficie libera**, invece di superficie d'interfaccia, perché il problema si riduce a determinare solo il moto del fluido più denso mentre la presenza dell'altro influisce solo attraverso l'azione della sua pressione. Il secondo elemento di semplificazione nel problema in esame deriva dal fatto che la forma della superficie libera è un piano che è a una distanza nota  $h$  dal piano inclinato. Per quanto riguarda le condizioni della velocità, non è più possibile imporre la continuità della componente tangente avendo considerato non viscoso il fluido superiore mentre la componente normale è nulla in tutto il campo di moto per l'ipotesi di corrente unidirezionale. Per quanto riguarda invece le condizioni sul vettore sforzo, la continuità della componente normale equivale alla continuità della pressione

$$P(x, h) = P_{\text{atm}},$$





dove  $P_{\text{atm}}$  rappresenta la pressione atmosferica, e la continuità della componente tangente corrisponde all'annullamento della componente di taglio del vettore sforzo viscoso sulla superficie libera del fluido:

$$\bar{\mu} \frac{du(h)}{dy} = 0.$$

In particolare, la prima condizione permette di trovare la “funzione d'integrazione”  $f(x)$  giacché abbiamo

$$P(x, h) = -\bar{\rho}g \cos \alpha h + f(x) = P_{\text{atm}},$$

da cui segue  $f(x) = \text{costante} = \bar{\rho}gh \cos \alpha + P_{\text{atm}}$ , per cui il campo di pressione della corrente dipenderà solo da  $y$  e sarà dato da

$$P(y) = P_{\text{atm}} + (\bar{\rho}g \cos \alpha) (h - y).$$

Essendo quindi  $\partial P / \partial x = 0$ , la prima equazione si semplifica in

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{g \sin \alpha}{\nu},$$

ed è corredata da due condizioni al contorno: la prima di adesione del fluido sul piano inclinato e la seconda di annullamento sulla superficie libera della componente  $x$  del vettore sforzo viscoso  $\mathbf{s}_y$ , ovvero,

$$u(0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{du(h)}{dy} = 0.$$

La soluzione si calcola facilmente prima integrando l'equazione differenziale due volte, da cui si ricava

$$u(y) = -\frac{g \sin \alpha}{2\nu} y^2 + Ay + B,$$

e poi imponendo le due condizioni al contorno per determinare le costanti di integrazione,  $B = 0$  e  $A = gh \sin \alpha / \nu$ , ottenendo

$$u(y) = \frac{g \sin \alpha}{2\nu} y(2h - y).$$

Il profilo della velocità è quindi parabolico e raggiunge la velocità massima sulla superficie libera. La portata volumetrica di fluido lungo il piano inclinato, per unità di lunghezza nella direzione  $z$ , è data dall'integrale

$$\text{P.V.} = \int_0^h u(y) dy = \frac{gh^3}{3\nu} \sin \alpha.$$

## 5.7 Soluzioni esatte per correnti parallele dipendenti dal tempo

Consideriamo la corrente incomprimibile di un fluido viscoso con un campo di velocità piano e avente in ogni punto la medesima direzione. Un semplice esempio di una corrente bidimensionale è il moto di fluido vicino a una lastra piana che si muove nel suo stesso piano.





Scegliamo un sistema di coordinate cartesiane con la direzione dell'asse  $x$  coincidente con quella della velocità e l'asse  $y$  pure appartenente al piano del campo di velocità. Scriveremo allora le equazioni di Navier–Stokes non stazionarie per correnti bidimensionali

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

dove  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(x, y, t) = u(x, y, t) \hat{\mathbf{x}}$ ,  $P = P(x, y, t)$  e gli operatori  $\nabla$  e  $\nabla^2$  rappresentano il gradiente e il laplaciano nelle coordinate del piano  $x$ - $y$ . Come già visto nel paragrafo 5.6 per la corrente stazionaria, la condizione d'incomprimibilità implica  $u(x, y, t) = u(y, t)$ , il termine non lineare è nullo e quello viscoso contiene solo la componente  $x$ . Le equazioni che governano il campo di moto si riducono quindi alla sola equazione vettoriale

$$\frac{\partial u}{\partial t} \hat{\mathbf{x}} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\nabla P}{\rho} = 0.$$

La componente  $y$  di tale equazione è semplicemente

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

da cui segue immediatamente che  $P = P(x, t)$ . L'equazione della componente  $x$  diventa quindi

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0,$$

nelle due funzioni incognite  $u = u(y, t)$  e  $P = P(x, t)$ , dove si deve notare la diversità delle loro rispettive variabili spaziali,  $y$  e  $x$ , sicché l'equazione risulta essere del tipo  $F(x, t) + G(y, t) = 0$ , dove la funzione  $F$  comprende i primi due termini dell'equazione e la funzione  $G$  corrisponde al terzo termine. Con un ragionamento analogo a quello utilizzato nel metodo di separazione delle variabili possiamo dedurre che entrambe le funzioni  $F$  e  $G$  devono dipendere esclusivamente dalla variabile temporale  $t$  e che queste due funzioni di  $t$  devono essere una l'opposta dell'altra, ovvero sia  $F(x, t) = C(t)$  e  $G(x, t) = -C(t)$ . Pertanto l'equazione della componente  $x$  della quantità di moto diventa:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C(t) \quad \text{e} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -C(t),$$

dove  $C(t)$  è una funzione da determinare. La soluzione dell'equazione per la pressione è immediata  $P(x, t) = C(t)x + P_{\text{rif}}(t)$ , dove la “costante” d'integrazione  $P_{\text{rif}}(t)$  è arbitraria, conformemente alla natura indeterminata della variabile pressione nei problemi incomprimibili. La funzione  $C(t)$  è invece associata alla presenza di un gradiente uniforme della pressione lungo la direzione della velocità. Questo gradiente sarà causato da dei sistemi esterni, ad esempio una pompa, la cui intensità potrà essere variabile nel tempo secondo l'andamento della funzione  $C(t)$ . Per ogni funzione  $C(t)$  assegnata esternamente, la corrispondente velocità  $u(y, t)$  del fluido sarà la soluzione dell'**equazione di diffusione non omogenea** in una dimensione

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C(t),$$

con le opportune condizioni iniziali e al contorno.





### Traslazione istantanea di una lastra piana

Consideriamo ora la corrente incomprimibile di un fluido viscoso vicino a una lastra piana che è accelerata improvvisamente da ferma e che si muove parallelamente a sé stessa con velocità costante  $U$ . Supponiamo che il moto del fluido sia causato solamente dal moto della lastra, ovvero che il gradiente della pressione sia nullo, per cui la velocità  $u(y, t)$  soddisfa l'**equazione di diffusione omogenea** in una dimensione

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Il fluido occupa tutto il semispazio  $y > 0$  ed è inizialmente fermo per cui la condizione iniziale è

$$u(y, 0) = 0, \quad y > 0.$$

Supponiamo che la lastra sia messa in movimento al tempo  $t = 0$  con una velocità  $U$  e che questa velocità sia poi mantenuta sempre costante. A causa della condizione di adesione, le particelle di fluido in contatto con la lastra si muoveranno immediatamente con la velocità  $U$  e le condizioni al contorno, sulla lastra e all'infinito, saranno allora

$$u(0, t) = U, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} u(y, t) = 0, \quad t > 0.$$

Il problema per la velocità  $u$  così formulato si chiama **primo problema di Stokes**. Il problema è costituito dall'equazione di diffusione, che è un'equazione differenziale alle derivate parziali di tipo **parabolico**, corredata da una condizione iniziale e da due condizioni al contorno. La risoluzione del problema consiste nella determinazione di una funzione di due variabili  $u = u(y, t)$  che soddisfi identicamente l'equazione differenziale nel quadrante ( $y > 0, t > 0$ ) del piano *spazio-temporale*, chiamato anche **piano cinematico**. La soluzione deve inoltre soddisfare la condizione iniziale  $u = 0$  sul semiasse positivo ( $y > 0, t = 0$ ) e le condizioni al contorno  $u = U$  e  $u = 0$  sui due contorni spaziali ( $y = 0, t > 0$ ) e ( $y \rightarrow \infty, t > 0$ ) del quadrante. Si noti che la condizione iniziale è una sola, in quanto l'equazione di diffusione contiene la derivata prima rispetto al tempo, mentre le condizioni al contorno sono due in conformità con il fatto che la derivata rispetto alla variabile spaziale  $y$  è una derivata seconda. Questo problema di Stokes è in effetti identico al problema della diffusione dell'energia interna in una bacchetta solida lunga e sottile che conduce il calore, quando la temperatura di un'estremità è fatta variare istantaneamente da zero a un altro valore e poi mantenuta sempre costante a quel valore.

Il problema alle derivate parziali per la velocità  $u$  presenta una caratteristica molto importante che ne permette la riduzione a un problema differenziale più semplice. Infatti, l'enunciato del problema, o più precisamente tutti i suoi elementi costitutivi, ovvero l'equazione, la condizione iniziale, le condizioni al contorno ed eventualmente il termine di sorgente (qui assente), *non* contengono né alcuna lunghezza di riferimento né alcun intervallo temporale di riferimento. Ciò suggerisce la possibilità che la soluzione del nostro problema vari con  $y$  e  $t$  solo attraverso una combinazione opportuna di queste variabili e non in modo completamente indipendente. In altre parole, mancando nell'enunciato del problema una lunghezza di riferimento e un tempo di riferimento, la soluzione potrà avere una dipendenza da  $y$  solo se essa implica anche una dipendenza da  $t$  "collegata".

Per individuare il tipo di legame esistente tra le variabili indipendenti della soluzione particolare ricercata, si procede introducendo un cambiamento di variabili consistente in una loro semplice **dilatazione**, ovvero un **cambiamento di scala**, del tipo

$$y \rightarrow Y = \alpha y \quad \text{e} \quad t \rightarrow T = \beta t,$$





e poi si cerca una relazione fra i parametri positivi  $\alpha$  e  $\beta$  che lasci invariata l'equazione differenziale. Indichiamo la soluzione rispetto alle nuove variabili indipendenti  $(Y, T)$  con la lettera maiuscola  $U$  (da non confondere con il valore della condizione al contorno considerato in precedenza), per cui avremo

$$u(y, t) = U(Y, T) = U(\alpha y, \beta t).$$

Possiamo allora sostituire nell'equazione di diffusione ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial U(\alpha y, \beta t)}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 U(\alpha y, \beta t)}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial U}{\partial T} \frac{d(\beta t)}{dt} - \nu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{d(\alpha y)}{dy} \right) \\ &= \beta \frac{\partial U}{\partial T} - \nu \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right). \end{aligned}$$

Calcolando infine la derivata seconda si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \beta \frac{\partial U}{\partial T} - \nu \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \frac{d(\alpha y)}{dy} \\ &= \beta \frac{\partial U}{\partial T} - \nu \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}. \end{aligned}$$

Si osserva che se  $\beta = \alpha^2$  allora risulta

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \alpha^2 \left[ \frac{\partial U}{\partial T} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right],$$

ovvero la trasformazione delle variabili

$$y \rightarrow Y = \alpha y \quad \text{e} \quad t \rightarrow T = \alpha^2 t$$

lascia *invariata* l'equazione di diffusione. Ciò indica la possibilità che esistano soluzioni dell'equazione che siano funzioni di  $y$  e  $t$  semplicemente attraverso la singola combinazione  $y^2/t$ . Infatti la trasformazione di variabili  $(y, t) \rightarrow (Y, T) = (\alpha y, \alpha^2 t)$  implica che  $Y^2/T = (\alpha y)^2/(\alpha^2 t) = \alpha^2 y^2/(\alpha^2 t) = y^2/t$ , e quindi anche la "variabile combinata" rimane invariata a seguito di una tale trasformazione. Naturalmente è del tutto equivalente considerare la variabile  $y/\sqrt{t}$ . Inoltre, è conveniente avere una variabile *adimensionale*, per cui si può ricorrere alla costante  $\nu$ , che ha le dimensioni di una lunghezza al quadrato diviso un tempo, e considerare la combinazione  $y/\sqrt{\nu t}$ . Introduciamo allora la **variabile di similarità** adimensionale

$$\eta = \eta(y, t) = \frac{y}{\sqrt{\nu t}}$$

e cerchiamo quindi una soluzione dell'equazione di diffusione avente forma seguente

$$u(y, t) = F(\eta) = F(\eta(y, t)).$$

Questa scelta implica per la soluzione un passaggio da una dipendenza diretta dalle variabili  $y$  e  $t$  a una dipendenza indiretta dalle stesse variabili attraverso la sola funzione  $\eta(y, t)$ . Per il teorema di derivazione delle funzioni composte abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial F(\eta(y, t))}{\partial t} = F'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{y}{2t\sqrt{\nu t}} F', \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial F(\eta(y, t))}{\partial y} = F'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{\nu t}} F', \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\sqrt{\nu t}} F'(\eta(y, t)) \right) = \frac{1}{\sqrt{\nu t}} F''(\eta) \frac{1}{\sqrt{\nu t}} = \frac{1}{\nu t} F''. \end{aligned}$$





Sostituendo queste derivate parziali nell'equazione di diffusione per  $u$  abbiamo

$$\frac{\nu}{vt} F''(\eta) + \frac{y}{2t\sqrt{\nu t}} F'(\eta) = 0$$

e semplificando otteniamo un'equazione *differenziale ordinaria*

$$F'' + \frac{1}{2}\eta F' = 0$$

con le due condizioni al contorno

$$F(0) = U, \quad F(\infty) = 0.$$

Notiamo che per  $t \rightarrow 0$  si ha  $\eta \rightarrow \infty$  per ogni  $y > 0$  e quindi la seconda condizione al contorno  $F(\infty) = 0$  impone anche la condizione iniziale  $u(y, 0) = 0$  del problema alle derivate parziali originario. Questo risultato costituisce una conferma della validità del legame esistente tra le variabili  $y$  e  $t$  nella soluzione del problema in esame.

Siccome l'incognita  $F$  dell'equazione differenziale compare in essa solo come derivata, si può introdurre l'incognita ausiliaria  $G = F'$  e ridurre l'ordine dell'equazione:

$$G' + \frac{1}{2}\eta G = 0.$$

Questa equazione è tuttavia priva di condizione al contorno poiché entrambe le condizioni disponibili riguardano l'incognita originaria  $F$ . D'altra parte, il teorema fondamentale del calcolo differenziale, ovvero:

$$\int_a^b \frac{df(x)}{dx} dx = f(b) - f(a),$$

può essere applicato alla funzione  $F(\eta)$  i cui i valori agli estremi dell'intervallo  $[0, \infty[$  sono specificati, ottenendo

$$\int_0^\infty \frac{dF(\eta)}{d\eta} d\eta = F(\infty) - F(0) = 0 - U = -U.$$

La definizione della nuova variabile  $G = F'$  permette allora di scoprire che essa deve soddisfare la seguente *condizione integrale*

$$\int_0^\infty G(\eta) d\eta = -U.$$

Questa condizione *globale* completa quindi l'equazione di  $G$  che è del primo ordine (lineare a coefficienti non costanti) a variabili separabili della forma:

$$\frac{dG}{G} = -\frac{1}{2}\eta d\eta.$$

La soluzione generale è

$$G(\eta) = A e^{-\eta^2/4},$$

dove  $A$  è la costante d'integrazione che viene determinata imponendo la condizione integrale

$$A \int_0^\infty e^{-\eta^2/4} d\eta = -U.$$

L'integrale definito si calcola facilmente dal valore dell'integrale definito della funzione di Gauss  $e^{-x^2}$ :

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$





per cui si ottiene  $A = -U/\sqrt{\pi}$ . La soluzione è quindi

$$G(\eta) = -\frac{U}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2/4}.$$

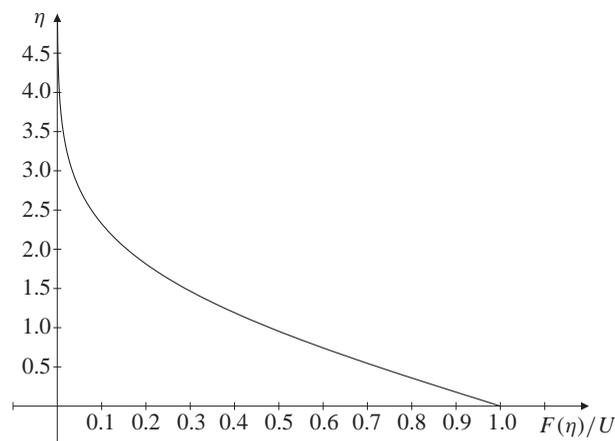
L'equazione rimanente  $F' = G(\eta)$  è poi risolta mediante una semplice integrazione

$$F(\eta) = B - \frac{U}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-s^2/4} ds,$$

dove  $B$  è un'altra costante d'integrazione, da determinare imponendo l'una o l'altra delle due condizioni al contorno dell'incognita originaria  $F$ . Ad esempio, la condizione  $F(0) = U$  fornisce subito  $B = U$ . Pertanto la soluzione dell'equazione differenziale del secondo ordine è

$$F(\eta) = U \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-s^2/4} ds \right],$$

ed è mostrata nella figura 5.15.



**Figura 5.15** Soluzione  $F(\eta)$  dell'equazione simile per la corrente causata dalla traslazione improvvisa di una lastra piana

Notiamo che se si fosse imposta l'altra condizione al contorno si sarebbe ottenuta la stessa soluzione. Infatti, imponendo la condizione  $F(\infty) = 0$ , si ha

$$B - \frac{U}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2/4} ds = B - \frac{U}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 0,$$

da cui segue subito  $B = U$ .

Dalla soluzione  $F(\eta)$ , ricordando la definizione della variabile simile  $\eta = y/\sqrt{\nu t}$  si ricava la soluzione della velocità  $u(y, t) = F(\eta) = F(y/\sqrt{\nu t})$ :

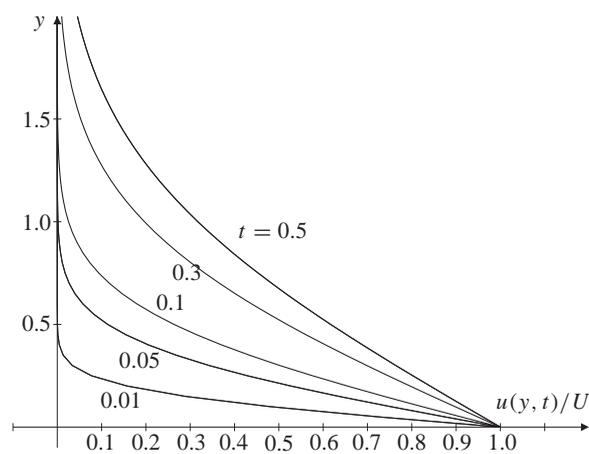
$$u(y, t) = U \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/\sqrt{\nu t}} e^{-s^2/4} ds \right].$$

I profili della velocità in alcuni istanti di tempo diversi sono mostrati nella figura 5.16 per il caso  $\nu = 1$ .





**Figura 5.16** Profili della velocità  $u(y, t)$  in istanti di tempo diversi per  $\nu = 1$  della corrente parallela causata dalla traslazione impulsiva di una lastra piana



La soluzione è talvolta espressa utilizzando la **funzione di errore**  $\text{erf}(x)$  definita dall'integrale della **funzione gaussiana**  $e^{-x^2}$ :

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-X^2} dX$$

o eventualmente della **funzione complementare di errore**  $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$ . La soluzione trovata può allora essere espressa nella forma seguente

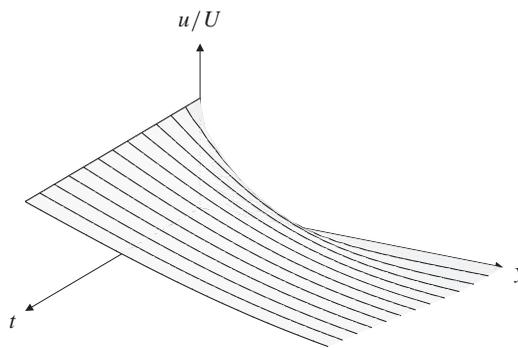
$$u(y, t) = U \left[ 1 - \text{erf} \left( \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right].$$

La soluzione  $u(y, t)$  rappresenta una superficie in uno spazio a tre dimensioni con assi cartesiani che corrispondono alle tre variabili  $y$ ,  $t$  e  $u$ . La figura 5.17 mostra la forma complessiva della soluzione: le linee disegnate sulla superficie corrispondono al profilo della velocità in determinati istanti di tempo.





**Figura 5.17** Rappresentazione tridimensionale dell'andamento della velocità di un fluido viscoso causata dal movimento istantaneo di una lastra piana al tempo  $t = 0$



La forma semplice delle condizioni iniziali e al contorno, unitamente all'assenza di una lunghezza di riferimento nel problema, è stata decisiva per ottenere una soluzione di tipo simile. Le soluzioni simili sono una classe speciale di soluzioni che esistono in problemi governati da equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo parabolico con due variabili indipendenti quando i dati del problema non contengono nessuna scala assoluta delle lunghezze.

Il problema considerato soddisfa queste condizioni. Come dice il nome stesso di soluzione simile, i profili della velocità  $u(y, t)$  a istanti di tempo differenti sono tutti *geometricamente simili*. Al tempo  $t_1$  la velocità  $u$  è funzione di  $y/\sqrt{\nu t_1}$  e al tempo  $t_2$  la velocità  $u$  è la *stessa* funzione di  $y/\sqrt{\nu t_2}$ . La sola cosa che accade al crescere del tempo è che il profilo della velocità risulta dilatato nello spazio di un coefficiente pari a  $\sqrt{t_2/t_1}$ . In altre parole, la soluzione in istanti di tempo diversi assume gli stessi valori ma essi sono distribuiti sull'asse  $y$  in modo sempre più dilatato. Ciò non sarebbe possibile se vi fosse una seconda lastra posta a una distanza  $y = h$  dalla lastra in moto: in questo caso la lunghezza  $h$  fornirebbe una scala spaziale di riferimento e una soluzione simile non sarebbe più possibile.

### Diffusione della vorticità

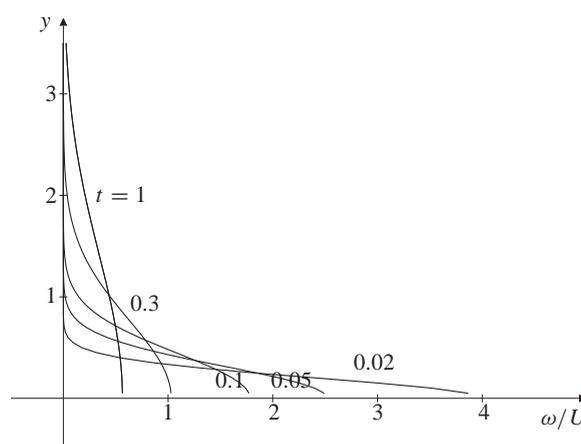
Ritornando ad esaminare la soluzione simile trovata, al tempo  $t$ , gli effetti del movimento istantaneo della lastra sono limitati prevalentemente a una distanza dell'ordine di  $\sqrt{\nu t}$  da essa; ad esempio  $u$  è meno del 4 per cento di  $U$  alla distanza  $y = 3\sqrt{\nu t}$ , in quanto  $1 - \text{erf}(x) = 0.04$  per  $x = \frac{3}{2}$ .

Un modo alternativo di interpretare questo processo è in termini della **diffusione di vorticità**. Nel problema piano considerato la distribuzione della vorticità nello spazio e nel tempo è data dalla funzione

$$\omega(y, t) = -\frac{\partial u(y, t)}{\partial y} = \frac{U}{\sqrt{\pi \nu t}} e^{-y^2/(4\nu t)},$$

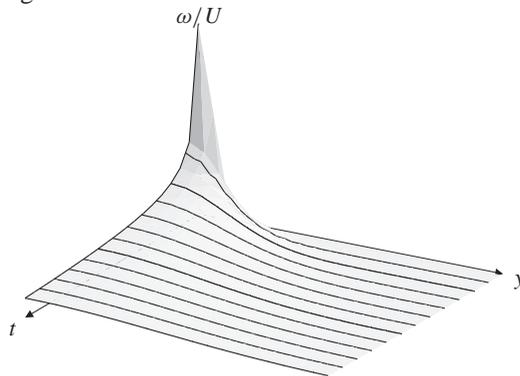
che tende a zero esponenzialmente oltre una distanza dalla lastra dell'ordine di  $\sqrt{\nu t}$ , come mostrato nella figura 5.18 per la soluzione con  $\nu = 1$ .

**Figura 5.18** Diffusione della vorticità da una lastra messa in moto in modo istantaneo al tempo  $t = 0$ . Soluzione per  $\nu = 1$





La diffusione della vorticità a causa dell'azione viscosa distribuisce in modo sempre più uniforme lo **strato di vorticità** iniziale, ovvero rende sempre più piatta la concentrazione infinita della vorticità iniziale sulla superficie della lastra (esistente in virtù della discontinuità fra la condizione al contorno  $u(0, t) = U$  per  $t \rightarrow 0$  e la condizione iniziale  $u(y, 0) = 0$  per  $y \rightarrow 0$ ) mentre la vorticità è nulla inizialmente in tutto il fluido (la condizione iniziale  $u(y, 0) = 0$  per  $y > 0$  implica  $\omega(y, 0) = 0$ ). L'andamento della vorticità  $\omega(y, t)$  nello spazio e nel tempo è rappresentato in modo tridimensionale nella figura 5.19.



**Figura 5.19** Rappresentazione tridimensionale della diffusione della vorticità da una lastra messa in moto in modo istantaneo al tempo  $t = 0$

Queste conclusioni possono essere enunciate anche in un altro modo leggermente diverso. In un tempo  $t$  la vorticità si estende per una distanza dell'ordine di

$$\text{distanza di diffusione viscosa} = O(\sqrt{\nu t}).$$

Ovverosia, il tempo necessario affinché la vorticità si diffonda su una distanza dell'ordine di  $\ell$  è dell'ordine di

$$\text{tempo di diffusione viscosa} = O(\ell^2/\nu).$$

### Approfondimento 1 Metodo alternativo per le soluzioni simili

Nel procedimento seguito per determinare la soluzione simile della corrente provocata dalla partenza impulsiva della lastra si è supposto che la variabile simile avesse una forma determinata. La forma considerata non era stata dedotta con un ragionamento rigoroso ma solo giustificata con argomenti di plausibilità. In questo senso il successo del procedimento è solo verificato a posteriori dal fatto che abbiamo ottenuto una soluzione fisicamente significativa. Vogliamo ora riconsiderare il procedimento per la ricerca di soluzioni simili e mostrare un metodo alternativo per individuare le soluzioni di questo tipo. Questo metodo si basa sulla ricerca di una variabile indipendente di tipo adimensionale che abbia la forma di un prodotto di potenze delle variabili indipendenti originarie con esponenti da determinare. Il valore preciso degli esponenti è stabilito dalle condizioni che si devono soddisfare per ottenere da un lato un problema differenziale ordinario e dall'altro variabili solo di tipo adimensionale.

La ricerca di soluzioni simili consiste nella determinazione di una trasformazione delle variabili che riduca l'equazione differenziale alle derivate parziali in un'equazione differenziale ordinaria. Dal momento che l'equazione alle derivate parziali coinvolge più di una variabile indipendente e un'equazione differenziale ordinaria solo una, è ragionevole assumere una trasformazione di variabili che cerchi di combinare le due variabili indipendenti. Pertanto assumiamo

$$\eta(y, t) = Cy^m t^n,$$

dove  $\eta$  è la variabile indipendente trasformata, che deve essere adimensionale, e  $C$ ,  $m$  e  $n$  sono delle costanti per ora indeterminate. Inoltre, per rendere adimensionale l'equazione finale dobbiamo imporre che anche la variabile dipendente (cioè la nuova





incognita del problema differenziale ordinario) sia adimensionale. Siccome l'incognita originaria è la velocità  $u$  e nel problema esiste una scala delle velocità definita dal valore al contorno  $U$ , la nuova incognita  $f$  deve essere definita da

$$u = Uf(\eta),$$

ovvero avremo la relazione

$$u(y, t) = Uf(\eta(y, t)) = Uf(Cy^m t^n),$$

che esprime la vecchia incognita (dimensionale)  $u$  in funzione di quella nuova (adimensionale)  $f$ , la prima dipendente da due variabili ( $y$  e  $t$ ) la seconda da una sola ( $\eta$ ). Per mezzo di questa relazione di trasformazione possiamo calcolare le derivate parziali di  $u$  con la regola di derivazione delle funzioni composte, ottenendo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = U \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{df}{d\eta} = UCny^m t^{n-1} f',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{\partial \eta}{\partial y} f' = UCmy^{m-1} t^n f',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = UCm(m-1)y^{m-2} t^n f' + UC^2 m^2 y^{2(m-1)} t^{2n} f''.$$

Sostituendo nell'equazione di diffusione di  $u$  e dividendo per  $U \neq 0$  si ottiene

$$Cny^m t^{n-1} f' - vCm(m-1)y^{m-2} t^n f' - vC^2 m^2 y^{2(m-1)} t^{2n} f'' = 0.$$

Ora determiniamo i valori di  $m$ ,  $n$  e  $C$  in modo che si realizzi la riduzione a un'equazione differenziale ordinaria adimensionale. Per prima cosa eliminiamo il coefficiente variabile del termine di ordine più elevato moltiplicando tutti i termini dell'equazione per  $y^{-2(m-1)} t^{-2n}$  ottenendo:

$$vC^2 m^2 f'' + vCm(m-1)y^{-m} t^{-n} f' - Cny^{-m+2} t^{-n-1} f' = 0.$$

Ma  $y^{-m} t^{-n} = C/\eta$ , per cui l'equazione si può scrivere nella forma più semplice (dopo avere diviso tutti i termini per  $C^2$ )

$$vm^2 f'' + vm(m-1) \frac{1}{\eta} f' - n \frac{y^2 t^{-1}}{\eta} f' = 0.$$

Affinché questa equazione sia effettivamente un'equazione differenziale ordinaria, il coefficiente dell'ultimo termine deve essere una funzione solo di  $\eta$  e, poiché  $\eta = Cy^m t^n$ , questo richiede necessariamente  $n = -m/2$ . In tal caso la relazione della variabile di similarità diventa

$$\eta(y, t) = C \left( \frac{y}{\sqrt{t}} \right)^m$$

e l'equazione assume la forma

$$vm f'' + v(m-1) \frac{1}{\eta} f' + \frac{1}{2\eta} \left( \frac{\eta}{C} \right)^{\frac{2}{m}} f' = 0.$$

Affinché questa equazione diventi adimensionale deve essere  $C^{2/m} = 1/v$ . Allora la variabile di similarità sarà definita dalla relazione finale

$$\eta(y, t) = \left( \frac{y}{\sqrt{vt}} \right)^m$$

e l'equazione differenziale ordinaria adimensionale ricercata sarà

$$f'' + \frac{1}{m} \left[ \frac{m-1}{\eta} + \frac{1}{2} \eta^{\frac{2-m}{m}} \right] f' = 0.$$

Naturalmente questa equazione deve essere risolta con le due condizioni al contorno adimensionali:

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(\infty) = 0.$$

Il valore di  $m$  può essere scelto in maniera arbitraria. Da questa scelta dipenderà la funzione  $f$  soluzione dell'equazione differenziale, rimanendo comunque inalterata la forma della soluzione  $u(y, t)$ . Per  $m = 1$  si riottiene lo stesso problema similare analizzato in precedenza.





### Corrente non stazionaria fra due lastre parallele

Consideriamo ora la corrente generata ancora dal moto impulsivo della lastra piana ma questa volta in presenza di una seconda lastra *ferma* posta a una distanza  $h$  dalla prima. La velocità  $u(y, t)$  dovrà ora essere determinata nella striscia  $0 \leq y \leq h$  come soluzione della stessa equazione di diffusione

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

completata dalla condizione iniziale

$$u(y, 0) = 0, \quad 0 < y < h,$$

e dalla condizioni al contorno

$$u(0, t) = U, \quad u(h, t) = 0, \quad t > 0.$$

Non potendo ricercare una soluzione simile (nel problema esiste una lunghezza di riferimento: la distanza  $h$  fra le lastre) osserviamo che l'equazione è omogenea mentre le condizioni al contorno non lo sono. Possiamo allora cercare di riformulare il problema mediante un cambiamento dell'incognita che renda omogenee le condizioni al contorno per poi provare ad applicare il metodo di separazione delle variabili. Le due condizioni al contorno sono soddisfatte dalla semplice funzione lineare  $U(1 - y/h)$  che rappresenta la corrente di Couette fra le due lastre. Questa funzione è *anche* soluzione (stazionaria) dell'equazione di diffusione. Possiamo allora introdurre una variabile ausiliaria  $w$  mediante la definizione

$$u(y, t) = w(y, t) + U(1 - y/h),$$

e osservare che la nuova incognita  $w$  deve essere soluzione del problema

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

$$w(y, 0) = -U(1 - y/h), \quad 0 < y < h,$$

$$w(0, t) = 0, \quad w(h, t) = 0, \quad t > 0,$$

le cui condizioni al contorno sono ora completamente omogenee mentre la condizione iniziale è ora diversa da zero. Ricorriamo al metodo di separazione delle variabili ricercando delle soluzioni elementari  $W = W(y, t)$  che siano prodotto di due funzioni, ovvero,

$$W(y, t) = Y(y) T(t)$$

dove  $Y(y)$  e  $T(t)$  sono due nuove funzioni incognite. Sostituendo  $W$  nell'equazione di diffusione si ottiene

$$Y \frac{dT}{dt} - \nu T \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0,$$

dove le derivate parziali sono diventate ordinarie perché le nuove incognite sono funzioni di una sola variabile. Dopo avere diviso per il prodotto  $\nu Y T$  si ottiene

$$\frac{1}{\nu T} \frac{dT}{dt} - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0.$$

Questa equazione è del tipo  $f(t) - g(y) = 0$ . Ma  $t$  e  $y$  sono variabili indipendenti, per cui la relazione richiede che entrambi i due termini siano costanti e che le due costanti siano coincidenti. Indicando tale **costante di separazione** con  $\sigma$ , si ottengono le due equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{1}{\nu T} \frac{dT}{dt} = \sigma \quad \text{e} \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \sigma.$$





Il valore di  $\sigma$  è per il momento sconosciuto. Consideriamo per prima la seconda equazione che riscriviamo come

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = \sigma Y,$$

e osserviamo che le due condizioni al contorno omogenee  $w(0, t) = w(h, t) = 0$  impongono su  $Y(y)$  le condizioni anch'esse omogenee  $Y(0) = Y(h) = 0$ . Per un valore generico della costante  $\sigma$  non esistono funzioni che soddisfano sia l'equazione differenziale che le due condizioni al contorno. Infatti: se  $\sigma > 0$  l'equazione ammette come soluzione due funzioni esponenziali con segno dell'esponente positivo o negativo, mentre se  $\sigma < 0$  le due soluzioni sono le funzioni seno e coseno, ma in entrambi i casi non è possibile trovare una loro combinazione lineare che si annulli in entrambi i punti  $y = 0$  e  $y = h$ . [Il caso  $\sigma = 0$  non interessa in quanto la prima equazione diventerebbe  $dT/dt = 0$  con soluzione  $T = \text{costante}$ , per cui  $W(y, t)$  sarebbe una soluzione stazionaria  $W(y, t) = W(y)$ .]

Tuttavia la costante  $\sigma$  può essere scelta in modo da: *i*) selezionare soluzioni che oscillano e *ii*) annullare le soluzioni oscillanti proprio nei punti estremi dell'intervallo  $0 \leq y \leq h$ . La prima condizione significa che si deve prendere  $\sigma = -\kappa^2$ , con  $\kappa$  costante, per cui le soluzioni sono  $\sin(\kappa y)$  e  $\cos(\kappa y)$ , mentre la seconda condizione significa che si deve scartare la soluzione  $\cos(\kappa y)$  e che inoltre  $\kappa$  deve assumere i valori discreti soddisfacenti la seguente condizione

$$\kappa_n h = n\pi \quad \implies \quad \kappa_n = \frac{n\pi}{h},$$

dove  $n$  è un intero positivo qualsiasi. Tutte le soluzioni oscillanti  $Y_n(y) = \sin(n\pi y/h)$  si annullano per  $y = 0$  e  $y = h$  e quindi permettono di costruire le soluzioni elementari del metodo di separazione delle variabili. La costante di separazione  $\sigma$  deve quindi assumere i seguenti valori

$$\sigma_n = -\kappa_n^2 = -(n\pi/h)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Per ogni valore di intero positivo di  $n$  la prima equazione diventa

$$\frac{dT_n}{dt} = -v (n\pi/h)^2 T_n$$

e ammette la semplice soluzione esponenziale  $T_n(t) = e^{-(n\pi/h)^2 vt} = e^{-n^2 \pi^2 vt/h^2}$ .

Pertanto le soluzioni elementari in forma di prodotto ricercate sono

$$W_n(y, t) = T_n(t) Y_n(y) = \sin(n\pi y/h) e^{-n^2 \pi^2 vt/h^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Nessuna di queste funzioni soddisfa da sola la condizione iniziale per l'incognita ausiliaria  $w$  ma, siccome l'equazione di diffusione di  $w$  è lineare, si può considerare una loro combinazione lineare  $w(y, t)$  definita dalla serie

$$w(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi y/h) e^{-n^2 \pi^2 vt/h^2},$$

che soddisferà l'equazione differenziale qualunque siano i valori dei coefficienti  $A_n$ . A questo punto, si può ricorrere alla teoria della serie di Fourier per determinare i coefficienti  $A_n$  in modo tale che al tempo  $t = 0$  questa espansione coincida con il dato iniziale del problema modificato, ovvero:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi y/h) = -U(1 - y/h) \quad \text{in } 0 \leq y \leq h.$$





Moltiplicando questa relazione per  $\sin(n'\pi y/h)$  e integrando sull'intervallo  $[0, h]$ , la relazione di ortogonalità

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) \sin(n'\theta) d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{se } n = n' = 0 \\ \pi & \text{se } n = n' \geq 1 \\ 0 & \text{se } n \neq n' \end{cases}$$

permette di trovare

$$A_n = -\frac{2}{h} \int_0^h U(1 - y/h) \sin(n\pi y/h) dy = -\frac{2U}{n\pi}.$$

La velocità  $u$  fra due lastre parallele provocata dal moto impulsivo della lastra inferiore è quindi data dalla soluzione

$$u(y, t) = U(1 - y/h) - \frac{2U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi y/h) e^{-n^2\pi^2\nu t/h^2}.$$

L'aspetto più importante di questa soluzione è che per tempi  $t > h^2/\nu$  la corrente ha raggiunto il suo stato stazionario (corrente di Couette) e la distribuzione della vorticità è pressoché uniforme in tutto il fluido.

## 5.8 Soluzioni esatte per correnti in geometria cilindrica

Esistono soluzioni esatte delle equazioni di Navier–Stokes nel caso di un fluido contenuto fra superfici cilindriche coassiali che possono ruotare attorno all'asse comune. Supponendo che i cilindri in rotazione siano molto lunghi rispetto al loro raggio, il moto del fluido può essere considerato bidimensionale. Nel caso di problemi dipendenti dal tempo supporremo inoltre che il campo di velocità iniziale sia invariante per traslazioni parallele all'asse del cilindro e per rotazioni attorno all'asse. Ciò significa che studiamo soluzioni che non possono dipendere dalla coordinata assiale  $z$  e nemmeno dalla coordinata angolare  $\theta$  (escludendo la dipendenza da  $\theta$  dei versori delle coordinate polari/cilindriche). Sotto queste condizioni il campo di velocità della soluzione sarà piano e dipenderà solo dalla distanza  $R$  dall'asse comune dei due cilindri, oltre che dal tempo  $t$ , per cui si potrà assumere in generale:  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = u_R(R, t) \hat{\mathbf{R}} + u_\theta(R, t) \hat{\boldsymbol{\theta}}$  ed anche  $P(\mathbf{r}, t) = P(R, t)$ .

Le equazioni che governano questo tipo di correnti sono le classiche equazioni di Navier–Stokes incomprimibili

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

dove gli operatori  $\nabla$  e  $\nabla^2$  rappresentano questa volta il gradiente e il laplaciano bidimensionali nelle coordinate polari/cilindriche  $R$ - $\theta$  in un piano perpendicolare all'asse  $z$ .

Per prima cosa, analizziamo le conseguenze della condizione di incomprimibilità nel caso considerato; essa significa

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R u_R(R, t)) + \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta(R, t)}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R u_R(R, t)) = 0, \end{aligned}$$





per cui deve essere  $u_R(R, t) = A(t)/R$ . Supponendo ora che le pareti cilindriche contenenti il fluido siano impermeabili, per cui su di esse  $u_R = 0$ , allora avremo  $A(t) = 0$  e quindi  $u_R(R, t) = 0$  in ogni punto del fluido e per ogni  $t > 0$ . In altre parole il moto del fluido sarà *puramente circolare* e quindi il campo della velocità della soluzione avrà la forma seguente

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u_\theta(R, t) \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta).$$

Vediamo ora quali sono le conseguenze di questo risultato per quanto riguarda il termine convettivo, esprimendolo ovviamente in coordinate cilindriche. Invece di usare l'espressione fornita nella tabella degli operatori differenziali in coordinate cilindriche, calcoliamo questo termine, tenendo conto esplicitamente che i versori  $\hat{\mathbf{R}}(\theta)$  e  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta)$  hanno  $|\hat{\mathbf{R}}(\theta)| = 1$  e  $|\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta)| = 1$  ma variano direzione con l'angolo  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= (u_\theta(R, t) \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta) \cdot \nabla) (u_\theta(R, t) \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta)) \\ &= u_\theta(R, t) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta(R, t) \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta)) = \frac{[u_\theta(R, t)]^2}{R} \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta)}{d\theta}. \end{aligned}$$

Siccome risulta  $d\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta)/d\theta = -\hat{\mathbf{R}}(\theta)$ , come mostrato nella figura 5.20, otteniamo

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{u_\theta^2}{R} \hat{\mathbf{R}}(\theta)$$

e quindi il termine non lineare è diverso da zero. Passando al termine viscoso abbiamo

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{u} &= \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (u_\theta(R, t) \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta)) \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial u_\theta(R, t)}{\partial R} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta) + \frac{u_\theta(R, t)}{R^2} \frac{d^2 \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta)}{d\theta^2} \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial u_\theta(R, t)}{\partial R} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta) - \frac{u_\theta(R, t)}{R^2} \frac{d\hat{\mathbf{R}}(\theta)}{d\theta} \\ &= \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial u_\theta(R, t)}{\partial R} \right) - \frac{u_\theta(R, t)}{R^2} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta), \end{aligned}$$

in quanto  $d\hat{\mathbf{R}}(\theta)/d\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta)$ , come mostrato in figura 5.21. In base a questi risultati, l'equazione della quantità di moto per le correnti incomprimibili con traiettorie circolari sarà

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta) - \frac{u_\theta^2}{R} \hat{\mathbf{R}}(\theta) - \nu \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial u_\theta}{\partial R} \right) - \frac{u_\theta}{R^2} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} \hat{\mathbf{R}}(\theta) = 0$$

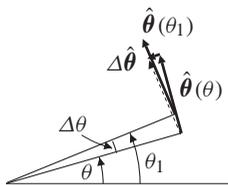
nelle due funzioni incognite  $u_\theta(R, t)$  e  $P(R, t)$ . La componente angolare di questa equazione è

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} - \nu \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial u_\theta}{\partial R} \right) - \frac{u_\theta}{R^2} \right] = 0,$$

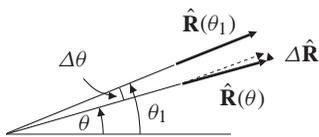
e costituisce un'equazione indipendente nella sola incognita  $u_\theta(R, t)$ . È immediato verificare che

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial u}{\partial R} \right) - \frac{u}{R^2} = \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (Ru) \right),$$

per cui l'equazione di  $u_\theta$  diventa:



**Figura 5.20** Illustrazione della derivata  $d\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta)/d\theta = -\hat{\mathbf{R}}(\theta)$ : notare che  $|\Delta\hat{\boldsymbol{\theta}}| = \Delta\theta$ , per cui  $|d\hat{\boldsymbol{\theta}}/d\theta| = 1$



**Figura 5.21** Illustrazione della derivata  $d\hat{\mathbf{R}}(\theta)/d\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta)$ : notare che  $|\Delta\hat{\mathbf{R}}| = \Delta\theta$ , per cui  $|d\hat{\mathbf{R}}/d\theta| = 1$





$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} - \nu \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R u_\theta) \right) = 0.$$

L'equazione della componente radiale dell'equazione della quantità di moto è invece

$$-\frac{u_\theta^2}{R} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P}{\partial R} = 0.$$

Se trasferiamo il termine del gradiente di pressione nel secondo membro, in questa relazione riconosciamo la legge fondamentale della dinamica nella forma  $\mathbf{a} = \mathbf{f}/m$  per le particelle del fluido: infatti il termine a sinistra rappresenta l'accelerazione centripeta della particella mentre il gradiente della pressione è la forza centripeta per unità di volume all'interno del fluido che provoca il moto circolare uniforme di ogni sua particella.

Una volta determinata la velocità  $u_\theta(R, t)$ , la pressione  $P(R, t)$  può essere calcolata dall'equazione della componente radiale della quantità di moto riscritta nel modo seguente

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P}{\partial R} = \frac{[u_\theta(R, t)]^2}{R},$$

che permette un'integrazione immediata

$$P(R, t) = \bar{\rho} \int^R \frac{[u_\theta(R', t)]^2}{R'} dR' + C(t),$$

dove  $C(t)$  indica una funzione arbitraria del tempo.

### Corrente di Couette fra superfici cilindriche in rotazione

Supponiamo che il fluido sia contenuto fra due superfici cilindriche coassiali di raggio  $a$  e  $b > a$  e che queste superfici ruotino con velocità angolare costante  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$ , vedi figura 5.22. La corrente stazionaria causata dalla rotazione delle due superfici o di una sola di esse si ottiene risolvendo la versione stazionaria dell'equazione di  $u_\theta(R)$ . Scriviamo questa equazione notando che nel problema stazionario la derivata rispetto a  $R$  è ordinaria:

$$\frac{d}{dR} \left( \frac{1}{R} \frac{d}{dR} (R u_\theta) \right) = 0,$$

da risolvere con le condizioni al contorno

$$u_\theta(a) = a\Omega_a \quad \text{e} \quad u_\theta(b) = b\Omega_b.$$

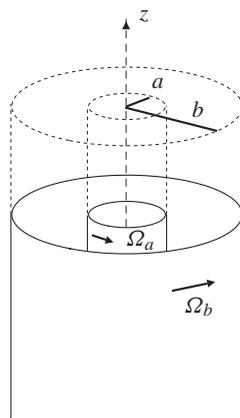


Figura 5.22  
Cilindri coassiali rotanti





Una prima integrazione fornisce l'equazione del primo ordine

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} (Ru_\theta) = C_1,$$

che integrata a sua volta conduce a

$$Ru_\theta = \frac{C_1 R^2}{2} + C_2.$$

Risolvendo rispetto a  $u_\theta$  e ridefinendo la costante  $C_1/2$  come  $C_1$  si ottiene la soluzione

$$u_\theta(R) = C_1 R + \frac{C_2}{R},$$

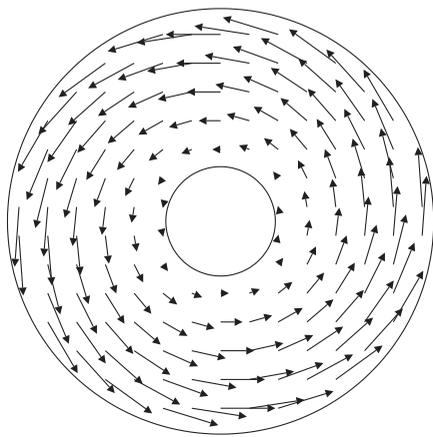
dove le costanti  $C_1$  e  $C_2$  sono da determinare mediante le condizioni al contorno. Il campo di velocità è dato quindi dalla sovrapposizione di un moto di rotazione rigida e di un vortice rettilineo. L'imposizione delle condizioni al contorno conduce al seguente sistema di due equazioni lineari algebriche nelle incognite  $C_1$  e  $C_2$

$$\begin{cases} aC_1 + C_2/a = a\Omega_a, \\ bC_1 + C_2/b = b\Omega_b, \end{cases}$$

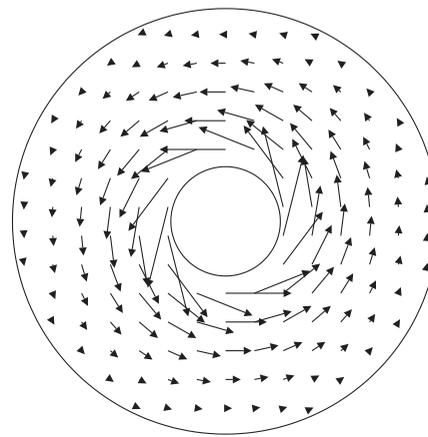
la cui soluzione è

$$C_1 = \frac{b^2\Omega_b - a^2\Omega_a}{b^2 - a^2}, \quad C_2 = \frac{a^2b^2(\Omega_a - \Omega_b)}{b^2 - a^2}.$$

Questa soluzione è nota come **corrente di Couette cilindrica** o **corrente di Taylor–Couette**. Nella figura 5.23 è mostrato il campo di velocità per  $b = 4a$  nel caso in cui il cilindro interno è fisso mentre quello esterno ruota. La situazione opposta di rotazione del cilindro interno con il cilindro esterno fermo è mostrata nella figura 5.24. Infine nella figura 5.25 è riportata la soluzione nel caso in cui entrambi i cilindri ruotano, ma in senso inverso e con  $\Omega_a = -10\Omega_b$ .



**Figura 5.23** Corrente di Taylor–Couette per  $b = 4a$  con cilindro esterno rotante e cilindro interno fermo



**Figura 5.24** Corrente di Taylor–Couette per  $b = 4a$  con cilindro interno rotante e cilindro esterno fermo

La pressione  $P(R)$  della corrente stazionaria di Taylor–Couette si ottiene dalla relazione

$$\begin{aligned} P(R) &= \bar{p} \int^R \frac{[u_\theta(R')]^2}{R'} dR' = \bar{p} \int^R \left( C_1 R' + \frac{C_2}{R'} \right)^2 \frac{dR'}{R'} \\ &= \bar{p} \int^R \left( C_1^2 R' + \frac{2C_1 C_2}{R'} + \frac{C_2^2}{R'^3} \right) dR'. \end{aligned}$$

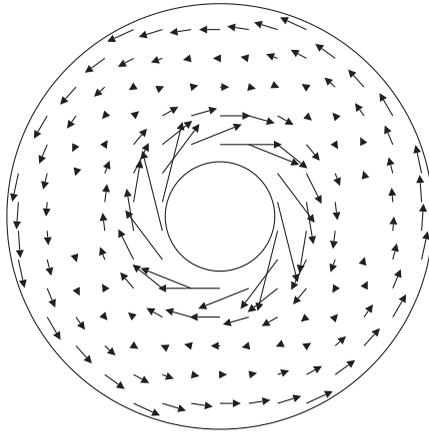




Una semplice integrazione fornisce

$$P(R) = \bar{\rho} \left[ \frac{C_1^2}{2} R^2 + 2C_1 C_2 \ln \left( \frac{R}{C_3} \right) - \frac{C_2^2}{2R^2} \right],$$

dove la nuova costante di integrazione  $C_3$  arbitraria è stata fatta comparire di proposito all'interno del logaritmo, per rendere il suo argomento adimensionale.



**Figura 5.25** Campo di velocità della corrente di Taylor–Couette per  $b = 4a$  con cilindro interno rotante in senso opposto al cilindro esterno, quando  $\Omega_a = -10\Omega_b$

## 5.9 Viscosità nei fluidi reali (comprimibili)

Come abbiamo visto, la forza agente sul fluido in conseguenza del suo carattere viscoso assume una forma particolarmente semplice nel caso di correnti incompressibili. Infatti, se vale questa ipotesi assieme a quella di viscosità di taglio costante,  $\mu = \bar{\mu}$ , la forza per unità di massa  $\mathbf{f}^{\text{visc}}$  risulta essere espressa dalla relazione

$$\mathbf{f}^{\text{visc}} = \nu \nabla^2 \mathbf{u},$$

dove  $\nu = \bar{\mu}/\bar{\rho}$  rappresenta il coefficiente (costante) di viscosità cinematica, con  $\bar{\rho}$  indicante la densità uniforme del fluido. Questa espressione vettoriale è piuttosto facile da tenere in conto, almeno nel caso di coordinate cartesiane, poiché in questo caso l'operatore di Laplace agente su un campo vettoriale agisce indipendentemente su ciascuna delle sue componenti. Di conseguenza, le componenti cartesiane della forza viscosa sono date da

$$f_x^{\text{visc}} = \nu \nabla^2 u, \quad f_y^{\text{visc}} = \nu \nabla^2 v, \quad f_z^{\text{visc}} = \nu \nabla^2 w.$$

Ciascuno di questi tre termini deve essere aggiunto nel secondo membro di ognuna delle tre componenti cartesiane dell'equazione della quantità di moto del sistema di equazioni di Eulero per le correnti incompressibili, ovvero, in forma vettoriale avremo il termine viscoso aggiuntivo

$$\mathbf{f}_x^{\text{visc}} = \nu \nabla^2 \mathbf{u}.$$

La semplicità della forza viscosa espressa in coordinate cartesiane è la ragione per cui le equazioni di Navier–Stokes incompressibili ammettono soluzioni analitiche che possono essere determinate agevolmente, almeno nel caso di correnti in regioni limitate da pareti di forma semplice.

La situazione delle coordinate cilindriche e sferiche è più complessa poiché l'azione dell'operatore di Laplace su un campo vettoriale espresso in queste coordinate *non* si separa in azioni indipendenti su ciascuna delle componenti del vettore: l'operatore  $\nabla^2$  introduce infatti un accoppiamento fra due delle componenti cilindriche e fra tutte e tre le componenti sferiche del campo vettoriale su cui agisce. Quindi nel problema di Navier–Stokes incompressibile in coordinate cilindriche o sferiche la presenza del termine viscoso non permette di risolvere le equazioni delle componenti della velocità  $\mathbf{u}$  in modo indipendente.





Nonostante la forma relativamente semplice della forza viscosa nelle correnti incompressibili con viscosità costante, la sua deduzione è alquanto complicata, essenzialmente per due motivi diversi. In primo luogo una descrizione completa dell'attrito viscoso internamente a un fluido deve partire dall'analisi di un fluido *comprimibile*. Vedremo che considerare un fluido di tipo generale conduce a scoprire che esistono *due* forme diverse di attrito al suo interno associate a due distinti coefficienti di viscosità, relativi uno all'attrito di *taglio* e l'altro all'attrito di *dilatazione*. In secondo luogo, le due viscosità dipendono in generale dalle condizioni termodinamiche del fluido nel punto considerato. Come vedremo, questi due aspetti indipendenti intervengono in modo intrecciato nel ragionamento che conduce alla formula della forza viscosa presente nel caso delle equazioni di Navier–Stokes incompressibili.

### Tensore degli sforzi viscosi

Consideriamo all'interno di un fluido una superficie elementare  $\Delta S$  di normale  $\hat{n}$ , attraverso la quale si esercita l'interazione fra le particelle del fluido. In assenza di attrito viscoso, la forza interna fra le particelle è solo nella direzione normale  $\hat{n}$  e dipende dal valore della pressione  $P$  nel punto considerato. Precisamente la forza esercitata attraverso la superficie  $\Delta S$  dalle particelle che si trovano dalla parte in cui punta  $\hat{n}$  sul fluido che si trova dalla parte opposta è data da  $-P \Delta S \hat{n}$ .

Se il fluido è reale, la forza interna tra le particelle, esercitata attraverso la superficie  $\Delta S$ , ha componenti sia lungo la normale sia in direzione tangente a  $\Delta S$ . Quindi la forza interna non è più descrivibile mediante la sola grandezza scalare  $P$  combinata con il versore normale  $\hat{n}$ . Nella realtà, l'azione interna è costituita da un vettore che dipende in modulo e direzione dalla normale  $\hat{n}$  e che in generale ha una direzione diversa da quella della normale stessa. Siccome nello spazio tridimensionale le direzioni indipendenti sono tre, l'azione interna fra le particelle del fluido sarà rappresentata da tre vettori distinti, ciascuno associato a una direzione indipendente. In altre parole per caratterizzare l'interazione fra le particelle di un fluido viscoso è necessario introdurre una grandezza di nuovo tipo, che si chiama **tensore degli sforzi viscosi** e che si indica con il simbolo particolare  $\mathbb{S}$ . Questa grandezza rappresenta la forza per unità di area relativa alle tre diverse orientazioni nello spazio. Essa è una grandezza intrinseca, come lo sono i vettori, ma rappresenta un operatore lineare, nel senso che la sua azione su un determinato vettore produce un altro vettore. In un determinato sistema di riferimento il tensore  $\mathbb{S}$  sarà descritto da una matrice i cui elementi dipendono dal sistema scelto, esattamente come accade per un vettore e le sue componenti. Precisamente una colonna del tensore  $\mathbb{S}$  rappresenta la forza per unità di area che si esercita attraverso una superficie elementare  $\Delta S$  la cui normale è nella direzione corrispondente alla colonna considerata.

Si può dimostrare che la legge di conservazione del momento della quantità di moto (o momento angolare) implica che il tensore degli sforzi deve essere *simmetrico*. Nel caso di coordinate cartesiane il tensore degli sforzi viscosi  $\mathbb{S}$  è allora dato dalla matrice simmetrica

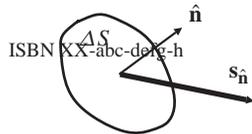
$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} s_{x,x} & \text{sim} & \text{sim} \\ s_{y,x} & s_{y,y} & \text{sim} \\ s_{z,x} & s_{z,y} & s_{z,z} \end{pmatrix}$$

mentre, in un sistema di coordinate curvilinee ortogonali con versori  $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)$ , il tensore degli sforzi viscosi sarà indicato nella forma generale:

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} s_{1,1} & \text{sim} & \text{sim} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \text{sim} \\ s_{3,1} & s_{3,2} & s_{3,3} \end{pmatrix}$$

Noto il tensore dello sforzo viscoso  $\mathbb{S}$  in un punto del fluido, possiamo introdurre il **vettore sforzo viscoso**  $\mathbf{s}_{\hat{n}}$  relativo a una superficie con normale  $\hat{n}$  facendo agire il tensore  $\mathbb{S}$  su  $\hat{n}$  (vedi figura 5.26)




**Figura 5.26**

Vettore sforzo viscoso, ovvero proiezione del tensore  $\mathbb{S}$  lungo la direzione della normale  $\hat{\mathbf{n}}$

$$\mathbf{s}_{\hat{\mathbf{n}}} = \mathbb{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \Longleftrightarrow \quad s_{\hat{\mathbf{n}},i}(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^3 s_{i,j}(\mathbf{u}) \hat{n}_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

### Tensore di rapidità di deformazione

Gli sforzi interni si manifestano anche in un solido continuo, ad esempio in un materiale elastico come un pezzo di metallo o di altra sostanza solida. In effetti la differenza fra liquidi e solidi emerge solo quando si analizza la causa degli sforzi interni nel mezzo continuo: per un solido lo sforzo dipende dalla deformazione locale del corpo mentre per un fluido esso dipende dalla *rapidità* di variazione della deformazione locale del fluido. Dobbiamo quindi introdurre una nuova grandezza in grado di rappresentare questo aspetto cinematico del campo di moto del fluido.

Per determinare quale sia questa grandezza incominciamo col considerare il campo di moto di un corpo rigido. Esso può solo traslare e ruotare. Il campo di velocità che caratterizza i punti del corpo può quindi essere espresso come somma di un contributo uniforme, la velocità di traslazione  $\mathbf{U}$ , e di un contributo dovuto alla sola rotazione, esprimibile mediante la relazione

$$\mathbf{u}_{\text{rotaz.}}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \times [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)]$$

dove  $\mathbf{r}_0(t)$  è un punto appartenente all'asse di rotazione all'istante  $t$ . Poiché muovendosi, oltre a traslare e a ruotare, si deforma, il campo di velocità che caratterizza le particelle di un fluido non è esprimibile mediante la somma di questi due soli contributi, ma occorre tenere in considerazione anche la rapidità con cui le particelle di fluido si stanno deformando. Inoltre, mentre nel caso di un corpo solido la velocità angolare è funzione solamente del tempo, nel caso di un continuo deformabile essa può essere diversa da particella a particella, e quindi è anche funzione della posizione, scriveremo perciò  $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t)$ . Occorre ora trovare un modo per descrivere la rapidità con cui si deforma localmente il fluido, oltre che la velocità con cui esso trasla e ruota. In realtà, l'informazione cercata è interamente contenuta nel campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , quindi il problema consiste nell'estrarre dal campo di velocità soltanto la parte relativa alla rapidità con cui si deformano le particelle. Per fare questo consideriamo due punti vicini fra loro,  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$ , entrambi appartenenti al campo di moto. Chiameremo  $d\mathbf{r}$  la differenza  $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$  che, in coordinate cartesiane ortogonali, può essere scritta come  $d\mathbf{r} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}$ . Come si è detto, la velocità in entrambi i punti può essere vista come somma di tre contributi: uno legato alla componente traslatoria del campo di moto, uno dovuto alla componente rotatoria del campo di moto più un contributo che rappresenta la rapidità con cui il fluido si deforma. In altre parole possiamo scrivere

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}(t) + \mathbf{u}_{\text{rotaz.}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}_{\text{deform.}}(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}', t) = \mathbf{U}(t) + \mathbf{u}_{\text{rotaz.}}(\mathbf{r}', t) + \mathbf{u}_{\text{deform.}}(\mathbf{r}', t).$$

Nel caso in cui il moto del fluido sia puramente traslatorio, ossia quanto la velocità è uniforme in tutti i punti del campo di moto, i due punti si muoveranno con la medesima velocità, possiamo quindi ritenere che la differenza fra le velocità di due punti vicini contenga le informazioni relative alla rapidità di rotazione e alla rapidità di deformazione delle particelle di fluido. Per vederlo, consideriamo questa differenza di velocità e supponiamo che i due punti siano molto vicini, siamo infatti interessati alle proprietà locali del campo di moto, punto per punto. Esprimendo la velocità nel punto  $\mathbf{r}'$  per mezzo dello sviluppo in serie di Taylor della velocità nell'intorno del punto  $\mathbf{r}$ , e





troncando la serie ai termini infinitesimi del prim'ordine, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} dx \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} dy \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz \hat{\mathbf{z}} + O(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \\ &\approx \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} dx \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} dy \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

in cui per fissare le idee abbiamo considerato un sistema di coordinate cartesiane e ortogonali. Se definiamo ora il tensore gradiente della velocità  $\mathbb{G}$  mediante le derivate delle tre componenti della velocità rispetto a ciascuna delle coordinate spaziali, le cui componenti cartesiane sono

$$\mathbb{G} \rightarrow g_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

possiamo esprimere la differenza di velocità in modo estremamente sintetico, come prodotto scalare fra il tensore  $\mathbb{G}$  e il vettore  $d\mathbf{r}$ ,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbb{G} \cdot d\mathbf{r}.$$

Il tensore  $\mathbb{G}$ , in ogni punto del campo di moto, contiene una descrizione delle proprietà locali del campo di velocità per quanto concerne la rotazione e la deformazione della particella di fluido. Allo scopo di descrivere la rapidità di deformazione della particella, da cui dipendono gli sforzi viscosi, dobbiamo quindi estrarre dal tensore dei gradienti di velocità la parte relativa soltanto all'effettiva rapidità di deformazione, depurandolo dal contributo dovuto alla rotazione della particella. Per fare questo consideriamo un campo di velocità puramente rotatorio, e quindi rigido, con velocità angolare  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  e sia  $\mathbf{r}_0(t)$  un punto appartenente all'asse di rotazione, la velocità nel punto  $\mathbf{r}$  è data dall'espressione

$$\mathbf{u}_{\text{rot}}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \times [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)]$$

dove il pedice  $_{\text{rot}}$  indica il fatto che si tratta del solo contributo dovuto alla rotazione della particella. Allo stesso modo la velocità nel punto  $\mathbf{r}'$  è data da

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{rot}}(\mathbf{r}', t) &= \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}', t) \times [\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t)] \\ &= \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t) \times [\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t)] + O(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2) \end{aligned}$$

cosicché la differenza di velocità fra i due punti  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$  risulta

$$\mathbf{u}_{\text{rot}}(\mathbf{r}', t) - \mathbf{u}_{\text{rot}}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t) \times d\mathbf{r} + O(|d\mathbf{r}|^2).$$

Un calcolo diretto del prodotto vettoriale fornisce

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{rot}}(\mathbf{r}', t) - \mathbf{u}_{\text{rot}}(\mathbf{r}, t) &= (\Omega_y dz - \Omega_z dy) \hat{\mathbf{x}} - (\Omega_x dz - \Omega_z dx) \hat{\mathbf{y}} + (\Omega_x dy - \Omega_y dx) \hat{\mathbf{z}} \\ &= (\Omega_z \hat{\mathbf{y}} - \Omega_y \hat{\mathbf{z}}) dx + (\Omega_x \hat{\mathbf{z}} - \Omega_z \hat{\mathbf{x}}) dy + (\Omega_y \hat{\mathbf{x}} - \Omega_x \hat{\mathbf{y}}) dz. \end{aligned}$$

Come fatto in precedenza, questa espressione può essere riscritta in forma sintetica introducendo un nuovo tensore, il tensore velocità angolare che, in coordinate cartesiane ortogonali, corrisponde alla matrice

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix}.$$





Utilizzando la relazione  $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}$ , il tensore della velocità angolare può essere riscritto in questo modo

$$\mathbb{R} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo ora che ogni tensore  $\mathbb{G}$  può essere scomposto in maniera unica nella somma di un tensore simmetrico, tale cioè che per la sua rappresentazione in coordinate cartesiane ortogonali valga l'identità  $g_{i,j} \equiv g_{j,i}$ , e di un tensore antisimmetrico, tale cioè da soddisfare l'identità  $g_{i,j} \equiv -g_{j,i}$ . Definiamo ora il trasposto di un tensore, e lo indichiamo con l'apice  $^t$ , quel tensore la cui rappresentazione cartesiana soddisfa la relazione  $g_{j,i}^t = g_{i,j}$ . È facile vedere allora che la decomposizione del tensore  $\mathbb{G}$ , come di un qualsiasi tensore doppio, nella somma della sua parte simmetrica  $\mathbb{D}$  e della sua parte antisimmetrica  $\mathbb{A}$  si ottiene ponendo  $\mathbb{D} = \frac{1}{2}(\mathbb{G} + \mathbb{G}^t)$ ,  $\mathbb{A} = \frac{1}{2}(\mathbb{G} - \mathbb{G}^t)$ . Un calcolo diretto ci permette di vedere che  $\mathbb{A} \equiv \mathbb{R}$ , ne deduciamo quindi che la parte antisimmetrica del tensore dei gradienti di velocità, calcolato in un punto, rappresenta il moto di pura rotazione della particella fluida in quel punto. Di conseguenza il moto di deformazione della stessa particella deve necessariamente essere associato alla parte simmetrica del tensore del gradiente della velocità.

La nuova grandezza cercata consiste quindi nella versione simmetrizzata del tensore dei “gradienti del campo di velocità” e si chiama **tensore di rapidità di deformazione**

$$\mathbb{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}[\mathbb{G} + \mathbb{G}^t].$$

Gli elementi della matrice che rappresentano  $\mathbb{D}(\mathbf{u})$  in un sistema di coordinate cartesiane sono dati da

$$d_{i,j}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

ovverosia, scrivendo in forma dettagliata tutti gli elementi della relativa matrice,

$$\mathbb{D}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \text{sim} & \text{sim} \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] & \frac{\partial v}{\partial y} & \text{sim} \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] & \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

La definizione generale del tensore dei gradienti della velocità che risulta valida per ogni sistema di coordinate curvilinee ortogonali è invece la seguente

$$\mathbb{D}(\mathbf{u}) \longleftrightarrow \frac{1}{2}[\hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot (\hat{\boldsymbol{\eta}}' \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\boldsymbol{\eta}}' \cdot (\hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \nabla) \mathbf{u}],$$

dove  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$  ed  $\hat{\boldsymbol{\eta}}'$  sono due versori la cui direzione varia in tutte le possibili direzioni, in modo da generare il carattere tensoriale di  $\mathbb{D}$ . Anche la definizione generale indica che la matrice del tensore  $\mathbb{D}(\mathbf{u})$  è simmetrica. Gli elementi di  $\mathbb{D}(\mathbf{u})$  in un sistema di coordinate curvilinee ortogonali con versori  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_1$ ,  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_2$  ed  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_3$  sono dati da

$$d_{i,j}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}[\hat{\boldsymbol{\eta}}_i \cdot (\hat{\boldsymbol{\eta}}_j \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\boldsymbol{\eta}}_j \cdot (\hat{\boldsymbol{\eta}}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}], \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Per ricavare questi elementi si deve pertanto ricordare che il calcolo della derivata  $(\hat{\boldsymbol{\eta}}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}$  richiede di espandere  $\mathbf{u}$  in termini delle sue componenti nello stesso sistema di coordinate, ovvero,

$$(\hat{\boldsymbol{\eta}}_j \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\hat{\boldsymbol{\eta}}_j \cdot \nabla)(u_1 \hat{\boldsymbol{\eta}}_1 + u_2 \hat{\boldsymbol{\eta}}_2 + u_3 \hat{\boldsymbol{\eta}}_3),$$

e di tenere conto che anche i versori  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_1$ ,  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_2$  ed  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_3$  in generale possono dipendere da una o più coordinate, per cui alcune derivate di  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_i$  potranno essere diverse da zero e quindi vi potranno essere contributi aggiuntivi anche per le altre componenti ortogonali.





### Fluido viscoso newtoniano

Per definire le proprietà del fluido riguardanti l'attrito interno viscoso si deve fornire il legame fra i due tensori (entrambi simmetrici) degli sforzi viscosi e dei gradienti della velocità. In linea teorica sono possibili legami aventi forme diverse, ma il caso di un semplice legame *lineare* fra  $\mathbb{D}$  e  $\mathbb{S}$  è particolarmente importante e conduce alla classe di fluidi viscosi detti **newtoniani**. Questa ipotesi è il corrispettivo per i fluidi dell'ipotesi di linearità tra gli sforzi e le deformazioni che caratterizza il comportamento perfettamente elastico dei corpi solidi.

Supponiamo ora che  $\mathbb{S}$  sia una funzione lineare di  $\mathbb{D}$  e che il fluido sia **isotropo**, cioè che le sue proprietà siano indipendenti dalla direzione nello spazio. Il principio di invarianza rispetto alle rotazioni nello spazio permette allora di dimostrare (si veda l'originale dimostrazione proposta da Federico Lastaria nell'appendice T) che sono sufficienti solo due coefficienti scalari per caratterizzare il legame lineare fra i tensori  $\mathbb{D}$  ed  $\mathbb{S}$ , e che tale legame assume la seguente forma

$$\mathbb{S}(\mathbf{u}) = 2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u}) + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbb{I},$$

dove  $\mu$  si chiama coefficiente di **viscosità (di taglio)** e  $\lambda$  si chiama coefficiente di **viscosità di dilatazione**. Questi coefficienti devono soddisfare le condizioni seguenti:  $\mu > 0$  e  $\lambda + \frac{2}{3}\mu > 0$ .

In certi casi si preferisce fare comparire un nuovo tensore con traccia nulla. Osservando allora che  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  è uguale alla traccia di  $\mathbb{D}(\mathbf{u})$ , la relazione lineare precedente fra il tensore dei gradienti di velocità e il tensore degli sforzi viscosi si può riscrivere anche nella forma seguente:

$$\mathbb{S}(\mathbf{u}) = 2\mu \left[ \mathbb{D}(\mathbf{u}) - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbb{I} \right] + \zeta (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbb{I},$$

dove  $\zeta = \frac{2}{3}\mu + \lambda$  è chiamato **secondo coefficiente di viscosità** per distinguerlo da  $\mu$ , che allora è indicato come **primo coefficiente di viscosità**.

In generale, per fluidi con proprietà generiche, il valore dei due coefficienti di viscosità dipende dalle condizioni termodinamiche del fluido, per cui potremo scrivere

$$\mu = \mu(T, P) \quad \text{e} \quad \lambda = \lambda(T, P).$$

Nel campo di moto del fluido avremo in generale  $T = T(\mathbf{r}, t)$  e  $P = P(\mathbf{r}, t)$ , per cui il valore di  $\mu$  e  $\lambda$  dipenderà della posizione e dal tempo, ovvero avremo, per esempio,

$$\mu(T(\mathbf{r}, t), P(\mathbf{r}, t)) = \mu(\mathbf{r}, t).$$

Osserviamo infine che il tensore degli sforzi viscosi si somma allo sforzo normale dovuto alla pressione per costituire il **tensore totale degli sforzi**

$$\mathbb{T}(P, \mathbf{u}) = -P \mathbb{I} + \mathbb{S}(\mathbf{u}),$$

che per un fluido viscoso di tipo newtoniano assume la forma:

$$\mathbb{T}(P, \mathbf{u}) = -P \mathbb{I} + 2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u}) + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbb{I}.$$

### Vettore sforzo viscoso relativo a una superficie

Possiamo ora determinare il vettore sforzo viscoso  $\mathbf{s}_{\hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{u})$  relativo a una superficie con normale generica  $\hat{\mathbf{n}}$  in un punto di un campo di moto  $\mathbf{u}$  di cui sia noto il tensore degli sforzi viscosi  $\mathbb{S}(\mathbf{u})$ . Per definizione abbiamo  $\mathbf{s}_{\hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{u}) = \mathbb{S}(\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$ , ovvero

$$s_{\hat{\mathbf{n}},i}(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^3 s_{i,j}(\mathbf{u}) \hat{n}_j, \quad i = 1, 2, 3.$$





Un calcolo diretto, sebbene un po' noioso, in un sistema di coordinate curvilinee ortogonali qualsiasi, ad esempio in coordinate cartesiane, permette di ricavare la seguente relazione vettoriale

$$\mathbf{s}_{\hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{u}) = \mu [2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}] + \lambda \hat{\mathbf{n}} \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

L'espressione nel secondo membro ha una forma vettoriale intrinseca e quindi può essere utilizzata per calcolare  $\mathbf{s}_{\hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{u})$  in qualunque sistema di coordinate curvilinee ortogonali.

### Forza di attrito viscoso

Nel caso di fluido viscoso, sulle particelle agisce una forza interna di interazione dovuta all'attrito viscoso. La forza viscosa per unità di volume  $\mathbf{F}^{\text{visc}}$  si ottiene considerando un volumetto di fluido e sommando tutte le forze agenti sulla sua superficie. Ciò conduce a valutare la divergenza del tensore simmetrico degli sforzi viscosi  $\mathbb{S}(\mathbf{u})$ , ovvero all'espressione

$$\mathbf{F}^{\text{visc}} = \nabla \cdot \mathbb{S}(\mathbf{u}),$$

le cui componenti vettoriali sono date dall'espressione

$$F_j^{\text{visc}} = \nabla \cdot [\mathbf{s}_{\hat{\eta}_j}(\mathbf{u})], \quad j = 1, 2, 3.$$

Sostituendo l'espressione esplicita di  $\mathbf{s}_{\hat{\eta}_j}(\mathbf{u})$  si ha quindi

$$F_j^{\text{visc}} = \nabla \cdot [2\mu (\hat{\eta}_j \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mu \hat{\eta}_j \times \nabla \times \mathbf{u} + \lambda \hat{\eta}_j \nabla \cdot \mathbf{u}], \quad j = 1, 2, 3.$$

Un calcolo ancora diretto, in un qualunque sistema di coordinate curvilinee ortogonali, ad esempio cartesiane, permette di dedurre la seguente espressione della forza viscosa per unità di volume agente in un fluido qualsiasi, anche comprimibile,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{visc}} = & -\nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{u}) + \nabla((2\mu + \lambda)(\nabla \cdot \mathbf{u})) \\ & + 2(\nabla\mu) \times \nabla \times \mathbf{u} - 2(\nabla\mu)\nabla \cdot \mathbf{u} + 2((\nabla\mu) \cdot \nabla)\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Questo risultato ha una forma vettoriale intrinseca e quindi esso è valido in qualunque sistema di coordinate curvilinee ortogonali.





## CAPITOLO 6

# Equazioni dello strato limite stazionario 2D

**Introduzione** In questo capitolo presentiamo i concetti della teoria dello strato limite di Prandtl finalizzati allo studio delle correnti incomprimibili viscosi ad alti numeri di Reynolds. Deriviamo le equazioni di Prandtl per il caso di correnti stazionarie in due dimensioni seguendo il procedimento con cui sono state ricavate in origine. Esso è basato sull'analisi dell'importanza relativa dei vari termini presenti nell'equazione della quantità di moto quando una corrente stazionaria investe una lastra piana semi-infinita o un corpo molto sottile disposti parallelamente alla direzione della velocità incidente. Sotto queste condizioni si ottiene un sistema contenente solo due equazioni per le componenti cartesiane della velocità mentre la pressione è stabilita dalla legge di Bernoulli valida nella regione in cui l'effetto della viscosità può essere considerato trascurabile.

## 6.1 Caratteristiche generali dello strato limite

La teoria dello strato limite è stata sviluppata da Ludwig Prandtl per studiare correnti ad alti numeri di Reynolds in cui la velocità è prevalentemente *unidirezionale* mentre le sue variazioni sono prevalentemente *trasversali* alla sua stessa direzione. Nella sua forma più semplice la teoria consiste, in estrema sintesi, in una riduzione delle equazioni di Navier–Stokes per correnti incomprimibili stazionarie ottenuta al prezzo di dover risolvere *due* problemi distinti e *accoppiati* fra loro, onde determinare il campo di moto in tutto il dominio del fluido: un problema *viscoso* (ridotto) nella regione vicina alla parete del corpo, dove gli effetti della viscosità sono importanti a causa della condizione al contorno di velocità nulla, che è chiamato problema interno, e un problema *non viscoso* nella regione lontana, chiamato problema esterno.

### Ipotesi della teoria dello strato limite su una lastra

Precisamente, le ipotesi alla base della teoria dello strato limite che sarà analizzata in questo capitolo sono le seguenti:

- corrente incomprimibile e fluido di densità uniforme;
- corrente bidimensionale e stazionaria;
- lastra piana semi-infinita o corpo sottile allineati con la corrente esterna;
- effetti viscosi importanti solo in uno strato sottile vicino al corpo.

Impostiamo inizialmente il problema scrivendo le equazioni che governano la corrente con caratteristiche che derivano dalle prime tre ipotesi. Ciò significa ridurre le equazioni di Navier–Stokes incomprimibili al caso di corrente stazionaria in due dimensioni e specificando le condizioni al contorno appropriate alla geometria di una lastra sottile. Successivamente si analizzano invece le conseguenze della quarta ipotesi che è la parte più complessa da formulare per ricavare le equazioni di Prandtl.

Consideriamo una lastra semi-infinita, investita da una corrente la cui velocità a grande distanza è parallela al piano della lastra e perpendicolare al suo bordo di attacco. Si suppone che la corrente sia piana, per cui si introduce un sistema di coordinate cartesiane  $(x, y)$ . La metà positiva dell'asse  $x$  coincide con la sezione trasversale della lastra e l'origine delle coordinate corrisponde allo spigolo di attacco della lastra. La corrente esterna ha la stessa direzione e lo stesso verso dell'asse  $x$ .

Le equazioni che governano la corrente incomprimibile di un fluido avente densità uniforme,  $\rho = \bar{\rho}$ , e viscosità costante,  $\mu = \bar{\mu}$ , nel caso di moto stazionario si ottengono





eliminando il termine di derivata temporale dalle equazioni di Navier–Stokes introdotte nel paragrafo 5.4

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

dove  $\nu = \bar{\mu}/\bar{\rho}$ . Se consideriamo ora il problema di una corrente bidimensionale piana e scriviamo tutti i termini esprimendoli mediante le coordinate cartesiane  $x$ - $y$ , le equazioni di Navier–Stokes precedenti assumono la forma

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0,$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Il campo di moto deve essere determinato in tutto il piano  $x$ - $y$  tranne lungo la semiretta ( $x > 0, y = 0$ ), che rappresenta una sezione della lastra. Notiamo che, a causa della natura incomprimibile della corrente, la presenza del corpo influisce sul campo di moto anche nella regione a monte,  $x < 0$ . Tuttavia, queste perturbazioni si attenuano allontanandosi dal corpo e quindi a grande distanza la corrente si può ritenere nota e sarà tenuta in conto attraverso l'imposizione delle condizioni al contorno.

Le condizioni al contorno necessarie per il problema della lastra piana semi-infinita disposta come il semipiano ( $y = 0, x > 0$ ) sono le seguenti. Innanzi tutto, la velocità del fluido deve annullarsi su tutta la superficie della lastra:

$$\mathbf{u}(x, 0) = 0 \quad \text{per } x > 0.$$

Poi, a grande distanza sopra e sotto la lastra la velocità è assegnata da una corrente *esterna*, ovvero, si hanno le condizioni

$$\mathbf{u}(x, \pm\infty) = \mathbf{u}_{\pm}^{\text{est}}(x) \quad \text{per } \forall x,$$

dove  $\mathbf{u}_{\pm}^{\text{est}}(x)$  sono le distribuzioni asintotiche della velocità. Infine si deve imporre anche l'andamento della velocità *a monte* della lastra tramite le condizioni

$$\mathbf{u}(-\infty, y) = \mathbf{u}^{\text{monte}}(y) \quad \text{per } \forall y,$$

dove  $\mathbf{u}^{\text{monte}}(y)$  è la distribuzione nota della velocità a grande distanza a monte della lastra. L'andamento della velocità della corrente a valle della lastra, ovvero per  $x \rightarrow \infty$ , non è invece specificato.

Supponiamo ora di restringere l'attenzione a condizioni al contorno per le quali il campo di moto sia *simmetrico* rispetto al piano orizzontale  $y = 0$ . Un esempio è il caso di corrente esterna uniforme parallela alla lastra. Se si considerano soluzioni simmetriche, è sufficiente risolvere il problema nel semipiano superiore,  $y > 0$ . Allora, l'insieme delle condizioni al contorno da imporre sulla velocità comprende

$$\mathbf{u}(x, 0) = 0, \quad x > 0,$$

$$\mathbf{u}(x, \infty) = \mathbf{u}^{\text{est}}(x), \quad \forall x,$$

$$\mathbf{u}(-\infty, y) = \mathbf{u}^{\text{monte}}(y), \quad y > 0.$$

A queste si devono aggiungere le **condizioni di simmetria** sulla semiretta ( $x < 0, y = 0$ ), per le quali la componente  $v$  della velocità normale all'asse di simmetria deve annullarsi, mentre la componente  $u$  tangente all'asse deve avere derivata normale nulla sull'asse stesso, ovvero in termini espliciti:

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad x < 0.$$





Notare che la componente  $u$  parallela alla semiretta ( $x < 0, y = 0$ ) potrà assumere valori diversi da zero, tranne nel bordo di attacco della lastra dove la velocità  $\mathbf{u}$  si annulla, per cui  $u(0, 0) = 0$ . Raccogliendo insieme le varie condizioni al contorno di ciascuna componente avremo: per la componente orizzontale della velocità:

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad x < 0 \quad \text{e} \quad u(x, 0) = 0, \quad x \geq 0,$$

$$u(x, \infty) = u^{\text{est}}(x), \quad \forall x,$$

$$u(-\infty, y) = u^{\text{monte}}(y), \quad y > 0;$$

e per la componente verticale:

$$v(x, 0) = 0, \quad \forall x,$$

$$v(x, \infty) = v^{\text{est}}(x), \quad \forall x,$$

$$v(-\infty, y) = v^{\text{monte}}(y), \quad y > 0.$$

Nelle applicazioni di interesse ingegneristico il valore della viscosità cinematica del fluido, tipicamente aria o acqua, è molto piccolo, dell'ordine di  $10^{-5}$  **div**  $10^{-6}$ , per cui i numeri di Reynolds in gioco sono estremamente grandi, anche  $10^6$  **div**  $10^8$ . Questa circostanza sembra suggerire che il termine viscoso dell'equazione della quantità di moto possa essere tranquillamente trascurato rispetto agli altri e che sia quindi possibile ricorrere al modello delle correnti non viscoso governate dalle equazioni di Eulero. Occorre però notare che il termine viscoso è quello con ordine di derivazione massimo nelle equazioni di Navier–Stokes e che la sua eliminazione comporterebbe di non potere più imporre la condizione di non scivolamento sulle pareti solide. Questa condizione è invece essenziale perché la viscosità del fluido, per quanto piccola, è comunque presente e provoca un rallentamento del fluido vicino alla parete fino a rendere nulla la sua velocità sulla parete. Questo comportamento della corrente nella regione dello strato limite vicino alla superficie dei corpi solidi è contraddistinto dalla presenza di variazioni notevoli della velocità vicino alle pareti e soprattutto di valori molto grandi della curvatura del profilo di velocità, che rendono il termine viscoso di entità confrontabile con quella degli altri termini dell'equazione. Inoltre l'azione della viscosità è molto importante in quanto è la causa fondamentale della resistenza che la corrente esercita sul corpo immerso nel fluido. In conclusione i termini viscosi non possono essere eliminati completamente dalle equazioni del moto, ma si cerca una riduzione almeno parziale che sia adeguata alla risoluzione del problema nel limite  $Re \rightarrow \infty$  mantenendo nell'approssimazione solo l'effetto principale della viscosità nella configurazione geometrica considerata.

## 6.2 Teoria dello strato limite di Prandtl

Come accennato nell'introduzione, le equazioni dello strato limite di Prandtl possono essere derivate dalle equazioni di Navier–Stokes sia mediante un argomento euristico basato su considerazioni fisiche sia mediante una procedura di limite per  $Re \rightarrow \infty$ . In questo paragrafo seguiamo la prima via, dovuta originariamente a Prandtl, in cui si analizzano gli ordini di grandezza dei vari termini delle equazioni di Navier–Stokes.

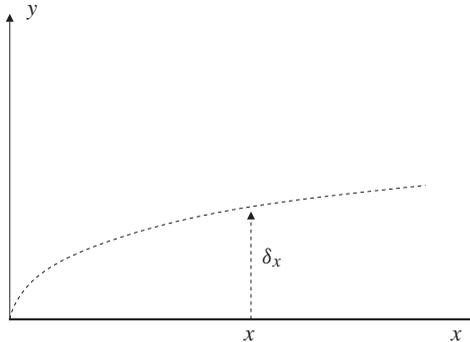
### Analisi degli ordini di grandezza

La figura 6.1 mostra una tipica configurazione di strato limite su una lastra piana semi-infinita investita da una corrente uniforme parallela al piano della lastra. In questo problema non esiste alcuna scala spaziale di riferimento definita, per cui si potrà considerare solo la distanza  $x$  dal bordo di attacco della lastra come lunghezza utile per procedere alla formulazione adimensionale del problema.





Indichiamo poi con  $\delta_x$  la distanza verticale  $y = \delta_x$  dalla lastra del punto in cui il valore della velocità raggiunge approssimativamente il valore della corrente esterna, ad esempio  $u(x, y) = 0.99 u^{\text{est}}(y)$ . La grandezza  $\delta_x$  rappresenta quindi una stima della **spessore dello strato limite** in corrispondenza del punto  $x$  sulla lastra. Si suppone che agli alti numeri di Reynolds la struttura del campo di moto sia tale che l'andamento di  $\delta_x$  sia come mostrato nella figura 6.1. Questo significa che, tranne nella zona vicina al bordo di attacco dove  $\delta_x \sim x$ , lo spessore dello strato limite è supposto essere piccolo rispetto alla distanza  $x$ , ovvero  $\delta_x \ll x$ .



**Figura 6.1** Struttura dello strato limite su una lastra piana semi-infinita

La componente  $u$  della velocità del campo di moto sarà di ordine  $\mathcal{U}$ , dove  $\mathcal{U}$  rappresenta un valore caratteristico tipico della componente  $x$  della velocità della corrente esterna, ad esempio, nel caso di velocità esterna uniforme  $U$  sarà  $\mathcal{U} = U$ . Indichiamo poi con  $\mathcal{V}$  un valore tipico della componente verticale della velocità, che stimeremo fra un momento. Su questa base è possibile fornire una stima del valore delle derivate spaziali delle variabili incognite, che saranno:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\mathcal{U}}{x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{\mathcal{V}}{\delta_x}.$$

Notiamo che nelle relazioni di questo tipo contenenti stime di vari termini il segno delle quantità non ha alcuna importanza e le relazioni devono sempre essere intese fra i valori assoluti delle grandezze considerate.

La condizione d'incompressibilità della corrente in due dimensioni permette di ricavare subito che

$$\frac{\mathcal{U}}{x} \sim \frac{\mathcal{V}}{\delta_x} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V} \sim \mathcal{U} \frac{\delta_x}{x}.$$

Pertanto la condizione sulla piccolezza dello spessore dello strato limite  $\delta_x \ll x$  implica anche

$$\mathcal{V} \ll \mathcal{U}$$

il che significa che il moto del fluido nello strato limite è quasi parallelo alla lastra. Procedendo nella nostra analisi degli ordini di grandezza, consideriamo l'equazione della componente orizzontale della velocità

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

La stima di tutte le derivate di  $u$  che compaiono nell'equazione permette di scrivere

$$\mathcal{U} \frac{\mathcal{U}}{x} + \mathcal{V} \frac{\mathcal{U}}{\delta_x} + \nu \left( \frac{\mathcal{U}}{x^2} + \frac{\mathcal{U}}{\delta_x^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \sim 0.$$

Si ricorda che i segni non sono significativi nelle relazioni riguardanti le stime dei termini. Se usiamo ora la stima di  $\mathcal{V}$  appena ottenuta, si vede che i due termini non lineari hanno lo stesso ordine di grandezza, poiché

$$\mathcal{U} \frac{\mathcal{U}}{x} + \mathcal{V} \frac{\mathcal{U}}{\delta_x} \sim \frac{\mathcal{U}^2}{x} + \mathcal{U} \frac{\delta_x}{x} \frac{\mathcal{U}}{\delta_x} \sim \frac{\mathcal{U}^2}{x} + \frac{\mathcal{U}^2}{x}.$$





Inoltre è evidente che, dei due termini viscosi, quello relativo alla derivata lungo la lastra è molto minore di quello relativo alla derivata normale. Di conseguenza la stima dei termini dell'equazione permette di scrivere

$$\frac{u^2}{x} + \nu \frac{u}{\delta_x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \sim 0,$$

avendo trascurato i coefficienti numerici, di nessuna importanza nelle stime dei termini. Affinché l'entità del termine viscoso sia dello stesso ordine di quella dei termini non lineari, come ipotizzato debba accadere all'interno dello strato limite, dovrà valere la condizione

$$\frac{u^2}{x} \sim \nu \frac{u}{\delta_x^2} \quad \text{da cui} \quad \delta_x^2 \sim \frac{\nu x}{u}.$$

In altre parole, dalle ipotesi di Prandtl e dal fatto che i termini viscoso e non lineari sono dello stesso ordine segue che lo spessore  $\delta_x$  dello strato limite dipende dalla distanza  $x$  dal bordo di attacco secondo la relazione

$$\delta_x \sim \sqrt{\frac{\nu x}{u}} \quad \text{o in forma adimensionale} \quad \frac{\delta_x}{x} \sim \sqrt{\frac{\nu}{ux}}.$$

Se ora introduciamo un numero di Reynolds **locale** basato sulla distanza  $x$  dal bordo di attacco della lastra

$$\text{Re}_x = \frac{ux}{\nu},$$

lo spessore adimensionale dello strato limite avrà la seguente dipendenza da  $\text{Re}_x$

$$\frac{\delta_x}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}}.$$

Nell'ambito dell'approssimazione  $\delta_x \ll x$ , il termine viscoso associato alla derivata lungo la parete potrà essere trascurato e l'equazione della componente  $x$  della velocità si ridurrà a

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Consideriamo ora l'equazione relativa alla componente della velocità normale alla parete

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

e applichiamo a essa la stessa analisi degli ordini di grandezza. Abbiamo

$$u \frac{v}{x} + v \frac{v}{\delta_x} + \nu \left( \frac{v}{x^2} + \frac{v}{\delta_x^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \sim 0.$$

Anche in questo caso i due termini non lineari hanno lo stesso ordine di grandezza in quanto, per la stima derivante dalla condizione d'incompressibilità, risulta

$$u \frac{v}{x} + v \frac{v}{\delta_x} \sim \frac{v_x v}{\delta_x x} + \frac{v^2}{\delta_x} \sim \frac{v^2}{\delta_x} + \frac{v^2}{\delta_x},$$

e la derivata seconda rispetto a  $x$  è trascurabile se confrontata con quella rispetto a  $y$ , per cui vale la stima

$$\frac{v^2}{\delta_x} + \nu \frac{v}{\delta_x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \sim 0.$$





Utilizzando la stima di  $\mathcal{V}$ , questa relazione è equivalente a

$$\frac{\mathcal{U}^2 \delta_x}{x^2} + \nu \frac{\mathcal{U}}{x \delta_x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \sim 0,$$

per cui, esprimendo  $\nu$  in termini del numero di Reynolds locale,  $\nu = \mathcal{U}x/\text{Re}_x$ , si ha anche

$$\frac{\mathcal{U}^2 \delta_x}{x^2} + \frac{1}{\text{Re}_x} \frac{\mathcal{U}^2}{\delta_x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \sim 0.$$

Dal momento che  $\text{Re}_x \sim x^2/\delta_x^2$ , per  $\delta_x \ll x$  e  $\text{Re}_x \gg 1$  i primi due termini hanno lo stesso ordine di grandezza. Ne consegue che il terzo termine avrà lo stesso ordine di grandezza degli altri oppure sarà più piccolo. Quest'ultimo termine, se confrontato con il corrispondente dell'equazione della componente  $x$ , risulta piccolo, quindi, seguendo Prandtl, possiamo assumere

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Pertanto la pressione nello strato limite varierà, in prima approssimazione, solo con la coordinata  $x$  lungo la parete e non dipenderà dalla distanza dalla parete stessa, ovvero avremo  $P = P(x)$ . La forma corretta dell'equazione per la componente  $x$  della velocità appena ricavata sarà allora

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = 0,$$

dove la derivata parziale di  $P$  è stata sostituita dalla derivata ordinaria in quanto la pressione dentro lo strato limite è funzione della sola variabile  $x$ .

Il sistema di equazioni da soddisfare per determinare il campo di moto della corrente attorno alla lastra sarà quindi

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Abbiamo pertanto un sistema di due equazioni nelle *tre* incognite  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  e  $P(x)$ , che richiede quindi di essere completato opportunamente per potere avere una soluzione unica.

### Corrente non viscosa

È a questo punto che interviene l'elemento più delicato della teoria di Prandtl. Lontano dalla lastra gli effetti della viscosità del fluido sono trascurabili e la corrente è descritta con buona approssimazione dalle equazioni di Eulero per correnti incompressibili piane stazionarie. Di conseguenza sarà possibile determinare il campo di pressione della corrente inviscida a una certa distanza dalla lastra risolvendo in questa zona le equazioni di Eulero con le relative condizioni al contorno. Abbiamo visto nei capitoli 3 e 4 che con queste equazioni la condizione al contorno corretta da imporre sulla velocità è quella per la sola componente normale alla frontiera del dominio. Se indichiamo con  $\mathbf{u}^e(x, y)$  e  $P^e(x, y)$  le variabili incognite delle nostre equazioni di Eulero da risolvere nel semipiano  $y > 0$ , avremo allora le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} u^e(-\infty, y) &= u^{\text{monte}}(y), & y > 0, \\ v^e(x, 0) &= 0 & \text{e} & v^e(x, \infty) = v^{\text{est}}(x), & x > 0, \end{aligned}$$





dove  $u^{\text{monte}}(y)$  è la distribuzione della componente orizzontale della velocità a monte, a grande distanza dalla lastra, mentre  $v^{\text{est}}(x)$  è la distribuzione della componente verticale della velocità esterna imposta a grande distanza dalla lastra.

Supponendo ora di avere determinato il campo di pressione  $P^e(x, y)$  della corrente non viscosa, possiamo valutare il suo andamento sulla superficie della lastra e assumerlo come pressione nota internamente allo strato limite. In altre parole, la pressione della corrente inviscida valutata sulla lastra viene utilizzata per rappresentare l'andamento della pressione nella regione dello strato limite. In termini matematici porremo quindi

$$P(x) = P^e(x, 0).$$

Questo significa che la variabile incognita  $P(x)$  vista in precedenza è determinata dalla funzione  $P^e(x, 0)$  calcolata risolvendo le equazioni di Eulero incomprimibili.

Con questa assunzione l'equazione della componente orizzontale della velocità per il problema viscoso dello strato limite assumerà la seguente forma

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^e(x, 0)}{\partial x},$$

in cui il secondo membro è ora un termine *noto*.

### Equazioni dello strato limite di Prandtl

L'ultimo passo per la costruzione delle equazioni dello strato limite nel caso della corrente attorno alla lastra piana semi-infinita deriva dal supporre che la corrente a monte sia uniforme, ovvero dallo scegliere la condizione al contorno particolare

$$u^e(-\infty, y) = U, \quad y > 0,$$

dove  $U > 0$ , mentre si permette ancora una distribuzione della velocità esterna verticale  $v^{\text{est}}(x)$  di tipo generale. La condizione a monte implica che la corrente è irrotazionale per cui la corrente inviscida soddisferà la versione irrotazionale del teorema di Bernoulli, ossia,

$$\frac{P^e(x, y)}{\rho} + \frac{1}{2} |\mathbf{u}^e(x, y)|^2 = C,$$

dove  $C$  è una costante arbitraria. Valutando questa relazione sulla lastra, ossia per  $y = 0$ , dove  $\mathbf{u}^e(x, 0) = u^e(x, 0) \hat{\mathbf{x}}$  dato che  $v^e(x, 0) = 0$ , e risolvendo rispetto alla pressione, abbiamo

$$\frac{P^e(x, 0)}{\rho} = -\frac{1}{2} [u^e(x, 0)]^2 + C,$$

e quindi la derivata della pressione rispetto a  $x$  è

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^e(x, 0)}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{d[u^e(x, 0)]^2}{dx},$$

da sostituire nell'equazione della componente orizzontale della velocità, che assume la forma

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{d[u^e(x, 0)]^2}{dx}.$$





Combinando questa equazione con la condizione d'incomprimibilità si ottiene il seguente sistema

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{d[u^e(x, 0)]^2}{dx},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

con due equazioni differenziali alle derivate parziali nelle due incognite  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$ . Questo sistema è noto con il nome di **equazioni di Prandtl** della teoria dello strato limite. Si noti che la funzione  $u^e(x, 0)$  è conosciuta e quindi il termine del membro di destra della prima equazione è semplicemente il suo termine noto.

Il dominio in cui risolviamo queste equazioni è costituito dal primo quadrante ( $x > 0, y > 0$ ).

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, sulla lastra si impone l'annullamento della velocità. Inoltre, sulla retta verticale  $x = 0, y > 0$ , si impone che la componente orizzontale della velocità sia uniforme, ovvero,  $u(0, y) = U$ . Infine, a grande distanza dalla lastra, si impone, sempre sulla componente orizzontale, la distribuzione della velocità  $u^e(x, 0)$  fornita dalla soluzione delle equazioni di Eulero valutata sulla superficie della lastra. Naturalmente si suppone che sia soddisfatta la condizione  $u^e(0, 0) = U$ . L'insieme delle condizioni al contorno da imporre nella risoluzione delle equazioni di Prandtl è

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad u(x, \infty) = u^e(x, 0), \quad x > 0,$$

$$u(0, y) = U, \quad y > 0,$$

$$v(x, 0) = 0, \quad x > 0.$$

Si può notare che, mentre la componente della velocità  $u$  parallela alla lastra ha condizioni al contorno sia sulla lastra  $y = 0$  sia per  $y \rightarrow \infty$ , la componente verticale  $v$  è specificata solo sulla lastra. Ciò è conforme alla natura delle equazioni di Prandtl per le variabili primitive nelle quali la sola derivata seconda presente è  $\partial^2 u / \partial y^2$  mentre l'unica derivata di  $v$  rispetto a  $y$  presente è la derivata prima. Inoltre, soltanto la variabile  $u$  è derivata rispetto a  $x$ , per cui sulla semiretta verticale passante per  $x = 0$  si può imporre la condizione al contorno solo per  $u$ .

**Osservazione** Il problema di Prandtl così formulato presenta una singolarità in corrispondenza del bordo di attacco della lastra, ovvero nell'origine delle coordinate cartesiane. Infatti in questo punto la componente orizzontale della velocità deve essere nulla, in quanto esiste la condizione di non scivolamento sulla lastra, ma deve anche essere uguale a  $U$ , in virtù della condizione di velocità sulla semiretta verticale,  $u(0, y=0) = U$ . Essendo  $U$  necessariamente diverso da zero, il dato al contorno della componente  $u$  della velocità è allora *discontinuo* nel vertice in basso a sinistra  $(0, 0)$  del dominio, che corrisponde al bordo di attacco della lastra. Questa discontinuità dei dati al contorno di  $u$  implica una *singolarità* della soluzione. Come vedremo fra un momento, tale singolarità gioca un ruolo essenziale nel ricavare soluzioni di tipo simile del problema della lastra piana.

### Rappresentazione della funzione di corrente

Una forma conveniente delle equazioni di Prandtl si ottiene utilizzando la funzione di corrente  $\psi$  mediante la quale la teoria dello strato limite può essere formulata in termini di una sola equazione differenziale per questa variabile scalare. Come noto, la funzione di corrente  $\psi$  permette di rappresentare il campo di velocità incomprimibile

La funzione di corrente  $\psi$  è stata introdotta nel paragrafo 3.9.





di una corrente piana mediante le relazioni

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

In questo modo risulta soddisfatto il vincolo di incomprimibilità, a cura del lettore verificarlo, e la prima delle due equazioni di Prandtl assume la forma

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - v \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{1}{2} \frac{d[u^e(x, 0)]^2}{dx}.$$

Abbiamo una sola equazione differenziale alle derivate parziali del *terzo ordine* in una sola incognita,  $\psi$ , e di tipo non lineare. Le condizioni al contorno per la nuova variabile  $\psi$  si derivano dalle quelle originarie per  $u$  e  $v$ . Consideriamo per prima la condizione di non penetrazione sulla lastra:  $v(x, 0) = 0$ . In termini di  $\psi$  essa diventa  $\partial \psi(x, 0)/\partial x = 0$ , relazione che, una volta integrata lungo l'asse  $x$ , può essere scritta più semplicemente come

$$\psi(x, 0) = \text{costante} = 0, \quad x > 0.$$

È lecito prendere uguale a zero il valore della costante d'integrazione in quanto la funzione di corrente è definita a meno di una costante arbitraria. Anche la condizione sulla semiretta verticale  $x = 0$  e  $y > 0$ , cioè  $\partial \psi(0, y)/\partial y = U$ , può essere integrata e conduce alla semplice condizione

$$\psi(0, y) = \int_0^y U d\tilde{y} = Uy, \quad y > 0.$$

Le altre due condizioni al contorno per la componente della velocità parallela alla lastra si riscrivono direttamente come condizioni sulla derivata di  $\psi$  rispetto alla coordinata  $y$  normale alla lastra:

$$\frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi(x, \infty)}{\partial y} = u^e(x, 0), \quad x > 0.$$

Il problema completo dello strato limite nella rappresentazione della funzione di corrente consiste quindi: nell'equazione per  $\psi$ , che scriviamo con le derivate di ordine più elevato scritte per prime, e nelle condizioni al contorno appena ricavate:

$$\begin{aligned} v \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{2} \frac{d[u^e(x, 0)]^2}{dx}, \\ \psi(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial x} &= 0, \quad x > 0, \\ \frac{\partial \psi(x, \infty)}{\partial y} &= u^e(x, 0), \quad x > 0, \\ \psi(0, y) &= Uy, \quad y > 0. \end{aligned}$$

In questa formulazione il problema dello strato limite rivela la natura matematica delle semplificazioni conseguenti alle ipotesi poste da Prandtl a fondamento della sua teoria: l'equazione della funzione di corrente, che nel caso generale di corrente piana incomprimibile di tipo Navier–Stokes è del quarto ordine, si riduce a un'equazione del terzo ordine. Corrispondentemente sul “contorno orizzontale lontano”  $y \rightarrow \infty$  la nuova variabile incognita  $\psi$  ha una sola condizione al contorno invece di due. Per quanto riguarda le condizioni al contorno sulla semiretta verticale ( $x = 0, y > 0$ ), c'è una sola condizione in conformità con la sparizione di tutte le derivate rispetto a  $x$  di ordine superiore al primo.

