



Agatino Rifatto
INAF- Osservatorio Astronomico
di Capodimonte, Napoli

Lezioni ed esercizi di Astronomia

Ad uso degli studenti del modulo di Astronomia
corso di laurea in Fisica - Università di Salerno

anno accademico 2002 - 2003

Prefazione

Le seguenti dispense contengono le parti principali delle lezioni e degli esercizi del modulo di Astronomia, per la laurea in Fisica presso l'Università di Salerno.

Non sono dunque un trattato, ma servono a fornire le nozioni di base di Astronomia agli studenti interessati a proseguire i loro studi verso l'indirizzo astrofisico.

Trattandosi di un modulo di 25 ore, esso comprende necessariamente solo la parte di astronomia classica (sferica e teorica), e nulla è trattato di ciò che riguarda la parte di astrofisica le cui lezioni, insieme a quelle di laboratorio di astronomia, si raccomanda vivamente di seguire come parte integrante di questo modulo.

Non si troverà nulla neanche dei più recenti sviluppi dell'astrofisica, proprio perché la finalità di questo corso è quella di fornire parte di quella preparazione di base necessaria ad affrontare eventuali percorsi specialistici successivi.

Mi piace ricordare le parole del prof. Leonida Rosino, mio docente e "maestro" di Astronomia ai tempi in cui seguivo i corsi per la laurea in Astronomia all'Università di Padova, e sicuramente una delle figure più carismatiche dell'Astronomia italiana del secolo che si è appena chiuso: "L'Astronomia è una scienza difficile: ogni argomento va meditato ed approfondito in senso critico, va analizzato nei suoi elementi essenziali e collegato a quanto precede ed a quanto segue. Lo studente ricordi, inoltre, che le basi dell'astronomia antica e moderna sono la matematica e la fisica. Non si può giungere all'astrofisica se non si hanno nozioni sufficienti di fisica, ed in particolare di fisica atomica e di spettroscopia".

Solo portando avanti questo processo di approfondimento critico degli argomenti contenuti nel presente modulo, e nei moduli integranti di astrofisica e di laboratorio di astronomia, sarà possibile affrontare con profitto, da parte dello studente, un eventuale percorso universitario specialistico nel settore dell'astrofisica.

A. Rifatto

Napoli, 27 gennaio 2003

Indice

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Cenni storici	1
1.2 Basi e fonti delle ricerche astronomiche	2
1.3 Oggetto e compiti dell'astronomia	3
1.4 Trigonometria piana	
1.4.1 Misura degli angoli	4
1.4.2 Relazioni trigonometriche	
1.4.2.1 Relazioni tra funzioni ed archi associati	5
1.4.2.2 Formule relative ad operazioni sugli archi	5
1.4.2.3 Sviluppo in serie di funzioni trigonometriche	6
1.4.3 Teoremi sui triangoli	
1.4.3.1 Teoremi sui triangoli rettangoli	7
1.4.3.2 Teoremi sui triangoli qualunque	7
1.4.3.3 Teoremi di Carnot	7
1.5 Trigonometria sferica	7
1.6 Coordinate cartesiane e coordinate polari sferiche	12
1.7 La sfera celeste	12
Esercizi	14

Capitolo 2

Sistemi di riferimento astronomici

2.1 Generalità.....	15
2.2 I Sistema: coordinate altazimutali.....	16
2.3 II Sistema: coordinate equatoriali	
2.3.1 Coordinate equatoriali orarie.....	18
2.3.2 Coordinate equatoriali celesti	19
2.4 III Sistema: coordinate eclittiche	21
2.5 IV Sistema: coordinate galattiche	22
Esercizi	22

Capitolo 3

Trasformazioni di coordinate

3.1 Trasformazioni di coordinate mediante la trigonometria sferica	25
3.1.1 Trasformazioni di coordinate da altazimutali ad equatoriali e viceversa	25
3.1.2 Trasformazione di coordinate da equatoriali ad eclittiche e viceversa	27
3.1.3 Trasformazione di coordinate da equatoriali a galattiche e viceversa	29
3.2 Applicazioni delle formule precedenti	
3.2.1 Nascere e tramontare degli astri	30
3.2.2 Culminazione degli astri	31
3.2.3 Durata del giorno e della notte	32
3.3 Crepuscolo civile e crepuscolo astronomico	34
3.4 Rifrazione	35
Esercizi	36

Capitolo 4

La misura del tempo

4.1 Principi di misura del tempo	39
4.2 Giorno e tempo siderale	39
4.3 Giorno solare vero e tempo solare vero	41
4.4 Giorno solare medio e tempo solare medio	43
4.5 Equazione del tempo	44
4.6 Relazione tra il tempo solare medio ed il tempo siderale	45
4.7 Sistemi di determinazione del tempo	
4.7.1 Ora locale e longitudine	47
4.7.2 Tempo universale	47
4.7.3 Fusi orari	48
4.7.4 Ora legale	49
4.7.5 Linea del cambiamento di data	49
4.7.6 Tempo delle effemeridi e tempo atomico	49
4.8 L'anno	51
4.9 I calendari	51
4.9.1 Il calendario giuliano	52
4.9.2 Il calendario gregoriano	52
Esercizi	53

Capitolo 5

Proprietà generali della Terra

5.1 Coordinate geografiche.....	55
5.2 Prove della sfericità della Terra.....	57
5.3 Determinazione del raggio della Terra: triangolazioni.....	58
5.4 Dimensioni e forma della Terra.....	59
5.5 Massa e densità della Terra.....	59
Esercizi.....	60

Capitolo 6**Distanze dei pianeti e delle stelle vicine**

6.1 La parallasse.....	61
6.2 Determinazione della parallasse diurna ed annua.....	63
6.3 Determinazione dell'unità astronomica.....	64
6.4 Determinazione della forma e delle dimensioni degli astri.....	65
Esercizi.....	66

Capitolo 7**Moti della Terra**

7.1 Prove del moto della Terra intorno al proprio asse.....	67
7.1.1 Pendolo di Foucault.....	67
7.1.2 Deviazione dei gravi in caduta libera.....	68
7.2 Prove della rotazione della Terra intorno al Sole.....	
7.2.1 La parallasse annua delle stelle.....	69
7.2.2 L'aberrazione annua delle stelle.....	69
7.3 Successione delle stagioni.....	71
7.4 Conseguenze della rotazione terrestre.....	
7.4.1 Precessione degli equinozi.....	72
7.4.2 Precessione planetaria e precessione in obliquità.....	75
7.4.3 Nutazione.....	75
Esercizi.....	75

Capitolo 8

Moti della Luna

8.1 Orbita della Luna e sue perturbazioni	77
8.2 Moto apparente e fasi lunari	78
8.3 Periodi di rivoluzione della Luna	79
8.4 Moti lunari	80
8.4.1 Librazione in longitudine	81
8.4.2 Librazione in latitudine	82
8.4.3 Librazione diurna o parallattica	82
8.4.4 Librazione fisica	82
8.5 Occultazioni lunari	82
8.6 Condizioni per il verificarsi delle eclissi	83
8.7 Numero totale di eclissi in un anno	84
8.6 Eclissi di Luna	85
8.6 Eclissi di Sole	88
Esercizi	89

Capitolo 9

Moti dei Pianeti

9.1 Moti apparenti dei Pianeti	91
9.2 Cenni sui sistemi del mondo	93
9.2.1 Sistema tolemaico	94
9.2.2 Sistema copernicano	96
9.3 Rivoluzioni sinodiche e siderali dei Pianeti	96
9.4 Leggi di Keplero	97
9.5 Elementi orbitali	100
9.6 Leggi empiriche delle distanze planetarie	103
9.7 Masse, periodi di rotazione, velocità di fuga ed albedo	104
9.8 Cenni sulla struttura del sistema solare	106
9.9 Cenni sulle origini del sistema solare	108
Esercizi	109

Bibliografia	111
---------------------------	-----

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Cenni storici

L'astronomia è una tra le scienze più antiche e deve la sua affermazione alle necessità pratiche dell'uomo.

- Già nel 3000 A.C. i sacerdoti egiziani avevano notato che le grandi piene del Nilo, da cui dipendeva l'economia del Paese, avvenivano poco dopo che Sirio, la stella più brillante del cielo in quel periodo, sorgeva un po' prima dell'alba, dopo essere scomparsa per un certo periodo. Da queste osservazioni, essi riuscirono a determinare la durata dell'anno tropico (intervallo di tempo impiegato dal Sole per transitare due volte di seguito all'equinozio di primavera) con buona approssimazione.
- Nel 2000 A.C., i moti apparenti del Sole e della Luna erano noti così bene presso gli astronomi cinesi, da permettere loro di predire le eclissi con buona precisione.
- Il Sole, la Luna e le stelle servivano alle tribù nomadi per orientarsi durante i loro spostamenti.
- Per i lavori nei campi era di fondamentale importanza conoscere il susseguirsi delle stagioni, la cui successione era legata all'altezza del sole a mezzogiorno ed all'apparizione in cielo di stelle ben definite.
- Nell'antica Grecia l'astronomia era una tra le scienze più sviluppate. Già nel II secolo d.C., per spiegare il moto apparente dei pianeti, gli astronomi greci avevano sviluppato la teoria geometrica degli epicicli che sta alla base del sistema geocentrico di Tolomeo. Nonostante tale teoria non fosse corretta, era sufficiente alle esigenze ed alle necessità pratiche dell'epoca, predire cioè la posizione ed il moto dei pianeti.

Il successivo sviluppo della società umana ha reso necessaria la misura del tempo con la conseguente costruzione di strumenti per la misura (orologi) e la cronologia (calendari).

Da queste osservazioni, effettuate inizialmente per fini pratici senza strumenti ed in modo impreciso, trae origine la scienza astronomica. Man mano che la società si sviluppava, poneva all'astronomia problemi sempre nuovi per la cui soluzione erano richiesti metodi di osservazione sempre più perfezionati e strumenti di calcolo sempre più sofisticati.

L'astronomia, ed insieme con essa tutte le scienze naturali, subirono un declino durante il periodo del feudalesimo, che coincide anche con la propagazione del cristianesimo. Per tutto il Medio Evo, infatti, gli astronomi non fanno altro che cercare di accordare le loro osservazioni al sistema Tolemaico.

In questo periodo (850-1500) l'Astronomia progredisce soltanto presso gli arabi, presso i popoli dell'Asia centrale e del Caucaso.

Caduto il feudalesimo, il periodo delle grandi scoperte geografiche (XV-XVI sec.) dà un notevole impulso allo sviluppo dell'astronomia.

Gli interessi della nascente borghesia erano legati alla scoperta ed allo sfruttamento delle nuove terre; ma, l'attraversamento degli oceani, richiedeva sistemi di orientamento e di misura del tempo più sofisticati rispetto a quelli ereditati dalla tradizione tolemaica.

Tutte le informazioni accumulate tramite le osservazioni, insieme allo sviluppo delle attività produttive e pratiche, preparavano intanto il terreno alla grande rivoluzione astronomica attuata dall'astronomo polacco Niccolò Copernico (1473-1543), la cui teoria eliocentrica fu resa pubblica nell'anno della sua morte.

La rivoluzione copernicana segnò l'inizio di una nuova era in campo astronomico, con Keplero che tra il 1609-1618 formula le tre leggi che portano il suo nome, e Newton che nel 1687 pubblica la legge di gravitazione universale: grazie a questi lavori diventa possibile descrivere il moto apparente e reale dei corpi celesti senza fare ricorso alla teoria degli epicicli. Tutte queste conquiste astronomiche raggiungono il culmine nel 1850 con la scoperta di Nettuno.

La tappa successiva, molto importante per lo sviluppo dell'astronomia, inizia nella seconda metà del XIX secolo, con l'avvento della fotografia e dell'analisi spettroscopica che hanno permesso agli astronomi di passare allo studio della natura fisica degli astri e di allontanare le frontiere dello spazio esplorato. Nasce l'astrofisica, il cui sviluppo è stato particolarmente importante nel XX secolo e che continua ancora oggi a progredire molto rapidamente.

Il resto è storia recente, con l'avvento dei rivelatori a stato solido (CCD) in sostituzione delle lastre fotografiche, con la costruzione di telescopi terrestri giganti e con la messa in orbita telescopi spaziali che hanno permesso l'esplorazione dell'Universo con occhi diversi da quelli con i quali i nostri antenati in passato, e noi stessi oggi, lo abbiamo sempre osservato.

1.2 Basi e fonti delle ricerche astronomiche

L'astronomia è, per definizione, una scienza osservativa, ma solo la corretta analisi ed interpretazione delle osservazioni può metterci nelle condizioni di dare una corretta descrizione dei fenomeni osservati.

Per esempio, osservando il cielo, ci sembra che tutti gli astri si trovino alla stessa distanza da noi, che la Terra sia ferma, che essa si trovi al centro dell'Universo e che i corpi celesti ruotino intorno ad essa, che le dimensioni del Sole e della Luna siano uguali, ecc.

L'unico modo possibile per capire che si tratta solo di illusioni consiste nel realizzare misure rigorose ed analizzarle in modo approfondito, cercando di vedere la realtà delle cose al di là delle apparenze osservative.

La principale fonte d'informazione astronomica è costituita dalla radiazione elettromagnetica emessa o riflessa dai corpi celesti. Lo studio della sua natura ci permette di ricavare informazioni fisiche, mentre la determinazione della direzione lungo la quale essa raggiunge la Terra ci permette di ricavare informazioni sulla posizione apparente e sul moto.

1.3 Oggetto e compiti dell'Astronomia

L'Astronomia, intesa come scienza dell'Universo, ha per oggetto lo studio dell'origine, dell'evoluzione, del moto e della struttura dei corpi celesti (stelle, pianeti, comete, nebulose, galassie, ammassi, ...), considerati sia come singoli oggetti, sia nel loro insieme.

L'indagine astronomica deve far fronte quindi a tre compiti principali:

1. Studio delle posizioni dei moti apparenti e reali dei corpi celesti nello spazio, determinazione delle loro dimensioni e delle loro forme.
2. Studio della struttura fisica dei corpi celesti (composizione chimica, temperatura densità, ecc.), sia all'interno, sia in superficie.
3. Studio dell'origine, dell'evoluzione e della fine dei corpi celesti, considerati sia come singoli oggetti, sia come strutture più complesse.

Le risposte alle domande poste dal primo punto sono ricercate sin dall'antichità più remota, in quanto frutto di osservazioni prolungate e dell'applicazione delle leggi della meccanica note da più di tre secoli. In questo campo, dunque, le informazioni abbondano, soprattutto per quanto riguarda i corpi celesti vicini al nostro pianeta.

Lo studio della struttura fisica degli astri è stato invece possibile solo a partire dalla seconda metà del XIX secolo, con l'avvento dello spettroscopia, ma ancora oggi sono molti i quesiti ai quali non si riesce a dare una risposta.

Il terzo compito è più complesso dei due precedenti e le conoscenze fino ad ora accumulate non ci permettono ancora di dare risposte certe. Anzi, per quanto riguarda alcune problematiche, le conoscenze ci permettono di fare solo delle considerazioni generali ed avanzare ipotesi più o meno verosimili.

A seconda dell'informazione utilizzata nell'indagine astronomica, possiamo dunque suddividere l'Astronomia in tre branche principali: l'*astronomia sferica*, la *meccanica celeste* e l'*astrofisica*.

Si definisce *Astronomia Sferica* la rappresentazione delle posizioni apparenti e dei moti dei corpi celesti così come appaiono proiettati sulla volta celeste, che ha la forma di un emisfero. I relativi metodi di misura costituiscono l'*astrometria*. Essa si pone due importanti obiettivi: a) determinare un'opportuno sistema di coordinate celesti; b) ottenere i parametri che caratterizzino, nel modo più completo possibile, le regolarità del moto di rotazione della Terra.

La *meccanica celeste* studia il moto degli astri sotto l'azione della forza di gravità, elabora i metodi per la determinazione delle loro traiettorie sulla base delle posizioni osservate in cielo e di predirne le posizioni future (effemeridi), studia l'influenza reciproca dei corpi sul loro moto e la stabilità dei singoli moti dei sistemi.

L'*astrofisica* si occupa invece dei problemi legati all'origine (cosmogonia) delle cose, della struttura, delle proprietà fisiche e dell'evoluzione dei corpi celesti considerati sia come singoli che nel loro insieme, compreso l'Universo (cosmologia).

Il campo d'indagine dell'astrofisica è dunque estremamente vasto e non può fare a meno dei metodi e degli strumenti dell'astronomia sferica e della meccanica celeste. L'astrofisica comprende inoltre molte sotto-branchie sia osservative che teoriche che scaturiscono, per esempio, dai diversi metodi di osservazione e di analisi della radiazione elettromagnetica e dall'applicazione di modelli teorici fisici e/o matematici alle osservazioni.

L'insieme di *astrometria* e *meccanica celeste* costituisce l'*astronomia di posizione*. Poiché essa richiede l'uso di angoli e delle loro funzioni, sia sul piano, sia sulla sfera, in seguito saranno richiamate nozioni sia di trigonometria piana che sferica.

1.4 Trigonometria piana

1.4.1 Misura degli angoli

Nelle questioni pratiche, per misurare gli angoli si preferisce usare come unità di misura il grado ($^{\circ}$), con i suoi sottomultipli, il primo ($'$) ed il secondo ($''$), oppure l'ora (h) con i suoi sottomultipli, il minuto (m) ed il secondo (s), mentre nelle questioni teoriche si è soliti esprimere gli angoli in unità circolari, cioè in radianti.

La necessità di graduare i cerchi usando unità di misura che siano più pratiche (sistema sessagesimale) scaturisce dal fatto che il radiante è, per definizione, l'arco di circonferenza uguale al raggio, e che la circonferenza non è un multiplo intero o razionale del raggio.

Essendo $2\pi = 360^{\circ}$, la tabella di conversione da radiante a gradi, primi e secondi è la seguente:

$1 \text{ Rad} = 57^{\circ}.29577951$		$1^{\circ} = 0.017453293 \text{ Rad}$
$1 \text{ Rad} = 3437'.746771$	ed inversamente:	$1' = 0.0002908882087 \text{ Rad}$
$1 \text{ Rad} = 206264''.8062$		$1'' = 0.000004848136811 \text{ Rad}$

Di conseguenza, essendo $24^h = 360^{\circ}$, la tabella di conversione da radianti a ore, minuti e secondi è la seguente:

$1 \text{ Rad} = 3^h.819718529$		$1^h = 15^{\circ} = 0.261799395 \text{ Rad}$
$1 \text{ Rad} = 229^m.183118$	ed inversamente:	$1^m = 15' = 0.004363323131 \text{ Rad}$
$1 \text{ Rad} = 13750^s.98708$		$1^s = 15'' = 0.00007272205217 \text{ Rad}$

1.4.2 Relazioni trigonometriche

1.4.2.1 Relazioni tra funzioni di archi associati

	<i>seno</i>	<i>coseno</i>	<i>tangente</i>
$(90^\circ - \alpha)$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\cotg \alpha$
$(90^\circ + \alpha)$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cotg \alpha$
$(180^\circ - \alpha)$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\tg \alpha$
$(180^\circ + \alpha)$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\tg \alpha$
$(360^\circ - \alpha)$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\tg \alpha$
$-\alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\tg \alpha$

1.4.2.2 Formule relative ad operazioni sugli archi

<i>arco</i>	<i>seno</i>	<i>coseno</i>	<i>tangente</i>
$(\alpha + \beta)$	$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$	$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$	$[(\tg \alpha + \tg \beta) / (1 - \tg \alpha \tg \beta)]$
$(\alpha - \beta)$	$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$	$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$	$[(\tg \alpha - \tg \beta) / (1 + \tg \alpha \tg \beta)]$
2α	$2 \sin \alpha \cos \alpha$	$\begin{matrix} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{matrix}$	$[2 \tg \alpha / (1 - \tg^2 \alpha)]$
$\alpha / 2$	$\pm [(1 - \cos \alpha) / 2]^{1/2}$	$\pm [(1 + \cos \alpha) / 2]^{1/2}$	$\pm [(1 - \cos \alpha) / (1 + \cos \alpha)]^{1/2}$

1.4.2.3 Sviluppi in serie di funzioni trigonometriche:

$$\sin \theta = \theta - (1/3!) \theta^3 + (1/5!) \theta^5 - \dots \quad (\theta \text{ qualunque})$$

$$\cos \theta = 1 - (1/2!) \theta^2 + (1/4!) \theta^4 - \dots \quad (\theta \text{ qualunque})$$

$$\operatorname{tg} \theta = \theta + (1/3)\theta^3 + (2/15)\theta^5 + \dots \quad (-\pi/2 < \theta < \pi/2)$$

$$\theta = \sin \theta + (1/6) \sin^3 \theta + \dots$$

$$\theta = 1 + (1/2) \cos^2 \theta + \dots$$

$$\theta = \operatorname{tg} \theta - (1/3) \operatorname{tg}^3 \theta + \dots$$

Dalle formule precedenti si vede che le differenze prime tra seno e tangente rispetto all'arco relativo sono quantità del terzo ordine, mentre il coseno differisce da 1 per una quantità del secondo ordine. Questo è il motivo per cui, quando gli angoli sono piccoli, si è soliti confondere l'angolo con il seno e la tangente e porre, con minore precisione, $\cos \theta \sim 1$.

Nella sezione dedicata agli esercizi, alla fine di questo capitolo, vedremo quando sono lecite le precedenti approssimazioni.

Le considerazioni fatte per lo sviluppo in serie delle funzioni trigonometriche valgono anche per lo sviluppo in serie di Taylor di una funzione generica $y = f(\theta)$, sostituendo nello sviluppo gli incrementi infinitesimi $d\theta$ con incrementi finiti $\Delta\theta$. Infatti, in molte situazioni pratiche dell'astronomia sferica non risulta vantaggioso utilizzare formule rigorose, ed è più conveniente sviluppare una funzione in serie di Taylor: naturalmente, l'accuratezza del risultato dipenderà dall'accuratezza richiesta. Si ha allora:

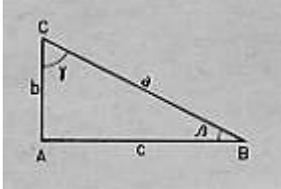
$$f(\theta_0 + \Delta\theta) = f(\theta_0) + [df/d\theta]_0 \Delta\theta + (1/2!)[d^2f/d\theta^2]_0 \Delta\theta^2 + \dots$$

Il termine al quale arrestarci nello sviluppo in serie dipende dalla precisione richiesta nel calcolo e dall'incremento finito adottato.

Anche in questo caso, nella sezione dedicata agli esercizi alla fine di questo capitolo, vedremo come calcolare l'incremento $\Delta\theta$ per ottenere una certa precisione.

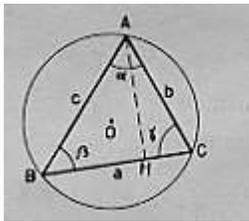
1.4.3 Teoremi sui triangoli:

1.4.3.1 Teoremi sui triangoli rettangoli



$$\begin{array}{ll}
 b = a \sin \beta & c = b \operatorname{tg} \gamma \\
 b = a \cos \gamma & c = b \operatorname{cotg} \beta \\
 c = a \sin \gamma & b = c \operatorname{tg} \beta \\
 c = a \cos \beta & b = c \operatorname{cotg} \gamma
 \end{array}$$

1.4.3.2 Teoremi sui triangoli qualunque



Sia ABC un triangolo qualunque e sia:

- a) R il raggio della circonferenza ad esso circoscritta;
- b) p il semiperimetro;
- c) S la sua superficie.

Teorema dei seni:

$$\begin{aligned}
 (a / \sin \alpha) &= (b / \sin \beta) = (c / \sin \gamma) = (abc / 2 S) = 2 R \\
 (a / b) &= (\sin \alpha / \sin \beta) & (a / c) &= (\sin \alpha / \sin \gamma) & (b / c) &= (\sin \beta / \sin \gamma)
 \end{aligned}$$

Teorema delle proiezioni:

$$a = c \cos \beta + b \cos \gamma \qquad b = c \cos \alpha + a \cos \gamma \qquad c = a \cos \beta + b \cos \alpha$$

1.4.3.3 Teorema di Carnot

Consideriamo un triangolo di lati a, b, c , e siano α, β, γ , gli angoli opposti, rispettivamente, ai tre lati a, b, c (vedasi la figura precedente). Valgono le seguenti relazioni (Teorema di Carnot):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos \alpha \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2 a c \cos \beta \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos \gamma$$

1.5 Trigonometria sferica

La soluzione di numerosi problemi di astronomia relativi alle posizioni ed ai moti apparenti degli astri, si riduce alla soluzione di *triangoli sferici*, le cui regole definiscono la *trigonometria sferica*.

Una sfera è il luogo dei punti nello spazio cartesiano tridimensionale equidistante da un punto dato, detto centro: la sua superficie è dunque finita ma illimitata. Ogni piano passante per il centro interseca la sfera secondo un circolo massimo avente un diametro pari a quello della sfera stessa (circolo massimo). La retta passante per il centro e normale a tale piano definisce due punti diametralmente opposti che sono i poli di tale cerchio equatoriale.

Si definisce *angolo solido* la superficie intercettata su di una sfera di raggio unitario da un cono con vertice nel centro O della sfera oppure, la superficie intercettata su di una sfera di raggio R e divisa per R^2 , da un cono con vertice nel centro O della sfera. L'unità di misura dell'angolo solido è lo *steradiante*.

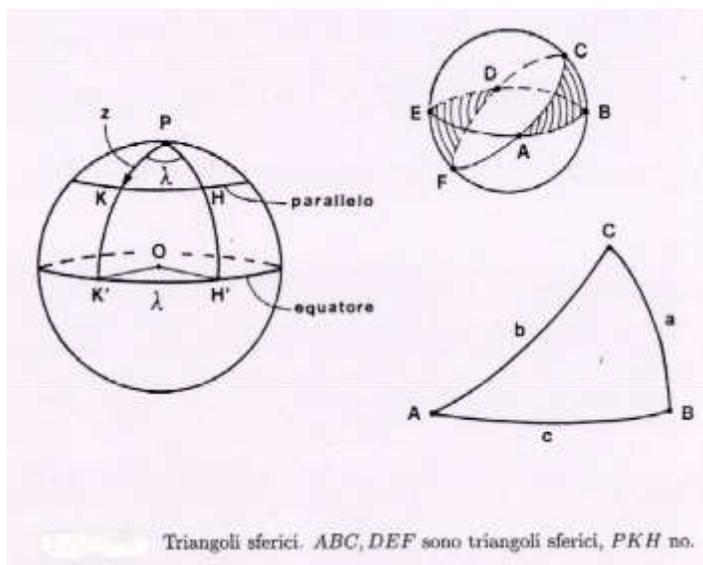
Si consideri adesso una sfera di raggio unitario; la sua superficie potrà essere espressa in steradiani (sr) o in gradi quadrati. Poiché la circonferenza di un qualsiasi circolo massimo è pari a $2\pi R = 360^\circ$, la superficie di un'intera sfera sarà:

$$4\pi \text{ sr} = 4\pi (360 / 2\pi)^2 = (129600 / \pi) \quad 41252.96125 \text{ [}^\circ\text{]}^2$$

da cui:

$$1 \text{ sr} = (32400 / \pi^2) \quad 3282.80635 \text{ [}^\circ\text{]}^2$$

Si definisce triangolo sferico la figura ABC sulla superficie di una sfera formata dagli archi di tre cerchi massimi.



Si definiscono angoli di un triangolo sferico gli angoli diedri compresi tra i piani dei cerchi massimi che formano i lati del triangolo sferico. Tali angoli sono misurati dagli angoli piani ai vertici del triangolo formato dalle tangenti ai suoi lati. In genere, si studiano triangoli con lati ed angoli inferiori a 180° . La somma degli angoli di questi triangoli sferici è sempre superiore a 180° , ma inferiore a 540° , e la somma dei lati è sempre inferiore a 360° . La differenza tra la somma dei tre angoli di un triangolo sferico e 180° è detta **eccesso sferico** σ , cioè:

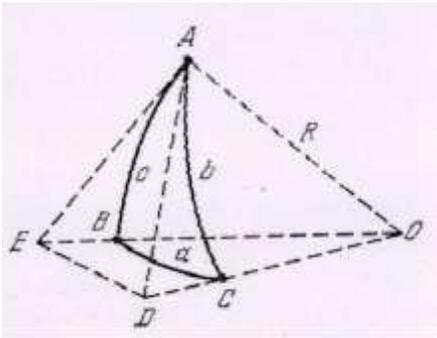
$$\sigma = A + B + C - 180^\circ$$

La superficie s di un triangolo sferico si definisce dunque come:

$$s = \sigma [(\pi R^2) / 180^\circ]$$

dove R è il raggio della sfera sulla cui superficie è formato il triangolo sferico.

Da quanto visto precedentemente, è chiaro che le proprietà di un triangolo sferico sono completamente diverse da quelle di un triangolo piano, per cui non possono essere applicate le formule della trigonometria piana.



Consideriamo il triangolo sferico ABC di raggio R e centro O . Conduciamo dal vertice A le tangenti AD e AE ai lati b e c fino alla loro intersezione con il prolungamento dei raggi OC e OB nello stesso piano della tangente corrispondente. Congiungendo con una retta i punti di intersezione D ed E si ottengono due triangoli piani acutangoli ADE e ODE aventi in comune il lato DE . Applicando a questi due triangoli il teorema di Carnot della geometria elementare, si ha:

$$\begin{aligned} DE^2 &= OD^2 + OE^2 - 2OD OE \cos a \\ DE^2 &= AD^2 + AE^2 - 2AD AE \cos A \end{aligned}$$

Sottraendo la seconda uguaglianza alla prima, si ha:

$$2OD OE \cos a = OD^2 - AD^2 + OE^2 - AE^2 + 2AD AE \cos A \quad [1.1]$$

Poiché i due triangoli OAE e OAD sono rettangoli, si ha:

$$\begin{aligned} OD^2 - AD^2 &= R^2; \quad OE^2 - AE^2 = R^2; \quad AD = R \operatorname{tg} b; \quad AE = R \operatorname{tg} c; \quad R = OD \cos b; \\ R &= OE \cos c; \end{aligned}$$

Sostituendo le precedenti relazioni alla formula [1.1], si ha:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad [1.2]$$

cioè: il coseno di un lato del triangolo sferico è uguale al prodotto dei coseni degli altri due lati, più il prodotto dei seni degli stessi lati per il coseno dell'angolo tra loro compreso.

La formula [1.2] può essere scritta per ciascuno dei lati di un triangolo sferico. Per esempio, per il lato B si ha:

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \quad [1.3]$$

Sostituendo la [1.2] alla [1.3], si ha:

$$\cos b = \cos c (\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A) + \sin a \sin c \cos B$$

Risolviendo la parentesi e portando al primo membro il primo termine del secondo membro, si ha:

$$\cos b (1 - \cos^2 c) = \sin b \sin c \cos c \cos A + \sin c \sin a \cos B$$

essendo $(1 - \cos^2 c) = \sin^2 c$ e dividendo per $\sin c$, si ottiene:

$$\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A = \sin a \cos B \quad [1.4]$$

cioè: *il prodotto del seno di un lato per il coseno dell'angolo adiacente è uguale al prodotto del seno dell'altro lato, delimitante l'angolo adiacente, per il coseno del terzo lato meno il prodotto del coseno del lato delimitante l'angolo adiacente per il seno del terzo lato ed il coseno dell'angolo opposto al primo lato.*

La [1.4] si chiama *formula dei cinque elementi*. Analogamente, essa può essere scritta per i prodotti:

$$\sin a \cos C, \sin b \cos A, \sin b \cos C, \sin c \cos A, \sin c \cos B.$$

Risolviamo adesso la [1.2] rispetto a $\cos A$:

$$\cos A = [(\cos a - \cos b \cos c) / (\sin b \sin c)]$$

elevando al quadrato entrambi i membri e sottraendoli ad 1, si ha:

$$1 - \cos^2 A = [\sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2] / (\sin^2 b \sin^2 c)$$

$$\sin^2 A = [(1 - \cos^2 b) (1 - \cos^2 c) - (\cos a - \cos b \cos c)^2] / (\sin^2 b \sin^2 c)$$

Risolviendo le parentesi e dividendo per $\sin^2 a$, si ha:

$$\sin^2 A / \sin^2 a = (1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c) / (\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c)$$

L'espressione così ottenuta è assolutamente simmetrica rispetto ad a, b, c , e si può dunque scrivere, analogamente:

$$\sin^2 B / \sin^2 b = (1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c) / (\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c)$$

$$\sin^2 C / \sin^2 c = (1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c) / (\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c)$$

da cui:

$$(\sin a / \sin A) = (\sin b / \sin B) = (\sin c / \sin C) = \text{cost.} \quad [1.5a]$$

oppure:

$$(\sin a / \sin b) = (\sin A / \sin B) \quad [1.5b]$$

cioè: i seni dei lati del triangolo sferico sono proporzionali ai seni degli angoli opposti; oppure: il rapporto tra il seno di un lato del triangolo sferico ed il seno dell'angolo opposto è costante.

Le relazioni [1.2], [1.4], [1.5a], [1.5b] tra i lati e gli angoli di un triangolo sferico sono quelle principali e prendono il nome di **primo gruppo di Gauss** e sono riportate di seguito:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A \end{aligned}$$

Se ne potrebbero dedurre anche delle altre; se per esempio ci limitiamo al caso del triangolo rettangolo sferico, avremo: $A = 90^\circ$ e quindi: $\sin A = 1$ e $\cos A = 0$, per cui la formula [1.4] diventa:

$$\sin a \cos B = \sin c \cos b$$

Dividendo entrambi i membri per $\sin b$ e sostituendo $(\sin a / \sin b)$ con $(\sin A / \sin B) = 1 / \sin B$, sia ha:

$$\cotg B = \sin c \cotg b$$

$$\sin c = \tg b / \tg B \quad [1.6]$$

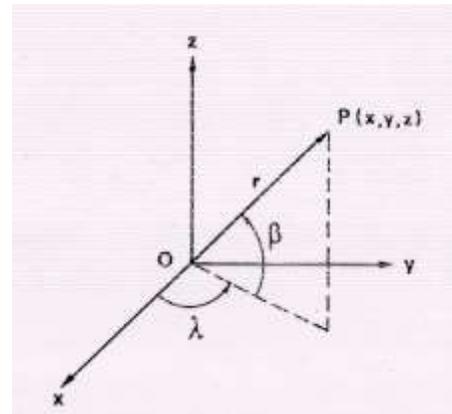
cioè: il rapporto tra la tangente ad un lato del triangolo rettangolo sferico e la tangente dell'angolo opposto è uguale al seno dell'altro lato.

La condizione sotto cui i triangoli sferici possono essere approssimati da triangoli piani si riduce intuitivamente al caso in cui gli archi del triangolo sferico siano molto piccoli, in modo da poter confondere la superficie sferica con quella del piano tangente.

1.6 Coordinate cartesiane e coordinate polari sferiche

In generale, per avere la posizione di un punto qualsiasi nello spazio basta dare le sue coordinate cartesiane (x, y, z) rispetto ad una direzione z e ad un piano fondamentale xy perpendicolare ad essa, oppure le coordinate polari (r, λ, β) riferite all'origine O , ad una retta orientata OP ed ad un semipiano α con origine in O , contenente la retta OP , e parallelo alla direzione z . Se P è il punto considerato, le sue coordinate polari saranno la distanza $r = OP$, l'angolo $\beta = POP'$, essendo P' la proiezione di P sul piano xy , e l'angolo diedro λ tra il semipiano fondamentale α ed il semipiano determinato dalle semirette Ox e Oz . La longitudine λ è contata in senso *antiorario* (diretto o progrado) oppure *orario* (retrogrado), secondo le convenzioni adottate, e si misura in gradi, radianti e, spesso, in ore, minuti e secondi.

La latitudine β è misurata in gradi, primi e secondi ed è positiva a Nord del piano fondamentale e negativa a Sud. Si ha quindi $-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$. Talvolta, invece di β , è data la *distanza polare*, o *distanza zenitale* o *colatitudine*, che sono gli angoli complementari di β . Tale angolo è solitamente indicato con z e sarà:



$$z + \beta = 90^\circ, \text{ da cui: } 0^\circ \leq z \leq 180^\circ.$$

Le formule di trasformazioni tra i due sistemi sono le seguenti:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \beta \cos \lambda & \lambda &= \arctg (y / x) \\ y &= r \cos \beta \sin \lambda & \beta &= \arcsin (z / r) \\ z &= r \sin \beta & r &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Le espressioni differenziali, utili sia per la determinazione di piccole variazioni che per il calcolo degli errori di misura, sono invece:

$$\begin{aligned} dx &= (x / r)dr - z \cos \lambda d\beta - y d\lambda & dr &= \cos \beta \cos \lambda dx + \cos \beta \sin \lambda dy + \sin \beta dz \\ dy &= (y / r)dr - z \sin \lambda d\beta - x d\lambda & r d\beta &= -\sin \beta \cos \lambda dx - \sin \beta \sin \lambda dy + \cos \beta dz \\ dz &= (z / r)dr + r \cos \beta d\beta & r \cos \beta d\lambda &= -\sin \lambda dx + \cos \lambda dy \end{aligned}$$

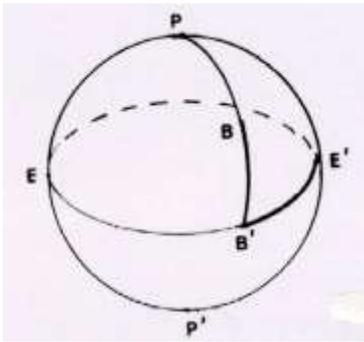
1.7 La Sfera Celeste

In campo astronomico è molto difficile determinare la distanza r di un astro P , per cui l'astronomo difficilmente riesce ad avere le coordinate (x, y, z) , mentre riesce a misurare con

grande precisione le due coordinate angolari (λ, β). A causa della loro enorme distanza, gli astri ci appaiono proiettati su una sfera ideale concentrica con l'osservatore. Tale sfera prende il nome di **sfera celeste** e, per definizione, avrà raggio infinito quando l'osservatore è posto al centro di essa (caso usuale), oppure raggio unitario quando si immagina di osservare la sfera dall'esterno.

Su tale sfera è possibile valutare la distanza angolare tra due astri ancor prima di aver definito un vero e proprio sistema di riferimento. Si deve però fare attenzione a distinguere tra impressione visiva e misura. Infatti, visivamente, noi tendiamo a valutare archi sulla sfera celeste e non angoli per cui, di solito, si ha l'impressione che un oggetto (per esempio, la Luna) sia più esteso all'orizzonte che allo zenit.

Supponiamo adesso di voler determinare la posizione di un punto B sulla sfera celeste. Tale operazione risulta semplificata se si suppone che l'osservatore si trovi al centro O della sfera,



il cui raggio è preso come unità di lunghezza. Ad ogni semiretta uscente da O (detta anche *visuale*) corrisponde quel punto B che ne rappresenta l'intersezione con la superficie sferica. L'intersezione tra la sfera celeste e ciascun piano passante per O definisce un *cerchio massimo*, mentre l'intersezione tra la sfera celeste ed un piano non passante per il centro definisce un *cerchio minore*.

Sia α un piano passante per O ed n una retta uscente da O e perpendicolare ad α . Sulla sfera celeste avremo, in corrispondenza, un cerchio massimo EE' e due punti P e P'

(Poli) distanti 90° da EE' . La posizione di B sulla sfera celeste è fissata facendo passare per P e B il cerchio massimo PBP' , che interseca perpendicolarmente EE' in B' . L'arco $E'B'$ è definito *ascissa sferica* del punto B , mentre l'arco $B'B$ è definito *ordinata sferica* dello stesso punto B , facendo naturalmente le opportune convenzioni sul verso e sull'origine da cui contare gli archi. Com'è ovvio, l'ascissa sferica può essere misurata oltre che dall'ampiezza dell'arco $E'B'$ anche dall'angolo al polo $E'PB'$. L'ascissa e l'ordinata sferica così definite sono di regola le coordinate usate in astronomia per determinare la posizione di un punto sulla sfera celeste. I vari sistemi di coordinate astronomiche che saranno di seguito introdotti differiscono tra di loro per la diversa scelta della direzione fondamentale, del punto zero e del verso da cui si contano gli angoli.

Esercizi

- 1.1** Determinare a quale distanza dall'occhio dobbiamo porre una moneta avente un diametro di cm 1.7 affinché essa copra il disco del Sole o della Luna.

Suggerimento: Ricordarsi che la Luna ed il Sole hanno un diametro angolare di circa $0^\circ.5$.

- 1.2** Un aerostato ha un diametro di 13 m. Quanto dista da un osservatore che lo vede con un diametro angolare pari a metà di quello della Luna?

Suggerimento: Ricordarsi che la Luna ha un diametro angolare di circa $0^\circ.5$

- 1.3** Calcolare il valore massimo di θ per il quale la differenza tra $\operatorname{tg} \theta$ e θ sia minore di $1''$.

Suggerimento: Utilizzare la formula dello sviluppo in serie della funzione $\operatorname{tg} \theta$.

- 1.4** Determinare il valore dell'incremento $\Delta\theta$ nello sviluppo in serie di Taylor della funzione:

$$f(\theta_0 + \Delta\theta) = f(\theta_0) + [df/d\theta]_0 \Delta\theta + (1/2!)[d^2f/d\theta^2]_0 \Delta\theta^2 + \dots$$

affinché, arrendoci al secondo termine dello sviluppo, si riesca ad ottenere una precisione, rispettivamente: a) dell'ordine del centesimo di secondo d'arco; b) dell'ordine del decimo di secondo d'arco; c) dell'ordine del secondo d'arco.

Si assuma, per semplicità, che la derivata seconda della funzione sia ≈ 1 .

- 1.5** Determinare la distanza lineare tra due stelle distanti, rispettivamente, r_1 e r_2 , e visibili in cielo ad una distanza angolare θ .

Capitolo 2

Sistemi di riferimento astronomici

2.1 Generalità

Nel capitolo precedente abbiamo visto che un sistema di riferimento di coordinate cartesiane o sferico è definito dalla scelta di un piano fondamentale di riferimento e di una direzione fondamentale, perpendicolare a tale piano. Vediamo dunque come sono scelti questi piani e queste direzioni nel caso dei principali sistemi di riferimento astronomici.

1. La superficie terrestre impedisce di vedere tutta la sfera celeste e la visuale si arresta in un ideale cerchio massimo su di essa che prende il nome di *orizzonte*, definito come l'intersezione con la sfera celeste di un piano perpendicolare all'osservatore e passante per l'osservatore stesso. In genere, l'orizzonte astronomico non coincide con l'orizzonte sensibile, che è la linea che separa il cielo dalla terra o dall'acqua, e di cui si ha una buona visualizzazione in mare aperto o in cima ad una montagna. Se l'osservatore si trova in un luogo sopraelevato rispetto alle zone circostanti (Fig. 2.1), l'orizzonte sensibile è più basso dell'orizzonte astronomico, per cui si può vedere più di metà del cielo. Se invece l'osservatore è posto in una valle circondata da una catena montuosa (Fig. 2.2), l'orizzonte sensibile sarà costituito dalla linea delle creste delle montagne. Esso sarà dunque più alto dell'orizzonte astronomico e quindi la parte più bassa della sfera celeste sopra l'orizzonte non sarà visibile.

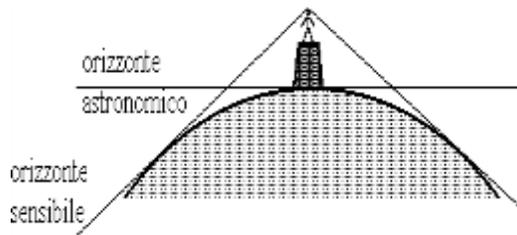


Fig. 2.1

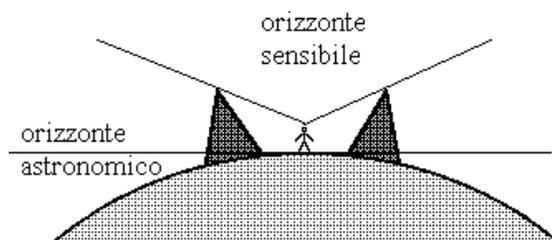


Fig. 2.2

2. A causa della rotazione diurna della Terra in senso diretto, la sfera celeste sembra ruotare da Est verso Ovest attorno ad un ideale asse di rotazione, detto asse del Mondo, che la interseca in due punti P e P' detti Poli celesti Nord (P) e Sud (P'). I poli celesti rappresentano dunque i punti d'intersezione dell'asse di rotazione della Terra con la sfera celeste, per cui tutte le stelle sembrano descrivere, ad ogni osservatore, lo stesso cerchio

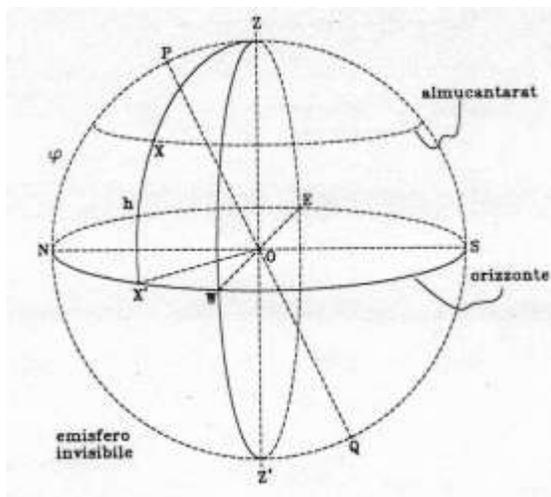
diurno attorno a P o P' . Analogamente, l'intersezione tra la sfera celeste ed il piano passante per l'osservatore e perpendicolare a PP' definisce un cerchio massimo detto *equatore celeste* che dista, in ogni punto, 90° da ciascuno dei due poli.

3. Le enormi distanze degli astri rispetto ad un osservatore terrestre hanno un'importante conseguenza: i moti spaziali relativi tra stella e stella sono inapprezzabili in tempi brevi e solo la Luna, il Sole ed i pianeti hanno un moto apprezzabile rispetto a quelle che sono considerate *stelle fisse*. In particolare, il moto del Sole rispetto alle stelle sulla sfera celeste sembra avvenire su un cerchio massimo inclinato rispetto all'equatore, detto *eclittica*.
4. Il Sole fa parte, insieme ad altre 100 miliardi di stelle, della Via Lattea, una galassia a spirale rispetto alle cui componenti è possibile definire un piano di simmetria, detto piano galattico. Tale piano passa per il Sole, per cui è conservata la proprietà di avere un eventuale osservatore terrestre al centro della sfera celeste.

Orizzonte, equatore celeste, eclittica ed equatore galattico sono quattro cerchi massimi sulla sfera celeste che possono essere usati per definire quattro diversi sistemi di coordinate celesti. Il principio è sempre lo stesso: si sceglie il cerchio massimo fondamentale, ed un'origine conveniente su di esso. Per ogni stella si farà passare un cerchio massimo per il polo del piano fondamentale e si useranno come coordinate gli angoli definiti dai due cerchi e dall'origine.

2.2 I sistema: coordinate altazimutali

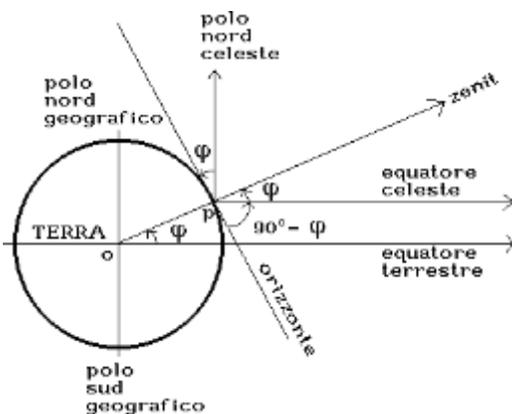
Il sistema altazimutale si basa sui concetti di *orizzonte* e di *verticale*. In questo sistema di riferimento si assume come direzione fondamentale la *verticale astronomica* nel luogo di



osservazione, ossia la direzione del filo a piombo, coincidente con la direzione dell'accelerazione di gravità. Il piano passante per l'origine e normale alla verticale prende il nome di *piano orizzontale*. L'intersezione della verticale con la sfera celeste a Nord prende il nome di *zenit*; il punto opposto, agli antipodi, prende il nome di *nadir*. L'intersezione del *piano orizzontale* con la *sfera celeste* segna l'*orizzonte astronomico*. Evidentemente, il nadir e tutto l'emisfero sotto l'orizzonte astronomico non sono osservabili per un osservatore situato nell'emisfero Nord. Come è stato già detto, la sfera celeste sembra ruotare, per effetto del moto di rotazione della Terra, attorno ad un punto fisso P detto Polo del mondo che non è altro che

l'intersezione dell'asse di rotazione terrestre con la sfera celeste. Il cerchio massimo passante per lo zenit Z ed il Polo celeste visibile P , prende il nome di *meridiano celeste* del luogo. La

sua intersezione con l'orizzonte definisce i punti Nord (N) (dalla stessa parte del Polo Nord) e Sud (S) (la parte opposta). Tutti i cerchi massimi passanti per lo Zenit (Z) ed il Nadir (Z') prendono il nome di *verticali*. Il cerchio verticale a 90° dal meridiano prende il nome di *Primo Verticale*. Le sue intersezioni con l'orizzonte definiscono i punti di vero oriente (*Est - E*) e di vero occidente (*Ovest - W*). I punti *Nord, Est, Sud, Ovest*, che si succedono in senso orario a 90° l'uno dall'altro sull'orizzonte, prendono il nome di *punti cardinali*. Ciò premesso, sia X un punto sulla sfera celeste. Se indichiamo con X' la proiezione di X sull'orizzonte, le sue coordinate altazimutali saranno: a) l'*altezza* h (corrispondente all'ordinata sferica), ossia l'ampiezza dell'arco $X'X$, contata da 0° a 90° partendo dall'orizzonte (e da 0° a -90° per oggetti sotto l'orizzonte); b) l'*azimuth* A (corrispondente all'ascissa sferica), contato sull'orizzonte dal punto S verso X' in senso orario, da 0° a 360° . Questa scelta di origine, verso ed unità di misura non è però universalmente accettata; alcuni, per esempio, preferiscono porre l'origine nel punto Nord. È dunque importante fare attenzione alle convenzioni adottate dai singoli autori o luoghi di osservazione.



Nel sistema altazimutale ogni cerchio minore parallelo all'orizzonte è indicato col nome, di origine araba, *almucantarāt*. L'altezza φ del polo sull'orizzonte prende il nome di *latitudine astronomica*. La latitudine è positiva quando il Polo boreale P , identificabile in prima approssimazione con la stella polare, si trova sopra l'orizzonte; è negativa quando P è sotto l'orizzonte.

Per meglio chiarire il concetto di latitudine riferiamoci per un momento alla Terra supposta sferica (in realtà essa ha una forma ellissoidica, schiacciata ai poli e rigonfia all'equatore). La verticale di un qualsiasi luogo P (e quindi il suo zenit Z) si ottiene congiungendo P con il centro della Terra O . Ogni luogo ha dunque una propria verticale. Si definisce *latitudine geografica* del luogo P l'angolo φ definito come il complemento dell'angolo che la verticale OPZ forma con l'asse polare. Poiché l'asse polare coincide col polo nord celeste e la verticale OP con lo zenit Z , la *latitudine geografica di un luogo coincide con la latitudine astronomica*. All'equatore terrestre la latitudine è 0° perché, per definizione, tutti i punti dell'equatore distano 90° dai poli. Ai poli terrestri, dove lo zenit coincide col polo nord celeste, essa vale $\pm 90^\circ$.

L'equatore celeste coincide con l'orizzonte astronomico per un osservatore situato ad uno dei due poli (Fig. 2.3a). Per un osservatore situato all'equatore geografico, i Poli celesti giacciono sull'orizzonte ed individuano le direzioni Nord e Sud, mentre l'equatore celeste passa per lo zenit ed il nadir (Fig. 2.3b). Per un osservatore posto in località intermedie tra l'equatore ed i poli geografici, l'equatore celeste ed i poli celesti avranno altezze intermedie (Fig. 2.3c).

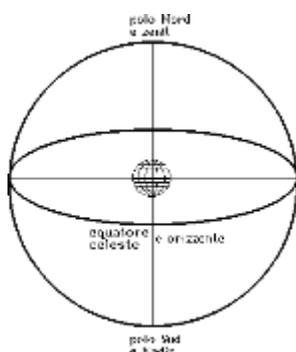


Fig. 2.3a

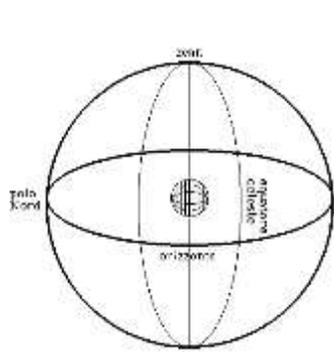


Fig. 2.3b

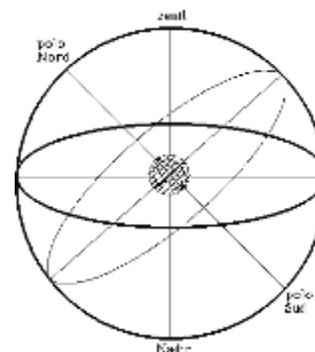


Fig. 2.3c

Il sistema di riferimento altazimutale è poco pratico essenzialmente per due motivi:

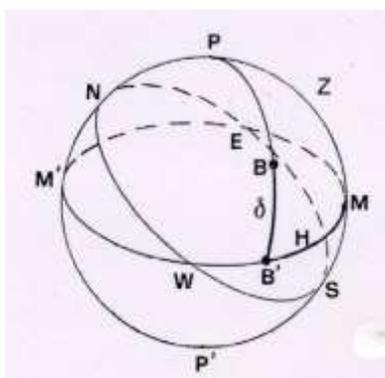
è un sistema di riferimento locale, nel senso che sia l'altezza h che l'azimut A di un oggetto cambiano se cambia il punto di osservazione. Ciò costituisce un grosso svantaggio perché le stesse coordinate individuano punti diversi sulla sfera celeste, a secondo del luogo di osservazione;

a causa del moto di rotazione della terra attorno al proprio asse, e quindi dei corpi sulla sfera celeste, le coordinate altazimutali A ed h dipendono dal tempo, si ha cioè $A(t)$ e $h(t)$.

Si pone dunque il problema di trovare un sistema di coordinate che sia indipendente dal tempo.

2.3 II sistema: coordinate equatoriali

2.3.1 Coordinate equatoriali orarie



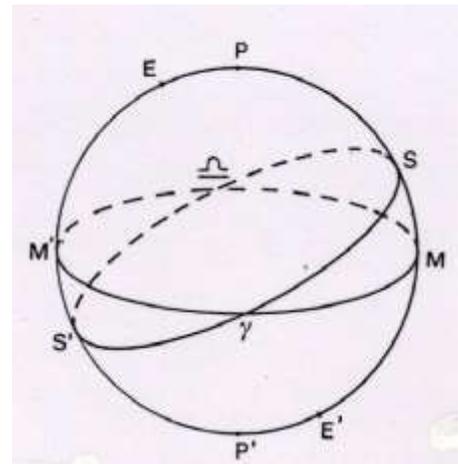
In questo secondo sistema di coordinate, la direzione fondamentale è quella dell'asse di rotazione della terra PP' , e di conseguenza il piano fondamentale è definito dall'*equatore celeste*. Il punto in cui il cerchio massimo passante per il polo nord celeste e lo zenit interseca l'*equatore celeste* prende il nome di *mezzocielo*, perché alle nostre latitudini esso cade press'a poco tra lo zenit e l'orizzonte. I cerchi massimi passanti per il polo nord ed il polo sud celesti prendono il nome di *cerchi orari*. I cerchi minori paralleli all'*equatore celeste*, che descrivono il moto apparente delle stelle attorno ai poli,

prendono il nome di *paralleli celesti* o di *declinazione*. Le coordinate equatoriali sono: a) l'*angolo orario* H (corrispondente all'ascissa sferica), cioè l'arco di equatore compreso tra il mezzocielo M e B' , proiezione del punto B sull'equatore celeste, oppure il corrispondente angolo al polo $B'PM$; l'angolo orario si conta in ore, minuti e secondi, partendo dal mezzocielo ed in senso orario, in direzione W , in modo che cresca nel tempo con la rotazione terrestre; b) la *declinazione* δ (corrispondente all'ordinata sferica), che è l'arco $B'B$, cioè la distanza di B dall'equatore celeste: essa si misura in gradi e sottomultipli, partendo dall'equatore, ed è positiva nell'emisfero boreale, negativa in quello australe. Il suo valore è dunque compreso tra 0° e $\pm 90^\circ$.

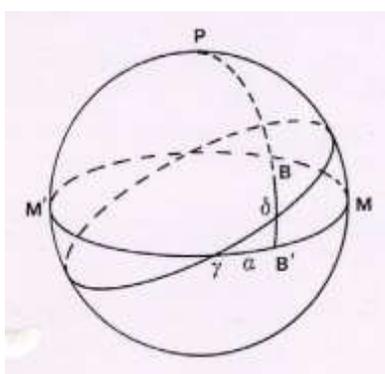
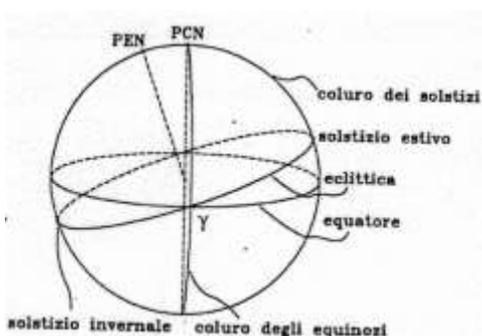
Nel sistema equatoriale orario solo una delle due coordinate, e cioè l'angolo orario H , varia col tempo, crescendo proporzionalmente a questo. La declinazione δ è invece fissata, in prima approssimazione, in quanto ogni punto sulla sfera celeste si muove su un cerchio minore parallelo all'equatore celeste.

2.3.2 Coordinate equatoriali celesti

Abbiamo visto che nel sistema di coordinate equatoriali orarie la declinazione è costante, in prima approssimazione, mentre l'angolo orario di un qualsiasi punto fisso riprende il medesimo valore ad intervalli regolari di 24 ore siderali. Ciò è vero per le stelle cosiddette fisse, ma non per il Sole, la Luna, i pianeti e le comete. Se per esempio determiniamo la declinazione e l'angolo orario del Sole ad intervalli di 24 ore siderali, ci accorgiamo che nel giro di circa 366 giorni esso descrive sulla sfera celeste un cerchio massimo, inclinato di circa $23^\circ.5$ sull'equatore celeste, che prende il nome di *eclittica*. Quest'angolo, detto *obliquità dell'eclittica*, è indicato anche con la lettera greca ε .



L'eclittica interseca l'equatore nei due punti γ e ed ed è percorsa dal Sole in senso diretto passando, quando transita per il punto γ , dall'emisfero australe a quello boreale. Il punto γ , o *punto gamma*, o *punto vernale* segna l'equinozio di primavera e rappresenta il nodo ascendente dell'eclittica sull'equatore. Per definizione dunque, nel punto vernale si ha: $\delta = 0$ e $(d\delta / dt = 0)$. Il nodo discendente segna l'equinozio d'autunno, attraverso il quale il Sole scende dall'emisfero boreale a quello australe. Il Sole raggiunge la massima declinazione positiva ($+23^\circ 27'$) nel *solstizio d'estate*, e la massima declinazione negativa ($-23^\circ 27'$) nel *solstizio d'inverno*; in questi due giorni avremo dunque: $\delta = \pm \varepsilon = \pm 23^\circ 27'$ e $(d\delta / dt = 0)$.



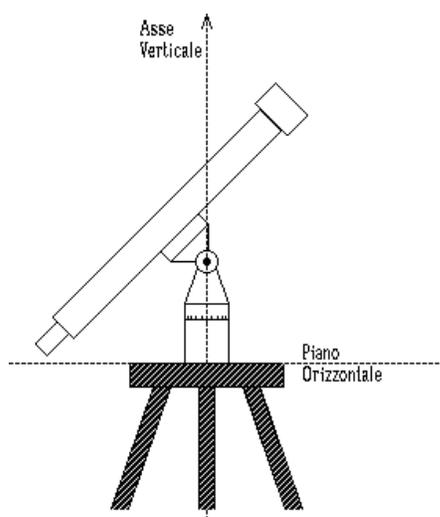
I cerchi massimi passanti per i poli e gli equinozi e per i poli ed i solstizi prendono il nome, rispettivamente, di *coluri equinoziali* e *coluri solstiziali*.

Ciò premesso, il sistema di coordinate equatoriali celesti si ottiene dal precedente sistema di coordinate equatoriali orarie individuando sull'equatore celeste un punto che sia il più possibile fisso tra le stelle, in modo che sia solidale, in prima approssimazione, col moto di rotazione della sfera celeste. Questo punto dovrà essere utilizzato come origine della longitudine che, nel

presente sistema, prende il nome di *ascensione retta* α (corrisponde all'ascissa sferica ed è misurata verso Est). Ebbene, tale origine è fissata proprio nel punto γ , che dunque è preso come origine delle ascisse sferiche nel sistema equatoriale celeste. Se adesso indichiamo con **TS** l'angolo orario del punto γ , e con **H** l'angolo orario del punto **B**, possiamo scrivere: $\mathbf{TS} = \alpha + \mathbf{H}$.

Come vedremo più in dettaglio nel capitolo IV dedicato alla misura del tempo, la quantità **TS** prende il nome di *tempo siderale*.

Poiché per definizione, per una stella che passa in meridiano si ha $H = 0$, possiamo dire che il tempo siderale è uguale all'ascensione retta per una stella che passa in meridiano. Un orologio a tempo siderale ci dà dunque l'ascensione retta degli oggetti che transitano in meridiano. Il tempo siderale **TS** è dunque una funzione crescente del tempo, compresa tra 0, quando il punto γ transita in meridiano, e 24^{h} , quando avviene il passaggio successivo.



Dal punto di vista pratico dunque, l'ora siderale è molto importante in astronomia. Infatti, per puntare un telescopio in montatura equatoriale su un dato oggetto di coordinate α e δ , è necessario conoscere l'angolo orario HA nel momento in cui è fatta la puntata, e la relazione precedente ci permette di ricavarlo in ogni istante.

Da quanto detto fino ad ora appare evidente il vantaggio di utilizzare telescopi con montatura equatoriale: tali telescopi hanno l'asse orario parallelo all'asse di rotazione della Terra (inclinato quindi di un angolo pari alla latitudine del luogo), e l'asse di declinazione perpendicolare all'asse orario. Basterà allora puntare il telescopio alla δ dell'oggetto da osservare ed impostare l'angolo orario, dopo aver letto il tempo siderale. A questo punto si innesta il moto orario, che fa muovere il telescopio verso W con velocità pari, in modulo, alla

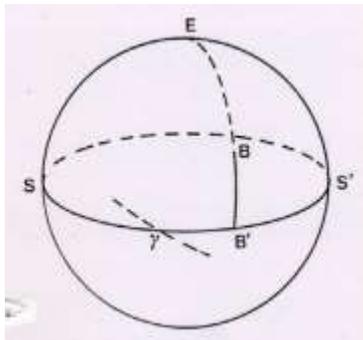
velocità di rotazione della Terra verso E: in questo modo l'oggetto resta fermo sull'asse ottico, a meno di piccole correzioni occasionali, dovuti agli errori meccanici e di declinazione.

Per telescopi grandi si preferisce la montatura altazimutale, più stabile dal punto di vista meccanico. In questo caso, però, per inseguire l'astro è necessario agire con motori su entrambi gli assi e ruotare il campo di vista durante la posa: queste operazioni sono oggi rese semplici grazie all'impiego dei computer che controllano tutti i movimenti.

Esistono infine gli *strumenti dei passaggi*, o *cerchi meridiani*, che sono telescopi con asse ottico rigidamente in meridiano, ed un unico asse mobile in altezza. Questi strumenti sono utilizzati per la determinazione precisa delle α e δ . Infatti, conoscendo il tempo siderale, al momento del passaggio dell'astro in meridiano si ha immediatamente la sua α ; è comunque evidente che la precisione della misura dipenderà dalla sua δ , poiché una stella in prossimità del Polo si muoverà con una velocità lineare, sul piano focale dello strumento, minore rispetto ad una stella che si trova poco distante dall'equatore celeste.

Il sistema di coordinate equatoriali è dunque svincolato dall'osservatore ed è solidale con la sfera celeste, essendo quasi immobile rispetto alle stelle. Più avanti, quando si parlerà delle precessione degli equinozi, vedremo che anche α , δ ed ϵ dipendono dal tempo, ma molto lentamente. Questo è il motivo per cui i cataloghi riportano le coordinate α e δ degli oggetti celesti riferiti sempre ad una certa epoca.

2.4 IV Sistema: Coordinate Eclittiche



Nel sistema di coordinate eclittiche, che fu molto usato in passato ma che oggi è quasi in disuso, la direzione fondamentale è la normale al piano dell'eclittica, cioè la normale al piano di rivoluzione della Terra attorno al Sole. Sia **B** un punto sulla sfera celeste: indichiamo con **B'** la sua proiezione sull'eclittica e con **E** il polo. Si definisce longitudine galattica (che corrisponde all'ascissa sferica) del punto **B** l'arco $\gamma B'$ sull'eclittica, contato in senso antiorario, da 0° a 360° , partendo dal punto γ . Si definisce invece latitudine galattica β (che corrisponde all'ordinata sferica) l'arco BB' sul

cerchio massimo passante per E e B, contato da 0° a $\pm 90^\circ$, partendo da **B'**.

E' bene a questo punto ricordare che tutti i pianeti si muovono in verso diretto attorno al Sole, su piani poco inclinati rispetto all'eclittica, con l'eccezione di Mercurio ($i = 7^\circ$) e Plutone ($i = 17^\circ$). Nell'antichità fu dato il nome di *Zodiaco* alla fascia di costellazioni attraverso le quali passa l'eclittica. In passato queste costellazioni zodiacali coincidevano con i segni astrologici; oggi, a causa della precessione degli equinozi, di cui si parlerà più avanti, questa coincidenza non esiste più.

2.5 V Sistema: Coordinate Galattiche

Il sistema di coordinate galattiche, di grande importanza per gli studi galattici ed extragalattici, ha una natura completamente diversa rispetto ai precedenti sistemi di coordinate. Infatti, mentre fino ad ora i piani usati come riferimento sono legati alla Terra e ai suoi movimenti, nel sistema di coordinate galattiche il piano di riferimento è quello della Via Lattea, definito dapprima attraverso i conteggi stellari e, successivamente, come piano di massima emissione della riga a 21 cm dell'idrogeno neutro. In effetti, questi due piani, pur essendo lievemente inclinati tra di loro, passano entrambi per il Sole, conservando quindi l'importante proprietà di mantenere l'osservatore al centro della sfera celeste. Il Polo galattico Nord si trova in direzione dell'ammasso di galassie della Coma ($\alpha_{PN} = 12^h.8$, $\delta_{PN} = 27^\circ.4$). Il sistema definito tramite i conteggi di galassie è indicato con (l^I, b^I) , mentre quello definito dalla riga a 21 cm è indicato con (l^{II}, b^{II}) . Nel 1976 l'*International Astronomical Union* (IAU) ha adottato questo secondo sistema come quello galattico propriamente detto, indicato da allora semplicemente come (l, b) . In questo sistema le due coordinate sferiche sono la longitudine galattica l (che corrisponde all'ascissa sferica) e la latitudine galattica b (che corrisponde all'ordinata sferica). L'origine delle longitudini galattiche è posta in direzione del centro galattico ($\alpha_{CG} = 17^h 42^m.4$, $\delta_{CG} = -28^\circ 55'$). Il verso delle longitudini è quello diretto e si contano in gradi, da 0° a 360° . Le latitudini galattiche si contano da 0° a $\pm 90^\circ$, a Nord o a Sud del piano galattico.

Esercizi

- 2.1 Verso quale settore del cielo deve guardare un osservatore per vedere sorgere tutte le stelle?
- 2.2 Determinare la distanza zenitale del Polo per una località che si trova ad una latitudine $\varphi = 42^\circ 15' 32''$.
- 2.3 Se un osservatore si trova ad una latitudine di 35° , qual è l'angolo formato dall'equatore con l'orizzonte?
- 2.4 Qual è la condizione affinché l'altezza di un oggetto celeste resti inalterata nel corso di una giornata?
- 2.5 Verso quale settore del cielo bisogna guardare per vedere l'altezza di un corpo celeste:
a) aumentare sull'orizzonte; b) diminuire sull'orizzonte.

- 2.6 Quali cerchi importanti della sfera celeste non hanno un corrispondente sulla Terra?
- 2.7 Come è vista l'eclittica rispetto all'orizzonte da un osservatore al Polo nord?
- 2.8 A quali condizioni il polo dell'eclittica coincide con lo zenit di un osservatore?
- 2.9 Qual è il luogo della Terra in cui l'eclittica coincide con l'equatore e quando ciò accade?
- 2.10 Quale punto del cielo ha declinazione pari a -90° ?
- 2.11 La stella polare dista $58'$ dal Polo Nord celeste. Qual è la sua declinazione?
- 2.12 Qual è l'azimut dei punti nord, sud, est ed ovest?
- 2.13 Qual è l'angolo orario dei punti est ed ovest?
- 2.14 Qual è l'ascensione retta e la declinazione del punto γ ?
- 2.15 Per quali punti sulla sfera celeste l'ascensione retta e la declinazione sono uguali a zero?
Qual è il valore della longitudine e latitudine eclittica per questi punti?

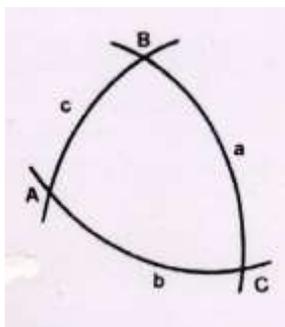
Capitolo 3

Trasformazioni di Coordinate

Argomento di questo capitolo sarà il problema del passaggio da un sistema di coordinate ad un altro. Questo problema può essere risolto sia attraverso l'uso di matrici, che attraverso l'uso delle formule di trigonometria sferica. Si tenga inoltre presente che nel caso di trasformazioni si ha che fare sempre con rotazioni rigide attorno all'origine, cui talvolta si aggiunge una traslazione, come quando si passa da un sistema di coordinate equatoriali geocentriche ad uno eliocentrico.

In seguito affronteremo il problema della trasformazione delle coordinate facendo uso solo delle formule di trigonometria sferica, rimandando ai testi specialistici per quanto riguarda le trasformazioni mediante l'uso di matrici.

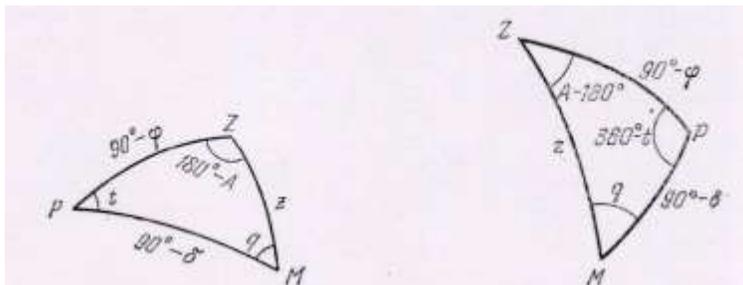
3.1 Trasformazioni di coordinate mediante la trigonometria sferica



Il passaggio da un sistema all'altro di coordinate astronomiche si realizza facilmente attraverso formule elementari di trigonometria sferica. Sia ABC un triangolo sferico, ossia un triangolo tracciato su una sfera tale che ciascuno dei suoi lati sia un arco di cerchio massimo. Siano a, b, c i lati opposti agli angoli A, B, C . Si può facilmente vedere che sulla sfera celeste l'intersezione di tre cerchi massimi determina, nel caso più generale, 8 triangoli sferici. Uno solo di essi ha la proprietà di avere tutti e tre i lati minori di una semicirconferenza, ed è quello che sarà preso qui in considerazione.

3.1.2 Trasformazione di coordinate dal sistema altazimutale ad equatoriale e viceversa

Consideriamo il triangolo sferico formato dall'intersezione del meridiano celeste, del verticale e del cerchio orario dell'astro: esso prende il nome di *triangolo parallattico*. I tre vertici di questo triangolo sferico sono il Polo celeste P , lo zenit Z e l'astro M .



Se l'astro M si trova nella parte occidentale della sfera celeste, il lato ZP (arco di meridiano celeste) è uguale a

$(90^\circ - \varphi)$, dove φ è la latitudine del luogo di osservazione; il lato ZM (arco di verticale) è uguale alla distanza zenitale dell'astro $z = (90^\circ - h)$, dove h è l'altezza dell'astro sull'orizzonte; il lato PM (arco di cerchio orario) è uguale alla distanza polare dell'astro $p = (90^\circ - \delta)$, dove δ è la declinazione dell'astro; l'angolo $PZM = (180^\circ - A)$, dove A è l'azimut dell'astro; l'angolo $ZPM = H$, dove H è l'angolo orario dell'astro; l'angolo $PMZ = q$ è detto *angolo parallattico* o , semplicemente, *parallasse*.

Se l'astro si trova nella parte orientale della sfera celeste, i valori dei lati del triangolo parallattico sono uguali a prima, mentre variano i valori degli angoli ai vertici Z e P . In particolare, avremo l'angolo $PZM = (180^\circ - A)$ e l'angolo $ZPM = (360^\circ - H)$. La forma del triangolo parallattico di uno stesso astro dipende dalla latitudine del luogo di osservazione, e quindi dalla posizione reciproca di P e Z , e dall'istante di osservazione, cioè dall'angolo orario H .

Se adesso prendiamo come angolo ed arco iniziali, rispettivamente, $(180^\circ - A)$ e $(90^\circ - \delta)$ e poniamo quindi nelle formule del I gruppo di Gauss:

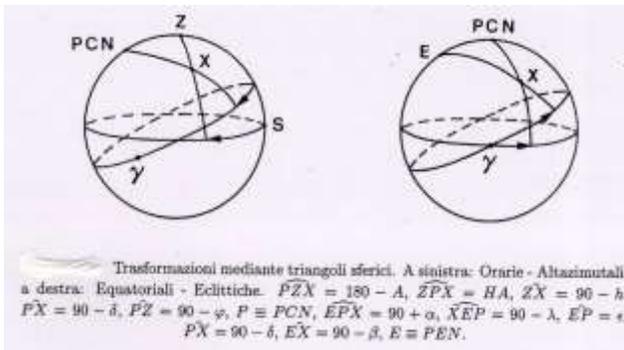
$$\begin{aligned} a &= (90^\circ - \delta) & b &= (90^\circ - h) = z & c &= (90^\circ - \varphi) \\ A &= (180^\circ - A) & B &= H & C &= q \end{aligned}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \delta) &= \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - h) + \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - h) \cos(180^\circ - A) & [3.1] \\ \sin(90^\circ - \delta) \cos H &= \sin(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - h) - \cos(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - h) \cos(180^\circ - A) \\ \sin(90^\circ - \delta) \sin H &= \sin(90^\circ - h) \sin(180^\circ - A) \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin z \cos A \\ \cos \delta \cos H &= \cos \varphi \cos z + \sin \varphi \sin z \cos A & [3.2] \\ \cos \delta \sin H &= \sin z \sin A \end{aligned}$$



Le formule precedenti servono per passare da un sistema di coordinate altazimutali dell'astro a quelle equatoriali. Esse infatti ci permettono di calcolare la declinazione δ e l'angolo orario H dell'astro noti la distanza zenitale z , l'azimut A e la latitudine del luogo d'osservazione φ .

Se prendiamo invece come iniziali l'angolo H e l'arco $(90^\circ - h)$, ponendo:

$$a = (90^\circ - h) = z \quad b = (90^\circ - \delta) \quad c = (90^\circ - \varphi)$$

$$A = H \quad B = (180^\circ - A) \quad C = q$$

le formule del primo gruppo di Gauss applicate al triangolo parallattico precedente ci permettono di passare dalle coordinate equatoriali dell'astro a quelle altazimutali. Avremo infatti:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - h) &= \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - \delta) \cos H & [3.3] \\ \sin(90^\circ - h) \cos(180^\circ - A) &= \sin(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \delta) - \cos(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - \delta) \cos H \\ \sin(90^\circ - h) \sin(180^\circ - A) &= \sin(90^\circ - \delta) \sin H \end{aligned}$$

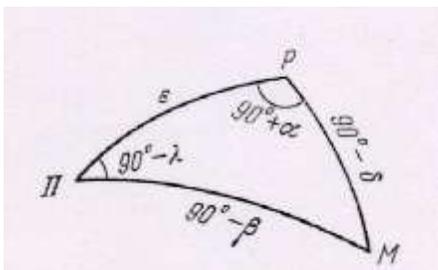
da cui:

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H \\ \cos h \cos A &= -\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos H & [3.4] \\ \cos h \sin A &= \cos \delta \sin H \end{aligned}$$

Per cui, note la latitudine φ del luogo d'osservazione, la declinazione δ e l'angolo orario H dell'astro, si ricavano l'altezza h e l'azimut A .

Le formule di trasformazione precedentemente ricavate vengono anche utilizzate per calcolare gli istanti del sorgere e del tramontare degli astri, i loro azimut in questi istanti, come anche per risolvere due problemi di importanza capitale nell'astronomia pratica, quali sono la determinazione della latitudine φ del luogo di osservazione, o la determinazione dell'angolo orario e quindi del tempo siderale.

3.1.2 Trasformazione di coordinate da equatoriali ad eclittiche e viceversa



Per passare dalle coordinate equatoriali (α , δ) dell'astro a quelle eclittiche (λ , β) e viceversa si usano i due gruppi di formule del I gruppo di Gauss, applicate al triangolo sferico avente come vertici il polo celeste P , il polo dell'eclittica Π , e l'astro M . In questo caso, i valori degli archi e degli angoli saranno, rispettivamente: $\Pi M = (90^\circ - \beta)$, $\Pi P = \varepsilon$, $PM = (90^\circ - \delta)$; $\Pi P M = (90^\circ + \alpha)$, $P \Pi M = (90^\circ - \lambda)$.

Prendendo come iniziali l'angolo $A = (90^\circ + \alpha)$ e l'arco $a = (90^\circ - \beta)$, e ponendo quindi:

$$\begin{aligned} a &= (90^\circ - \beta) & b &= (90^\circ - \delta) & c &= \varepsilon \\ A &= (90^\circ + \alpha) & B &= (90^\circ - \lambda) \end{aligned}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \cos (90^\circ - \beta) &= \cos (90^\circ - \delta) \cos \varepsilon + \sin (90^\circ - \delta) \sin \varepsilon \cos (90^\circ + \alpha) & [3.5] \\
 \sin (90^\circ - \beta) \cos (90^\circ - \lambda) &= \cos (90^\circ - \delta) \sin \varepsilon - \sin (90^\circ - \delta) \cos \varepsilon \cos (90^\circ + \alpha) \\
 \sin (90^\circ - \beta) \sin (90^\circ - \lambda) &= \sin (90^\circ - \delta) \sin (90^\circ + \alpha)
 \end{aligned}$$

da cui segue:

$$\begin{aligned}
 \sin \beta &= \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha & [3.6] \\
 \cos \beta \sin \lambda &= \sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \cos \varepsilon \sin \alpha \\
 \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha
 \end{aligned}$$

Le formule [3.5] servono per passare da un sistema di coordinate equatoriali dell'astro a quelle eclittiche. Esse infatti ci permettono di calcolare la longitudine eclittica λ e la latitudine eclittica β dell'astro noti la declinazione δ e l'ascensione retta α , essendo nota ε (inclinazione dell'eclittica rispetto all'equatore celeste).

Se prendiamo invece come iniziali l'angolo $A = (90^\circ - \lambda)$ e l'arco $a = (90^\circ - \delta)$, e poniamo quindi:

$$\begin{array}{lll}
 a = (90^\circ - \delta) & b = (90^\circ - \beta) & c = \varepsilon \\
 A = (90^\circ - \lambda) & B = (90^\circ + \alpha) &
 \end{array}$$

si ottengono le seguenti relazioni inverse:

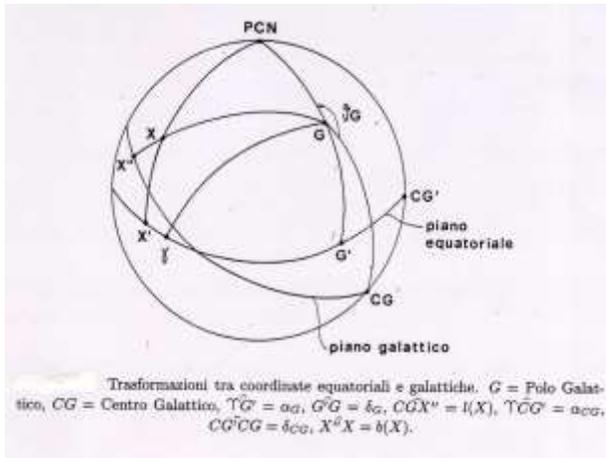
$$\begin{aligned}
 \cos (90^\circ - \delta) &= \cos (90^\circ - \beta) \cos \varepsilon + \sin (90^\circ - \beta) \sin \varepsilon \cos (90^\circ - \lambda) & [3.7] \\
 \sin (90^\circ - \delta) \cos (90^\circ + \alpha) &= \cos (90^\circ - \delta) \sin \varepsilon - \sin (90^\circ - \beta) \cos \varepsilon \cos (90^\circ - \lambda) \\
 \sin (90^\circ - \delta) \sin (90^\circ + \alpha) &= \sin (90^\circ - \beta) \sin (90^\circ - \lambda)
 \end{aligned}$$

da cui segue:

$$\begin{aligned}
 \sin \delta &= \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda & [3.8] \\
 \cos \delta \sin \alpha &= \sin \beta \sin \varepsilon + \cos \beta \cos \varepsilon \sin \lambda \\
 \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda
 \end{aligned}$$

Le formule precedenti ci permettono dunque di passare da un sistema di coordinate eclittiche ad un sistema di coordinate equatoriali.

3.1.3 Trasformazione di coordinate da equatoriali a galattiche e viceversa



La trasformazione da un sistema di coordinate equatoriali ad un sistema di coordinate galattiche è più complicata. Si faccia riferimento alla figura che segue dove si è posto PCN = Polo Equatoriale, G = Polo Galattico, CG = Centro Galattico, (α, δ) e (l, b) rispettivamente le coordinate equatoriali e galattiche di un astro X, (α_G, δ_G) le coordinate equatoriali del Polo Galattico, $(\alpha_{CG}, \delta_{CG})$ le coordinate equatoriali del Centro Galattico, θ_{CG} l'angolo compreso tra il Polo Equatoriale, il Polo Galattico ed il Centro Galattico. Si

consideri il triangolo sferico che si ottiene dall'intersezione dei seguenti tre cerchi massimi: il cerchio orario passante per il polo equatoriale PCN ed il polo galattico G; il cerchio orario passante per il polo equatoriale PCN e l'astro X; il cerchio massimo perpendicolare all'equatore galattico e passante per il polo galattico G e l'astro X. Si prendano come iniziali l'arco $a = (90^\circ - b)$ e l'angolo $A = (\alpha_G - \alpha)$. Ponendo dunque nelle formule del I gruppo di Gauss:

$$\begin{aligned} a &= (90^\circ - b) & b &= (90^\circ - \delta) & c &= (90^\circ - \delta_G) \\ A &= (\alpha_G - \alpha) & B &= (l - \theta_G) \end{aligned}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - b) &= \cos(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ - \delta_G) + \sin(90^\circ - \delta) \sin(90^\circ - \delta_G) \cos(\alpha_G - \alpha) & [3.9] \\ \sin(90^\circ - b) \cos(l - \theta_G) &= \cos(90^\circ - \delta) \sin(90^\circ - \delta_G) - \sin(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ - \delta_G) \cos(\alpha_G - \alpha) \\ \sin(90^\circ - b) \sin(l - \theta_G) &= \sin(90^\circ - \delta) \sin(\alpha_G - \alpha) \end{aligned}$$

da cui segue:

$$\begin{aligned} \sin b &= \sin \delta \sin \delta_G + \cos \delta \cos \delta_G \cos(\alpha_G - \alpha) & [3.10] \\ \cos b \cos(l - \theta_G) &= \sin \delta \cos \delta_G - \cos \delta \sin \delta_G \cos(\alpha_G - \alpha) \\ \cos b \sin(l - \theta_G) &= \cos \delta \sin(\alpha_G - \alpha) \end{aligned}$$

Le formule [3.9] servono per passare da un sistema di coordinate equatoriali dell'astro a quelle galattiche. Esse infatti ci permettono di calcolare la longitudine galattica l e la latitudine galattica b dell'astro noti la declinazione δ e l'ascensione retta α , essendo tutte le altre quantità note.

Se prendiamo invece come iniziali l'angolo $A = (l - \theta_G)$ e l'arco $a = (90^\circ - \delta)$, e poniamo quindi:

$$\begin{aligned} a &= (90^\circ - \delta) & b &= (90^\circ - b) & c &= (90^\circ - \delta_G) \\ A &= (l - \theta_G) & B &= (\alpha_G - \alpha) \end{aligned}$$

si ottengono le seguenti relazioni inverse:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \delta) &= \cos(90^\circ - b) \cos(90^\circ - \delta_G) + \sin(90^\circ - b) \sin(90^\circ - \delta_G) \cos(l - \theta_G) & [3.11] \\ \sin(90^\circ - \delta) \cos(\alpha_G - \alpha) &= \cos(90^\circ - b) \sin(90^\circ - \delta_G) - \sin(90^\circ - b) \cos(90^\circ - \delta_G) \cos(l - \theta_G) \\ \sin(90^\circ - \delta) \sin(\alpha_G - \alpha) &= \sin(90^\circ - b) \sin(l - \theta_G) \end{aligned}$$

da cui segue:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin b \sin \delta_G + \cos b \sin \delta_G \cos(l - \theta_{CG}) & [3.12] \\ \cos \delta \cos(\alpha_G - \alpha) &= \sin b \cos \delta_G - \cos b \sin \delta_G \cos(l - \theta_{CG}) \\ \cos \delta \sin(\alpha_G - \alpha) &= \cos b \sin(l - \theta_{CG}) \end{aligned}$$

Le formule precedenti ci permettono dunque di passare da un sistema di coordinate galattiche (l, b) ad un sistema di coordinate equatoriali (α, δ) .

3.2 Applicazioni delle formule precedenti

3.2.1 Nascere e tramontare degli astri

Consideriamo la prima delle formule [3.4]:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos HA$$

All'istante in cui un astro sorge o tramonta si ha: $h = 0$, in quanto la sua altezza sull'orizzonte è, per definizione, zero. Si ha dunque:

$$\sin \varphi \sin \delta = -\cos \varphi \cos \delta \cos HA \quad \text{da cui:} \quad \cos HA = -\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi \quad [3.13]$$

Fissata la latitudine del luogo, e dovendo essere $|\cos HA| \leq 1$, la relazione precedente è soddisfatta purché sia:

$$-1 \leq \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi \leq 1$$

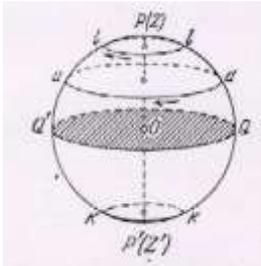
Se la condizione precedente non è soddisfatta, l'oggetto celeste non attraversa mai l'orizzonte e quindi o non tramonta mai (sta sempre sopra) o non sorge mai (sta sempre sotto).

Discutiamo il caso dell'emisfero boreale ($\varphi > 0$), essendo il caso dell'emisfero australe del tutto analogo.

Nell'emisfero boreale si ha: $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$; se si escludono gli estremi $\varphi = 0^\circ$ e $\varphi = 90^\circ$, si ha: $\text{tg } \varphi > 0$. Perché la condizione del nascere e tramontare degli astri sia soddisfatta è dunque necessario che sia:

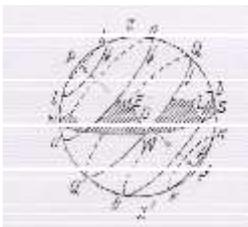
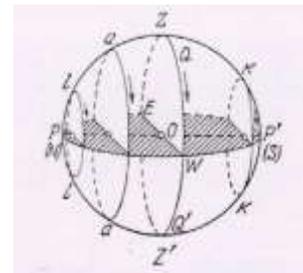
$$\text{tg } \delta \leq 1 / \text{tg } \varphi \quad \text{ossia} \quad \text{tg } \delta \leq \text{tg } (90 - \varphi) \quad \text{cioè:} \quad \delta \leq (90 - \varphi)$$

Dunque, ad una latitudine di 40° gli astri con declinazione maggiore di 50° non tramontano mai e quelli con declinazione minore di -50° non sorgono mai.



Al Polo Nord (ed anche al Polo Sud) dove è $\varphi = 90^\circ$, nessuna stella nasce o tramonta, con eccezione di quelle aventi $\delta = 0^\circ$, che lambiscono l'orizzonte (prescindendo dalla rifrazione atmosferica). Al Polo dunque, tutte le stelle con $\delta > 0^\circ$ sono sempre sopra l'orizzonte che coincide con l'equatore celeste. Esse descrivono attorno al Polo cerchi minori paralleli all'orizzonte.

Al contrario invece, all'equatore essendo $\varphi = 0^\circ$ tutte le stelle nascono e tramontano perché la condizione $\delta \leq 90^\circ$ è sempre soddisfatta. I due Poli P e P' giacciono sull'orizzonte, e le stelle descrivono cerchi perpendicolari all'orizzonte, restando visibili per dodici ore ed invisibili per un tempo uguale. In particolare dunque, all'equatore il giorno è uguale alla notte ed i crepuscoli sono brevissimi perché il Sole taglia verticalmente l'orizzonte.



A latitudini φ diverse da 0° e 90° , l'osservatore vedrà alcuni astri sorgere e tramontare, mentre altri non tramonteranno, né sorgeranno mai.

3.2.2 Culminazione degli astri

Riconsideriamo la prima delle formule [3.4]:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H$$

fissati φ e δ , la funzione $\sin h$, e quindi h , assume il valore massimo per $\cos H = 1$, cioè per $H = 0$.

Questo avviene quando l'astro passa al meridiano superiore; il minimo valore lo si ha invece per $H = 12^h = 180^\circ$, ossia quando l'astro passa al meridiano inferiore. Quando una stella passa per il meridiano del luogo dalla parte dello zenit, e quindi raggiunge la massima altezza, si dice in *culminazione superiore*; quando invece passa per l'antimeridiano si dice in *culminazione inferiore*. In particolare, perché una stella transiti allo zenit, deve essere $\sin h = 1$ ed insieme $H = 0$, cioè:

$$\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta = 1 \quad \cos(\delta - \varphi) = 1 \quad \delta - \varphi = 0 \quad \delta = \varphi$$

Passano dunque allo zenit, alla latitudine φ , tutte quelle stelle che hanno $\delta = \varphi$. Alle nostre latitudini comprese tra circa 37° e 47° , il Sole e la Luna che hanno sempre declinazioni inferiori rispetto a $23^\circ.5$ e $28^\circ.6$, non passano mai allo zenit. Come visto nel paragrafo precedente, nell'emisfero Nord, se la δ dell'astro è superiore alla colatitudine ($90^\circ - \varphi$) del luogo, la stella non tramonta mai e si dice circumpolare. Se invece è $\delta < -(90^\circ - \varphi)$, la stella non è mai visibile sopra l'orizzonte. Nell'emisfero Sud valgono le stesse considerazioni, purché si tenga conto del diverso segno di φ . Vale anche la pena ricordare che la volta celeste si presenta in modo diverso ad un osservatore nei due diversi emisferi. In quello boreale, le stelle circumpolari hanno un moto diurno in senso orario, mentre in quello australe ruotano in senso antiorario. La stessa cosa vale per il moto apparente del Sole. Anche l'aspetto delle costellazioni o della gobba lunare ad una data fase si inverte nei due emisferi.

3.2.3 Durata del giorno e della notte

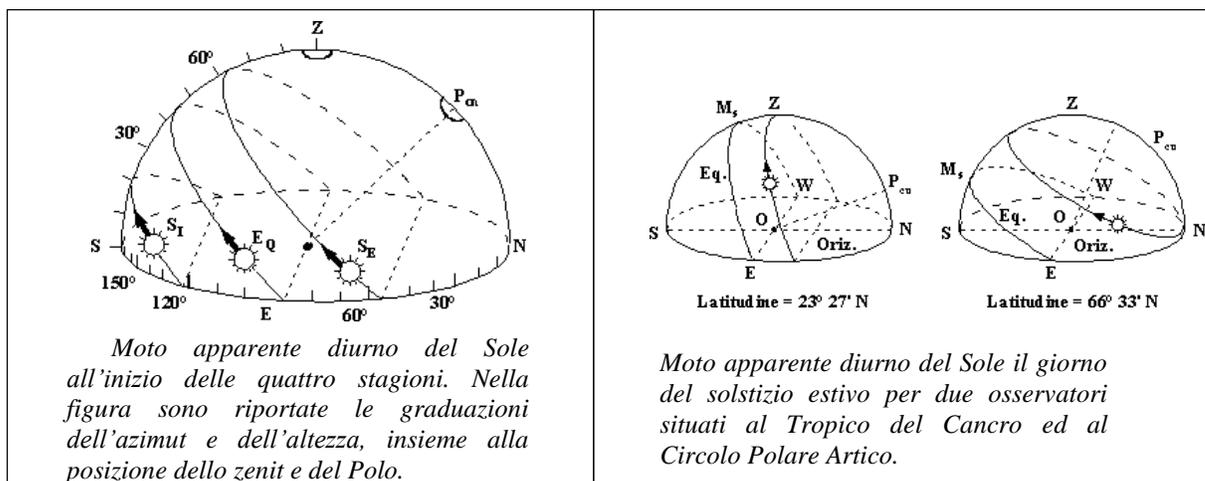
Consideriamo, per semplicità, il momento in cui il Sole transita per l'equinozio di primavera o di autunno. In questi istanti, se prescindiamo dalla rifrazione atmosferica, avremo che la durata del giorno è uguale a quella della notte in tutte le parti del globo. Infatti, essendo $\delta = 0$, dalla [3.13] segue: $\cos H = 0 \Rightarrow H = \pm 90^\circ = \pm 6^h$.

Questo significa che il Sole nasce esattamente ad Est ($H = -6^h$) e tramonta esattamente ad Ovest ($H = 6^h$) e quindi la durata del giorno è uguale a quella della notte. Questo è il motivo per cui si chiamano *equinozi* (giorno uguale alla notte) i punti in cui l'eclittica interseca l'equatore celeste ed il Sole ha $\delta = 0$.

Al Polo Nord, dove è $\varphi = 90^\circ$, tutti gli oggetti con declinazione positiva sono visibili e restano sopra l'orizzonte. Poiché il Sole ha per sei mesi declinazione positiva e per sei mesi declinazione negativa, nei sei mesi con $\delta > 0$ il Sole resta sopra l'orizzonte, raggiungendo la massima altezza al solstizio estivo, e si ha il giorno polare di sei mesi. Nei sei mesi in cui è invece $\delta < 0$, il Sole resta sempre sotto l'orizzonte e si ha la lunga notte polare di sei mesi. Lo stesso discorso vale per il Polo Sud, scambiando i mesi estivi con quelli invernali.

L'angolo orario del Sole al suo sorgere e tramontare per una data località ed in un dato periodo dell'anno può essere quindi calcolato utilizzando la seguente relazione:

$$\cos H \cos \varphi \cos \delta = - \sin \varphi \sin \delta \text{ da cui segue: } \cos H = - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$$



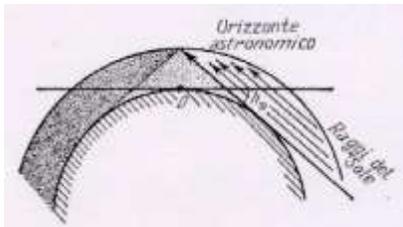
Nella tabella che segue è riportato l'angolo orario del Sole al momento del suo sorgere e tramontare all'inizio delle varie stagioni:

φ	δ			δ		
	-23°.5	0°	23°.5	-23°.5	0°	23°.5
	H			Durata del giorno		
00°.0	± 90°.00 ± 6 ^h .00	± 90°.00 ± 6 ^h .00	± 90°.00 ± 6 ^h .00	12 ^h .00	12 ^h .00	12 ^h .00
23°.5	± 79°.10 ± 5 ^h .27	± 90°.00 ± 6 ^h .00	± 100°.89 ± 6 ^h .73	10 ^h .54	12 ^h .00	13 ^h .46
45°.0	± 64°.23 ± 4 ^h .28	± 90°.00 ± 6 ^h .00	± 115°.77 ± 7 ^h .72	8 ^h .56	12 ^h .00	15 ^h .44
66°.5	± 180°.00 -----	± 90°.00 ± 6 ^h .00	± 0°.00 -----	-----	12 ^h .00	-----

Dalla tabella precedente si vede come all'equatore il giorno dura sempre 12 ore ed il Sole sorge e tramonta sempre ad Est ed Ovest. Al circolo polare artico (o antartico) la durata del

giorno è pari a 12 ore solo agli equinozi. Poi si ha il lungo giorno dalla durata di sei mesi (pari al periodo durante il quale il Sole sta sopra l'equatore) e la lunga notte di sei mesi (pari al periodo durante il quale il Sole sta sotto l'equatore).

3.3 Crepuscolo civile e crepuscolo astronomico



Quando il Sole è calato sotto l'orizzonte, o quando sta per sorgere, l'atmosfera terrestre diffonde una luce abbastanza intensa e si ha il fenomeno del *crepuscolo*. Il *crepuscolo civile* dura finché il Sole è a non più di 6° sotto l'orizzonte. Il *crepuscolo astronomico*, con luce pallida ed appena percettibile, ha luogo quando il Sole si trova tra 6° e 18° sotto l'orizzonte. L'inizio del crepuscolo civile si può stimare dalla

visibilità degli astri di prima grandezza, mentre quello del crepuscolo astronomico dalla visibilità degli astri di quarta grandezza. E' evidente che sia la durata del giorno che del crepuscolo dipendono dalla latitudine del luogo φ , che dalla stagione (cioè da δ).

Consideriamo la prima delle formule [3.4]:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H$$

imponiamo $h = -18^\circ$ ed esaminiamo i 3 casi estremi $\delta = 0^\circ$, $\delta = -23^\circ$, $\delta = 23^\circ$ per una località a $\varphi = 0^\circ$, $\varphi = 23^\circ.5$, $\varphi = 45^\circ$, $\varphi = 66^\circ.5$. I risultati sono riportati nella tabella seguente ed il suo esame mette in evidenza come il numero totale annuo di ore notturne sia maggiore all'equatore. In generale, un osservatorio a bassa latitudine ha più ore osservative di uno a latitudine maggiore e, a causa della durata delle stagioni, di cui si parlerà in seguito, un osservatorio posto nell'emisfero australe ha un numero totale di ore osservative lievemente maggiore di uno posto nell'emisfero boreale.

φ	δ			δ		
	-23°.5	0°	23°.5	-23°.5	0°	23°.5
	H (ore)			Durata notte astronomica (ore)		
00°.0	7.31	7.20	7.31	9.38	9.60	9.38
23°.5	6.69	7.31	8.25	10.62	9.38	7.50
45°.0	6.16	7.73	10.38	11.68	8.54	3.24
66°.5	5.41	9.39	---	13.18	5.24	---

Durata della notte astronomica a seconda della stagione. Si noterà che per un osservatore ai Poli terrestri la formula diviene indeterminata: il Sole per sei mesi non sorge e tramonta mai.

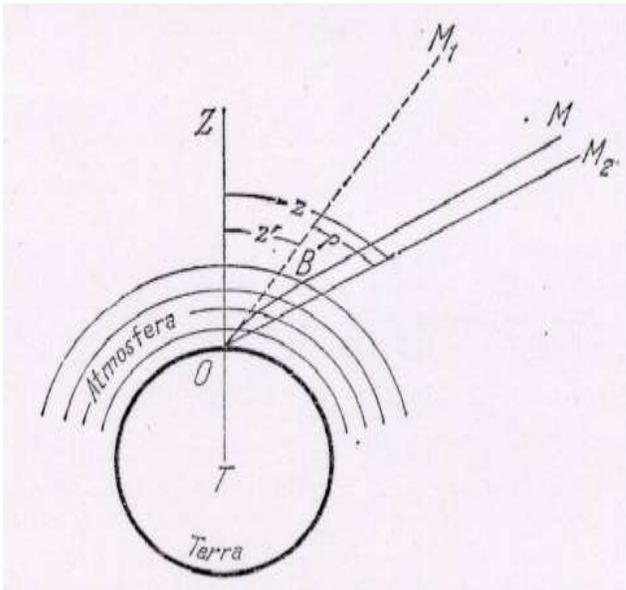
3.5 Rifrazione

A rigore, la posizione apparente di un astro differisce da quella ottenuta con calcoli teorici. I raggi luminosi emessi da un corpo celeste, prima di raggiungere l'osservatore passano attraverso l'atmosfera terrestre e vengono rifratti. Poiché la densità dell'atmosfera aumenta man mano che ci si avvicina alla superficie terrestre, il raggio luminoso devia sempre di più nello stesso senso, seguendo una linea curva, per cui la direzione OM' lungo la quale l'osservatore O vede l'astro si trova spostata verso lo zenit e non corrisponde con la direzione OM'' (parallela a BM) nella quale lo vedrebbe in assenza di atmosfera. Il fenomeno che provoca questo fenomeno prende il nome di *rifrazione astronomica*.

Si chiama angolo di rifrazione ρ l'angolo M_1OM_2 . L'angolo ZOM_1 si chiama distanza zenitale apparente z' dell'astro, mentre l'angolo ZOM_2 distanza zenitale vera z .

Dalla figura si deduce che è: $z - z' = \rho$ $z = z' + \rho$

Cioè: la distanza zenitale vera dell'astro è più grande della sua distanza apparente di una quantità pari alla rifrazione ρ . La rifrazione dà dunque l'impressione di alzare l'astro sopra l'orizzonte.



In base alle leggi della rifrazione della luce, il raggio incidente ed il raggio rifratto giacciono nello stesso piano. Di conseguenza, la traiettoria del raggio MBO e le direzioni OM_2 e OM_1 giacciono anch'esse nello stesso piano verticale. E' per questo motivo che la rifrazione non modifica l'azimut dell'astro e, per di più, è nulla se l'astro è allo zenit.

Se l'astro è al meridiano superiore o inferiore, la rifrazione ne cambia solo la declinazione, e questa variazione è dello stesso valore di quella della distanza zenitale per il fatto che in questo caso i piani del suo cerchio orario e del suo cerchio verticale coincidono. Negli altri casi, quando questi piani si tagliano

secondo un certo angolo, la rifrazione modifica sia la declinazione che l'ascensione retta.

La teoria della rifrazione è complessa, per cui si rimanda a testi specialistici per il suo approfondimento. Qui si ricorda che essa non dipende solo dall'altezza dell'astro sull'orizzonte, ma anche dallo stato dell'atmosfera, soprattutto dalla sua densità che, a sua volta, è funzione della temperatura e della pressione.

La rifrazione provoca il cambiamento della forma apparente del disco del Sole e della Luna al loro sorgere e tramontare. In prossimità dell'orizzonte, la rifrazione dei bordi inferiori dei

dischi è di 6' maggiore di quella dei bordi superiori e, poiché la rifrazione non modifica le dimensioni orizzontali, i dischi del Sole e della Luna assumono una forma ovale.

La rifrazione produce i suoi effetti anche sul sorgere e tramontare degli astri. Infatti, se si assume che il Sorgere ed il tramontare del Sole abbiano luogo nel momento in cui appare o scompare all'orizzonte il suo bordo superiore e se si tiene conto della rifrazione, il momento dell'alba, calcolato con la prima delle formule [3.4], deve giungere prima e quello del tramonto dopo. Perciò, ad ogni latitudine e ad ogni stagione, la durata del giorno è maggiore di quanto sarebbe se non ci fosse la rifrazione. In particolare, all'equatore il giorno è sempre più lungo della notte ed ai Poli il giorno dura più di sei mesi, mentre alle altre latitudini geografiche il giorno diventa uguale alla notte prima che il Sole raggiunga il punto vernale e dopo il teorico equinozio d'autunno.

Esercizi

3.1 Determinare:

- la distanza zenitale z di un astro al suo passaggio in meridiano;
- la condizione affinché un astro, quando passa in meridiano, transiti anche allo zenit di un osservatore;
- le condizioni affinché il Sole, al suo passaggio in meridiano, si trovi anche allo zenit.

3.2 Qual è l'inclinazione tra l'eclittica e l'orizzonte al momento del sorgere e del tramontare del punto γ ad una latitudine di 55° e di $66^\circ.5'$?

3.3 Dimostrare che in un luogo con $\varphi = 45^\circ$ è costante, relativamente alla declinazione δ di una stella, l'intervallo di tempo tra il momento in cui l'azimut della stella è $A = 90^\circ$ E ed il tramonto.

3.4 Determinare la distanza angolare tra due astri X_1 e X_2 di cui siano note le coordinate equatoriali.

3.5 Dimostrare che, quando la declinazione del Sole è δ , la sua ascensione retta α è data da: $\alpha = \arcsin (tg \delta \cotg \varepsilon)$.

3.6 Se z_1 e z_2 sono le distanze zenitali di una stella, rispettivamente, sul meridiano e sul primo verticale, provare che è:

$$\cotg \delta = \operatorname{cosec} z_1 \operatorname{cosec} z_2 - \cotg z_1 \quad \text{e} \quad \cotg \varphi = \cotg z_1 - \operatorname{cosec} z_1 \cos z_2$$

- 3.7** Se t_1 e t_2 sono gli angoli orari di una stella di declinazione δ , rispettivamente, sul primo verticale Ovest ed al tramonto, dimostrare che è: $\cos t_1 \cos t_2 + \operatorname{tg}^2 \delta = 0$
- 3.8** Due stelle con declinazione $\delta_1 = 60^\circ$ e $\delta_2 = -60^\circ$ si trovano ad una distanza d data da $\cos \delta = -5/8$. Determinare gli intervalli tra i passaggi al meridiano.
- 3.9** Dimostrare che se una stella è circumnolare ($\varphi > 90^\circ - \delta$) il suo massimo azimut A contato da Nord è dato da: $A = \arcsin (\cos \delta \sin \varphi)$.
- 3.10** Dimostrare che quando l'eclittica è verticale, per una località situata tra i tropici, l'angolo orario t del Sole è dato da: $\sin (t + \alpha) = \sin \alpha \operatorname{cotg} \delta \operatorname{tg} \varphi$
- 3.11** Esprimere la variazione della distanza zenitale e dell'azimut al variare dell'angolo orario.

Capitolo 4

La misura del tempo

4.1 Principi di misura del tempo

Come è stato detto nel capitolo I, lo sviluppo dell'astronomia, nell'antichità, è legato alle necessità pratiche dell'uomo, e la misura del tempo rappresentava una di queste necessità pratiche.

L'osservazione della rotazione diurna della volta celeste e del moto annuo del Sole, cioè dalla rotazione della Terra attorno al proprio asse e dalla sua rivoluzione attorno al Sole stanno alla base della misura del tempo.

La rotazione della Terra attorno al proprio asse è quasi uniforme, con periodo uguale al periodo di rotazione della sfera celeste. Esso può quindi essere calcolato con sufficiente precisione, sulla base delle osservazioni. L'angolo di rotazione della Terra, rispetto ad un punto di riferimento, ci permette dunque di valutare il tempo. Come riferimento iniziale si può prendere, per esempio, il momento della culminazione (inferiore o superiore) di un punto sulla sfera celeste, ad un dato meridiano.

La principale unità di misura, cioè il giorno, dipende dalla scelta di questo punto sulla sfera celeste. In astronomia esistono tre punti che sono stati adottati per definire questa unità di misura: 1) il punto vernale (punto γ); 2) il centro del disco apparente del Sole (*Sole Vero*); 3) il "*Sole Medio*", che è un punto immaginario, la cui posizione sulla sfera celeste può essere calcolata in ogni istante per via teorica.

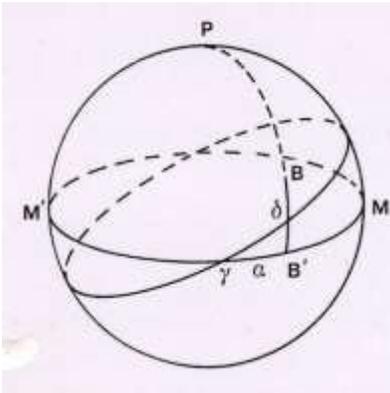
Questi tre punti definiscono, rispettivamente, tre diverse unità di misura del tempo: il *giorno siderale*, il *giorno solare vero* ed il *giorno solare medio*; i tempi da essi misurati prendono il nome, rispettivamente, di *tempo siderale*, *tempo solare vero* e *tempo solare medio*.

E' bene tenere presente che non esistono tempi diversi, ma diversi modi di valutare, e quindi misurare, il tempo reale che esiste oggettivamente.

Il giorno, con le sue frazioni (ore, minuti, secondi), è usato per misurare intervalli di tempo brevi. Gli intervalli di tempo più lunghi sono misurati utilizzando un'altra unità di misura, definita dal moto di rotazione della Terra attorno al Sole, l'anno.

4.2 Giorno e tempo siderale

Il giorno siderale può essere definito come l'intervallo di tempo in cui, per effetto della rotazione apparente della sfera celeste, una stella compie un giro completo attorno al polo. In realtà però non ci si riferisce ad una stella in particolare ma al punto γ che, come tutte le stelle, partecipa al moto di rotazione della sfera celeste. Si definisce allora *tempo siderale* TS

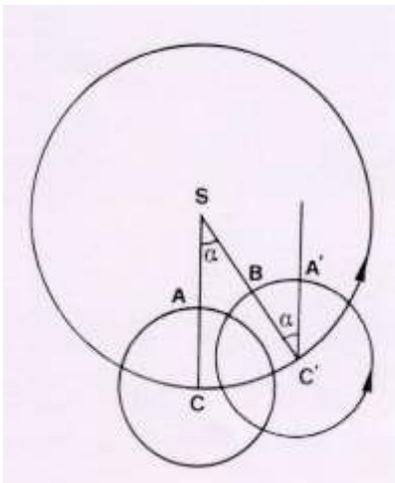


l'angolo orario del punto γ nell'istante considerato, cioè $TS = H(\gamma)$. L'ora siderale zero la si ha nel momento in cui il punto γ transita in meridiano superiore, cioè culmina. In cielo, però, non c'è nulla che indichi il punto γ , per cui è impossibile misurarne direttamente l'angolo orario $H(\gamma)$ o fissarne l'istante del passaggio in meridiano. Perciò, per scegliere praticamente l'inizio del giorno o del tempo siderale, bisogna misurare ad un istante qualsiasi l'angolo orario $t = H$ di un astro B di cui sia nota l'ascensione retta. La relazione che lega il tempo siderale TS all'angolo orario H e all'ascensione retta α di un oggetto è stata già definita nel capitolo 2 (2.3.2),

ed è la seguente:

$$TS = H + \alpha$$

E' bene comunque ricordare che l'aggettivo siderale, in questo contesto, è usato in modo improprio. Infatti, il tempo siderale è definito facendo riferimento al punto γ , e quindi al Sole, e non alle altre stelle (il punto γ fissa infatti la posizione in cui il Sole attraversa l'equatore celeste nel suo moto verso l'afelio).



Come si è visto anche nel capitolo II, la misura del tempo per mezzo del giorno siderale e delle sue frazioni è molto semplice e comoda per la risoluzione di molti problemi astronomici (per esempio, il puntamento di un telescopio). Il suo uso nella vita corrente è però molto scomodo.

La vita civile, infatti, è regolata con una particolare stella, il Sole. Se la sua posizione fosse invariabile in cielo, l'ora solare, cioè l'angolo orario del Sole in un dato istante, sarebbe uguale all'ora siderale a meno di una costante. Le cose però non vanno in questo modo. Infatti, le posizioni reciproche del Sole e del punto γ variano durante il corso dell'anno, per cui il Sole culmina in istanti diversi del tempo siderale nei vari giorni dell'anno. Ciò è causato dal fatto che in un anno (pari a 365.25 giorni solari medi) il Sole percorre

sull'eclittica 360° , quindi poco meno di un grado al giorno, essendo lo spostamento quotidiano pari a $360^\circ/365.25$. Inoltre, poiché il Sole si muove sull'eclittica in senso contrario rispetto al moto di rotazione della sfera celeste, il giorno solare (intervallo di tempo tra due successive culminazioni del Sole) sarà più lungo del giorno siderale di tutto il tempo necessario perché l'arco di quasi un grado, percorso a ritroso dal Sole, passi nuovamente al meridiano (circa 4 minuti: esattamente $3^m 56^s$ in media di tempo solare medio). Ciò significa che se un giorno il Sole transita in meridiano insieme ad una stella, il giorno seguente sarà in ritardo, rispetto alla stessa stella, di circa 4 minuti.

Questo effetto risulta chiaro se ci si riferisce alla figura precedente. Sia S la posizione del Sole, e C il centro della Terra che ruota attorno ad un asse perpendicolare al piano della figura. Per un osservatore A , allineato con S e C , il Sole è in meridiano. La Terra compie sia il moto di rotazione che di rivoluzione intorno al Sole in senso antiorario. Dopo 24 ore siderali, la Terra avrà compiuto una rotazione completa di 360° intorno al proprio asse. Nello stesso tempo, il Sole si sarà spostato sull'eclittica di un angolo α per cui, la posizione apparente del centro della Terra si sarà spostata da C a C' . Questo significa che l'osservatore A' dovrà ruotare dell'angolo α per portarsi in B ed essere nuovamente allineato con il Sole. *Il giorno solare medio è dunque più lungo del giorno siderale di una quantità pari all'angolo α , che è pari a circa $3^m 56^s$.* La conseguenza di ciò è che se si adottasse il tempo siderale come unità di tempo, avremmo, ogni giorno, il mezzogiorno a tempi diversi. L'inconveniente è fin troppo evidente.

4.3 Giorno solare vero e tempo solare vero

Si definisce *giorno solare vero* l'intervallo di tempo compreso tra due passaggi del centro del Sole allo stesso meridiano geografico. Come origine del *giorno solare vero* si prende la culminazione inferiore rispetto al meridiano dato (mezzanotte vera). Il *tempo solare vero* T_V è definito come l'intervallo temporale tra il passaggio del Sole al meridiano inferiore di riferimento ed una qualsiasi altra posizione: esso viene misurato in ore, minuti e secondi solari veri.

Ad un dato meridiano e ad un istante qualunque, il tempo solare vero T_V è uguale all'angolo orario t_V del Sole, più 12^h ; cioè:

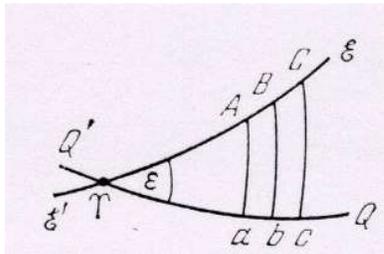
$$T_V = t_V + 12^h$$

Quando il Sole è sopra l'orizzonte se ne può misurare sempre l'angolo orario; in particolare, a mezzogiorno, quando il Sole culmina, si ha $t_V = 0$, e quindi è $T_V = 12^h$.

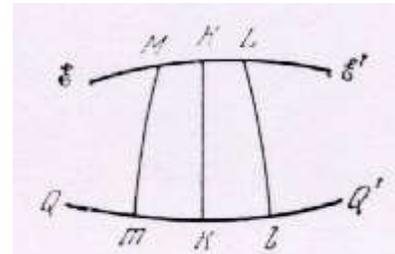
La misura del tempo tramite il *giorno solare vero* è semplice; però, al pari del *giorno siderale*, presenta degli inconvenienti per la vita quotidiana. Infatti, la durata del *giorno solare vero* è variabile, cioè la differenza tra il *giorno solare vero* ed il *giorno siderale* non è costante.

In un orologio ben regolato è però necessario che le sfere si muovano di moto uniforme, cioè che esse si spostino di spazi uguali in tempi uguali. Tale condizione è soddisfatta dal moto delle stelle (giorno siderale) in virtù dell'uniformità del moto di rotazione della sfera celeste; non è invece soddisfatta dal Sole per due motivi:

1. il Sole si muove sull'eclittica con un moto che non è uniforme; questo avviene per la seconda legge di Keplero, secondo la quale la Terra ruota più velocemente al perielio rispetto all'afelio;
2. il Sole non si muove sull'equatore ma sull'eclittica che è inclinata di circa $23^\circ.5$ rispetto all'equatore.

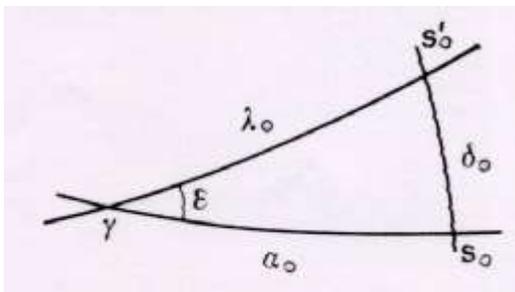


Per la 2), la durata del *giorno solare vero* sarebbe diversa anche se lo spostamento del Sole sull'eclittica fosse uniforme, cioè se l'incremento quotidiano della longitudine $\Delta\lambda$ fosse sempre lo stesso. In



realtà, in prossimità degli equinozi, gli archi uguali $AB = BC = \Delta\lambda$ dell'eclittica proiettati sull'equatore celeste danno incrementi $\Delta\alpha$ dell'ascensione retta del Sole (ab, bc) più piccoli dei corrispondenti segmenti sull'eclittica; cioè $\Delta\alpha < \Delta\lambda$. Presso i solstizi avviene l'opposto: gli incrementi dell'ascensione retta del Sole $\Delta\alpha$ (mk, kl) sono più grandi dei segmenti dell'eclittica $MK = KL = \Delta\lambda$ per effetto della differenza fra i cerchi orari all'allontanarsi dai Poli. Dunque ai solstizi si ha $\Delta\alpha > \Delta\lambda$. Questo spiega perché al solstizio d'inverno il *giorno solare vero* sia più lungo di circa 50 secondi rispetto alla durata del giorno solare vero all'equinozio d'autunno.

La giustificazione a quanto affermato nei punti 1) e 2) risulta ancora più chiaro se si considera sulla sfera celeste il triangolo sferico $\gamma S_0 S_0'$ rettangolo in S. I lati di questo triangolo sferico sono:



- $\gamma S_0' = \lambda_0$ (longitudine eclittica del Sole)
- $\gamma S_0 = \alpha_0$ (ascensione retta del Sole)
- $S_0 S_0' = \delta_0$ (declinazione del Sole)

Inoltre, l'angolo in γ è uguale ad ε (obliquità dell'eclittica).

Consideriamo le tre formule del I gruppo di Gauss:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A \end{aligned}$$

In un triangolo sferico rettangolo in A esse diventano:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c & \mathbf{[4.1a]} \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c & \mathbf{[4.1b]} \\ \sin a \sin B &= \sin b & \mathbf{[4.1c]} \end{aligned}$$

Nel nostro caso si ha: $B = \varepsilon$, $b = \delta_0$, $a = \lambda_0$, $c = \alpha_0$ per cui, sostituendo alle [4.1], segue:

$$\cos \lambda_o = \cos \delta_o \cos \alpha_o \quad [4.2a]$$

$$\sin \lambda_o \cos \varepsilon = \cos \delta_o \sin \alpha_o \quad [4.2b]$$

$$\sin \alpha_o \sin \varepsilon = \sin \delta_o \quad [4.2c]$$

da cui, dividendo la seconda per la prima:

$$\operatorname{tg} \lambda_o \cos \varepsilon = \operatorname{tg} \alpha_o \quad [4.3a]$$

$$\sin \alpha_o \sin \varepsilon = \sin \delta_o \quad [4.3b]$$

Derivando la [4.3a] rispetto al tempo, si ha:

$$[\cos \varepsilon / \cos^2 \lambda_o][d\lambda_o / dt] = [1 / \cos^2 \alpha_o][d\alpha_o / dt]$$

da cui:

$$[d\alpha_o / dt] = \cos \varepsilon [\cos^2 \alpha_o / \cos^2 \lambda_o][d\lambda_o / dt]$$

e poiché dalla [4.2c] è: $[\cos^2 \alpha_o / \cos^2 \lambda_o] = 1 / \cos^2 \delta_o$ avremo:

$$[d\alpha_o / dt] = [\cos \varepsilon / \cos^2 \delta_o][d\lambda_o / dt] \quad [4.4]$$

La formula [4.4] dimostra appunto che la velocità angolare del Sole in ascensione retta non è uniforme perché:

- $d\lambda_o / dt$ è più grande al perielio che all'afelio (punto 1);
- $\cos \varepsilon / \cos^2 \delta_o$ varia tra ε e $1/\cos^2 \varepsilon$, assumendo il valore $\cos \varepsilon$ per $\delta_o = 0$, e $1/\cos \varepsilon$ per $\delta_o = \pm \varepsilon$ (punto 2).

L'obliquità dell'eclittica sull'equatore e la non uniformità del moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole fanno dunque sì che il *giorno solare vero* abbia una durata variabile. Questa variabilità del giorno solare vero rende impossibile la sua applicazione alle necessità della vita quotidiana.

4.4 Giorno solare medio e tempo solare medio

Per ottenere un giorno di durata costante e associato al moto del Sole, gli astronomi hanno adottato due punti fittizi, quelli del Sole *eclitticale medio*, o anche *Sole fittizio*, e del Sole *equatoriale medio*. Il Sole eclitticale medio (*Sole fittizio*) si sposta uniformemente sull'eclittica con la velocità media del Sole e coincide con questo al perielio (intorno al 3

gennaio) ed all'afelio (intorno al 4 luglio). Il Sole equatoriale medio si sposta uniformemente sull'equatore celeste con la velocità costante del Sole eclitticale medio, e passa contemporaneamente ad esso ai due equinozi. Di conseguenza, ad ogni istante, l'ascensione retta del Sole equatoriale medio è uguale alla longitudine del Sole eclitticale medio (*Sole fittizio*). Le loro ascensioni rette hanno lo stesso valore solo quattro volte l'anno, e precisamente nei momenti del loro passaggio agli equinozi e nel momento in cui il Sole eclitticale medio (*Sole fittizio*) passa per i solstizi.

L'introduzione del Sole equatoriale medio, la cui ascensione retta aumenta ogni giorno della stessa quantità $\Delta\alpha$, rende costante la durata del giorno solare ed uniformizza il *tempo solare vero*. La definizione del Sole equatoriale medio implica che la durata del *giorno solare medio* sia uguale alla media annuale della durata del *giorno solare vero*.

Il Sole medio dà dunque il tempo che regola le lancette degli orologi ordinari (tempo solare medio), e si definisce *giorno solare medio* l'intervallo di tempo tra due successive culminazioni del Sole medio. *Il giorno solare medio così definito ha una durata costante ed è $3^m 56^s$ più lungo del giorno siderale.*

Si definisce *tempo solare medio* l'angolo orario t_m del Sole medio. Rispetto ad un dato meridiano, l'inizio del *giorno solare medio* è fissato al momento della culminazione inferiore del Sole equatoriale medio per cui il *tempo solare medio*, misurato in ore, minuti e secondi medi, può essere espresso mediante la seguente equazione:

$$T_m = t_m + 12^h$$

Poiché in cielo non c'è nulla che segni la posizione del Sole equatoriale medio rendendo quindi impossibile la misura del suo angolo orario, il *tempo solare medio* si ottiene per mezzo di calcoli basati sul tempo solare vero, o sul tempo siderale, determinato con le osservazioni. La differenza tra il *tempo solare medio* ed il *tempo solare vero* viene detta *equazione del tempo*.

4.5 Equazione del tempo

La differenza tra il *tempo solare medio* T_m ed il *tempo solare vero* T ad uno stesso istante viene detta equazione del tempo η e si scrive:

$$\eta = T_m - T = t_m - t = \alpha_m - \alpha$$

Da questa relazione si ottiene:

$$T_m = T + \eta$$

Cioè il *tempo solare medio* ad un certo istante è uguale al *tempo solare vero* più l'equazione del tempo.

Così, basta misurare l'angolo orario t del Sole vero e ricavare il tempo solare medio conoscendo l'equazione del tempo η in quell'istante mediante la seguente relazione:

$$T_m = t + 12^h + \eta$$

Infatti, abbiamo già visto (paragrafo 4.2) che il *giorno solare medio* è più lungo di $3^m 56^s$ rispetto al giorno siderale. Se il Sole equatoriale medio percorre nel corso dell'anno 360° sull'equatore celeste spostandosi ogni giorno di $3^m 56^s$ (poco meno di 1°) verso est (in modo analogo ad un'apparente rotazione del Sole sull'eclittica), al momento del successivo equinozio di primavera si troverà nuovamente al punto vernale. Ma in questo istante l'angolo orario del Sole medio e del punto vernale non sarà nullo perché il rapporto tra il numero di giorni siderali ed il numero di giorni medi in un anno tropico non è intero.

In altre parole:

365.241988 giorni solari medi = 366.241988 giorni siderali

da cui:

1 giorno solare medio = $[366.2241988/365.241988] = 1.002738 = K$ giorni siderali

1 giorno siderale = $[365.2241988/366.241988] = 0.997270 = K'$ giorni solari medi

I coefficienti K e K' vengono usati per convertire, rispettivamente, gli intervalli di tempo solare medio in intervalli di tempo siderale e viceversa. Ciò significa che se indichiamo con ΔT_m e con ΔT_s due intervalli di tempo rispettivamente in unità solari medie e unità siderali, le trasformazioni saranno:

$$\Delta T_s = K \Delta T_m$$

$$\Delta T_m = K' \Delta T_s$$

In particolare, avremo:

24^h di tempo solare medio = $24^h 03^m 56^s.555$ di tempo siderale

1^h di tempo solare medio = $1^h 00^m 9^s.856$ di tempo siderale

1^m di tempo solare medio = $01^m 00^s.164$ di tempo siderale

1^s di tempo solare medio = $01^s.003$ di tempo siderale

24^h di tempo siderale = $23^h 56^m 04^s.91$ di tempo solare medio

1^h di tempo siderale = $59^m 50^s.170$ di tempo solare medio

1^m di tempo siderale = $59^s.836$ di tempo solare medio

1^s di tempo siderale = $00^s.997$ di tempo solare medio

Sia dunque t_s il tempo siderale ad un certo istante ad un dato meridiano e TS il tempo siderale della mezzanotte precedente allo stesso meridiano. Dalla mezzanotte media sono dunque trascorsi $(t_s - TS)$ ore, minuti e secondi di tempo siderale. Espresso in unità di tempo solare medio, questo intervallo sarà uguale a $(t_s - TS)K'$ ore, minuti e secondi di tempo solare medio. Ma poiché alla mezzanotte media il tempo solare medio è 0^h , al momento del tempo siderale t_s il tempo solare medio sarà $T_m = (t_s - TS)K'$.

Viceversa, se T_m è il tempo medio ad un certo istante ad un dato meridiano, significa che sono trascorsi T_m ore, minuti e secondi di tempo solare medio dalla mezzanotte. Tale intervallo sarà dunque uguale a $T_m K$ ore, minuti e secondi siderali dopo la mezzanotte media. Se dunque al meridiano dato a mezzanotte il tempo siderale era TS , all'istante T_m esso sarà: $t_s = TS + T_m K$. Da quanto detto è evidente che, per poter effettuare la conversione degli intervalli temporali, risulta necessario conoscere sempre il tempo siderale alla mezzanotte media ad un dato meridiano.

Gli almanacchi astronomici forniscono il tempo siderale TS_0 del meridiano di Greenwich per ogni mezzanotte media. Conoscendo TS_0 si può calcolare facilmente il tempo siderale TS alla mezzanotte media di qualsiasi altro meridiano purché si conosca la sua latitudine rispetto a Greenwich espressa in ore, minuti e secondi.

In effetti, poiché il giorno solare medio è più lungo del giorno siderale di $3^m 56^s.555$, sia TS_0 che TS aumentano ogni giorno di una quantità pari a $3^m 56^s.555$. Di conseguenza, al meridiano di longitudine L ad est di Greenwich, il tempo siderale alla mezzanotte media sarà più piccolo della quantità $L[3^m 56^s.555 / 24^h]$. Ciò significa che la mezzanotte media a questo meridiano giunge in anticipo di L^h sulla mezzanotte di Greenwich, per cui:

$$TS = TS_0 - [L^h / 24^h] 3^m 56^s.555$$

Si tenga presente che, per convenzione, la longitudine L è positiva ad est di Greenwich.

4.7 Sistemi di determinazione del tempo

4.7.1 Ora locale e longitudine

Se il tempo solare medio è l'angolo orario del sole medio (e ciò vale anche per il tempo solare vero ed il tempo siderale), è ovvio che ogni luogo della Terra avente differente longitudine avrà un proprio tempo. Si definisce *ora locale* di un meridiano il tempo misurato al meridiano geografico considerato. Questo significa che ad un certo istante, l'angolo orario del punto vernale (o del Sole, o del Sole medio) è uguale per tutti i punti del meridiano e quindi anche l'ora locale (siderale o solare) è la stessa su tutto il meridiano. Per cui, se regoliamo gli orologi di due luoghi diversi con osservazioni astronomiche (per esempio, un orologio a tempo siderale potrà essere regolato al passaggio in meridiano di una stella di nota ascensione retta) troviamo, in generale, che essi segnano ore diverse. La differenza di tempo in ore, minuti e secondi è uguale alla differenza di longitudine ΔL tra le due diverse località, cioè tra i due meridiani. E' inoltre evidente che il tempo segnato dall'orologio della località situata più ad est sarà più avanti rispetto al tempo segnato dall'orologio posto nella località più ad occidente. Per esempio, se a Napoli l'orologio segna le ore 18, al meridiano di Greenwich segnerà circa un'ora in meno. Possiamo dunque scrivere:

$$\begin{aligned} H_2 - H_1 &= L_2 - L_1 \\ T_{v2} - T_{v1} &= L_2 - L_1 \\ T_{m2} - T_{m1} &= L_2 - L_1 \end{aligned} \quad [4.5]$$

4.7.2 Tempo universale

Si definisce *tempo universale* o *U.T.* (Universal Time) il tempo solare medio del meridiano di Greenwich. Se nella terza delle formule precedenti poniamo: $T_{m1} = U.T.$ e $L_1 = 0$, si ha:

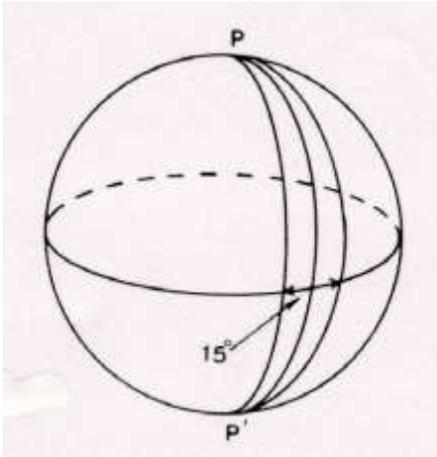
$$T_m = U.T. + L$$

cioè: *il tempo locale medio di un luogo sulla superficie terrestre è sempre uguale al tempo universale in quell'istante più la longitudine del luogo espressa in ore e considerata positiva ad est di Greenwich.*

Negli almanacchi astronomici, la maggior parte dei fenomeni astronomici è indicata in U.T., da cui è facile risalire al tempo locale dalla formula precedente.

4.7.3 Fusi orari

Nella vita quotidiana risulta scomodo applicare sia il tempo solare medio locale che il tempo universale perché si avrebbero tanti tempi locali quanti sono i meridiani geografici, cioè un numero infinito. In pratica, il fatto che ogni luogo abbia un proprio tempo locale creerebbe fastidiosi inconvenienti, inaccettabili in un'epoca di rapide comunicazione che richiede,



viceversa, l'uniformità del tempo almeno all'interno di una nazione o di gruppi di nazioni.

Nel 1884, per determinare il tempo medio, è stato proposto il sistema dei *fusi orari*. In base a questo sistema, il tempo medio è determinato solo per 24 meridiani geografici principali, scaglionati in longitudine di 15° in 15° (o di 1^h in 1^h) circa al centro di ciascuno di essi. Sulla base di ciò, si definisce *fuso orario* quel settore della superficie terrestre, delimitato da due circoli massimi distanti ciascuno, all'equatore, di $7^\circ.5$ dai meridiani principali. E' ovvio che i limiti di ciascun fuso orario coincidono con i corrispondenti meridiani geografici solo in mare aperto o nei luoghi disabitati.

Altrove essi coincidono, generalmente, con le frontiere delle Nazioni. Come tempo di ciascun fuso orario si assume il tempo del suo meridiano centrale. In questo modo l'ora di un luogo qualsiasi all'interno del fuso differirà dal tempo del fuso tutt'al più di mezz'ora, in più o in meno. Ognuno dei 24 fusi ha un proprio tempo che differisce di un'ora intero da quello del fuso precedente e sono numerati da 0 a 23. L'origine, nel conteggio delle ore, è stata fissata al meridiano di Greenwich, che dunque è scelto come meridiano di origine del fuso 0. Il meridiano principale del primo fuso orario si trova esattamente a 15° est dal meridiano di Greenwich, il secondo a 30° , il terzo a 45° , ecc., fino al 23° fuso orario il cui meridiano principale si trova a 345° di longitudine est, o a 15° di longitudine ovest. Il tempo medio del fuso orario che ha per meridiano centrale il meridiano di Greenwich prende il nome, oltre che di tempo universale, anche di Tempo Medio Europa Occidentale ed è adottato, per esempio, dall'Inghilterra, Francia, Spagna, Portogallo, Belgio e dagli altri Paesi dell'Europa occidentale. Il tempo del fuso orario successivo prende il nome di Tempo Medio Europa Centrale (T.M.E.C.) ed è quello adottato dall'Italia, dalla Germania, dalla Svizzera, Austria, Repubblica Ceca, Repubblica Slovacca, ed altri Paesi del centro Europa.

E' evidente che l'ora del fuso t_f è legata al tempo universale dalla relazione:

$$t_f = \text{U.T.} + f_h$$

dove t_f è un numero intero di ore pari al numero del fuso orario del luogo dato (longitudine del meridiano principale del fuso orario).

E' anche evidente che la differenza di ore tra due fusi orari è uguale ad un numero intero di ore uguale alla differenza dei numeri tra i due fusi.

4.7.4 Ora legale

L'*ora legale* viene introdotta allo scopo di ridurre il consumo di energia elettrica e per approfittare della luce del giorno durante l'estate. Viene generalmente adottata dalle ore 2:00 della prima domenica di primavera e consiste nel posticipare il tempo di un'ora rispetto all'ora del fuso. Il ritorno all'ora solare avviene alle ore 2:00 della prima domenica di autunno.

4.7.5 Linea del cambiamento di data

La variazione dei tempi locali da 0 a 23 ore man mano che si percorre il periplo della Terra porta alla necessità di apportare un convenzionale cambio di data ad un certo meridiano.

In base alla convenzione internazionale, la linea del cambiamento di data è posta al meridiano situato a 180° dal meridiano di Greenwich. Ad ovest della linea del cambiamento di data il giorno del mese è sempre più grande di un'unità rispetto ad est di questa linea. Perciò, oltrepassando questa linea da ovest ad est, bisogna diminuire la data di un giorno e, oltrepassandola da est verso ovest, aumentarla di uno. Se ad esempio un viaggiatore oltrepassa la linea del cambiamento di data il 31 gennaio, andando da ovest verso est, dopo mezzanotte il viaggiatore dovrà conservare la stessa data, cioè il 31 gennaio. Se viceversa attraversa la linea del cambiamento di data da est verso ovest, dopo mezzanotte per il viaggiatore sarà il 2 febbraio, saltando il primo febbraio.

Consideriamo per esempio una persona che si muova a mezzogiorno da Roma verso ovest, viaggiando alla velocità di $15^\circ/\text{ora}$. Dopo 24 ore il suo orologio segnerà ancora le 12, ma in realtà è trascorso un giorno dalla partenza, per cui dovrà portare il suo calendario avanti di un giorno. L'inverso avviene spostandosi verso oriente: in questo caso dovrà spostare sempre le lancette avanti di un'ora per cui, dopo 24 ore, per il suo orologio sono trascorsi 2 giorni mentre, in realtà, ne è trascorso solo uno.

4.7.6 Tempo delle effemeridi e tempo atomico

Come vedremo più avanti, la Terra compie una rotazione attorno al proprio asse in un intervallo temporale che è quasi uguale al giorno siderale. La differenza tra il periodo di rotazione ed il giorno siderale è dovuta al fatto che il punto vernale non è fisso sulla sfera celeste ma si sposta sull'equatore celeste di una quantità pari a circa $50''.26$ per anno, a causa della precessione degli equinozi di cui si parlerà più avanti. Questo spostamento annuo del

punto vernale corrisponde ad uno spostamento giornaliero pari a $50'' \cdot 26/365.25 = 0'' \cdot 138$, ed il tempo necessario alla Terra a compiere questo piccolissimo arco è pari a $0^s \cdot 006$. Poiché il punto vernale si sposta verso ovest, cioè nel senso opposto rispetto al verso di rotazione della Terra, il periodo di rotazione della Terra è maggiore di $0^s \cdot 006$ rispetto al giorno siderale, e quindi vale $23^h 56^m 04^s \cdot 096$ di tempo solare medio.

A questo effetto bisogna aggiungere anche le conseguenze dovute al fatto che la velocità angolare della Terra è variabile, e quindi la rotazione della Terra è irregolare. Queste variazioni della velocità di rotazione della Terra possono essere di tre tipi: secolari, irregolari (a salti), e periodiche.

In base alle osservazioni realizzate negli ultimi 250 anni, le variazioni secolari hanno prodotto un aumento del periodo di rotazione terrestre di una quantità inferiore a $0^s \cdot 0014$ per secolo, cioè inferiore ad $1^s \cdot 4$ in 100.000 anni.

Il rallentamento secolare della velocità di rotazione è causato, principalmente, dall'attrazione lunare che è anche responsabile del fenomeno delle maree.

Le variazioni irregolari della velocità di rotazione possono provocare un aumento o una diminuzione del periodo di rotazione terrestre di una quantità pari a qualche millesimo di secondo in alcuni mesi. La causa di queste fluttuazioni non è ancora chiara.

Le variazioni stagionali, prodotte molto probabilmente dalla redistribuzione delle masse d'aria e d'acqua sulla superficie terrestre, possono produrre una variazione media pari a circa $\pm 0^s \cdot 001$ nella durata del giorno. A causa di queste piccolissime variazioni, l'incremento nella durata del giorno si ha in luglio-agosto, l'opposto in marzo.

La Terra dunque, considerata come un orologio, a causa delle variazioni secolari è rimasta indietro di circa 2 ore negli ultimi 2000 anni. Per passare dal tempo solare medio, che non scorre in maniera uniforme, ad un tempo che scorra uniformemente, gli astronomi hanno tenuto conto delle discrepanze osservate tra le posizioni del Sole, della Luna e dei pianeti vicini, calcolate con le leggi della meccanica celeste usando il secondo di tempo solare medio come variabile indipendente, e quelle osservate. In questo modo ci si è accorti che per far coincidere, e rendere quindi uniforme, il tempo dei calcoli con quello delle osservazioni era necessario correggere il tempo universale U.T. con una quantità T calcolabile solo a posteriori.

Per questo motivo, nel 1960 il Comitato Internazionale dei Pesi e delle Misure ha introdotto il *Tempo delle Effemeridi* (*Ephemeris Time*, E.T.), che può essere considerato alla stregua di una variabile indipendente nelle teorie gravitazionali del Sole, della Luna e dei Pianeti, e può essere definito nel modo seguente:

$$E.T. = U.T + \Delta T$$

Il punto zero è stato scelto in modo che il tempo delle effemeridi coincida, a tutti gli effetti pratici, con il tempo atomico definito dalla frequenza di risonanza di transizione fra due livelli superfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio 133. Il secondo delle effemeridi è la 31556925.9747 parte dell'anno delle effemeridi, determinato dal valore del moto medio del Sole in longitudine alle ore 12 dell'1 gennaio, anno 1900, ora di Greenwich. La durata dell'anno tropico, in tale data, era pari a giorni 365.2421988, per cui il numero

$31556925.9747 = 365.2421988 \times 86400$ rappresenta il numero di secondi contenuti in quest'anno tropico. Il secondo delle effemeridi così definito tiene dunque conto della variabilità del giorno solare medio.

Poiché il tempo atomico è molto stabile (le differenze tra il tempo atomico fornito da fonti diverse non superano i 10^{-12} secondi), il confronto con il tempo delle effemeridi permette di studiare le irregolarità periodiche della rotazione della Terra attorno al proprio asse.

4.8 L'anno

Si definisce *anno siderale* l'intervallo di tempo impiegato dal Sole a percorrere i 360° dell'eclittica. Più esattamente, ci si riferisce al Sole eclitticale medio (Sole fittizio) che si muove sull'eclittica con moto uniforme. La durata dell'anno siderale è pari a 365.25636 giorni solari medi. Si definisce invece *anno tropico* l'intervallo di tempo tra due passaggi consecutivi del Sole per il punto vernale. Se il punto γ fosse fisso sulla sfera celeste, non ci sarebbe alcuna differenza tra anno siderale ed anno tropico. Poiché come si è già detto, e come vedremo in seguito, tale punto si muove in senso orario sulla sfera celeste di una quantità pari a $50''.26$ all'anno, mentre il Sole si muove sull'eclittica in senso antiorario, la durata dell'anno tropico sarà più breve, rispetto alla durata dell'anno siderale, del tempo necessario al Sole fittizio a percorrere un arco di $50''.26$. La durata dell'anno tropico è dunque pari a 365.24220 giorni solari medi. L'inizio dell'anno tropico è arbitrario nel senso che, una volta fissata la sua durata, si potrebbe cominciare da un giorno qualsiasi. Con Bessel, si è convenuto di fissare l'inizio dell'anno tropico all'istante in cui la longitudine media del Sole è di 280° (*anno fictus* o *anno besseliano*). Ciò avviene sempre intorno al 1° di gennaio, e la differenza tra l'inizio dell'anno civile e di quello besseliano non supera, di regola, un giorno.

Agli effetti civili è necessario che l'anno civile abbia inizio sempre alla stessa data (ore 0 del 1° gennaio) e che la lunghezza dell'anno civile sia il più possibile uguale a quella dell'anno tropico, affinché le stagioni cadano press'a poco alle medesime date. Poiché l'anno tropico non è un multiplo intero di un giorno, la seconda convenzione può essere soddisfatta solo mediamente, introducendo opportune convenzioni, di cui si parlerà nel paragrafo seguente, dedicato ai calendari.

4.9 Calendari

Si definisce *calendario* un sistema di misura di intervalli temporali lunghi. Nel corso della storia dell'umanità sono esistiti un grande numero di calendari, anche se poi possono essere classificati tutti secondo tre grandi categorie: calendari solari, calendari lunari e calendari luni-solari.

Alla base di un calendario solare c'è la durata dell'anno tropico; un calendario lunare è basato sulla durata delle lunazioni o del mese sinodico, cioè dell'intervallo di tempo tra due fasi omologhe della Luna; ad un calendario luni-solare si applicano entrambi questi due periodi.

Il calendario moderno adottato dalla grande maggioranza di Paesi è di tipo solare, la cui unità di misura, come già detto, è l'anno tropico pari a 365.2422 giorni ($365^{\text{d}} 5^{\text{h}} 48^{\text{m}} 46^{\text{s}}$).

Per compilare un calendario solare è necessario rispettare due condizioni:

- 1) la media di alcuni anni deve differire il meno possibile dalla durata dell'anno tropico;
- 2) il numero di giorni dell'anno deve essere intero, perché sarebbe scomodo che un anno cominciasse di notte, un altro di giorno, ecc.

4.9.1 Calendario giuliano

Stabilito dall'astronomo alessandrino Sosigene, il calendario giuliano è così denominato perché introdotto da Giulio Cesare nel 46 a.C.. Le due condizioni precedenti venivano soddisfatte osservando una regola molto semplice: per tre anni consecutivi la durata dell'anno era pari a 365 giorni (anno semplice), ed il quarto anno era pari a 366 (anno bisestile). Nel calendario giuliano erano bisestili tutti gli anni divisibili per quattro. Il giorno in più veniva aggiunto al mese di febbraio che, nell'anno bisestile, aveva dunque 29 giorni. L'anno giuliano così definito durava in media, su quattro anni, 365.25 giorni, cioè 0.0078 giorni solari medi in più rispetto all'anno tropico. Questa differenza avrebbe portato, dopo 128 anni, ad uno scarto di 1 giorno rispetto all'anno tropico, differenza che sarebbe diventata di ben 3 giorni dopo solo 400 anni. La conseguenza più appariscente di ciò sarebbe stata lo slittamento dell'inizio delle stagioni rispetto ai mesi tradizionali; per esempio, l'inizio della primavera sarebbe stato anticipato sempre di più con la conseguenza che Pasqua e tutte le altre feste cristiane legate tradizionalmente alle stagioni sarebbero cadute in periodi diversi da quelli indicati dai testi sacri.

4.9.2 Calendario gregoriano

Per superare le difficoltà precedenti, Papa Gregorio XIII impose, nel 1582, una riforma del calendario che prese il nome di *Riforma Gregoriana*. Tale riforma, realizzata sulla base del progetto dell'astronomo e matematico italiano Luigi Lilio Ghiraldi, prevedeva di rimettere la data del 21 marzo al giorno dell'equinozio di primavera e quindi di modificare la regola del calcolo degli anni semplici e bisestili in modo da ridurre lo scarto rispetto all'anno tropico. Partendo da questi due principi, la bolla di Papa Gregorio XIII, stabiliva dunque:

- a) che il giorno successivo al 4 ottobre 1582 non sarebbe stato il 5 bensì il 15 ottobre;
- b) che non sarebbero più stati bisestili gli anni secolari il cui millesimo non sia divisibile per quattro (1700, 1800, 1900, 2100, ...).

Con il primo punto veniva dunque recuperato lo scarto dall'anno tropico che, in 325 anni, era già diventato pari a 10 giorni, riportando così la data d'inizio della primavera dell'anno successivo al 21 marzo.

Con il secondo punto si portava la durata media dell'anno, su 400 anni, pari a 365.2425 giorni solari medi, con una differenza pari a soli 0.0003 giorni solari medi rispetto alla durata di un anno tropico. In questo modo, per raggiungere uno scarto di un giorno tra il calendario gregoriano e l'anno tropico bisognerà aspettare ben 3333 anni! Fra 3000 anni sarà semplice, per i nostri posteri, correggere questa piccola differenza.

Il calendario gregoriano è stato introdotto nella maggioranza dei paesi europei tra il XVI e XVII secolo, ed oggi è universalmente adottato, almeno in tutti i Paesi occidentali e più industrializzati.

Esercizi

- 4.1** Se una stella, questa sera, sorge alle ore 22:00, a che ora sorgerà, approssimativamente, tra un mese?
- 4.2** Quale sarebbe la relazione tra il tempo solare ed il tempo siderale se la Terra ruotasse in direzione opposta rispetto a quella attuale?
- 4.3** La differenza in longitudine tra due località è uguale alla differenza di tempo siderale o solare?
- 4.4** Quando a Greenwich sono le 10^h 17^m 14^s, a Napoli sono le 11^h 14^m 15^s.2 di tempo locale. Qual'è la longitudine di Napoli in ore, minuti, secondi e gradi, primi, secondi?
- 4.5** Esempio di conversione da tempo universale a tempo siderale locale:

- a) calcolare il tempo siderale locale alle 09^h 44^m 30^s U.T. il giorno 8 luglio 2003, in una località a longitudine Ovest 80° 22' 55".79.

Tempo siderale di Greenwich alle 0 ^h U.T. di giorno 08.07.03:	19 ^h 02 ^m 09 ^s .3632
Trasformazione dell'intervallo di tempo solare medio in tempo siderale (09 ^h 44 ^m 30 ^s x 1.0027379):	09 ^h 46 ^m 06 ^s .0185
Tempo siderale di Greenwich a 09 ^h 44 ^m 30 ^s U.T.:	28 ^h 48 ^m 15 ^s .3817
Sottrarre la longitudine Ovest (aggiungere la long. Est):	05 ^h 21 ^m 31 ^s .7193
Tempo siderale locale a 09 ^h 44 ^m 30 ^s U.T.:	23 ^h 26 ^m 43 ^s .6624

- b) calcolare il tempo universale alle 23^h 26^m 43^s.6624 di tempo siderale del giorno 8 luglio 2003, in una località a longitudine Ovest 80° 22' 55".79.

Tempo siderale locale:	23 ^h 26 ^m 43 ^s .6624
Aggiungere la longitudine Ovest (sottrarre la long. Est):	05 ^h 21 ^m 31 ^s .7193

Tempo siderale corrispondente di Greenwich:	28 ^h 48 ^m 15 ^s .3817
Tempo siderale di Greenwich alle ore 0 U.T. di giorno 08.07.03:	19 ^h 02 ^m 09 ^s .3632

Intervallo di tempo siderale	09 ^h 46 ^m 06 ^s .0185
Trasformazione dell'intervallo di tempo siderale in tempo solare (09 ^h 46 ^m 06 ^s .0185 x 0.9972695663) e corrispondente U.T.:	09 ^h 44 ^m 30 ^s .0000

- 4.6** Calcolare l'angolo orario del Sole vero t_v per un'osservazione fatta in un luogo di longitudine $128^\circ 15' W$ il 10 febbraio 2003, al tempo di fuso $08^h 46^m 22^s.0$, sapendo che l'equazione del tempo, in tale giorno è: $\eta = -14^m 13^s$.
- 4.7** Quale errore si accumula nel Calendario Gregoriano dopo un intervallo di tempo pari a 100 anni, 500 anni, 1000 anni, ed in quale giorno cade l'equinozio di primavera dopo questi intervalli di tempo?

Capitolo 5

Proprietà generali della Terra

5.1 Coordinate geografiche

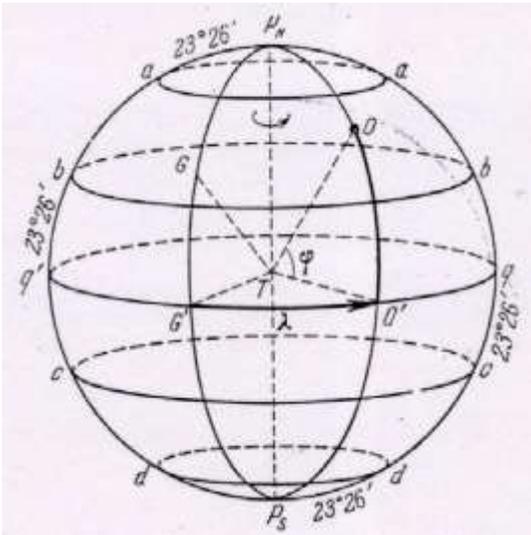


Fig. 5.1 Coordinate geografiche

Prima di affrontare il problema della forma della Terra, se ne pone un altro di fondamentale importanza: come determinare la posizione di una località sulla superficie terrestre. Come vedremo meglio nei paragrafi seguenti, la forma della Terra può essere assimilata a quella di una sfera per cui, facendo riferimento alla Fig. 5.1, definiamo *asse terrestre* la retta immaginaria $P_n P_s$, intorno alla quale la Terra ruota. Quest'asse taglia la superficie terrestre in due punti che costituiscono il *polo geografico Nord* P_n , ed il *polo geografico Sud* P_s . Il polo Nord è quello attorno al quale la Terra ruota in senso antiorario. Definiamo *equatore terrestre* il cerchio massimo perpendicolare all'asse di rotazione. Esso divide la superficie della Terra in due emisferi: quello Nord con il polo Nord, e quello Sud con il Polo Sud.

I cerchi minori paralleli all'equatore celeste prendono il nome di *paralleli geografici*. Il parallelo situato a $23^\circ 26'$ a Nord dell'equatore celeste prende il nome di *tropico del Cancro*; quello situato a $23^\circ 26'$ a Sud dell'equatore è il *tropico del Capricorno*. I paralleli geografici a $23^\circ 26'$ dai Poli prendono il nome, rispettivamente, di *circolo polare artico* (Nord) e di *circolo polare antartico* (Sud).

Il semicerchio massimo $P_n O O' P_s$ passante per i poli ed il punto O prende il nome di *meridiano geografico* del punto O . Il meridiano $P_n G G' P_s$ passante per l'Osservatorio Astronomico di Greenwich prende il nome di *meridiano fondamentale* (o *primo meridiano*). La superficie terrestre è divisa nei due emisferi Est ed Ovest dal meridiano fondamentale e da quello passante a 180° .

La linea TO , secondo la quale è diretto il filo a piombo in un dato luogo sulla superficie terrestre prende il nome di *verticale*.

La posizione di un punto O sulla superficie terrestre è definita da due coordinate: la *longitudine geografica* L (o λ) e la *latitudine geografica* φ .

La latitudine φ di un punto O è definita come l'angolo compreso tra il piano dell'equatore terrestre e la verticale passante per O . Le latitudini si contano da 0° a 90° nell'emisfero Nord a

partire dall'equatore, e da 0° a 90° nell'emisfero Sud, sempre a partire dall'equatore. La longitudine L del punto O è data dall'angolo diedro $G'TO'$ formato dai piani del meridiano fondamentale e dal meridiano passante per O . In generale, in geografia, la longitudine si conta da 0° a 180° verso Est (*Longitudine Est*), e da 0° a -180° verso Ovest (*Longitudine Ovest*).

Per risolvere molti problemi astronomici, si assume che la Terra sia una sfera omogenea di raggio $R = 6370$ km. Con questa semplificazione, la direzione della verticale per qualunque punto sulla superficie della Terra passa per il centro e coincide con il raggio, mentre i meridiani e l'equatore sono cerchi aventi tutti lo stesso raggio della Terra. La latitudine di un luogo può dunque essere misurata dall'arco di meridiano compreso tra l'equatore ed il luogo considerato, mentre la longitudine dall'arco di equatore compreso tra il meridiano fondamentale ed il meridiano del luogo.

Nell'ipotesi della Terra sferica, è facile vedere che la latitudine astronomica coincide con la latitudine geografica (Capitolo 2), ed il meridiano di un luogo coincide, a sua volta, con il meridiano celeste in quel luogo.

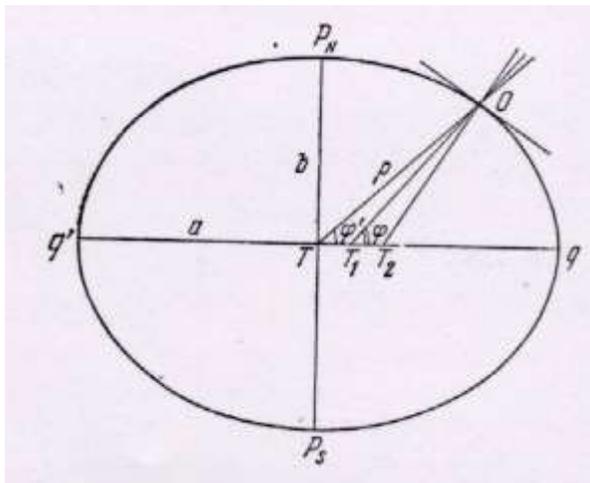


Fig. 5.2 – Vari tipi di latitudine geografica

Quando la risoluzione dei problemi esige valori più precisi delle dimensioni e della forma della Terra, si assume che essa sia un *ellissoide di rotazione (sferoide)* con distribuzione irregolare delle masse. In questo caso, la verticale per qualunque punto della superficie terrestre non passerà sempre per il centro dello sferoide T (Fig. 5.2). Essa taglierà il piano dell'equatore in un altro punto T_1 , allontanandosi dal raggio vettore ρ , cioè dalla retta TO passante per il centro dello sferoide e per il punto O .

La verticale T_1O può, a sua volta, staccarsi dalla normale T_2O alla superficie dello sferoide, cioè dalla perpendicolare al piano

tangente alla Terra nel punto O , come conseguenza della distribuzione irregolare delle masse nei dintorni di questo punto. Per effetto di quanto detto, possiamo definire per ogni luogo sulla superficie terrestre tre diverse latitudini:

- 1) la *latitudine astronomica* (o geografica) φ , definita come l'angolo OT_1q tra il piano dell'equatore terrestre e la verticale nel punto dato O .
- 2) La *latitudine geocentrica* φ' , definita come l'angolo OTq tra il piano dell'equatore terrestre ed il raggio vettore nel punto dato O .
- 3) La *latitudine geodetica*, definita come l'angolo OT_2q tra il piano dell'equatore terrestre e la normale allo sferoide nel punto dato O .

Solo la latitudine astronomica φ è ottenuta direttamente in base alle osservazioni (come vedremo più avanti). Con misure geodetiche e gravimetriche si determina lo scarto, in un dato

luogo, tra la verticale e la perpendicolare del filo a piombo, consentendo di ottenere la latitudine geodetica dalla latitudine astronomica. Poiché lo scarto è inferiore ai 3", nei problemi astronomici non si fa differenza tra latitudine astronomica e latitudine geodetica. La latitudine geocentrica viene calcolata mediante l'uso di formule di geometria analitica che la legano alla latitudine geodetica, e quindi a quella astronomica. La differenza tra le latitudini astronomiche e quelle geocentriche non supera i 12" ed è nulla ai poli geografici ed all'equatore.

Vediamo dunque come fare per determinare la latitudine e la longitudine di un luogo terrestre:

Determinazione della latitudine: basta osservare con uno strumento dei passaggi la culminazione superiore ed inferiore di una stella circumpolare. Se indichiamo con h_1 ed h_2 l'altezza dell'astro nelle due culminazioni, sarà: $\varphi = (h_1 + h_2) / 2$. L'altezza della stella polare (che dista solo circa 50' dal Polo vero), può darci in mancanza d'altro e solo in prima approssimazione la latitudine del luogo.

Determinazione della longitudine: Poiché in un giorno siderale la Terra compie una rotazione completa su se stessa (ruotando in senso antiorario, da Ovest verso Est), per avere la differenza di longitudine di due luoghi sulla Terra basterà confrontare in un dato istante il tempo di due orologi, come si è già visto nel capitolo 4. Se per esempio l'orologio in L_1 segna t_1 e l'orologio in L_2 segna t_2 , la differenza $t_2 - t_1$ sarà uguale alla differenza di longitudine tra $L_2 - L_1$.

La longitudine può dunque essere espressa, sia in gradi e sottomultipli, che in ore e sottomultipli. Per passare da gradi in ore basterà dividere per 15 (capitolo 1).

5.2 Prove della sfericità della Terra

In base alla teoria della gravitazione universale, ogni corpo massiccio isolato che ruoti intorno al proprio asse con una velocità non troppo grande assume una forma sferoidale. Infatti, tutti gli altri corpi celesti massicci che si osservano (per esempio, il Sole, i pianeti e la Luna) mostrano una forma molto simile a quella di una sfera.

La forma pressoché sferica della Terra fu riconosciuta fin dall'antichità, quando ancora non se ne conoscevano i movimenti. Quando un osservatore si sposta da Nord a Sud sulla superficie terrestre, le costellazioni circumpolari ed il Polo si abbassano gradualmente, fino a scomparire sotto l'orizzonte. L'orizzonte stesso ha forma circolare ed una nave emerge dall'orizzonte poco a poco, in modo che appaiano prima le strutture superiori e poi lo scafo. Ed ancora, durante un'eclisse di Luna, l'ombra della Terra proiettata dal Sole sul disco lunare ha forma circolare. Infine, le foto della Terra riprese dallo spazio mostrano, senza ombra di dubbio, la forma circolare della Terra.

La forma del nostro globo è dunque quella di una sfera o di uno sferoide: ma quanto grande?

5.3 Determinazione del raggio della Terra: triangolazioni

La forma sferica della Terra permette di determinarne le dimensioni con il metodo già applicato da Eratostene nel III secolo a.C.. L'idea di questo metodo è molto semplice. Prendiamo due punti O_1 e O_2 sul globo terrestre in modo che si trovino sullo stesso meridiano. Indichiamo con l l'arco di meridiano che congiunge O_1 con O_2 e con n° il suo valore angolare. La lunghezza dell'arco di 1° del meridiano l_0 sarà quindi: $l_0 = (l / n^\circ)$, per cui la lunghezza L dell'intero cerchio meridiano sarà: $L = 360^\circ l_0 = 360^\circ (l / n^\circ) = 2 \pi R$, dove R è il raggio del globo terrestre. Avremo quindi: $R = [180^\circ (l / \pi n^\circ)]$.

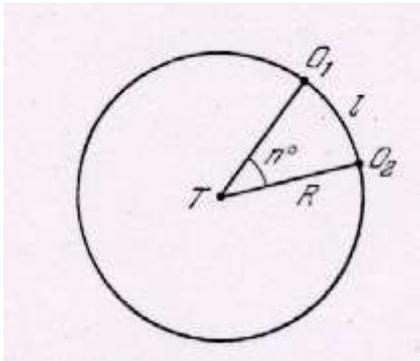


Fig. 5.3 – Misura del raggio del globo terrestre

Il valore angolare dell'arco n° è uguale alla differenza tra le latitudini geografiche dei due punti O_1 e O_2 , cioè $n^\circ = \varphi_1 - \varphi_2$. La determinazione della distanza lineare l tra i punti O_1 e O_2 oggi non costituirebbe un problema, grazie agli strumenti di cui si dispone. In passato costituiva invece un grosso problema, risolto col metodo delle triangolazioni. Il principio è il seguente. Da ambedue le parti dell'arco $O_1 O_2$ si scelgono numerosi punti A, B, C, \dots in modo che siano facilmente visibili ciascuno da almeno due punti diversi. Scelta come base la distanza tra due punti, per esempio $O_1 A$, se ne determina la lunghezza con estrema precisione e con un teodolite si misurano gli angoli del triangolo $O_1 A B$. Noti in un triangolo un lato ed i tre angoli, è possibile ricavare gli altri due lati. In questo modo si procede con i triangoli successivi fino a ricavare la lunghezza della

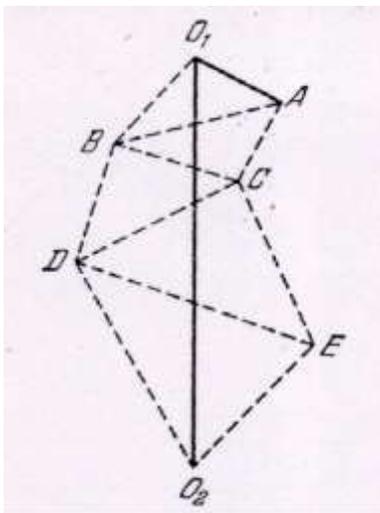


Fig. 5.4 - Triangolazione

linea spezzata $O_1 B D O_2$, che viene quindi proiettata sul meridiano $O_1 O_2$ per ottenere la lunghezza dell'arco $O_1 O_2$ in unità lineari.

Ebbene, Eratostene aveva notato che ad Assuan (allora Syene), in Egitto, il Sole si specchiava nel fondo di un pozzo, cioè passava allo zenit, a mezzogiorno dell'inizio dell'estate, mentre alla stessa ora, ad Alessandria, distava $7^\circ 15'$ dallo zenit. Poiché Alessandria ed Assuan sono pressoché sullo stesso meridiano, questa differenza corrispondeva ad un arco di meridiano di pari ampiezza. Poiché la distanza tra i due luoghi era nota e corrispondeva a circa 5000 stadi (circa 925 km), dalla formula vista precedentemente si otteneva $R = 7310$ km, valore lievemente maggiore di quello oggi adottato ($R = 6371.23$ km).

5.4 Dimensioni e forma della Terra

Il metodo delle triangolazioni è stato adoperato per misurare il valore di un arco di meridiano pari ad 1° a latitudini diverse. Tutte queste misure hanno mostrato che questa misura varia e vale circa 110.949 km verso l'equatore e 111.324 km verso i poli, con una media di 111.1 km. La curvatura della Terra è dunque minore verso i poli rispetto all'equatore, per cui la Terra non è perfettamente sferica ma ha la forma di uno sferoide (ellissoide di rivoluzione).

Il raggio equatoriale risulta essere $a = 6378.39$ km, mentre quello polare è $b = 6356.91$ km. Il rapporto $\varepsilon = [(a - b) / a] = 0.003367 = 1 / 297$ prende il nome di *appiattimento dello sferoide*. Non è una quantità rilevante, ma tuttavia sensibile.

Misure più accurate mostrano che la reale figura della Terra differisce sia da uno sferoide che

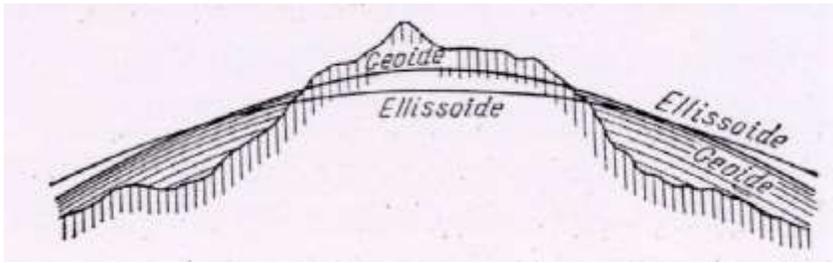


Fig. 5.5 – Superficie dell'ellissoide e del geoide

da un ellissoide triassiale non può essere rappresentata da nessuna delle figure matematiche note. Per questo motivo, quando si parla di superficie terrestre, si parla di superficie di un *geoide*.

Lo studio della figura reale della Terra è uno dei problemi principale della geodesia e della gravimetria. Esso consiste nel determinare gli elementi dell'ellissoide più vicini al geoide e la posizione delle singole parti del geoide rispetto all'ellissoide.

5.5 Massa e densità della Terra

La determinazione della massa della Terra non presenta eccessive difficoltà. E' infatti sufficiente considerare l'espressione dell'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre data da:

$$g = G (M / R^2)$$

dove: a) G è la costante di gravitazione universale, che si può determinare, per esempio, con l'esperienza di Cavendish. Il suo valore risulta essere: $G = 6.670 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sec}^{-2}$; b) R è il raggio medio della Terra, che è conosciuto ed è pari a $R = 6371.23$ km; c) g è l'accelerazione di gravità che si determina facilmente con un pendolo mediante la relazione $P = 2 \pi (l / g)^{1/2}$, dove P ed l sono, rispettivamente, il periodo e la lunghezza del pendolo. Il suo valore è $g = 980.665 \text{ cm sec}^{-2}$.

Noti G , R , e g è subito nota anche la massa della Terra che risulta essere $M = 5.976 \times 10^{27}$ gr, $= 6 \times 10^{20}$ tonnellate. Poiché il volume della Terra è $V = 1.083 \times 10^{27}$ cm³, la sua densità media risulta essere $\rho_{\oplus} = 5.517$ gr cm⁻³. In realtà, la densità in superficie è pari a $\rho_{\oplus} = 3.3$ gr cm⁻³, mentre al centro è maggiore e pari a $\rho_{\oplus} = 9.4$ gr cm⁻³.

Esercizi

- 5.1 Quale sarebbe la velocità di rivoluzione della Terra se la sua orbita fosse circolare con raggio pari a 149.500.000 km, ed il periodo pari a 365.25 giorni?
- 5.2 Quale sarebbe la durata dell'anno sulla terra se il raggio dell'orbita fosse maggiore di 1.000.000 km, mantenendo la velocità ricavata nell'esercizio precedente?
- 5.3 Se l'asse di rotazione della Terra fosse perpendicolare al piano dell'orbita, quali effetti si avrebbero sulla durata del giorno e delle stagioni?
- 5.4 Qual'è la velocità di rotazione (in m/sec) diurna della Terra a Napoli ($\varphi = 40^{\circ} 51' 46''.3$)? Si consideri il raggio della Terra pari a 6370 km.
- 5.5 Qual'è l'accelerazione centrifuga di un corpo posto all'equatore ed al livello del mare? Si consideri il raggio della Terra pari a $R = 6.378.400$ m ed il periodo di rotazione pari a 86164 secondi di giorno solare medio.
- 5.6 Qual'è l'accelerazione di gravità di un pendolo all'equatore, sapendo che il suo periodo di oscillazione è pari a 1 secondo, e la sua lunghezza è $l = 991.03$ mm?

Capitolo 6

Distanze dei pianeti e delle stelle vicine

6.1 La parallasse

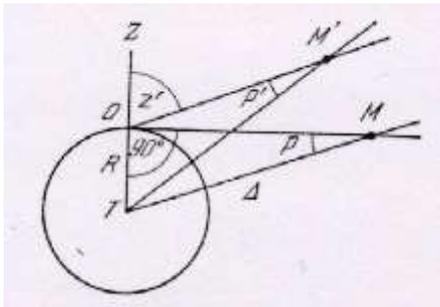


Fig. 6.1 – Parallasse diurna

Fra le molteplici direzioni lungo le quali è possibile osservare un astro da punti diversi della superficie terrestre, la direzione principale è quella con origine nel centro della Terra. Essa fornisce la posizione *geocentrica* dell'astro e determina le sue coordinate geocentriche. L'angolo secondo cui l'astro M' sarebbe visibile dal centro della Terra e da un punto qualunque sulla superficie della Terra prende il nome di *parallasse diurna*. Sulla base di quanto detto, possiamo definire la *parallasse diurna* come l'angolo p' sotto il quale dall'astro si vede perpendicolarmente

il raggio della Terra.

La parallasse diurna di un astro allo zenit nell'istante di osservazione è nulla (angolo $p' = 0^\circ$), mentre se l'astro è osservato all'orizzonte la sua parallasse diurna è massima e viene detta *parallasse orizzontale* p .

Se indichiamo con Δ la distanza dell'astro M dal centro della Terra, e con R il raggio della Terra, applicando il teorema dei seni ai triangoli $TM'O$ e TMO otteniamo la seguente relazione:

$$R / \Delta = \sin p' / \sin z' \quad [6.1]$$

da cui segue:

$$R / \Delta = \sin p / \sin 90^\circ = \sin p \quad [6.2]$$

Uguagliando la [6.1] con la [6.2] e tenendo in considerazione il fatto che p e p' sono angoli molto piccoli per cui si può confondere il seno dell'angolo con l'angolo stesso espresso in radianti (capitolo 1), si ha:

$$p' \approx p \sin z' \quad [6.3]$$

Per i corpi del sistema solare si ha: $p = 57'$ per la Luna; $p = 8''.79$ per il Sole, e $p < 1'$ per i pianeti.

Nota la parallasse orizzontale p dell'astro, la sua distanza Δ dal centro della Terra è uguale a:

$$\Delta = R / p$$

dove R è il raggio della Terra, p è l'angolo di parallasse, in radianti. In questo caso, la distanza Δ dell'astro è espressa nella stessa unità di misura del raggio della Terra.

L'effetto della parallasse diurna è quello di far apparire l'astro più basso sull'orizzonte di quanto sarebbe se osservato dal centro della Terra (Fig. 6.1). Inoltre, l'effetto causato dalla parallasse sull'altezza dell'astro è proporzionale al seno della distanza zenitale ([6.3]) e quindi, come è già stato detto precedentemente, esso è nullo allo zenit e massimo all'orizzonte (parallasse orizzontale).

Come si è già visto nel capitolo 5, la forma della Terra è quella di uno sferoide per cui, per evitare divergenze nella determinazioni delle parallasse orizzontali, e quindi delle distanze, viene utilizzato per i calcoli il raggio equatoriale della Terra pari a $R_0 = 6378$ km. Le parallasse così determinate sono quelle di riferimento e prendono il nome di *parallasse orizzontali equatoriali* p_0 .

Nota la parallasse p ed il raggio della Terra R_0 , è possibile ricavare la distanza Δ dell'astro tramite la [6.2] nelle stesse unità di misura del raggio R_0 della Terra.

Utilizzando le parallasse orizzontali equatoriali diurne è possibile ricavare le distanze dei corpi del sistema solare.

Un altro metodo per determinare le distanze all'interno del sistema solare consiste nell'utilizzo dell'eco radar. Infatti, sfruttando il fatto che la velocità c di propagazione delle onde elettromagnetiche è costante, basterà rivelare l'intervallo di tempo δt tra il momento di partenza e di ritorno dell'eco radar per avere la distanza dalla semplice relazione:

$$\Delta = (c \delta t / 2)$$

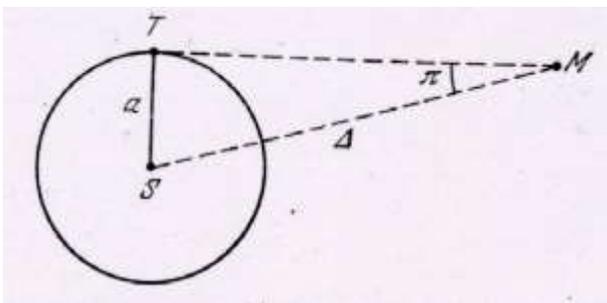


Fig. 6.2 – Parallasse annua delle stelle

L'utilizzo del raggio equatoriale della Terra come base per la misura delle parallasse va bene per la determinazione delle distanze dei corpi del sistema solare, ma risulta insufficiente per la determinazione delle distanze degli oggetti più distanti, quali le stelle. Infatti, aumentando le dimensioni della base, aumenta la distanza entro cui ci è possibile misurare l'angolo di parallasse. La base

più ampia di cui possiamo disporre è costituita dal raggio dell'orbita della Terra intorno al Sole, supposta sferica: Le parallasse così determinate prendono il nome di parallasse annue.

Si definisce dunque *parallasse annua* π l'angolo sotto cui da una stella è visto perpendicolarmente il raggio dell'orbita terrestre intorno al Sole, supposta sferica.

Posto dunque $a = TS$ il raggio medio dell'orbita della Terra intorno al Sole, $\Delta = SM$ la distanza della stella M dal Sole S , e π l'angolo di parallasse, applicando le regole della geometria al triangolo rettangolo TSM si ha:

$$\Delta = a / \sin \pi = a / \pi \quad [6.4]$$

avendo sostituito $\sin \pi$ con π espresso in radianti, essendo l'angolo π di parallasse molto piccolo, inferiore a $1''$. Se poniamo il raggio medio a dell'orbita Terra – Sole uguale ad 1 unità astronomica (u.a.), la distanza dell'astro sarà espressa anch'essa in u.a.

Se invece esprimiamo l'angolo di parallasse in secondi d'arco, la [6.4] diventa:

$$\Delta = 206265 a / \pi'' \quad [6.5]$$

se, nella [6.5] poniamo: $1 \text{ u.a.} \times 206265 = 1 \text{ parsec (pc)}$, la distanza Δ dell'astro è espressa nelle stesse unità di misura, e cioè in parsec.

L'introduzione di queste nuove unità di misura si rende necessaria per il fatto che le distanze dei corpi celesti sono molto grandi e che quindi risulterebbe molto scomodo esprimerle in km. Le unità di misura introdotte per la misura delle distanze in astronomia sono dunque:

1. l'*unità astronomica* (u.a.): distanza media della Terra dal Sole;
2. il *parsec* (pc): distanza corrispondente ad una parallasse $\pi = 1''$;
3. l'*anno luce* (a.l.): distanza percorsa dalla luce in un anno alla velocità di 300 000 km/sec.

Se si assume che sia $1 \text{ u.a.} = 149600000 \text{ km} \approx 1.5 \times 10^8 \text{ km}$, avremo: $1 \text{ pc} = 206265 \text{ u.a.} \approx 3.1 \times 10^{13} \text{ km} \approx 3.26 \text{ a.l.}$; $1 \text{ a.l.} = 9.46 \times 10^{12} \text{ km} = 63240 \text{ u.a.} = 0.3067 \text{ pc}$.

6.2 Determinazione delle parallasse diurne ed annue

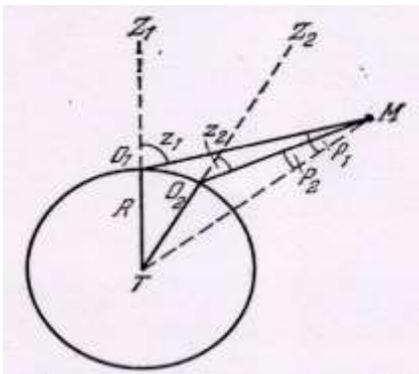


Fig. 6.3 – Determinazione della parallasse diurna

Supponiamo di osservare l'astro M da due diversi punti, O_1 e O_2 , sulla superficie terrestre, posti sullo stesso meridiano, e siano inoltre z_1 e z_2 le corrispondenti distanze zenitali dell'astro M al suo passaggio in meridiano. Siano inoltre φ_1 e φ_2 le latitudini geografiche di O_1 e O_2 , e p_1 e p_2 le parallasse diurne come definite in [6.3].

Consideriamo la figura 6.3: nel quadrilatero O_1TO_2M l'angolo O_1MO_2 è uguale a $(p_1 - p_2)$, l'angolo MO_2T è ottuso ed è uguale a $(180^\circ + z_2)$, l'angolo O_1TO_2 è uguale a $(\varphi_1 - \varphi_2)$, ed infine l'angolo TO_1M uguale a $(180^\circ - z_1)$. Poiché in un quadrilatero la somma degli angoli interni è uguale a 360° , avremo:

$$360^\circ = (p_1 - p_2) + (180^\circ + z_2) + (\varphi_1 - \varphi_2) + (180^\circ - z_1) \Rightarrow (p_1 - p_2) = (\varphi_2 - z_2) - (\varphi_1 - z_1) \quad [6.6]$$

poiché dalla [6.3] si ha: $p_1 = p \sin z_1$ e $p_2 = p \sin z_2$, la [6.6] diventa:

$$p (\sin z_1 - \sin z_2) = (\varphi_2 - z_2) - (\varphi_1 - z_1) \text{ da cui segue:}$$

$$p = [(\varphi_2 - z_2) - (\varphi_1 - z_1)] / (\sin z_1 - \sin z_2) \quad [6.7]$$

La parallasse orizzontale equatoriale sarà dunque data da:

$$p_0 = p (R_0 / R) \quad [6.8]$$

dove, nella [6.8], R è il raggio della Terra nel punto di osservazione e R_0 è il raggio equatoriale della Terra.

In modo analogo si ottiene la parallasse annua delle stelle, solo che in questo caso le osservazioni vengono effettuate in due punti diversi dell'orbita terrestre, a distanza di sei mesi. Le parallasse determinate sulla base dello spostamento parallattico dell'oggetto prendono il nome di parallasse trigonometriche.

Poiché si riesce a misurare con abbastanza precisione parallasse dell'ordine di $\pi = 0''.01$, con il metodo delle parallasse trigonometriche non si riesce a determinare la distanza di oggetti che distano più di 100 pc dalla Terra.

Per misurare la distanza di oggetti più distanti bisogna ricorrere a metodi indiretti (indicatori di distanza). Di questi metodi non si parlerà in questo corso, rimandando ad altri corsi o testi specialistici.

6.3 Determinazione dell'unità astronomica

Noto il raggio R della Terra e la parallasse p del Sole, la formula [6.5] permetterebbe di determinare immediatamente la distanza Terra – Sole, e quindi l'unità astronomica, con una precisione che dipende solo dalla precisione con cui è misurata la parallasse p del Sole. Le difficoltà nella misura, dovute essenzialmente alla difficoltà nell'osservazione diretta del Sole,

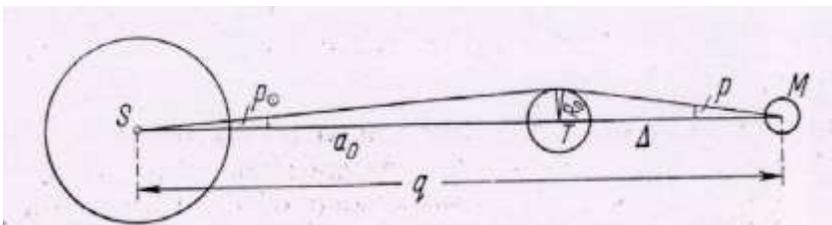


Fig. 6.4 – Determinazione della parallasse del Sole

inducono ad una misura indiretta della parallasse solare, nel modo seguente.

Sia M un pianeta al momento della sua opposizione perielica, cioè quando esso è

allineato con la Terra T ed il Sole S. Sia a_{\oplus} la distanza della Terra dal Sole, pari a 1 u.a. e $q = a(1 - e)$ la distanza del pianeta dal Sole, a il semiasse maggiore dell'orbita del pianeta, ed e l'eccentricità dell'orbita del pianeta. Se adesso indichiamo con p la parallasse orizzontale del pianeta, con Δ la distanza del pianeta dalla Terra, e con R_0 il raggio equatoriale della Terra, avremo:

$$R_0 = a_{\oplus} \sin p \quad [6.9]$$

ed anche:

$$R_0 = \Delta \sin p = (q - a_{\oplus}) \sin p = [a(1 - e) - a_{\oplus}] \sin p \quad [6.10]$$

Uguagliando la [6.9] con la [6.10] e confondendo il seno dell'angolo con l'angolo stesso, si ha:

$$a_{\oplus} p = [a(1 - e) - a_{\oplus}] p$$

da cui:

$$p = [a(1 - e) - a_{\oplus}] p / a_{\oplus} = [(a / a_{\oplus})(1 - e) - 1] p / a_{\oplus} \quad [6.11]$$

Nella [6.11] il rapporto (a / a_{\oplus}) viene calcolato con estrema precisione applicando la terza legge di Keplero al moto dei pianeti, mentre la parallasse p e l'eccentricità e del pianeta si determinano con precisione dalle osservazioni.

Applicando questo metodo al pianeta Marte, si è ricavata la parallasse del Sole:

$$p = 8''.794 \text{ da cui segue: } 1 \text{ u.a.} = 149.6 \times 10^6 \text{ km}$$

6.4 Determinazione della forma e delle dimensioni degli astri

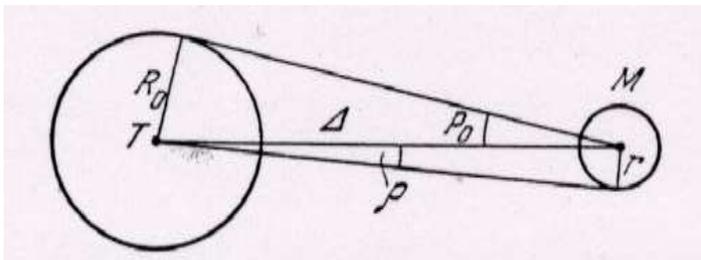


Fig. 6.5 – Determinazione delle dimensioni lineari degli astri

Si definisce *diametro angolare* di un astro l'angolo sotto cui dalla Terra si vede il disco dell'astro in questione. I diametri angolari dei corpi maggiori del sistema solare sono calcolati direttamente dalle osservazioni. Infatti, noti il diametro o il raggio angolare e la distanza dalla Terra se ne ricava facilmente il diametro o il raggio lineari tramite la seguente relazione:

$$r = (\sin p / \sin p_0) R_0 \quad [6.12]$$

Poiché ρ e ρ_0 sono angoli piccoli, nella [6.12] si può confondere il seno dell'angolo con l'angolo stesso, per cui si ha:

$$r = (\rho / \rho_0) R_0 \quad [6.13]$$

dove: ρ è il raggio angolare dell'astro M; Δ è la distanza tra i centri dell'astro e del pianeta; ρ_0 è la parallasse equatoriale orizzontale dell'astro; $r = \Delta \sin \rho$ il raggio equatoriale dell'astro; $R_0 = \Delta \sin \rho_0$ il raggio equatoriale della Terra.

La forma dei corpi celesti può essere determinata misurando i diversi diametri dei loro dischi poiché, se la forma è appiattita, uno dei due diametri sarà maggiore rispetto all'altro.

Le osservazioni dei diametri dei pianeti hanno evidenziato che quasi tutti i pianeti del sistema solare hanno una forma appiattita.

Esercizi

- 6.1** Il diametro della Luna è 0.27 volte il diametro della Terra. Trascurando la distanza della Luna dalla Terra, si determini la parallasse orizzontale del Sole per un osservatore situato sulla Luna.
- 6.2** Qual'è la parallasse orizzontale diurna di Marte quando il pianeta si trova ad una distanza $a = 0.378$ u.a. dalla Terra? Si ricordi che la parallasse orizzontale del Sole è $p = 8''.80$.
- 6.3** Qual'è la parallasse orizzontale diurna di Nettuno quando il pianeta si trova ad una distanza $a = 30$ u.a. dalla Terra? Qual'è la parallasse annua?
- 6.4** Al momento dell'opposizione, Giove si trova ad una distanza $d = 628.000.000$ km dalla Terra, ed il suo diametro angolare è $\rho = 47''.2$. Determinare il diametro lineare del pianeta.
- 6.5** Quando la Luna ha un raggio angolare $\rho = 16''.2$, la sua parallasse è $p = 59' 51''$. Determinare il raggio angolare quando la sua parallasse è $p = 3422''$.
- 6.6** Qual'è la parallasse della Luna ad una latitudine $\varphi = 35^\circ$?

Capitolo 7

Moti della Terra

7.1 Prove del moto della Terra intorno al proprio asse

La Terra è animata da almeno due moti importanti: quello di rotazione attorno al proprio asse e quello di rivoluzione attorno al Sole. Il moto di rotazione determina in cielo l'apparente moto d'insieme della sfera celeste di cui si è già parlato nei capitoli precedenti. Tuttavia, il moto diurno di rotazione della sfera celeste non rappresenta una prova della rotazione della Terra. Ed infatti, nell'antichità, si credeva che la Terra fosse immobile e che a ruotare attorno ad essa fossero le stelle ed i pianeti.

La rotazione della Terra attorno al proprio asse si manifesta attraverso numerosi fenomeni che avvengono sulla sua superficie. Per esempio, poiché la rotazione avviene da ovest verso est, gli alisei (venti permanenti nelle zone tropicali che spirano verso l'equatore) nell'emisfero boreale spirano da nord-est, mentre nell'emisfero australe da sud-est. La prova più significativa della rotazione della terra attorno al proprio asse resta comunque quella del pendolo di Foucault.

7.1.1 Il pendolo di Foucault

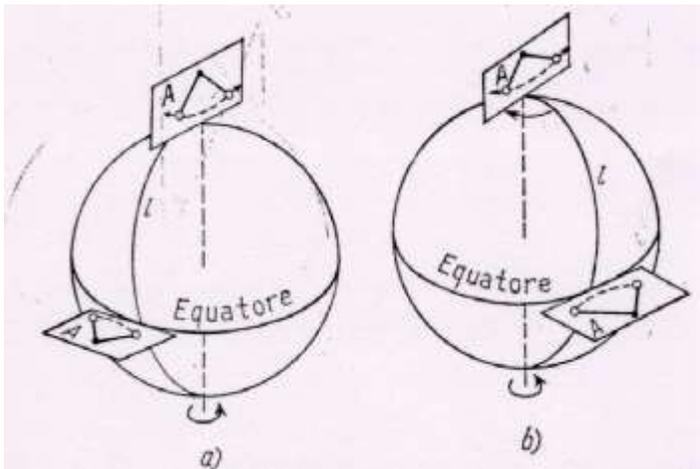


Fig. 7.1 – Pendolo di Foucault con il piano di oscillazione del pendolo (A)

Questa esperienza, realizzata nel 1851, si basa sulla proprietà del pendolo di conservare il proprio piano di oscillazione se è soggetto solo ed esclusivamente alla forza di gravità ed a nessun'altra forza. Supponiamo di porre un pendolo al Polo Nord e facciamo in modo, che ad un certo istante qualunque, esso oscilli nel piano del meridiano l dato (Fig. 5.2a). Un osservatore legato alla superficie terrestre, e che quindi non si accorge della sua rotazione, avrà l'impressione che il piano di oscillazione del pendolo si sposti continuamente, da est verso ovest,

nel verso orario (Fig. 5.2b). Ma poiché il piano di oscillazione del pendolo non può variare, ciò significa che è la Terra che ruota, in direzione ovest-est. In un giorno siderale, il piano di oscillazione del pendolo completerà una rotazione completa con la velocità angolare $\omega = 15^\circ$ per ora siderale, mentre al Polo Sud la rotazione avverrà in senso antiorario.

Se invece facciamo oscillare il pendolo nel piano dell'equatore, cioè perpendicolarmente ad un qualsiasi meridiano (Fig. 5.2), l'osservatore non noterà alcun spostamento del piano di oscillazione rispetto alla superficie terrestre.

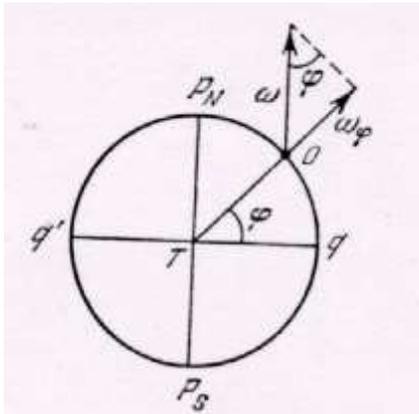


Fig. 7.2 – Velocità di rotazione del piano del pendolo di Foucault

Poniamo adesso il pendolo di Foucault alla latitudine φ : in questo caso, le sue oscillazioni si effettueranno nel piano normale alla verticale e passante per il luogo dato per cui, a causa della rotazione terrestre, l'osservatore avrà l'impressione che il piano di oscillazione del pendolo ruoti attorno alla verticale del luogo. La velocità angolare di questa rotazione sarà uguale alla velocità angolare che si avrebbe al Polo, scalata per il seno della latitudine del luogo, cioè:

$$\omega_\varphi = \omega_0 \sin \varphi = 15^\circ \sin \varphi$$

Per esempio, ad una latitudine di 45° il piano di oscillazione del pendolo ruota con una velocità di $10^\circ.6$

per ora siderale.

Foucault fece la sua esperienza al Pantheon di Parigi, utilizzando un pendolo lungo 67 metri con all'estremità una palla di bronzo dal peso di 28 chilogrammi.

7.1.2 Deviazione dei gravi in caduta libera

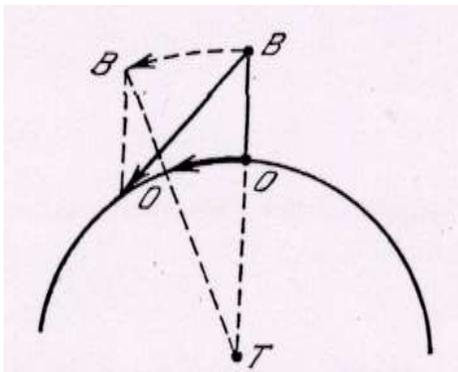


Fig. 7.3 – Scarto verso est dei gravi in caduta libera. Gli spostamenti lineari dei punti O' e B sono rappresentati dalle frecce arcuate. Il cammino del corpo è rappresentato da un segmento dell'ellisse.

Un'altra prova probante del moto di rotazione della Terra è costituita dalla deviazione verso est dei gravi in caduta libera, dovuta al fatto che più un punto è distante dalla superficie della Terra, maggiore è la velocità lineare con cui questo punto si sposta da ovest verso est per effetto della rotazione terrestre. Il valore di questa deviazione viene calcolato in meccanica mediante la seguente formula:

$$x = 0.022 h (h)^{1/2} \cos \varphi$$

dove h è l'altezza di caduta del grave; φ è la latitudine del luogo; x è la deviazione espressa in millimetri.

Infine, al giorno d'oggi la rotazione della Terra è osservabile direttamente dallo spazio.

7.2 Prove della rotazione della Terra intorno al Sole

7.2.1 La parallasse annua delle stelle

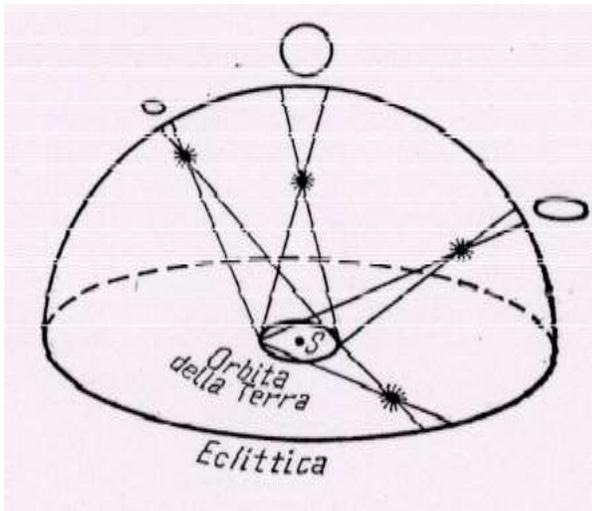


Fig. 7.4 – Ellissi parallattiche

dunque una prova del moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole.

Per effetto del moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole, la visuale condotta da un osservatore terrestre ad una stella sembrerà descrivere in cielo, nel corso di un anno, un'ellisse. Questa ellisse, detta parallattica, sarà tanto più appiattita quanto più la stella è vicina al piano dell'eclittica, e tanto più piccola quanto più la stella è lontana dalla Terra. Per una stella situata al Polo dell'eclittica l'ellisse si trasforma in un cerchio, mentre per una stella situata sull'eclittica l'ellisse si trasforma in un arco di cerchio massimo che, ad un osservatore terrestre, apparirà come un segmento di retta (Fig. 7.4). I semiassi maggiori delle ellissi parallattiche sono uguali alle parallasse annue delle stelle (Capitolo 6).

L'esistenza delle parallasse annue delle stelle è

7.2.2 L'aberrazione annua delle stelle

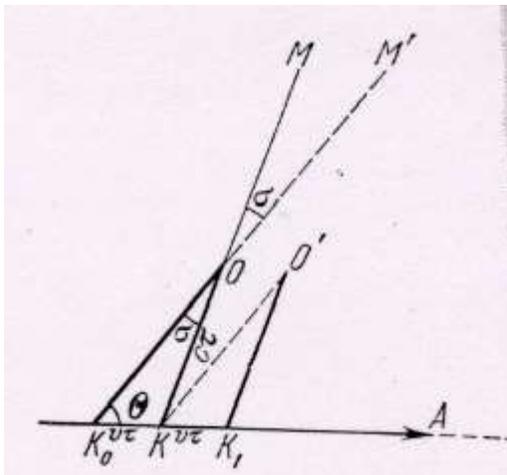


Fig. 7.5 – Influenza dell'aberrazione della luce sulla posizione apparente degli astri

La seconda prova che conferma che la Terra ruota intorno al Sole è costituita dal fenomeno dell'aberrazione annua delle stelle, scoperto nel 1728 dall'astronomo inglese Bradley quando determinò la parallasse annua della stella γ *Draconis*.

Con il termine di aberrazione si è soliti indicare l'effetto ottico consistente nel vedere un astro in una posizione diversa da quella reale in cui lo vedrebbe un osservatore fisso nello spazio.

Si dà anche questo nome all'angolo tra la direzione osservata (apparente) e quella vera dell'astro. La differenza tra queste due direzioni è il risultato della combinazione delle velocità costante della luce e dell'osservatore, solidale con la superficie terrestre.

Sia K la posizione di un osservatore e O quella dell'obiettivo dello strumento di osservazione della stella M . Nel tempo τ impiegato dalla luce emessa

dalla stella a giungere da O a K , l'osservatore si sarà spostato da K a K' del tratto $v\tau$, dove v è la velocità di rotazione della Terra, per cui la stella non sarà vista in M ma in M' . Per osservare la stella al centro dell'obiettivo sarà dunque necessario puntare non verso la direzione vera OM ma verso la direzione K_0O . L'angolo ρ formato dalla direzione vera K_0M e quella apparente K_0M' dell'astro viene detto *angolo di aberrazione* dell'astro. Applicando il teorema dei seni al triangolo $K_0O M$ si ha:

$$(v\tau) / \sin \rho = (c\tau) / \sin \theta$$

e poiché ρ è molto piccolo, si può scrivere:

$$\rho = 206265 (vc) \sin \theta$$

dove θ è l'angolo formato dalla direzione apparente dell'astro e dalla direzione della velocità dell'osservatore. Il punto verso cui è orientata tale direzione prende il nome di *apice del moto* dell'osservatore.

Poiché un osservatore solidale con la superficie terrestre partecipa sia alla rotazione diurna intorno all'asse, che alla rivoluzione annua intorno al Sole, avremo due diverse aberrazioni. L'aberrazione diurna, che è il risultato della composizione tra la velocità della luce c e la velocità di rotazione diurna della Terra, e l'aberrazione annua, che è il risultato della composizione tra la velocità della luce con la velocità di rivoluzione della Terra intorno al Sole.

Poiché la Terra ruota intorno al Sole con una velocità media $v = 29.78$ km/sec, dalla formula precedente si ottiene: $\rho \approx 20''.50 \sin \theta$.

La quantità $K_0 = 20''.50$ è detta *costante di aberrazione annua*.

Naturalmente, anche il moto di rotazione della Terra intorno al proprio asse produce un effetto di aberrazione, ma di entità assai modesto e trascurabile rispetto all'aberrazione annua, in quanto la costante di aberrazione vale, in media, $K' = 0''.32$.

Poiché l'apice del moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole si trova nel piano dell'eclittica e si sposta di 360° in un anno, la posizione apparente di una stella situata al Polo dell'eclittica ($\theta = \beta = 90^\circ$) descrive in anno un piccolo cerchio di raggio $r = 20''.50$ intorno alla sua posizione vera. Le posizioni apparenti delle altre stelle descriveranno invece delle ellissi con semiassi pari, rispettivamente, ad $a = 2022.45$ e $b = 20''.45 \sin \beta$, con β uguale alla latitudine eclittica della stella. Ne segue che per una stella situata sul piano dell'eclittica ($\beta = 0^\circ$), l'ellisse diventa un segmento d'arco pari a $d = 20''.50 \times 2 = 41''.00$.

L'esistenza dell'aberrazione annua delle stelle è dunque una prova della rotazione della Terra intorno al Sole.

La differenza tra parallasse ed aberrazione consiste nel fatto che la prima dipende dalla distanza della stella, mentre la seconda dipende solo dalla velocità media di rotazione della Terra intorno al Sole, per cui il semiasse maggiore dell'ellisse di aberrazione è sempre lo stesso e pari a $20''.50$. Inoltre, mentre la parallasse di una stella avviene nel verso della posizione apparente del Sole, l'aberrazione non è diretta verso il Sole, ma verso un punto dell'eclittica che si trova sempre a 90° più ad ovest del Sole.

7.3 Successione delle stagioni

Le osservazioni mostrano che i Poli celesti non cambiano la loro posizione fra le stelle nel corso dell'anno, per cui deduciamo che l'asse di rotazione della Terra resta sempre parallelo a se stesso durante il moto di rivoluzione intorno al Sole. Inoltre, la variazione della

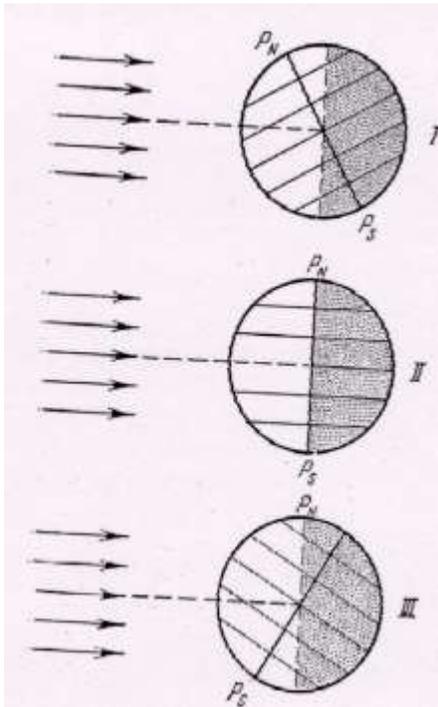


Fig. 7.6 – Posizione della Terra rispetto ai raggi solari nelle diverse stagioni dell'anno

declinazione del Sole nel corso dell'anno da $\delta = 23^\circ 27'$ (al solstizio d'estate) a $\delta = -23^\circ 27'$ (al solstizio d'inverno) testimonia il fatto che l'asse di rotazione terrestre forma un angolo $i = 66^\circ 33' = (90^\circ - 23^\circ 27')$ con il piano della sua orbita.

Questi tre fattori, e cioè:

- il moto della Terra intorno al Sole
- l'inclinazione dell'asse terrestre rispetto al piano orbitale
- la permanenza di tale inclinazione

sono la causa della regolare successione delle stagioni.

Nella figura a lato sono rappresentate le posizioni della Terra e del suo asse di rotazione rispetto ai raggi solari nelle diverse stagioni, e quindi l'angolo fra la direzione dei raggi del Sole e la normale ad un'area orizzontale della superficie terrestre. In base alle leggi della fisica, il flusso luminoso ϕ incidente su un'area è proporzionale al coseno dell'angolo compreso fra la direzione dei raggi e la normale alla superficie, e cioè: $\phi = \phi_0 \cos i$

Se adesso indicando con ε l'inclinazione dell'eclittica sull'equatore celeste e con φ la latitudine geografica del

luogo, avremo:

- $i_1 = \varphi - \varepsilon$ nella posizione I;
- $i_2 = \varphi$ nella posizione II;
- $i_3 = \varphi + \varepsilon$ nella posizione III.

Sarà dunque:

- 1) al solstizio d'estate: $\phi_1 = \phi_0 \cos(\varphi - \varepsilon)$
- 2) agli equinozi: $\phi_1 = \phi_0 \cos \varphi$
- 3) al solstizio d'inverno: $\phi_3 = \phi_0 \cos(\varphi + \varepsilon)$

Questo significa che nel corso dell'anno la quantità di energia irradiante (calore) ricevuta da una superficie terrestre sarà diversa a seconda della latitudine e delle stagioni.

Per esempio, alla latitudine di Napoli ($\varphi = 40^\circ 51' .772$), ϕ_1 è 2.2 volte più grande di ϕ_3 , e ϕ_2 è 1.3 volte più piccolo di ϕ_1 . La conseguenza di ciò è che in primavera ed estate (dal 21 marzo al 23 settembre) l'emisfero Nord è più irradiato di quanto lo sia in autunno ed inverno (dal 23 settembre al 21 marzo). L'inverso avviene nell'emisfero Sud.

Inoltre, poiché il flusso di energia irradiante ricevuto dalla Terra è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal Sole e poiché l'orbita della Terra attorno al Sole è lievemente ellittica, il calore ricevuto dalla Terra quando si trova all'afelio è circa 1.07 volte quello ricevuto quando si trova al perielio. Poiché nell'emisfero Nord è inverno quando la Terra è al perielio, ed estate quando si trova all'afelio, questa lieve differenza, pari al 7% del calore ricevuto dal Sole, spiega perché nell'emisfero Nord l'inverno è un po' meno freddo dell'inverno australe e l'estate è un po' più fresca dell'estate australe.

7.4 Conseguenze della rotazione terrestre

7.4.1 Precessione degli equinozi

Come abbiamo già visto nel capitolo 2 dedicato ai sistemi di coordinate, se il punto γ fosse un punto fisso sulla sfera celeste, le coordinate di una stella nel sistema equatoriale ed in quello eclittico sarebbero costanti nel tempo. In realtà non è così. Già nel II sec. a.C., l'astronomo greco Ipparco, compilando un catalogo delle stelle più brillanti, si era accorto che le posizioni in cielo non coincidevano con quelle misurate circa 50 anni prima dagli astronomi Aristillo e Timochrais. Il confronto dimostrava che tutte le longitudini erano aumentate, come se il punto γ si fosse spostato sull'eclittica in senso retrogrado, andando cioè incontro al Sole che si muove invece sull'eclittica in senso diretto, facendo così precedere l'ingresso del Sole nei 12 segni dello zodiaco. Per questo motivo, il fenomeno venne chiamato da Ipparco *precessione degli equinozi*; tale fenomeno è spiegato facilmente dalla meccanica celeste nel modo seguente.

Se la Terra fosse una sfera omogenea e perfettamente solida, in base alle leggi della meccanica la direzione del suo asse di rotazione ed il periodo della sua rotazione sarebbero costanti in qualsiasi intervallo di tempo.

Abbiamo invece visto nei paragrafi precedenti che la Terra è uno sferoide e sappiamo dalla meccanica che l'attrazione di uno sferoide da parte di un corpo qualunque L è abbastanza complessa (Fig. 7.7). Essa infatti risulta essere composta dall'attrazione F , di una sfera isolata all'interno dello sferoide, in direzione TL ; dall'attrazione F_1 della metà del rigonfiamento più

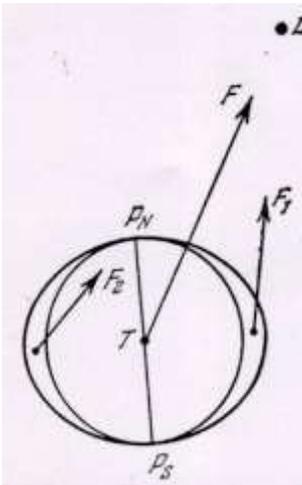


Fig. 7.7 – Attrazione di uno sferoide da parte di un corpo esterno

vicino a *L*: dall'attrazione F_2 dell'altra metà del rigonfiamento, più lontano da *L*. Poiché $F_1 > F_2$, l'attrazione di *L* tenderà a far ruotare l'asse dello sferoide P_nP_s in senso antiorario, in modo che il piano equatoriale dello sferoide si porti lungo la direzione TL . La conseguenza di ciò sarà una rotazione dell'asse P_nP_s , che tenderà a disporsi perpendicolarmente al piano dell'equatore. Per effetto dell'attrazione luni-solare, l'asse di rotazione della Terra effettua nello spazio un moto complesso.

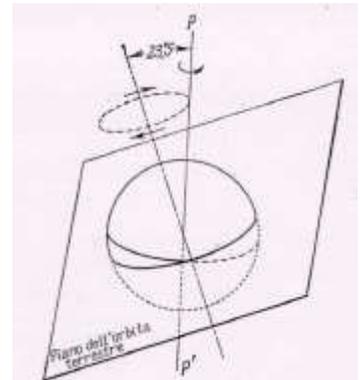


Fig. 7.8 – Precessione dell'asse terrestre

Innanzitutto, esso descrive lentamente un cono intorno alla normale al piano dell'eclittica, rimanendo sempre inclinato di un angolo di circa $66^{\circ}33'$ rispetto a tale piano. Questo moto dell'asse terrestre prende il nome di precessione, ed ha un periodo di 25788 anni. Per effetto del moto di precessione, l'asse terrestre descrive, in senso orario, due cerchi di raggio pari a circa $23^{\circ}27'$ attorno ai poli dell'eclittica.

La precessione degli equinozi è dunque dovuta ad un moto conico dell'asse di rotazione della Terra attorno alla normale al piano dell'eclittica, moto causato dall'attrazione luni-solare sul rigonfiamento equatoriale terrestre.

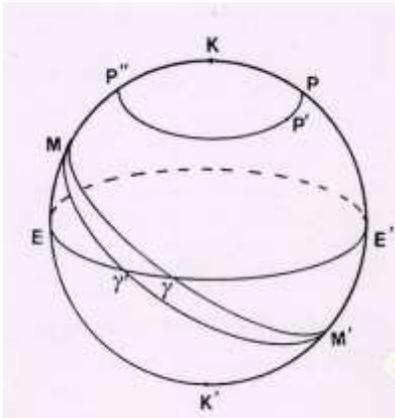


Fig. 7.9 - Precessione degli equinozi

La conseguenza di questo moto è che come *P* si sposta da *P* a *P'*, anche l'equatore si sposta, ruotando attorno all'asse dell'eclittica, con la conseguenza che il punto γ si sposta da γ a γ' (Fig. 7.9). Tale spostamento è pari a $50''.26$ per anno, in senso retrogrado e gli effetti, anche se trascurabili per brevi intervalli di tempo (ma non lo sono affatto se si fa astronomia di posizione), diventano ingenti in capo a molti anni o secoli. Attualmente l'asse di rotazione della Terra punta quasi verso la stella polare, da cui dista circa 58° . Verso l'anno 2600 la polare disterà solo $30'$ dal polo vero, mentre distava ben 12° ai tempi delle prime osservazioni astronomiche, alcuni millenni fa. Tra circa 12000 anni il Polo avrà ruotato, rispetto alla posizione

attuale, di circa 170° , e non sarà molto distante da Vega, la stella più brillante dell'emisfero boreale, che quindi diventerà la nuova stella polare, almeno per un certo tempo (Fig. 7.10).

Negli oltre duemila anni trascorsi dall'epoca di Ipparco i segni zodiacali, definiti dalle loro longitudini e legati quindi alla posizione del punto γ , sono usciti dalle rispettive costellazioni di più di 27° . Così, attualmente, il segno dell'Ariete è occupato dalla costellazione dei Pesci,

quello del Toro è occupato dalla costellazione dell'Ariete, quello dei Gemelli dalla costellazione del Toro, e così via.

Un'ulteriore conseguenza del fenomeno della precessione è che, poiché il Polo del mondo si sposta tra le stelle, col passare dei secoli e dei millenni variano le costellazioni visibili in un determinato luogo. Per esempio, nell'antichità, la Croce del Sud era ben visibile nel bacino del Mediterraneo, mentre adesso indica, con molta approssimazione, il Polo sud celeste.

Nella figura che segue è indicato il percorso tra le stelle del Polo Boreale in 25788 anni.

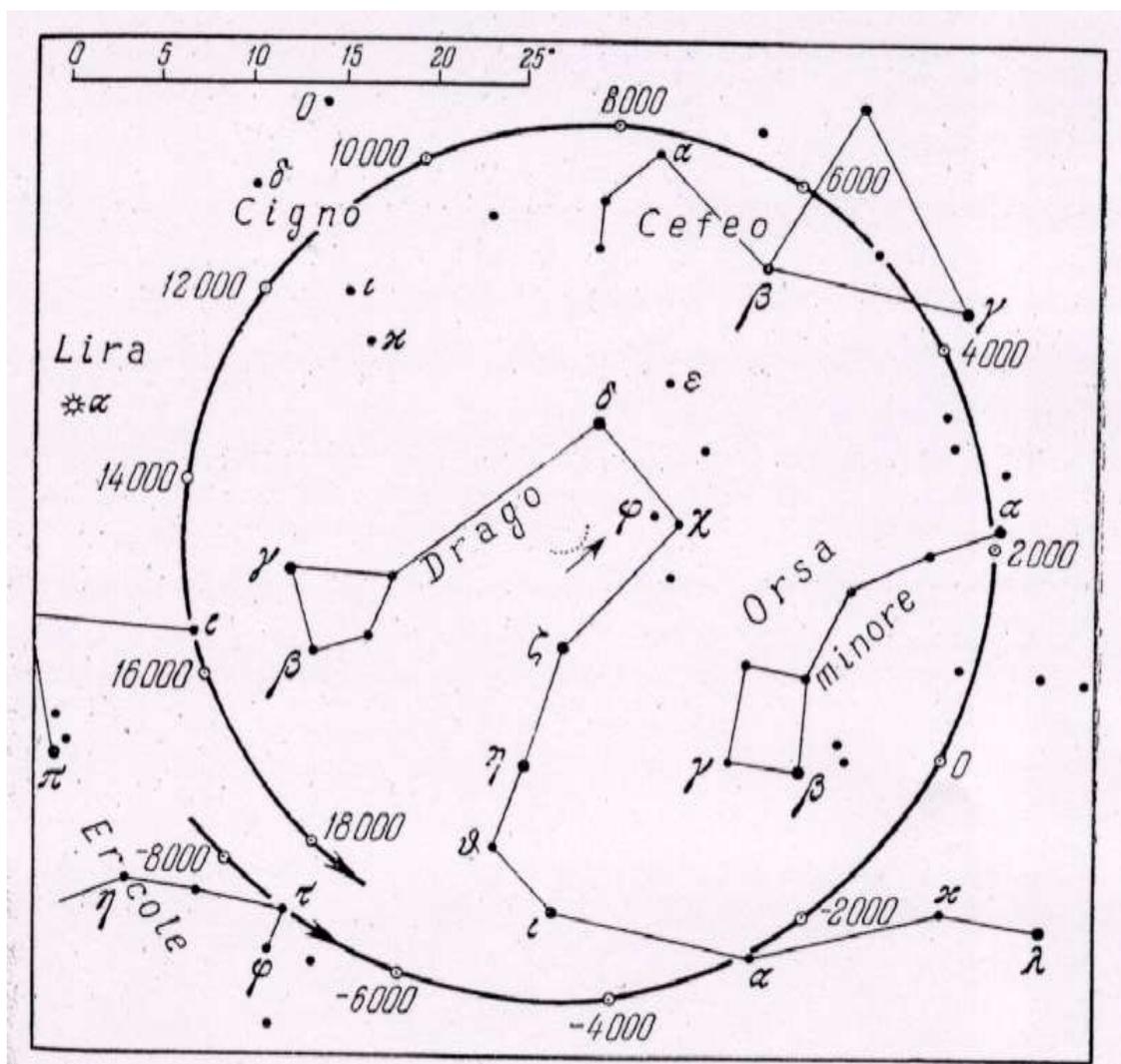


Fig. 7.10 – Precessione del Polo celeste Nord. I punti al centro mostrano la posizione del Polo dell'eclittica

7.4.2 Precessione planetaria e precessione in obliquità

Oltre alla precessione luni-solare dovuta all'effetto combinato dell'attrazione del Sole e della Luna sul rigonfiamento equatoriale, è presente un'altra precessione dovuta alle perturbazioni planetarie: essa prende il nome di *precessione planetaria*.

La precessione planetaria avviene nel verso opposto di quella luni-solare e l'entità è molto piccola, appena $0''.125$ (pari a $1/8$ di secondo d'arco) per anno.

Inoltre, sempre a causa dell'azione dei pianeti, anche l'obliquità dell'eclittica, ossia l'angolo formato dall'equatore celeste col piano dell'eclittica, varia nel tempo di circa $0''.5$ per anno. Tale variazione non è però progressiva, ed il tutto si riduce ad una oscillazione periodica attorno alla posizione media dell'asse di rotazione terrestre.

7.4.3 Nutazione

L'asse terrestre effettua molte altre piccole oscillazioni intorno alla sua posizione media; tale oscillazioni prendono il nome di *nutazioni*.

Queste oscillazioni sono dovute alla costante variazione dell'intensità e della direzione delle forze di precessione luni-solare, che si annullano quando il Sole e la Luna si trovano nel piano dell'equatore e diventano massime quando se ne allontanano. La più importante di queste oscillazioni è quella con periodo pari a circa 18.6 anni, pari quindi al periodo di rivoluzione dei nodi lunari (si veda il capitolo 7), il cui effetto è la retrogradazione dei nodi lunari.

Questo moto dell'asse terrestre fa descrivere ad entrambi i Poli delle ellissi con asse maggiore e minore pari, rispettivamente, a $18''.42$ e $13''.72$.

L'effetto combinato di precessione luni-solare e nutazione si manifesta con delle linee ondulate complesse descritte dai Poli.

Degli effetti della precessione e della nutazione sulle coordinate degli astri è facile tener conto, con tutta la precisione necessaria, attraverso formule rigorose e con l'ausilio di apposite tavole numeriche.

Esercizi

- 7.1** Se l'asse di rotazione della Terra fosse perpendicolare al piano dell'eclittica, quali effetti si avrebbero sulla durata del giorno e della notte nei vari periodi dell'anno? Come si rifletterebbe ciò sulle stagioni?
- 7.2** Quale dovrebbe essere l'inclinazione dell'asse di rotazione della terra rispetto al piano dell'orbita affinché il circolo polare antartico coincida con il Tropico del Cancro?

- 7.3** A quale latitudine è massima la deviazione verso Est di un grave che cade da una data altezza?
- 7.4** Calcolare la deviazione verso Est di un grave che cade da una torre di 100 metri, all'equatore.
- 7.5** Calcolare l'angolo di rotazione, per ora, del pendolo di Foucault alle latitudini: $\varphi_1 = 30^\circ$, $\varphi_2 = 60^\circ$, $\varphi_3 = 45^\circ$, $\varphi_4 = 75^\circ$, $\varphi_5 = 89^\circ$, $\varphi_6 = 90^\circ$, $\varphi_7 = 0^\circ$, ed alla latitudine di Napoli ($\varphi = 30^\circ 51' 46''.3$).
- 7.6** Confrontare la quantità di calore ricevuto per unità di superficie a Napoli ($\varphi = 30^\circ 51' 46''.3$), nei giorni del solstizio d'estate e d'inverno con quella ricevuta nei giorni in cui il Sole passa al perielio (in inverno) ed all'afelio (in estate). L'eccentricità dell'orbita della Terra è $e = 0.017$. Di quanto è maggiore l'influenza dell'inclinazione dei raggi del sole alla latitudine data rispetto alla variazione della distanza della Terra dal Sole?
- 7.7** Determinare l'eccentricità dell'orbita della Terra mediante osservazioni, quando il diametro massimo visibile del Sole è $a_1 = 32' 36''.4$ ed il diametro minimo è $a_2 = 31' 31''.8$.

Capitolo 8

Moti della Luna

8.1 Orbita della Luna e sue perturbazioni

Sin dall'antichità era stato osservato che tra le cosiddette “stelle fisse”, che partecipavano alla rotazione diurna della sfera celeste mantenendo costanti, in prima approssimazione, le loro posizioni relative, c'erano alcuni corpi “mobili”, quali il Sole, la Luna ed i pianeti.

Del moto apparente del Sole sulla sfera celeste, e delle sue conseguenze, si è già parlato nei capitoli precedenti; del moto dei pianeti si parlerà nel capitolo successivo; questo capitolo sarà invece dedicato ai moti della Luna, ed alle loro conseguenze.

La Luna ruota attorno alla Terra, percorrendo un'orbita ellittica con eccentricità $e = 0.055$ (1/18) e semiasse maggiore $a = 384400$ km.. Al perigeo, la distanza della Luna dalla Terra è di circa 21000 km inferiore della distanza media, mentre all'apogeo è maggiore di altrettanti chilometri.

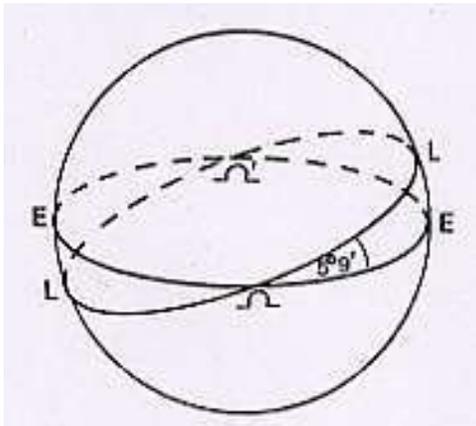


Fig 8.1 – Piano dell'orbita della Luna rispetto al piano dell'eclittica

Il piano dell'orbita della Luna è inclinato di $5^{\circ} 9'$ rispetto al piano dell'eclittica, che è intersecato nei due punti Ω e Ω' (Fig. 8.1): la congiungente questi due punti prende il nome di linea dei nodi. Il moto della Luna attorno alla Terra avviene da Ovest verso Est, così come si verifica per la Terra attorno al Sole; il relativo periodo di rivoluzione, cioè il tempo necessario alla Luna per ritornare nella posizione iniziale dell'orbita rispetto alle stelle, e percorrere quindi un arco di 360° , è pari a $27^{\text{d}}.32166$ ($27^{\text{d}} 7^{\text{h}} 43^{\text{m}} 12^{\text{s}}$), e prende il nome di *mese siderale*. Lo spostamento quotidiano della Luna sulla sua orbita è dunque pari a circa 13° .

Lo studio del moto della Luna è molto complesso, soprattutto per effetto della sua vicinanza con la

Terra che ne perturba continuamente i movimenti. Per esempio, l'inclinazione media del piano dell'orbita, pari a $5^{\circ} 9'$, varia tra un valore minimo di $4^{\circ} 58'$ ed un valore massimo di $5^{\circ} 20'$, con un periodo che è leggermente inferiore ai sei mesi.

Le perturbazioni secolari influiscono sulla longitudine del perigeo dell'orbita lunare e sulla longitudine del nodo ascendente. In conseguenza di ciò, il perigeo dell'orbita lunare si sposta verso est, cioè nella stessa direzione del moto della Luna, ed effettua un giro completo dell'eclittica in circa 9 anni (anno anomalistico, pari a 3232 giorni medi). I nodi lunari si spostano invece sull'eclittica in senso opposto rispetto al moto della Luna, cioè verso ovest,

compiendo un giro completo dell'eclittica in 18 anni e 7 mesi (6793 giorni medi). Il fenomeno è noto col nome di *retrogradazione dei nodi*, ed è dovuto, essenzialmente, allo schiacciamento dei poli terrestri ed al rigonfiamento equatoriale che producono, per l'appunto, una perturbazione del moto lunare ben valutabile. Ogni anno si ha dunque una retrogradazione dei nodi pari a circa $360^\circ/18.6 \approx 19^\circ$, che corrisponde ad una retrogradazione mensile di circa $1^\circ.6$.

L'intervallo di tempo impiegato dalla Luna per passare due volte di seguito per lo stesso nodo (ascendente o discendente), prende il nome di mese draconico¹.

Il moto dei nodi influisce anche sulla visibilità della Luna; per esempio, fissato il luogo di osservazione, le posizioni della Luna rispetto all'orizzonte variano di anno in anno. Per esempio, quando il nodo ascendente coincide con il punto vernale, la massima declinazione lunare è $\delta_L = 23^\circ.5 + 5^\circ.1 = 28^\circ.6$ e la minima è $\delta_L = -28^\circ.6$, per cui la declinazione, nel corso dell'anno, oscilla di $57^\circ.2$. Se invece è il nodo discendente a coincidere con il punto vernale, la massima declinazione lunare è $\delta_L = 23^\circ.5 - 5^\circ.1 = 18^\circ.4$ e la minima è $\delta_L = -18^\circ.4$, con una oscillazione di $36^\circ.8$.

8.2 Moto apparente e fasi lunari

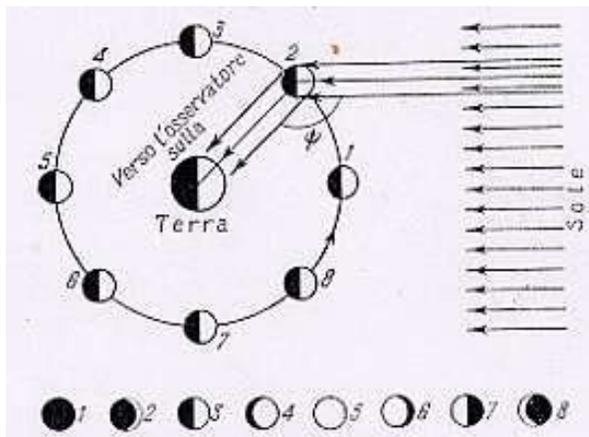


Fig. 8.2 – Fasi della Luna

Il moto apparente della Luna sulla sfera celeste è la conseguenza del moto di rotazione della Luna attorno alla Terra, che avviene con moto diretto, da ovest verso est. Questo moto apparente è accompagnato da una continua variazione dell'aspetto esteriore della Luna: tale fenomeno prende il nome di *fase lunare*² e, come conseguenza, la Luna è alcuni giorni completamente invisibile, altri giorni ha l'aspetto di una falce, di un semicerchio, o di un disco completo. Le fasi lunari sono una conseguenza delle diverse posizioni occupate dalla Luna, rispetto al Sole, nel

suo moto di rotazione attorno alla Terra (Fig. 8.2); sulla base di ciò, possiamo distinguere quattro fasi principali, che si trasformano l'una nell'altra: Luna nuova, primo quarto, Luna piena, ed ultimo quarto. Inoltre, poiché il Sole è lontano, quando i suoi raggi raggiungono la Luna possono considerarsi paralleli per cui, metà della sfera lunare viene illuminata, mentre l'altra metà resta in ombra.

¹ I nodi lunari erano infatti chiamati dagli antichi caput et cauda Draconis, da cui il nome di draconico al mese dei nodi.

² La fase Φ è uguale al rapporto tra la larghezza massima della parte illuminata d' del disco lunare ed il suo diametro d , cioè: $\Phi = d'/d$

Durante la fase di Luna nuova, la Luna si muove tra il Sole e la Terra: si dice allora che la Luna è in congiunzione col Sole, ossia ha la sua stessa longitudine, per cui è invisibile perché rivolge verso di noi l'emisfero in ombra. Dopo due giorni, la Luna appare sotto forma di una falce sottile, ad ovest al tramonto, in direzione del Sole. La convessità è rivolta verso il Sole e cresce col trascorrere dei giorni, fino a diventare un semicerchio dopo 7 giorni, quando si arriva alla fase di primo quarto. In questa posizione, la Luna si trova in quadratura orientale con il Sole, cioè a 90° di longitudine est rispetto al Sole, e mostra alla metà del suo emisfero illuminato e metà di quello in ombra. Durante questa fase la Luna è visibile solo nella prima metà della notte, dopodiché tramonta.

La parte illuminata dell'emisfero lunare continua a crescere fino a diventare un disco dopo 7 giorni dal primo quarto: siamo nella fase di Luna piena, quando la Luna si trova in opposizione col Sole, cioè con una longitudine di 180° rispetto a quella del Sole. La Luna mostra per intero l'emisfero illuminato e, trovandosi in direzione opposta rispetto al Sole, è visibile per tutta la notte, sorge cioè quando tramonta il Sole e tramonta al sorgere del Sole.

Dopo la fase di Luna piena, la Luna comincia a decrescere, con la convessità rivolta verso levante, e dopo 7 giorni assume di nuovo la forma di un semicerchio: è l'ultimo quarto, con la Luna in quadratura occidentale rispetto al Sole, cioè la sua longitudine è di 90° ovest. Durante questa fase è visibile solo metà dell'emisfero illuminato e metà di quello in ombra, e la Luna è visibile solo nella seconda metà della notte, da mezzanotte all'alba.

Successivamente, l'ombra guadagna sempre più spazio sul disco lunare e la falce diventa sempre più piccola finché si ritorna nella posizione di congiunzione col Sole, e quindi nella fase di Luna nuova.

Le fasi lunari si contano a partire dal novilunio; inoltre, le fasi di novilunio e di plenilunio prendono il nome di *sizigie*.

8.3 Periodi di rivoluzione della Luna

L'intervallo di tempo che intercorre tra due noviluni successivi prende il nome di *mese sinodico* o *lunazione*. È facile constatare che il mese sinodico è più lungo del mese siderale. Nella figura 8.3, la posizione 1 corrisponde alle posizioni relative della Luna, della Terra e del Sole al momento del plenilunio. Dopo una rivoluzione siderale della Luna, pari a 27.32 giorni, la Luna sarà ritornata alla sua posizione iniziale rispetto alle stelle, ma poiché la Terra nel frattempo si è spostata nella posizione 2, la fase lunare non sarà ancora quella di Luna piena, che si verificherà quando la Terra si sarà portata nella posizione 3. Dalla figura 8.3 è evidente che lo spostamento della Terra dalla posizione 2 alla posizione 3 è uguale ad una rotazione della Luna di un angolo pari all'arco percorso dalla Terra in un mese siderale lunare. Poiché la Terra si sposta in un giorno di un arco pari a $360^\circ/365.25 \approx 0^\circ.98$, l'arco percorso in un mese siderale lunare sarà: $0^\circ.98 \times 27^{\text{d}}.32 \approx 27^\circ$. La durata del mese sinodico sarà dunque maggiore rispetto al mese siderale del tempo necessario alla Luna a compiere una rotazione di 27° . Indichiamo adesso con A l'anno siderale, con M il mese siderale e con L il mese sinodico

espressi in giorni solari medi. La velocità angolare diurna della Terra sarà $360^\circ/A$, mentre la velocità angolare della Luna sarà $360^\circ/M$ per cui, l'angolo descritto dalla Terra e dalla Luna in un mese sinodico sarà, rispettivamente, $(360^\circ/A)L$ e $(360^\circ/M)L$. Poiché il secondo supera il primo di un angolo giro, avremo:

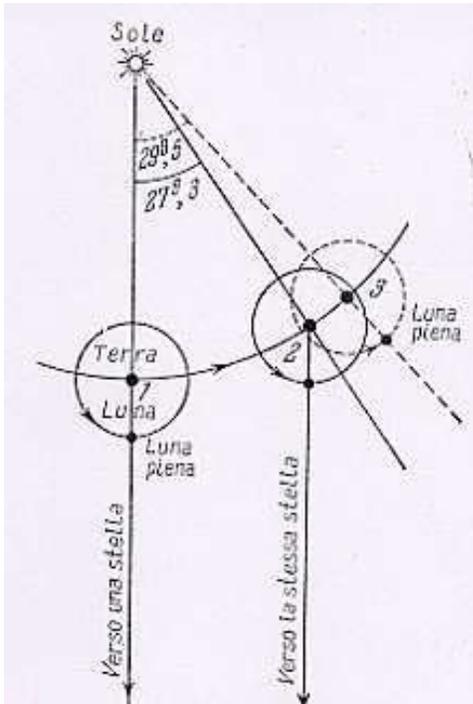


Fig. 8.3 – Durata del mese siderale e del mese sinodico

$$(360^\circ/M)L = (360^\circ/A)L + 360^\circ \Rightarrow 1/M = 1/A + 1/L \Rightarrow L = [(AM) / (A - M)]$$

Si ricava dunque la durata del mese sinodico, pari a $L = 29^d.53059 = 29^d 12^h 44^m 3^s$ di tempo solare medio.

Oltre al mese siderale ed al mese sinodico, esistono per la Luna altri tre periodi caratteristici: il *mese anomalistico*, pari all'intervallo di tempo tra due passaggi consecutivi della Luna al perigeo e corrispondente a 27.55 giorni solari medi; il *mese draconico*, corrispondente a due passaggi consecutivi allo stesso nodo dell'orbita e pari a 27.21 giorni solari medi; il *mese tropico*, corrispondente all'intervallo di tempo necessario affinché la longitudine della Luna aumenti di 360° . A causa delle precessione, il mese tropico dura 7 secondi in meno rispetto al mese siderale. Il mese draconico è invece più breve del mese siderale perché i nodi dell'orbita lunare si spostano in senso opposto rispetto al moto della Luna. Il mese anomalistico è invece più lungo di quello siderale in quanto il perigeo dell'orbita lunare si sposta nello stesso verso del moto della Luna.

8.4 Moti lunari

Per molti aspetti, la Terra e la Luna possono essere considerati come un pianeta doppio. Infatti, al contrario di quanto avviene per i satelliti degli altri pianeti, le dimensioni e la massa della Luna non sono affatto trascurabili rispetto a quelle della Terra. Il raggio medio della Terra è pari a circa 6371 km, mentre quello della Luna è di 1738 km, cioè appena 1/3.67 il raggio terrestre. Anche le masse sono confrontabili, essendo quella della Luna pari a 1/81.3 la massa della Terra. Entrambi i corpi si muovono attorno al comune baricentro ed è questo, e non la Terra, a ruotare attorno al Sole. La posizione del baricentro del sistema Terra-Luna, note le masse e la distanza tra i due corpi pari a 384401 km, si calcola facilmente e risulta essere a 4670 km dal centro della terra, dunque a circa 1700 km dalla superficie terrestre.

La teoria del moto lunare è molto complessa, per cui ci limiteremo a trattare solo alcuni dei movimenti apparenti (librazioni), rimandando ai testi specialistici per eventuali approfondimenti.

Oltre ai moti già visti di rivoluzione e di retrogradazione dei nodi che danno luogo ai mesi siderali, sinodico e draconico, la Luna è soggetta ad un moto di rotazione attorno al proprio asse che è *sincrono* col moto di rivoluzione attorno alla Terra. La conseguenza di questa rotazione che avviene con lo stesso periodo di rivoluzione è che, in prima approssimazione, la Luna rivolge verso la Terra sempre lo stesso emisfero.

Se però si fanno osservazioni più precise, ci si accorge che non è proprio così, perché la Luna è soggetta ad altri moti apparenti, detti di *librazione*. Per effetto della librazione un osservatore terrestre riesce a vedere il 59% della superficie lunare, anziché il 50%, mentre il restante 41 resta costantemente invisibile. Viceversa, un osservatore posto sulla Luna vedrebbe la terra come un disco dal diametro pari a $1^{\circ}54'$, ossia 3.67 volte più grande di quanto noi vediamo la Luna.

8.4.1 Librazione in longitudine

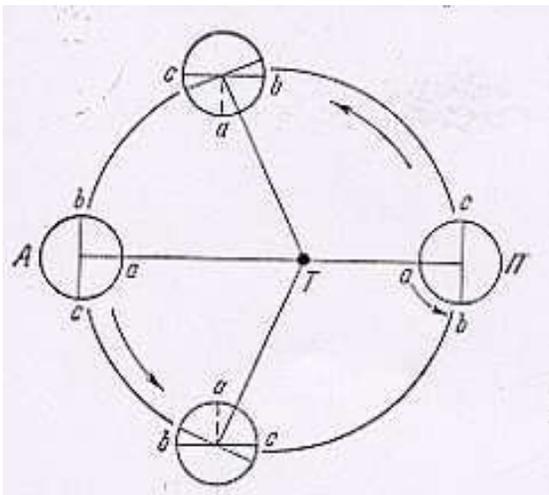


Fig. 8.4 – Librazione in longitudine della Luna

La librazione in longitudine è dovuta al fatto che mentre la rotazione della Luna attorno al proprio asse è uniforme, almeno in prima approssimazione, il suo moto orbitale attorno alla Terra è più rapido al perigeo che all'apogeo, per la seconda legge di Keplero. Pertanto, un quarto di mese dopo il passaggio al perigeo Π (Fig. 8.4), la Luna avrà percorso più di un quarto della sua orbita, mentre la rotazione del suo asse sarà stata di 90° esatti. Come conseguenza, il punto *a*, che al perigeo appariva al centro del disco lunare, adesso sarà visibile a sinistra, rispetto al centro, in direzione est, mentre il punto *b* apparirà spostato dal bordo destro (ovest) verso una

zona dell'emisfero nascosto. All'apogeo saremo nelle stesse condizioni di visibilità del perigeo, mentre un quarto di mese dopo il passaggio all'apogeo la Luna avrà percorso meno di un quarto della sua orbita per cui sarà visibile ancora una piccola porzione dell'emisfero non visibile, questa volta però verso est. Il periodo di librazione in longitudine è pari al periodo anomalistico ($27^{\text{d}} 13^{\text{h}} 18^{\text{m}}.6$), e la massima ampiezza della librazione è pari a $7^{\circ} 54'$.

8.4.2 Librazione in latitudine

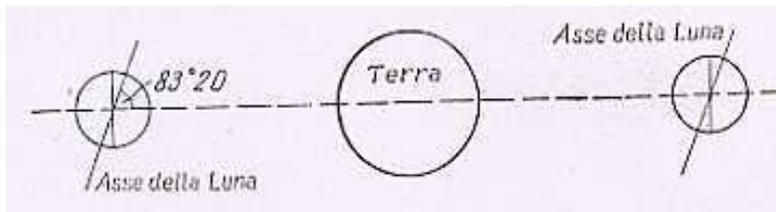


Fig. 8.5 – Librazione in latitudine della Luna

La librazione in latitudine è dovuta al fatto che l'asse di rotazione della Luna è inclinato di $6^{\circ}41'$ rispetto alla perpendicolare al suo piano orbitale, ed al fatto che la direzione dell'asse di rotazione resta costante nello

spazio durante la rivoluzione della Luna attorno alla Terra (Fig. 8.5). La conseguenza di ciò è che durante il suo moto attorno alla Terra, la Luna sembra inclinarsi ora in su, ora in giù, mostrando alla Terra, alternativamente, ora il Polo sud, ora il Polo nord. Ciò è quanto avviene per la Terra relativamente al Sole, a causa dell'inclinazione dell'asse di rotazione rispetto alla normale al piano dell'eclittica, dando origine al ciclo delle stagioni. Il periodo della librazione in latitudine è pari al mese draconico ($27^{\text{d}} 5^{\text{h}} 5^{\text{m}}.6$), mentre l'ampiezza di questa librazione è pari a $6^{\circ}50'$.

8.4.3 Librazione diurna o parallattica

La librazione diurna o parallattica è un effetto secondario rispetto ai precedenti ed è dovuta alla parallasse diurna, nel senso che la visione prospettica della Luna dipende dalla posizione dell'osservatore sulla superficie terrestre. L'ampiezza della librazione diurna è di circa 1° .

8.4.4 Librazione fisica

La librazione fisica è un'oscillazione intrinseca della Luna, causata dal fatto che il semiasse maggiore dell'ellisse dell'orbita lunare ha una variazione periodica della sua direzione, in quanto esso tende a perdere l'allineamento con la Terra, mentre l'attrazione del pianeta agisce nel senso di riportarlo nella sua posizione originale. La librazione fisica è di entità trascurabile, pari a circa $2''$.

8.5 Occultazioni lunari

Durante il suo moto attorno alla Terra, capita che la Luna passi davanti a corpi celesti più lontani, rendendoli momentaneamente invisibili: questi fenomeni prendono il nome di *occultazioni lunari*. Le più frequentemente osservabili sono le occultazioni di stelle, mentre più rare sono le occultazioni di pianeti.

Nel fenomeno dell'occultazione si distinguono due fasi: l'*immersione*, cioè l'improvvisa sparizione dell'astro dietro il bordo lunare, e l'*emersione*, cioè la riapparizione dell'astro da

un altro punto del bordo della Luna. La determinazione degli istanti precisi di immersione ed emersione in un'occultazione lunare ha notevole importanza perché consente, essendo note con precisione le coordinate di molte stelle, di stabilire la posizione della Luna e quindi di confrontare tali posizioni osservate con quelle calcolate e di verificare e migliorare le teorie del moto lunare.

8.6 Condizioni per il verificarsi delle eclissi

Un'eclisse di Sole non è altro che un'occultazione del Sole da parte della Luna, mentre un'eclisse di Luna non è altro che un'occultazione della Luna da parte della Terra. Per una curiosa coincidenza Sole e Luna, pur avendo dimensioni estremamente diverse, si trovano a distanze tali dalla Terra da mostrare pres'a poco lo stesso diametro apparente, pari a circa $0^{\circ}.5$. Questo accade perché la Luna è circa 400 volte più vicina alla Terra del Sole, mentre il diametro lineare della Luna è circa 400 volte più piccolo di quello del Sole.

Se il piano dell'orbita della Luna coincidesse con quello dell'eclittica, invece di essere inclinato di $5^{\circ}9'$, ad ogni novilunio si avrebbe un'eclisse di Luna e ad ogni plenilunio un'eclisse di Sole.

Può invece accadere che in plenilunio o novilunio la Luna si trovi lontana dall'eclittica ed il suo disco passi al di sopra o al di sotto del disco solare o del cono d'ombra terrestre, e di conseguenza non si hanno eclissi.

Ne segue che se la Luna si pone di fronte al Sole (fase di novilunio) essa lo occultata interamente (eclisse totale) solo se il suo diametro eccede quello del Sole e se i centri dei due dischi sono allineati, o quasi allineati, rispetto all'osservatore terrestre. Se invece il diametro apparente della Luna è inferiore a quello del Sole ed i centri dei dischi sono allineati, o quasi allineati con l'osservatore terrestre, sarà occultata solo la parte centrale, lasciando scoperto un sottilissimo anello: in questo caso si avrà un'eclisse anulare. Infine, se il disco della Luna copre solo parzialmente il disco solare, e quindi i centri non sono allineati con l'osservatore, si avrà un'eclisse parziale. Al novilunio possono quindi esserci eclissi di Sole totali, anulari o parziali.

Analogamente può accadere all'epoca del plenilunio che la Terra si interponga tra il Sole e la Luna, intercettando per intero o in parte i raggi solari che illuminano la Luna: avremo allora un'eclisse di Luna che potrà essere totale o parziale. Nel primo caso, la Luna entrerà completamente nel cono d'ombra proiettato dalla Terra, mentre nel secondo caso entrerà solo parzialmente.

Sulla base di quanto detto, condizione necessaria perché si abbia un'eclisse è che in plenilunio o novilunio la Luna si trovi in prossimità dei nodi, cioè in vicinanza dell'eclittica. Tale condizione, necessaria, non è però sufficiente per il fatto che i piani orbitali della Terra e della Luna sono inclinati di un angolo di $5^{\circ}9'$, e quindi è necessario che i centri di Luna e Sole siano allineati, o quasi allineati, con l'osservatore.

In conclusione, condizione necessaria e sufficiente per avere un'eclissi è che Sole e Luna siano in congiunzione o opposizione rispetto alla Terra (novilunio o plenilunio), e che siano vicinissimi ai nodi lunari.

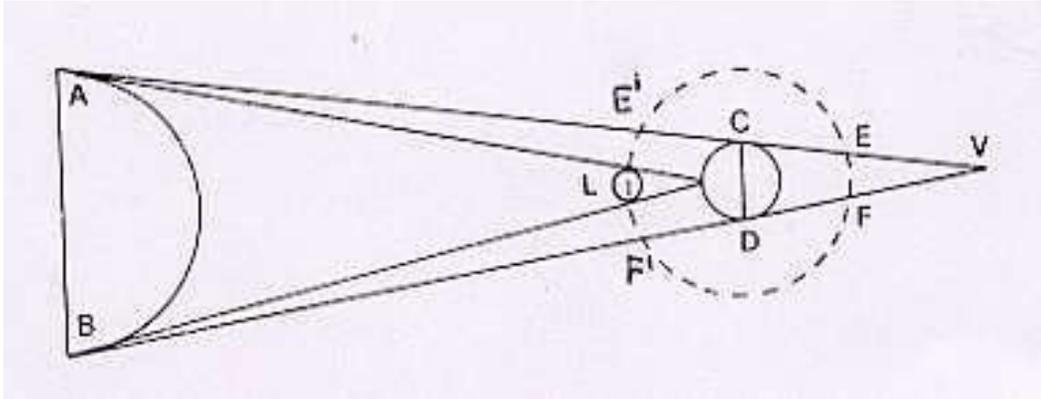


Fig. 8.6 – Circostanze per il verificarsi di un'eclisse

Un'eclisse di Sole, totale, anulare, o parziale ha dunque luogo ogni volta che la Luna entra nel tronco di cono ABCD (Fig. 8.6), la cui sezione ha un diametro di circa 17.000 km, se si considera la distanza della Luna al momento della congiunzione. Affinchè avvenga l'entrata, è necessario che al momento del novilunio il Sole disti dal nodo, in media, meno di $15^{\circ}.5$ (per essere precisi, inferiore ad una quantità che oscilla, a secondo delle circostanze, tra $18^{\circ}31'$ e $15^{\circ}21'$). Poiché nelle eclissi lunari questo limite è di soli $9^{\circ}.9$ (tra $12^{\circ}15'$ e $9^{\circ}30'$) e non più di $4^{\circ}.6$ per una totale, ne segue che, nel corso di un anno, le eclissi di Sole sono più frequenti di quelle di Luna, come vedremo meglio nel paragrafo 8.7.

Questo fatto è ancora più chiaro se si guarda la figura 8.6: poiché l'arco $E'F'$, che è quello utile per aversi un'eclisse di Sole, è maggiore dell'arco EF , che è quello utile per aversi un'eclisse di Luna, si ha una probabilità maggiore di avere un'eclisse di Sole piuttosto che di Luna.

8.7 Numero totale di eclissi in un anno

Considerando le condizioni necessarie e sufficienti per il verificarsi delle eclissi, si può dimostrare che in un anno si possono avere da un minimo di due ad un massimo di sette eclissi. Nel primo caso saranno entrambe di Sole, nel secondo caso potranno essere due lunari e cinque solari oppure tre lunari e quattro solari. In ogni caso, le eclissi solari in un anno eccedono sempre le eclissi lunari. Nel caso delle due eclissi di Luna e cinque di Sole, esse saranno così distribuite: all'inizio dell'anno si avranno due eclissi solari, la prima poco distante dal primo gennaio e la seconda al novilunio successivo, con un'eclisse lunare tra di esse; successivamente, a metà anno, poco meno di sei mesi dopo, si avranno ancora due eclissi di Sole con in mezzo un'eclisse lunare; per finire, alla fine dell'anno si avrà l'ultima

eclisse di Sole, dopo 354 giorni dalla prima, cioè dopo 12 rivoluzioni sinodiche. Nel caso delle tre eclissi di Luna e quattro di Sole, esse saranno così distribuite: All'inizio dell'anno si avrà un'eclisse lunare, poco dopo il primo di gennaio, seguita da una solare; a metà dell'anno si avranno due eclissi solari con in mezzo una lunare, verso la fine di giugno; a fine anno si avrà la quarta eclisse solare e la terza lunare, a fine dicembre, dopo 354 giorni dalla prima eclisse di Luna, pari a 12 mesi sinodici.

Tuttavia, il caso di sette eclissi in un anno è molto raro e l'evento più frequente è costituito da due eclissi di Sole e due di Luna in un anno. Nel caso minimo di due sole eclissi, esse saranno entrambe di Sole.

La successione dell'ordine delle eclissi segue una periodicità pari a 18 anni e 11.3 giorni, conosciuta già dai caldei, che prende il nome di *ciclo di soros*, termine questo di origine assiro-babilonese.

In effetti, le eclissi si succedono nello stesso ordine, qualunque sia l'eclisse iniziale, dopo l'intervallo di tempo necessario affinché una stessa fase della Luna si produca ad una distanza tra la Luna ed il nodo della sua orbita uguale a quella relativa al momento dell'eclisse iniziale. Poiché il periodo sinodico è pari a 29.53 giorni, il periodo draconico della Luna è pari a 27.21 giorni, ed il periodo draconico del Sole (intervallo tra due passaggi successivi del centro del Sole per lo stesso nodo lunare) è uguale a 346.62 giorni, ne consegue che il ciclo di soros è uguale all'intervallo di tempo necessario affinché questi tre periodi tornino nella stessa successione. Si può verificare che 242 mesi draconici corrispondono quasi esattamente a 223 mesi sinodici a 19 anni draconici. Più esattamente:

$$242 \text{ mesi draconici} = 6585.36 \text{ giorni solari medi}$$

$$223 \text{ mesi sinodici} = 6585.32 \text{ giorni solari medi} = 18 \text{ anni } 11 \text{ giorni } 7 \text{ ore e } 42 \text{ minuti}$$

$$19 \text{ anni draconici} = 6585.78 \text{ giorni solari medi}$$

Poiché 223 mesi sinodici sono 0.04 giorni più corti di 242 mesi draconici, dopo 6585 giorni la Luna nuova si troverà in una posizione, rispetto al nodo, poco diversa da quella di 18 anni prima, per cui le condizioni in cui si riproducono le eclissi non saranno mai esattamente uguali a quelle di 18 anni prima. Inoltre, poiché il ciclo di soros comprende un numero intero di giorni più $1/3$, la zona di visibilità di un'eclisse sarà spostata, dopo 18 anni, di circa 120° verso ovest.

Ciascun ciclo di soros comprende 70 eclissi, di cui 41 di Sole e 29 di Luna. Nonostante siano più frequenti, le eclissi di Sole sono più difficili da osservare, perché visibili solo in una fascia relativamente ristretta, al contrario delle eclissi di Luna, visibili in tutto un emisfero.

8.8 Eclissi di Luna

Supponiamo, per semplicità, che il Sole e la Terra siano sferici ed indichiamo con S e T rispettivamente i loro centri. In ciò che segue, trascureremo anche gli effetti dovuti alla rifrazione.

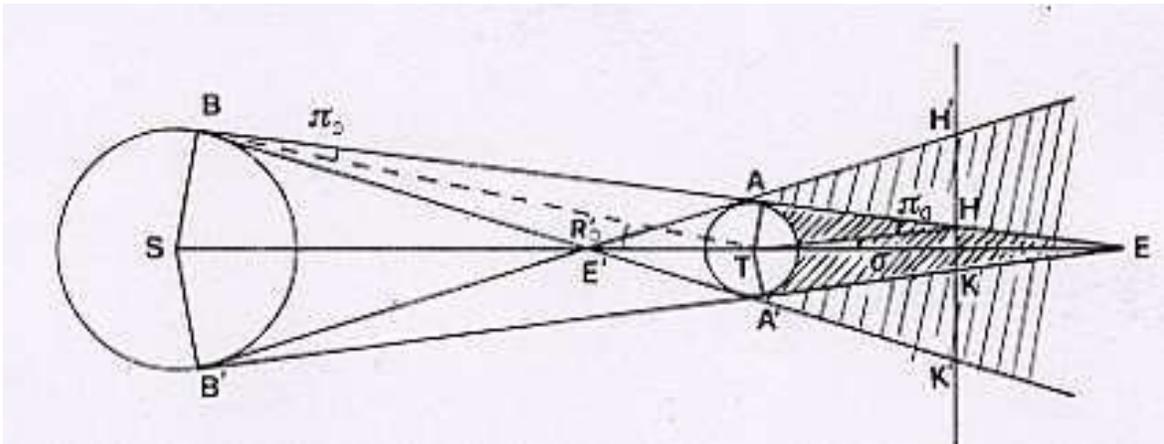


Fig. 8.7 – Schema di un'eclisse di Luna

Poiché la Terra è un corpo opaco, essa proietta nello spazio un ampio cono d'ombra, per effetto dell'illuminazione del Sole: Indichiamo con E il vertice di questo cono d'ombra, situato in posizione opposta rispetto al centro della Terra T e del Sole S (Fig. 8.6). Le dimensioni del cono d'ombra, misurate dal vertice E al centro della Terra T, si ottengono facilmente considerando i due triangoli simili BSE e ATE rettangoli, rispettivamente, in B ed A. Poniamo: $X = TE$ (dimensioni del cono d'ombra); $a = ST$ (distanza Terra-Sole); $R = BS$ (raggio del Sole); $r = AT$ (raggio della Terra). Applicando il teorema dei triangoli simili, avremo:

$$[(X + a) / R] = [X / r] \quad \Rightarrow \quad X = [(ra) / (R - r)]$$

Poiché è: $R = 695.000 \text{ km}$, $r = 6.371 \text{ km}$, $a = 149.600.000 \text{ km}$, si ottiene: $X = 1.381.000 \text{ km}$, cioè una dimensione pari a circa tre volte e mezzo la distanza Terra-Luna.

Oltre al cono d'ombra, la Terra proietta nello spazio anche un ampio cono di penombra, il cui vertice si trova in E'. Quando la Luna si troverà nel cono d'ombra, si osserverà un'eclisse totale, mentre quando attraverserà il cono di penombra, il suo splendore viene attenuato.

Riferiamoci sempre alla Fig. 8.7 e consideriamo una sezione HK del cono d'ombra terrestre, perpendicolare all'asse STE, ad una distanza da T pari alla distanza Terra - Luna. La proiezione del cono d'ombra su tale piano sarà un cerchio di raggio pari a $\rho = HK/2$, detto *cerchio d'ombra*. Determiniamo adesso il raggio angolare di questo cerchio d'ombra. Indichiamo con Π_S la parallasse ABT del Sole; con Π_L la parallasse AHT della Luna; con R' il raggio angolare del Sole, visto dal centro della Terra; con σ il raggio angolare del cono d'ombra, visto sempre dal centro della Terra. Se consideriamo l'angolo BTH, possiamo scrivere:

$$BTH = 180^\circ - R' - \sigma \quad [8.1]$$

ed anche:

$$\text{BTH} = 180^\circ - \Pi_S - \Pi_L \quad [8.2]$$

Uguagliando la [8.1] con la [8.2], si ha:

$$-R' - \sigma = -\Pi_S - \Pi_L \quad \Rightarrow \quad \sigma = \Pi_S + \Pi_L - R' \quad [8.3]$$

Cioè: il raggio angolare apparente del cerchio d'ombra è uguale alla somma delle parallassi del Sole e della Luna, meno il raggio angolare apparente del Sole.

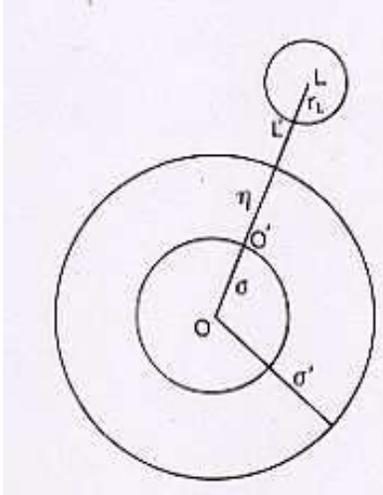


Fig. 8.8 – Condizioni per il verificarsi di un'eclisse di Luna

potranno avere quattro casi (Fig. 8.8):

1. $\eta > \sigma' + r_L \quad \Rightarrow \quad$ non ha luogo alcuna eclisse.
2. $r_L + \sigma' < \eta < r_L + \sigma \Rightarrow$ La Luna entra, totalmente o parzialmente, nella zona di penombra, ma non in quella d'ombra per cui, lo splendore della Luna, si attenua. Si ha un'eclisse in penombra, ed un osservatore posto sulla Luna, nell'emisfero che guarda verso la Terra, vedrebbe un'eclisse parziale di Sole.
3. $\sigma + r_L > \eta > \sigma' + r_L \Rightarrow$ La luna entra nel cono d'ombra della Terra, ma non interamente: si ha un'eclisse parziale di Luna.
4. $\eta > \sigma - r_L \quad \Rightarrow \quad$ La Luna entra per intero nel cono d'ombra della Terra: si ha un'eclisse totale di Luna.

Naturalmente, affinché un'eclisse di Luna sia visibile in un dato luogo, è necessario che essa si trovi sopra l'orizzonte. Ottenuta questa condizione, l'ingresso della Luna in penombra e

Analogamente, si può dimostrare che il raggio del cono di penombra è uguale alla somma delle parallassi del Sole e della Luna, più il raggio apparente del Sole; cioè:

$$\sigma' = \Pi_S - \Pi_L + R' \quad [8.4]$$

Se per esempio poniamo nella [8.3] ed [8.4]: $\Pi_S = 8''.6$, $\Pi_L = 60'26''$, $R' = 16'16''$, otteniamo:

$$\sigma = 44'18''.9 \quad \text{e} \quad \sigma' = 76'50''.9$$

Indichiamo adesso con η la minima distanza tra il centro del cono d'ombra ed il centro della Luna perché si possa avere un'eclisse, con r_L il raggio apparente della Luna, con σ il raggio del cono d'ombra e con σ' il raggio del cono di penombra: si

nell'ombra è un evento osservabile allo stesso modo e nello stesso istante da qualsiasi luogo, tenendo naturalmente conto dell'ora locale.

8.8 Eclissi di Sole

Le occultazioni del Sole da parte della Luna prendono il nome di eclissi di Sole. Affinché un'eclisse di Sole abbia luogo è necessario, come è stato già detto in 8.6, che ci si trovi all'epoca di novilunio, in modo che la Luna ed il Sole abbiano la stessa longitudine, e che i due corpi si trovino in prossimità dei nodi.

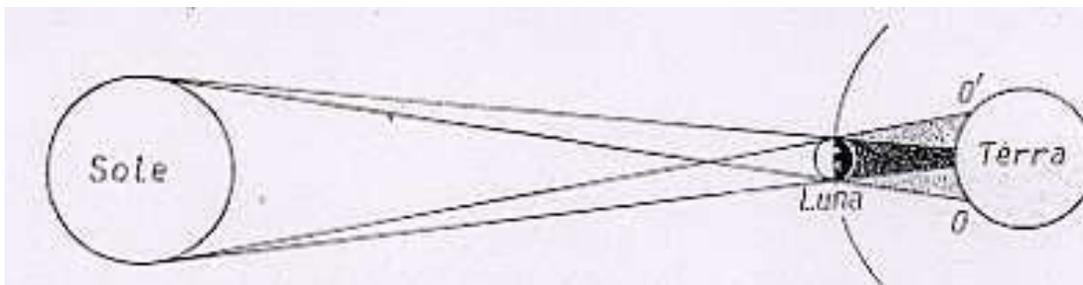


Fig. 8.9 – Schema di un'eclisse di Sole

Il calcolo di un'eclisse solare può essere fatto con un procedimento analogo a quello usato per il calcolo delle eclissi di Luna., e cioè valutando l'ampiezza del cono d'ombra proiettato dalla Luna al momento del novilunio, e le relative posizioni della Terra rispetto al cerchio d'ombra e di penombra lunari. Il diametro del cerchio d'ombra dipende dalla distanza della Terra dal sole e della Luna dalla Terra, entrambe variabili per il fatto che entrambe le orbite sono ellittiche. Il vertice del cono d'ombra, nelle circostanze più favorevoli, può addentrarsi per oltre 29.000 km oltre la superficie terrestre, ed in questo caso la zona d'ombra ha una larghezza di circa 270 km. In questa zona, relativamente ristretta e ricoperta dall'ombra della Luna, si osserva l'eclisse totale di Sole (Fig. 8.8). Nelle zone ricoperte dalla penombra della Luna, all'interno di quello che viene chiamato cono di penombra, si osserva l'eclisse parziale di Sole, in cui il disco lunare copre soltanto una parte del disco solare. Più l'osservatore è vicino all'asse del cono d'ombra, più grande è la parte di disco solare coperta dall'ombra, e quindi maggiore è la fase dell'eclisse. Al di fuori del cono di penombra il disco solare resta completamente visibile e non si ha alcuna eclisse.

Poiché la distanza tra la Luna e la Terra varia da 405.500 km a 363.300 km e la lunghezza del cono d'ombra lunare è in media di 374.000 km, il vertice di questo cono non raggiunge sempre la superficie terrestre: in questo caso, nelle regioni prossime all'asse del cono dell'eclisse avremo un'eclisse anulare di Sole, ed i bordi del disco solare non ricoperti formeranno attorno al disco scuro della Luna un sottile anello brillante. In località diverse della Terra, l'eclisse di Sole si verifica in tempi diversi. Infatti, il moto della Luna attorno alla Terra e la rotazione della Terra attorno al proprio asse fanno sì che l'ombra lunare si sposti sulla superficie terrestre all'incirca da ovest verso est con una velocità varia, che dipende dalla

latitudine e dalla declinazione, ma che può raggiungere i 2 km/sec, formando una fascia d'ombra lunga alcune migliaia di chilometri e larga tra 200 e 270 chilometri.

Poiché la Luna si sposta da ovest verso est, l'eclisse comincia sul bordo ovest del Sole. Inizialmente appare un intaglio nero, con la forma di un arco di cerchio di raggio uguale a quello del disco solare. Gradualmente, questo settore scuro si espande sul disco del Sole, che assume l'aspetto di una falce sempre più stretta. Appena l'ultimo punto del disco solare sparisce, si entra nella totalità, che dura generalmente alcuni minuti (due o tre) e non supera mai i sette minuti. In seguito, il disco oscura della Luna lascia il disco solare, che comincia a riapparire fino al termine dell'eclisse, quando il disco solare sarà nuovamente visibile per intero. La durata complessiva di tutte le fasi dell'eclisse può superare le due ore.

Esercizi

- 8.1** Si faccia l'ipotesi che un'eclisse di Luna abbia inizio in una località A alle ore 1h 44m di tempo locale. A che ora ha inizio la stessa eclisse in una località B situata a 29m di longitudine est rispetto ad A?
- 8.2** E' possibile che Giove e/o Venere vengano coperti dalla Luna durante un'eclisse lunare?
- 8.3** In un mese siderale, la Luna percorre $13^{\circ} 10' 35''$ della sua orbita attorno alla Terra. Qual'è la durata del mese siderale?
- 8.4** Calcolare la durata del mese anomalistico, sapendo che il perigeo dell'orbita lunare si muove verso est (nella stessa direzione del moto della Luna), compiendo una rivoluzione in 3232 giorni.
- 8.5** Calcolare la durata del mese draconico. Perché, rispetto al mese siderale, il mese draconico è più corto mentre il mese anomalistico è più lungo?
- 8.6** Nel 1995 ci sono state 2 eclissi di Luna e due eclissi di Sole:
- 1) 16 aprile: eclisse totale di Luna;
 - 2) 30 aprile: eclisse anulare di Sole;
 - 3) 9 ottobre: eclisse totale di Luna;
 - 4) 25 ottobre: eclisse totale di Sole
- Utilizzando il ciclo di Saros, predire quando si ripeteranno le stesse eclissi, e quando si sono verificate precedentemente.
- 8.7** Sia r il raggio della Terra, $R = 109r$ il raggio del Sole, $L = 23.68r$ la distanza Terra-Sole, ed $l = 60r$ la distanza tra i centri della Terra e della luna. Determinare il raggio y della sezione d'ombra della Terra sul disco lunare, ad una distanza l dal centro della Terra.
Suggerimento: Si consideri la figura 8.7 e quanto detto nel paragrafo 8.8

Capitolo 9

Moti dei pianeti

9.1 Moti apparenti dei pianeti

Così come il Sole e la Luna, anche i pianeti si muovono sulla sfera celeste percorrendo delle traiettorie che, essendo il risultato della combinazione del moto della Terra con quello degli stessi pianeti, risultano, a prima vista, un po' complesse. Per esempio, il Sole e la Luna descrivono sulla sfera celeste dei cerchi massimi, percorrendoli in senso diretto, con una velocità che non è costante, ma neanche tanto diversa dal valore minimo e massimo. La traiettoria descritta dai pianeti sulla sfera celeste è invece un po' più complessa: sono infatti presenti nodi e cappi, cioè punti nei quali il moto si inverte, da diretto a retrogrado o viceversa (Fig. 9.1).

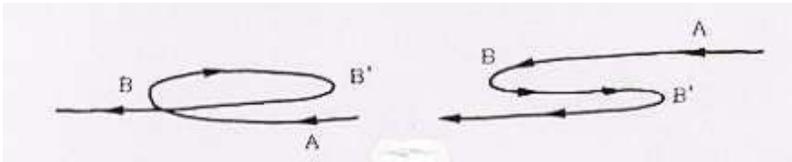


Fig. 9.1 - Traiettorie apparenti dei pianeti

Le traiettorie apparenti dei pianeti, con i loro nodi, punti di inversione, ecc., sono descritte sempre in prossimità dell'eclittica, senza mai discostarsene

molto in latitudine. In base ai loro moti apparenti, i pianeti formano due gruppi: i *pianeti inferiori* (Mercurio e Venere) ed i *pianeti superiori* (tutti gli altri, esclusa la Terra): i loro moti apparenti sulla sfera celeste differiscono a seconda che essi appartengano ad un gruppo piuttosto che ad un altro.

Muovendosi sulle loro orbite, i pianeti possono assumere posizioni diverse rispetto alla Terra ed al Sole. Supponiamo che ad un certo istante la Terra T occupi un certo punto della sua orbita attorno al Sole S (Fig. 9.2). Un pianeta inferiore o superiore può occupare, nello stesso istante, un punto qualsiasi della sua orbita. In particolare, Mercurio e Venere sembrano oscillare apparentemente sempre attorno al Sole, ad oriente e ad occidente di esso, senza mai allontanarsene più di un certo limite (massima elongazione). Per esempio, la massima elongazione di Mercurio dal Sole è compresa tra 18° e 28° , mentre quella di Venere è compresa tra 45° e 48° . Il massimo scarto angolare verso est del pianeta rispetto al Sole prende il nome di *massima elongazione orientale*, (posizione V_2 in Fig. 9.2) mentre il massimo scarto angolare verso ovest prende il nome di *massima elongazione occidentale* (posizione V_4 in Fig. 9.2). Nel caso dell'elongazione orientale, il pianeta è visibile ad ovest, poco dopo il tramonto del Sole (da cui il nome a Venere di *Vespero*, o stella della sera), e tramonta poco dopo il Sole. Successivamente, muovendosi di moto retrogrado (da est verso ovest), si avvicina al Sole, dapprima lentamente e poi sempre più velocemente, fino a raggiungerlo è diventare quindi invisibile, perché rivolge a noi l'emisfero non illuminato, a meno che esso non transiti sopra il disco solare, apparendo quindi come un dischetto oscuro.

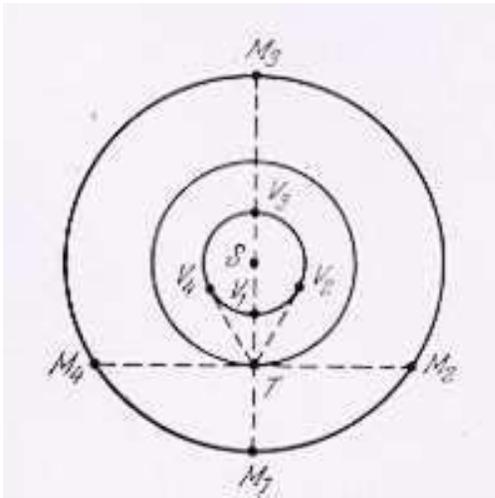


Fig. 9.2 – Configurazioni dei pianeti interni ed esterni

Questo è il momento della congiunzione inferiore (posizione V_1 in Fig. 9.2): il pianeta passa tra la Terra ed il Sole e la sua longitudine è uguale a quella del Sole. Successivamente il pianeta comincia ad allontanarsi dal Sole, sempre con moto retrogrado verso ovest rispetto al Sole: questo è il momento in cui il pianeta è visibile all'alba, poco prima del sorgere del Sole (da cui il nome a Venere di *Lucifero*, o stella del mattino). La velocità del moto del pianeta diminuisce sempre di più, fino ad arrestarsi nel momento in cui viene raggiunta la massima elongazione ovest. A questo punto il pianeta inverte il moto, spostandosi in senso diretto da ovest verso est, ed avvicinandosi sempre più velocemente al Sole, fino a nascondersi dietro di esso. Il pianeta si trova nella posizione di *congiunzione superiore* (posizione V_3 in Fig. 9.2) e la sua longitudine

celeste è di nuovo uguale a quella del Sole. A questo punto, proseguendo in senso diretto, il pianeta si allontana da esso verso est, diventando di nuovo visibile al tramonto. Raggiunta la massima elongazione orientale, il pianeta si ferma e riparte con moto retrogrado, andando incontro al Sole, ed il ciclo ricomincia.

I pianeti interni realizzano quindi una specie di oscillazione intorno al Sole, allo stesso modo di un pendolo che oscilla attorno alla sua posizione media, con un periodo di 116 giorni per Mercurio, e di 584 giorni per Venere. Le posizioni dei pianeti interni rispetto al Sole sono riportate nella figura 9.2.

L'andamento dello spostamento sulla sfera celeste dei pianeti superiori è alquanto diverso, in quanto possono assumere una qualsiasi distanza angolare dal Sole, tra 0° e 180° .

Al momento della *congiunzione* (posizione M_3 in Fig. 9.2), quando è $l_p = l_0$, il pianeta non è visibile per un certo periodo, in quanto nasce e tramonta con il Sole, e procede con moto diretto allontanandosi ad occidente del Sole che corre più velocemente. Il moto, man mano che l'elongazione aumenta, si fa sempre più lento, finché diventa stazionario e poi retrogrado.

In questo momento il pianeta si trova nella posizione di *quadratura orientale* (posizione M_2 in Fig. 9.2), e sarà $l_p = l_0 + 90^\circ$. Durante la retrogradazione l'allontanamento dal Sole avviene in modo molto rapido perché i due corpi, visti da Terra, si muovono in direzioni opposte. La massima velocità viene raggiunta nella posizione di *opposizione* (posizione M_1 in Fig. 9.2), quando è $l_p = l_0 + 180^\circ$: in questo periodo il pianeta nasce quando tramonta il Sole, e quindi è visibile per l'intera notte. Superata l'opposizione, il pianeta si avvicina al Sole, sempre con moto retrogrado, fino a raggiungere la posizione di *quadratura occidentale* (posizione M_4 in Fig. 9.2) rispetto al Sole, con $l_p = l_0 - 90^\circ$. Successivamente, il pianeta inverte il moto, che diventa nuovamente diretto e viene raggiunto dal Sole nella posizione di congiunzione, ed il ciclo riprende.

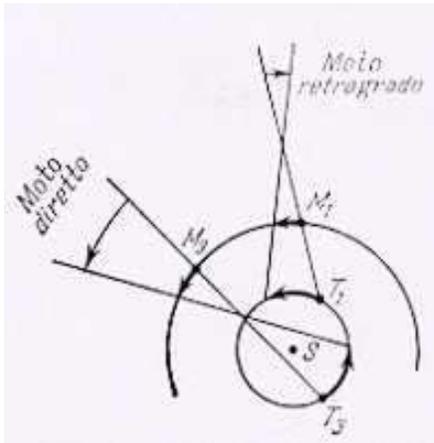


Fig. 9.3 – Moto diretto e retrogrado di un pianeta superiore

congiunzione M_3 , la sua velocità è

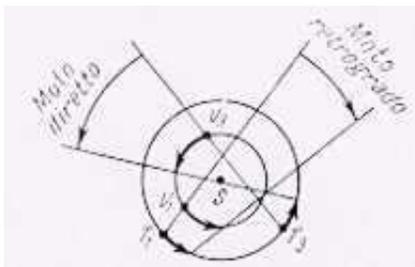


Fig. 9.4 – Moto diretto e retrogrado di un pianeta inferiore

Nei pianeti superiori abbiamo dunque le posizioni di congiunzione ($l_p = l_0$), di quadratura ($l_p = l_0 \pm 90^\circ$), e di opposizione ($l_p = l_0 + 180^\circ$), come illustrato nella figura 9.2.

E' ovvio che, essendo le orbite dei pianeti e della Terra descritte attorno al Sole, i pianeti inferiori debbano presentare le fasi, come la Luna, in quanto sono corpi opachi illuminati dal Sole.

Anche i pianeti superiori presenteranno delle fasi, anche se in misura minore, dipendendo esse dall'elongazione e dalla distanza del pianeta dalla Terra.

La natura dei moti diretti e retrogradi risulta invece chiara se si confrontano le velocità orbitali lineari dei pianeti con quella della Terra.

Quando un pianeta superiore (Fig. 9.3) si avvicina alla congiunzione M_3 , la sua velocità è diretta nel senso opposto alla velocità della Terra T_3 , da cui lo si vede spostare con moto diretto, da destra a sinistra, dando l'impressione che la sua velocità aumenti un po'. Quando un pianeta superiore si avvicina all'opposizione M_1 , la sua velocità e quella della Terra sono dirette nello stesso verso, ma la velocità lineare della Terra è maggiore per cui si ha l'impressione che il pianeta si muovi nel verso retrogrado, cioè da sinistra verso destra.

Analoghi ragionamenti spiegano perché i pianeti inferiori si spostino, rispetto alle stelle, di moto retrogrado in prossimità della congiunzione inferiore V_1 , e di moto diretto presso la congiunzione superiore V_3 (Fig. 9.4).

9.2 Cenni sui sistemi del mondo

L'interpretazione dei moti apparenti dei pianeti e di altri corpi celesti ha rappresentato un problema fondamentale dell'astronomia fino ai tempi di Galileo (1564-1642), in quanto questi moti sono osservati dalla Terra da dove, all'epoca, era difficile capire se essa fosse immobile o ruotasse.

Questo è il motivo per cui gli antichi astronomi avevano due diversi punti di vista su questa questione. Il primo punto di vista si basava su impressioni dirette per cui, in base ad esse, la Terra era fissa ed al centro del Mondo (sistema geocentrico). Il secondo punto di vista era invece del tutto speculativo, ed in base ad esso la Terra ruotava su se stessa ed attorno al Sole che era il centro del Mondo (sistema eliocentrico). Questo secondo punto di vista contrastava però con le impressioni osservative e religiose e mancava, almeno fino al periodo di

Copernico, Keplero e Newton, dei presupposti per uno sviluppo matematico. Fu dunque il primo punto di vista ad affermarsi in astronomia per un lungo periodo, fino al rinascimento.

Nella più remota antichità gli astri, e tra questi in modo particolare il Sole e la Luna, erano considerati divinità. Successivamente, col nascere della filosofia greca, si cercò di dare un'interpretazione più naturalistica dei fenomeni celesti. Talete di Mileto, il più grande astronomo dei tempi antichi vissuto tra il VII ed il VI sec. a.C., ed i suoi discepoli Anassimandro, Anassimene, Anassagora, immaginarono che la Terra, a forma di colonna tronca, fosse sospesa nello spazio, al centro del Mondo. Le stelle non erano altro che fori su una grande cupola lontana, attraverso i quali filtrava la luce di un fuoco lontano.

Altrettanto fantasiose erano le dottrine astronomiche dei pitagorici, di cui però poco rimane.

Eudosso di Cnido (409-356 a.C.), tentò di dare un'interpretazione geometrica più rigorosa, che teneva conto dei moti apparenti del Sole, della Luna e dei pianeti, introducendo il sistema delle *sfere omocentriche*. La sua idea era che la Terra fosse al centro del Mondo, e che tutti gli altri astri fossero portati in giro attorno ad essa per mezzo di sfere trasparenti. In realtà il sistema di sfere era molto più complesso, per poter giustificare il complesso moto degli astri che si osservava, a volte diretto, ed a volte retrogrado. Impeccabile dal punto di vista

geometrico, il sistema delle *sfere omocentriche* di Eudosso fu accolto molto favorevolmente dagli antichi finchè la scoperta della precessione degli equinozi da parte di Ipparco, nel II sec. a.C., complicò molto il sistema di sfere da impiegare, che già al tempo di Eudosso erano ben 27. Il sistema venne dunque abbandonato, a favore della concezione più semplice degli epicicli e dei cerchi deferenti, sempre geometrica, proposta da Ipparco, ma divulgata completamente da Tolomeo nel II sec. d.C., nella sua opera *Grande Sintassi*, conosciuta meglio sotto il nome deformato di *Almagesto*, datole dagli arabi.

Fu proprio questa concezione tolemaica ad essere sostenuta ed insegnata per oltre 18 secoli, fino ed oltre l'epoca di Copernico. In precedenza però, un altro grande astronomo alessandrino, Aristarco da Samo, vissuto nella prima metà del III sec. a.C., aveva proposto un'idea strana e rivoluzionaria per quei tempi: che la Terra ruotasse su se stessa attorno ad un asse e che si muovesse, con gli altri pianeti, attorno al Sole, centro del Mondo, con un periodo di rivoluzione pari ad un anno. Questo sistema eliocentrico non incontrò però fortuna, non essendo ancora maturi i tempi per una concezione così ardita.

9.3.1 Sistema tolemaico

Il sistema tolemaico era basato su quattro ipotesi principali:

1. la Terra si trova al centro dell'Universo;
2. la Terra è fissa;
3. tutti gli astri ruotano attorno alla Terra;
4. tutti gli astri percorrono le loro orbite con velocità costanti.

Il sistema tolemaico è dunque geocentrico, con la Terra al centro del Mondo e la sfera celeste con le stelle ed ogni altro corpo che ruota attorno ad essa in 24 ore. Oltre a questo moto d'insieme diurno, il Sole, la Luna e gli altri pianeti posseggono altri moti ideati per poter spiegare tutte le apparenze, e di cui si dà di seguito una rappresentazione geometrica semplificata. I pianeti si spostano con moto uniforme su traiettorie circolari detti *epicicli*, i cui centri descrivono, a loro volta, degli altri cerchi detti *deferenti*, con la Terra fissa nel loro centro comune (Fig. 9.5). Il Sole e la Luna descrivono invece attorno alla Terra solo dei deferenti, senza epicicli. Questi deferenti, insieme agli epicicli ed ai deferenti dei pianeti, giacciono all'interno di una sfera sulla cui superficie si trovano le stelle fisse.

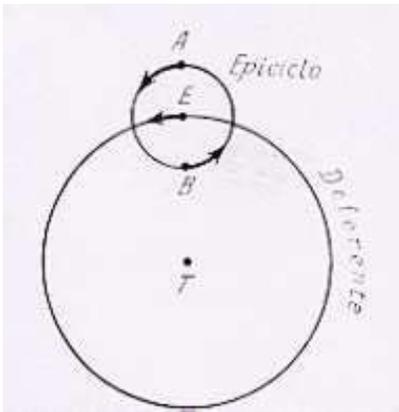


Fig. 9.5 Epiciclo e deferente nel sistema tolemaico

Il moto diurno di tutti gli astri è spiegato con la rotazione di tutta la sfera celeste attorno alla Terra. I moti diretti e retrogradi dei pianeti venivano invece spiegati nel modo

seguinte. Quando un pianeta raggiunge la posizione A del suo epiciclo (Fig. 9.5), la velocità angolare del suo moto, così come osservato dalla Terra, è data dal moto del centro dell'epiciclo E sul deferente e dal moto del pianeta sull'epiciclo. In questa posizione il pianeta sembra muoversi di moto diretto e con la massima velocità. Quando si trova invece in B, si sposta sull'epiciclo nel verso opposto rispetto a quello con cui si muove sul deferente, per cui la sua velocità angolare è minima. In più, se la velocità del pianeta sull'epiciclo è inferiore alla velocità sul deferente, il suo moto apparirà rallentato, ma sempre in senso diretto. Se invece la velocità sull'epiciclo è maggiore di quella sul deferente, il pianeta sembrerà muoversi di moto retrogrado. In particolare, scegliendo opportunamente le dimensioni relative dei raggi dell'epiciclo e del deferente, era possibile riprodurre i moti apparenti dei pianeti osservati. Per far ciò, Tolomeo pose due postulati:

1. i centri degli epicicli dei pianeti inferiori si trovano lungo la congiungente Terra – Sole;
2. tutti i pianeti superiori hanno i raggi degli epicicli, tracciati verso il punto della posizione del pianeta, paralleli alla direzione Terra – Sole. In questo modo viene mantenuta come prioritaria la direzione verso il Sole.

Questa costruzione, per quanto macchinosa e priva di senso fisico, riusciva non solo a spiegare i moti apparenti dei pianeti, ma permetteva anche di calcolare le loro posizioni nel futuro, con una precisione sufficiente per le osservazioni dell'epoca, realizzate ad occhio nudo.

Le divergenze che si manifestavano tra la teoria e le osservazioni, man mano che queste raggiungevano una maggiore precisione, venivano superate rendendo il sistema sempre più complesso. Per esempio, certe irregolarità osservate nel moto dei pianeti venivano spiegate col fatto che non era il pianeta a ruotare attorno al centro del primo epiciclo, ma il centro di un secondo epiciclo attorno al cui centro ruotava il pianeta. E se questo non bastava, se ne introducevano degli altri finché si riusciva a spiegare le osservazioni.

Il sistema geocentrico di Tolomeo mantenne il suo primato indiscusso per tutto il Medio Evo, e trovò degli oppositori solo nel XVI secolo, grazie agli sviluppi degli studi scientifici, umanistici e filosofici che caratterizzarono quest'epoca.

9.2.2 Sistema copernicano

Nel 1543 Niccolò Copernico dava alla luce la sua opera fondamentale, frutto di lunghe meditazioni e laboriosi calcoli: il *De Revolutionibus Orbium Coelestium*. In tale opera, corredata di dati e calcoli, venivano introdotte tre ipotesi già ammesse da Aristarco, e che stanno alla base del suo sistema del mondo detto *eliocentrico*:

1. il centro del Mondo è il Sole e non la Terra;
2. il moto diurno della sfera celeste è dovuto alla rotazione della Terra su se stessa;
3. tutti i pianeti fino ad allora conosciuti, e cioè Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno si muovono di moto uniforme attorno al Sole, su orbite eccentriche. La Luna resta un satellite della Terra, che è quindi il centro del suo moto.

Partendo dalle osservazioni, Copernico giunse dunque alla conclusione che tutti i pianeti, Terra compresa, ruotavano attorno al Sole descrivendo delle orbite i cui piani dovevano essere quasi coplanari. Infatti, solo in questo modo era possibile spiegare perché le traiettorie dei pianeti, viste dalla Terra, si trovavano tutte in prossimità dell'eclittica.

Copernico è stato il primo a dare una descrizione esatta della struttura del sistema solare, determinando le distanze relative tra i pianeti ed il Sole e calcolando i loro periodi di rivoluzione attorno al Sole. Egli aveva ragione nel considerare la rotazione diurna di tutti i corpi celesti come un fenomeno apparente, spiegabile grazie alla rotazione della Terra attorno al proprio asse. Considerava un fenomeno apparente anche il moto del Sole sull'eclittica, dovuto in realtà al moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole.

L'ipotesi eliocentrica Copernicana, pur non essendo ancora perfetta, consentiva una più semplice spiegazione dei moti celesti, dal moto diurno della sfera celeste ai più complicati moti planetari, ed inquadrava i fenomeni osservati in un modello avente un senso fisico maggiore rispetto a quello geocentrico.

Pur tuttavia, l'ipotesi eliocentrica copernicana sarebbe rimasta pura e semplice speculazione se all'inizio del XVII secolo le ricerche astronomiche di Galileo e quelle di Keplero, basate sulle osservazioni del suo maestro danese Tycho Brahe, non avessero dato un concreto supporto scientifico.

9.3 Rivoluzioni sinodiche e siderali dei pianeti

Si definisce *rivoluzione sinodica* (S) di un pianeta l'intervallo di tempo tra due sue configurazioni omologhe successive.

Si definisce *rivoluzione siderale* (P) l'intervallo di tempo necessario affinché un pianeta completi la sua orbita di 360°.

Infine, come abbiamo già visto, la rivoluzione siderale della Terra prende il nome di anno siderale (P_{\oplus}).

Questi tre periodi sono legati tra di loro da una semplice relazione matematica che scaturisce dal seguente ragionamento. Lo spostamento angolare giornaliero di un pianeta lungo la sua orbita è pari a $(360^{\circ}/P)$, mentre quello della Terra è pari a $(360^{\circ}/P_{\oplus})$. Poiché la differenza tra gli spostamenti angolari diurni del pianeta e della Terra (per i pianeti inferiori), o viceversa (per i pianeti superiori) è uguale allo spostamento apparente di un giorno del pianeta, cioè $(360^{\circ}/S)$, si avrà per i pianeti inferiori:

$$1/S = 1/P - 1/P_{\oplus} \quad [9.1]$$

mentre, per i pianeti superiori, si avrà:

$$1/S = 1/P_{\oplus} - 1/P \quad [9.2]$$

La [9.1] e la [9.2] prendono il nome di *equazioni del moto sinodico*.

Poiché dalle osservazioni si è in grado di ricavare il periodo sinodico S del pianeta e l'anno siderale P_{\oplus} della Terra, attraverso le equazioni del moto sinodico si è in grado di ricavare i periodi siderali P dei pianeti.

9.4 Leggi di Keplero

Galileo, con la scoperta dei satelliti di Giove avvenuta nel 1610, dimostrava che non solo la Terra ma anche altri pianeti potevano essere centro del moto di corpi celesti. La scoperta delle

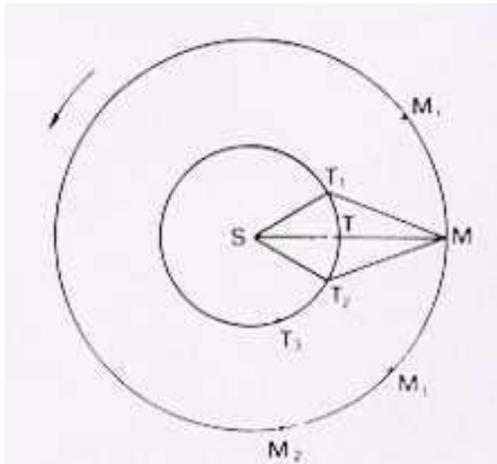


Fig. 9.6 – Determinazione della I legge di Keplero

macchie solari dimostrava che anche il Sole ruota attorno ad un asse lievemente inclinato rispetto al piano dell'eclittica. Infine, grazie al suo cannocchiale, aveva scoperto anche le fasi di Mercurio e Venere, dimostrando che almeno due pianeti ruotavano attorno al Sole e non attorno alla Terra.

I tempi erano ormai maturi per l'accettazione completa del sistema copernicano.

Un notevole contributo a quest'opera venne da Keplero il quale, discutendo le osservazioni che riguardavano le posizioni di pianeti, ed in particolare di Marte, fatte da lui stesso e da Tycho Brahe, giunse alla formulazione delle tre leggi che portano il suo nome.

La prima legge fu ricavata nel modo seguente.

Dalle osservazioni di Marte, riferite a due opposizioni consecutive, ottenne il periodo sinodico del pianeta, pari a $S = 2.135$ anni solari. Ponendo $P_{\oplus} = 1$ anno, si ottiene dalla [9.2] il periodo siderale di Marte, $P = 1.881$ anni. Successivamente, ricavò la distanza Sole – Marte a distanza

di intervalli multipli interi dell'anno siderale marziano, utilizzando triangolazioni a partire dalle posizioni del Sole, della Terra e di Marte. Infatti, nella figura 9.6, nel quadrilatero ST_1MT_2 , la distanza Terra – Sole ST_i è nota, mentre i tre angoli T_1ST_2 , ST_2M , ST_1M si ricavano dalle osservazioni del Sole e di Marte. In questo modo si ricavano le varie distanze SM_i di Marte dal Sole. Ebbene, Keplero si accorse che l'orbita di Marte costruita così per punti, non poteva essere una circonferenza ma doveva essere un'ellisse. Successive osservazioni misero in evidenza il fatto che anche l'orbita della Terra era un'ellisse, con un'eccentricità $e = 0.017$. Keplero enunciò quindi la sua prima legge:

1. *i pianeti descrivono attorno al Sole delle orbite ellittiche, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi, comune a tutti i pianeti.*

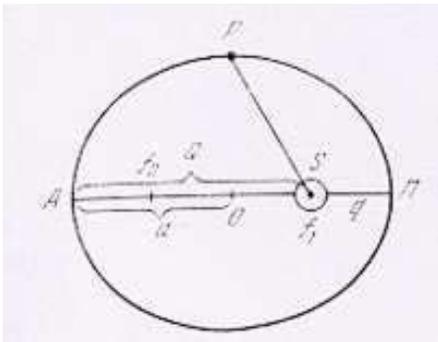


Fig. 9.7 – Orbita ellittica

Il segmento passante per il centro O dell'ellisse e per i due fuochi f_1 ed f_2 , prende il nome di asse maggiore dell'ellisse; esso la interseca nei due punti A e Π , che prendono il nome, rispettivamente, di afelio e perielio, quando il Sole si trova in f_1 (Fig. 9.7). Il rapporto $e = Of_1/O\Pi$ dà l'eccentricità dell'ellisse. Questa eccentricità caratterizza lo scarto fra l'ellisse ed il cerchio per cui è $e = 0$.

Le orbite dei pianeti differiscono poco dal cerchio, il che significa che le loro eccentricità sono piccole. Per esempio, l'eccentricità più piccola è quella di Venere ($e = 0.007$), mentre la più grande è quella di Plutone ($e =$

0.247). L'asse maggiore $A\Pi$ dell'ellisse prende anche il nome di *linea degli absidi*, mentre la retta f_1P che collega il Sole al pianeta prende il nome di *raggio vettore* r . Poiché il pianeta è più vicino al Sole quando si trova al perielio, mentre è più lontano da esso all'afelio, se indichiamo con a il semiasse maggiore dell'ellisse, la distanza tra il pianeta ed il Sole al perielio può essere espressa dalla relazione:

$$q_1 = a(1 - e) \quad [9.3]$$

mentre al perielio la distanza del pianeta dal Sole sarà:

$$q_2 = a(1 + e) \quad [9.4]$$

La distanza media del pianeta dal Sole viene indicata con il semiasse maggiore:

$$a = [(q_1 + q_2) / 2] \quad [9.5]$$

In forma analitica, la I legge di Keplero può essere espressa nel modo seguente:

$$r = [p / (1 + e \cos \theta)] \quad [9.6]$$

dove è: $p = a(1 - e^2)$

r = raggio vettore SP

θ = anomalia vera, cioè l'angolo formato dal raggio vettore SP con la direzione del perielio OΠ, contato in senso antiorario

La seconda legge, o legge delle aree, precede cronologicamente la prima, e venne dedotta da Keplero sempre dallo studio dell'orbita di Marte. Essa può essere enunciata nel modo seguente:

2. le aree descritte dal raggio vettore di ciascun pianeta sono proporzionali ai tempi impiegati a percorrerle; oppure: i raggi vettori dei pianeti descrivono aree uguali in tempi uguali (Fig. 9.9).

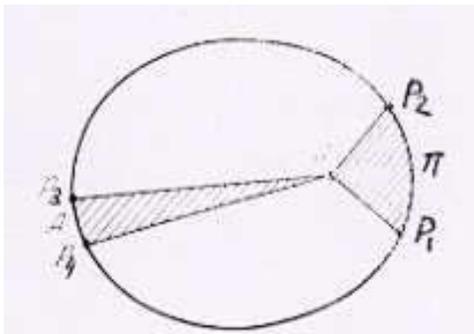


Fig. 9.8 – Illustrazione della II legge di Keplero

Per la seconda legge di Keplero, la superficie SP_1P_2 spazzata dal raggio vettore del pianeta nei pressi del perielio nell'intervallo di tempo Δt è uguale all'area SP_3P_4 spazzata dal raggio vettore del pianeta nei pressi dell'afelio, sempre nello stesso intervallo Δt (Fig. 9.8). Ma poiché l'arco P_1P_2 è maggiore dell'arco P_3P_4 , la velocità del pianeta al perielio è maggiore rispetto a quando si trova all'afelio, e ciò significa che il moto dei pianeti attorno al Sole è irregolare. La velocità di un pianeta al perielio può essere espressa mediante la relazione:

$$v_1 = v_m [(1 + e) / (1 - e)]^{1/2} \quad [9.7]$$

mentre all'afelio si ha:

$$v_2 = v_m [(1 - e) / (1 + e)]^{1/2} \quad [9.8]$$

dove v_m è la velocità circolare del pianeta, ottenuta ponendo $r = a$. Per la Terra si ha $v_m \approx 29.78$ km/sec.

In forma analitica, la II legge di Keplero, o legge delle aree, può essere espressa nel modo seguente:

$$r^2 (d\theta / dt) = \text{cost.} \quad [9.9]$$

La III legge di Keplero, assai posteriore rispetto alle prime due, stabilisce la dipendenza che intercorre fra le distanze dei pianeti dal Sole ed i periodi delle loro rivoluzioni. Essa può essere enunciata nel modo seguente:

3. *i quadrati dei tempi di rivoluzione dei pianeti attorno al Sole sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle rispettive orbite.*

Quest'ultima legge non è proprio esatta, ma costituisce un'ottima approssimazione nel caso del sistema solare.

In termini analitici la terza legge di Keplero può essere espressa nel modo seguente:

$$P^2 = K a^3 \quad [9.10]$$

con $K = [4\pi^2 / G (m_1 + m_2)]$

Se il periodo di rivoluzione P ed il semiasse maggiore a dell'orbita del pianeta vengono riferiti a quelli della Terra e sono espressi in anni siderali terrestri ed unità astronomiche, la [9.10] diventa:

$$P^2 = a^3$$

Con Galileo e Keplero, il sistema tolemaico viene definitivamente messo in crisi.

9.5 Elementi orbitali

L'orbita di un corpo soggetto ad attrazione newtoniana da parte di un altro corpo è piana e, in particolare, è una conica. Per individuare quest'orbita, o meglio per definirla, bisognerà conoscere:

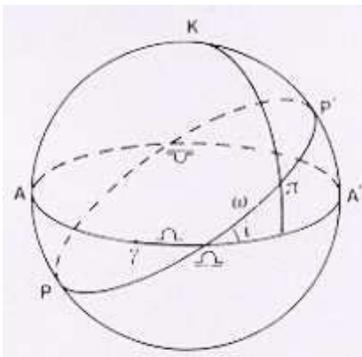


Fig. 9.9 – Elementi orbitali

- la giacitura del piano dell'orbita rispetto ad un piano fondamentale e ad una retta orientata; che, nel caso del sistema solare, sono il piano dell'eclittica e la direzione del punto γ ;
- gli elementi geometrici della conica, e cioè il semiasse maggiore, l'eccentricità e la direzione dell'asse maggiore;
- gli elementi temporali, e cioè il periodo di rivoluzione siderale P e l'epoca T_0 del passaggio al perielio, da cui si contano le anomalie vere.

Abbiamo già detto che il piano principale rispetto al quale si determina la posizione dell'orbita è il piano dell'eclittica. I due punti nei quali l'orbita del pianeta taglia il piano dell'eclittica prendono il nome di *nodo ascendente* e *nodo discendente*. Il nodo ascendente è quello in cui il pianeta taglia l'eclittica allontanandosi dal suo polo Sud. La retta risultante dall'intersezione tra il piano dell'orbita del pianeta e quello dell'eclittica, e passante per i due nodi, prende il nome di *linea dei nodi*.

Gli elementi che definiscono la giacitura del piano orbitale, e quindi l'orbita di un pianeta, sono dunque i seguenti:

1. l'inclinazione i del piano dell'orbita rispetto al piano dell'eclittica, con valori compresi tra 0° e 180° . Se è $0^\circ \leq i \leq 90^\circ$, il pianeta si sposta intorno al Sole (S) nello stesso verso della Terra (moto diretto), mentre se è $90^\circ < i < 180^\circ$, il pianeta si sposta nel verso opposto (moto retrogrado);
2. la longitudine eliocentrica del nodo ascendente Ω , cioè dell'angolo tra le direzioni che vanno dal centro del Sole verso il nodo ascendente ed il punto γ . La longitudine del nodo ascendente varia tra 0° e 360° .

Questi due primi elementi orbitali definiscono dunque la posizione nello spazio del piano dell'orbita. Gli elementi che invece definiscono la forma dell'orbita e la sua orientazione sono:

3. la distanza angolare ω tra il perielio ed il nodo ascendente, cioè l'angolo tra le direzioni provenienti dal centro del Sole verso il nodo ascendente Ω e verso il perielio Π . Viene contata da 0° a 360° , nel piano dell'orbita nel verso del moto del pianeta;
4. l'eccentricità dell'orbita $e = [(a^2 - b^2)^{1/2} / a]$, dove a e b sono i semiassi dell'orbita ellittica;
5. il semiasse maggiore a dell'orbita ellittica che definisce, senza ambiguità, la rivoluzione siderale T del pianeta.

Gli elementi temporali sono:

6. l'istante T_0 del passaggio al perielio;
7. il periodo P . Nel caso del sistema solare, quest'ultimo non è necessario se è noto a , in quanto P potrà essere determinato utilizzando la III legge di Keplero.

Conoscere gli elementi orbitali i , Ω , ω , e , a (oppure P), e T_0 significa conoscere come si muove un pianeta nella sua orbita, insieme alla forma ed alla giacitura di quest'orbita.

Se si conoscono l'istante T_0 del passaggio al perielio e gli altri elementi orbitali, si può calcolare per ogni istante t la posizione del pianeta nel piano della sua orbita.

Come abbiamo già visto nel paragrafo 9.4, la posizione di un pianeta sulla sua orbita è definita dal raggio vettore r e dall'anomalia vera θ , che vengono calcolati in base alle seguenti formule:

$$r = a (1 - e \cos E) \quad [9.11]$$

$$\operatorname{tg} (\theta / 2) = \operatorname{tg} (E / 2) [(1 + e) / (1 - e)]^{1/2} \quad [9.12]$$

Nella [9.12] la quantità E prende il nome di *anomalia eccentrica*, ed è l'angolo compreso tra le due semirette OP e ON (Fig. 9.11).

L'anomalia eccentrica E viene calcolata tramite l'equazione di Keplero:

$$M = E - e \sin E \quad [9.13]$$

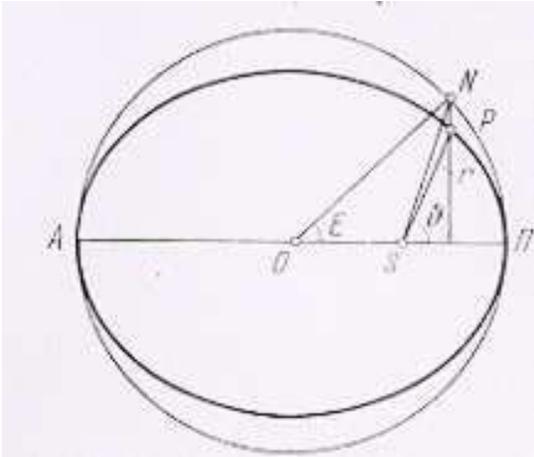


Fig. 9.10 – Anomalia vera, media ed eccentrica

Nella [9.13] la quantità M prende il nome di *anomalia media*. L'anomalia media M è l'arco di cerchio che il pianeta descriverebbe nel tempo $(t - T_0)$ se esso si spostasse su un'orbita circolare di centro O e raggio a pari al semiasse maggiore dell'ellisse (Fig. 9.10), con velocità angolare media v_m ; cioè:

$$M = v_m (t - T_0) = (2 \pi / P) (t - T_0) \quad [9.14]$$

La posizione di un pianeta ad un dato istante t viene dunque calcolata nel modo seguente:

1. si ricava l'anomalia media M in base alla formula [9.14], essendo P e $(t - T_0)$ noti;
2. si ricava l'anomalia eccentrica E dalla formula [9.13], applicando il metodo delle approssimazioni successive, essendo noti e ed M ;
3. si ricava il raggio vettore r e l'anomalia vera θ attraverso le relazioni [9.11] e [9.12].

Dopo aver determinato la posizione del pianeta sull'orbita per gli istanti t_i assegnati si possono calcolare, per questi stessi istanti t_i , le sue coordinate spaziali eliocentriche. Conoscendo inoltre gli elementi orbitali della Terra e la posizione della Terra negli stessi istanti t_i , si possono determinare le coordinate geocentriche del pianeta e trovarne la distanza dal centro della Terra.

La trattazione è alquanto complessa ed esula dalle finalità del presente corso, per cui si rimanda ai testi specialistici per l'approfondimento della sua trattazione completa.

La definizione delle coordinate apparenti dei pianeti in base agli elementi orbitali si chiama *calcolo delle effemeridi*, cioè delle tabelle che danno la posizione dei pianeti per qualunque istante negli anni futuri.

Il problema inverso, e cioè il calcolo degli elementi di un'orbita in base alle coordinate osservate si chiama definizione delle orbite. Questo problema è ben più difficile del calcolo delle effemeridi, ed è stato risolto da Keplero osservando i pianeti per lungo tempo. E' infatti evidente che le coordinate equatoriali α e δ di un pianeta, o le coordinate eclittiche λ e β , ricavabili facilmente (capitolo 3) da quelle equatoriali, dipendono:

- a) dall'istante t in cui vengono fatte le osservazioni, o dall'istante t cui si riferiscono;
- b) dai sei elementi orbitali;

per cui, in generale, si ha:

$$\lambda = \lambda(i, \Omega, \omega, e, a, T_0, t)$$

$$\beta = \beta(i, \Omega, \omega, e, a, T_0, t)$$

Poiché le incognite sono sei, in linea di principio basterebbero tre coppie di osservazioni (λ, β) , in tre tempi t diversi, per risolvere il precedente sistema. In pratica, però, non essendo sempre possibile esplicitare le formule precedenti, si procede per altre vie che semplificano notevolmente l'impostazione del problema. Anche per quanto riguarda l'approfondimento di questo aspetto, si rimanda ai testi specialistici.

Il calcolo delle effemeridi e la definizione delle orbite sono i compiti principali dell'astronomia teorica.

9.6 Leggi empiriche delle distanze planetarie

Noti i periodi siderali, la terza legge di Keplero permette di ricavare le distanze medie dei pianeti dal Sole in unità astronomiche. Tali distanze possono essere espresse in modo approssimato mediante formule empiriche del tipo:

$$x_n = b + c d^n \quad [9.15]$$

dove n rappresenta una conveniente successione di numeri interi, e b, c, d sono delle costanti opportune. La più famosa legge empirica delle distanze planetarie è quella di Titius e Bode, formulata ancora prima che venissero scoperti Urano, Nettuno e Plutone. Consideriamo la progressione geometrica 0, 3, 6, 12, 24, 48, ...: se a ciascun numero aggiungiamo 4 e lo dividiamo per dieci, otteniamo la serie: 0.4, 0.7, 1.0, 1.6, 2.8, 5.2, ... che coincide abbastanza bene con le distanze dei pianeti dal Sole, compresi gli asteroidi, espresse in unità astronomiche. La formulazione analitica della legge di Titius e Bode è la seguente:

$$x_n = 0.4 + 0.3 \cdot 2^n \quad [9.16]$$

dove n assume il valore - per Mercurio, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 per i successivi pianeti, compresi gli asteroidi, fino ad Urano. La legge è in difetto per Nettuno, ma rappresenta bene Plutone con $n = 7$.

Un'altra buona rappresentazione della [9.15] è stata data da Armellini, ponendo $b = 0, c = 1, d = 1.53$. La successione di n è data da: $n = -2$ per Mercurio e quindi $n = -1, 0, 1, 2-3, 4, 5, 7, 8, 9$ per i successivi pianeti. Si noti che la fascia degli asteroidi è rappresentata da due numeri, come se si trattasse di due pianeti. Manca il numero 6, mentre Urano, Nettuno e Plutone sono rappresentati, rispettivamente, dai numeri 7, 8, 9. Nella tabella che segue sono confrontate le

distanze ottenute con queste due leggi empiriche (riga due per la legge di Titius – Bode, e riga tre per la legge di Armellini) con quelle reali (riga 1).

Merc.	Ven.	Terra	Marte	Ast.	Giove	Sat.	Urano	Nett.	Plut.
0.39	0.72	1.00	1.52	2.80	5.2	9.54	19.19	30.07	39.46
-	0	1	2	3	4	5	6	--	7
0.40	0.70	1.00	1.60	2.80	5.20	10.00	19.60	--	38.80
-2	-1	0	1	2-3	4	5	7	8	9
0.43	0.65	1.00	1.53	2.3/3.4	5.50	8.40	19.60	30.00	45.90

9.7 Masse, periodi di rotazione, velocità di fuga ed albedo

La determinazione della massa di un pianeta è immediata se il pianeta ha dei satelliti. Sia infatti P il periodo siderale del satellite, M la massa del pianeta, a il semiasse maggiore dell'orbita descritta dal satellite attorno al pianeta. Per la terza legge di Keplero, e trascurando la massa del satellite rispetto a quella del pianeta, si ha:

$$M = a^3 [(4 \pi^2) / (G P^2)] \tag{9.17}$$

Se invece, come nel caso di Mercurio e di Venere, mancano i satelliti, la massa del pianeta si può ricavare solo applicando il metodo delle perturbazioni prodotte sull'orbita di un pianeta vicino.

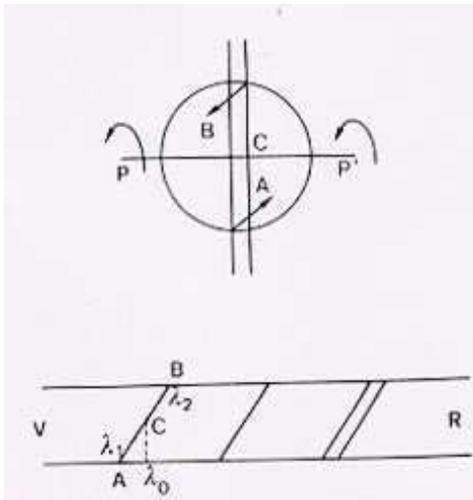


Fig. 9.11 – Determinazione della velocità di rotazione di un pianeta

Le masse dei pianeti sono dunque conosciute con sufficiente precisione, ed in alcuni casi con grande precisione.

Un metodo efficace per ricavare la velocità di rotazione di un pianeta è quello spettroscopico. Se si pone la fenditura dello spettroscopio perpendicolarmente all'asse di rotazione (Fig. 9.11), si ottiene uno spettro le cui righe risulteranno inclinate per effetto della rotazione del pianeta. La velocità di rotazione sarà data semplicemente dalla formula dell'effetto Doppler:

$$V' = c [(\lambda_2 - \lambda_0) / \lambda_0] \tag{9.18}$$

dove λ_2 è la lunghezza d'onda misurata ad una delle estremità della riga, e λ_0 è la lunghezza d'onda

centrale. Ma poiché la luce riflessa dal pianeta proviene dal Sole e si ha dunque un doppio effetto Doppler, la relazione precedente dovrà essere divisa per due, e si ha dunque:

$$V = c [(\lambda_2 - \lambda_0) / 2 \lambda_0] \quad [9.19]$$

Nel capitolo 6 (6.4) abbiamo visto come si fa a determinare il raggio di un pianeta. Noto dunque il suo raggio equatoriale R_0 , il periodo di rotazione del pianeta sarà:

$$P = R_0 [(2 \pi) / V] \quad [9.20]$$

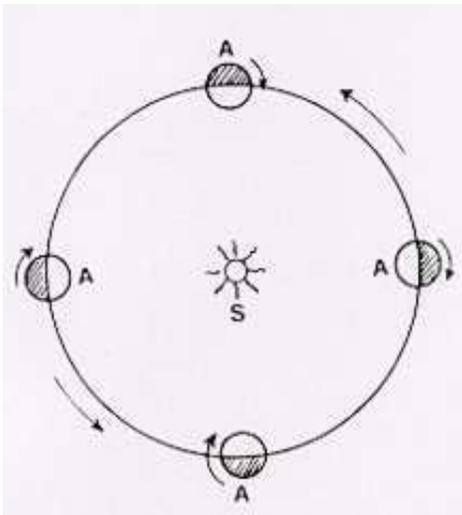


Fig. 9.12 – Durata del giorno venusiano

I risultati ottenuti per Mercurio sono molto interessanti. E' stato infatti scoperto che il pianeta ruota con un periodo di 59 giorni intorno ad un asse inclinato di 25° . Tale periodo è pari a $2/3$ del periodo di rivoluzione di 88 giorni: il pianeta compie dunque 3 rotazioni ogni due rivoluzioni.

Per quanto riguarda Venere, si è invece scoperto che il pianeta ruota attorno ad un asse inclinato di -87° , quindi con moto retrogrado, con un periodo pari a 244.7 giorni. Come si può vedere dalla Fig. 9.12, a causa di ciò, nel corso del lungo anno venusiano ci sono due giorni e due notti.

Un altro fattore importante nello studio dei pianeti è la *velocità di fuga* alla sua superficie, data da:

$$V_f = [(2 G M) / R]^{1/2} \quad [9.21]$$

dove M ed R sono, rispettivamente, la massa ed il raggio del pianeta. Come si può vedere dalla relazione precedente, la velocità di fuga è maggiore per i pianeti con grande massa: questo aspetto è importante per quanto concerne la capacità da parte del pianeta di trattenere un'atmosfera, anche se ci sono altri fattori che intervengono, quali ad esempio la velocità media delle molecole del gas, rendendo quindi il problema più complesso.

Supponendo infatti che il gas si trovi in equilibrio maxwelliano, vale la relazione:

$$[(m V^2) / 2] = [(3 k T) / 2]$$

da cui segue:

$$V = [(3 k T) / m]^{1/2}$$

Cioè la velocità media delle particelle di gas aumenta con la temperatura e quindi se la sua velocità si avvicina a quella di fuga, verrà dissipato nello spazio. Questo è ciò che è accaduto per tutti i pianeti ed i satelliti che non hanno un'atmosfera.

Infine, definiamo *albedo* di un pianeta il rapporto tra la quantità E_r di energia raggiante riflessa dal pianeta in tutte le direzioni e la quantità di energia E che esso riceve dal Sole nello stesso tempo. Avremo cioè:

$$A = E_r / E$$

Se indichiamo con Q la quantità di energia raggiante solare ricevuta per $\text{cm}^2 \text{sec}^{-1}$ alla distanza di 1 unità astronomica, un pianeta di raggio R posto alla distanza d (in unità astronomiche) dal Sole, riceverà nell'unità di tempo l'energia:

$$E = [(\pi R^2 Q) / d^2]$$

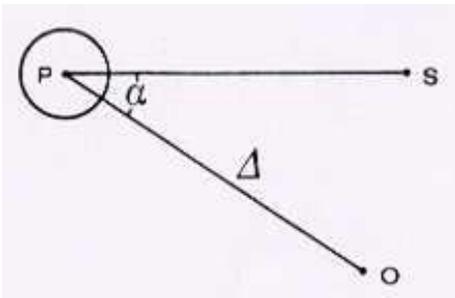


Fig. 9.13 – Energia ricevuta da un pianeta

Se il pianeta diffondesse la luce solare ugualmente in tutte le direzioni, e se fosse $P(o)$ la quantità di energia ricevuta dalla Terra, posta a distanza Δ dall'osservatore, si avrebbe:

$$E_r = 2 \pi \Delta^2 P(o)$$

In realtà, la quantità di energia che un osservatore riceve sarà funzione di un angolo di fase α , formato dalla direzione Sole – pianeta – osservatore (Fig. 9.13).

Sarà dunque:

$$E_r = 2 \pi \Delta^2 \int_0^{\pi} P(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha = 2 \pi \Delta^2 P(o) \int_0^{\pi} \psi(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha$$

per cui avremo:

$$A = [(2 \Delta^2 P(o)) / (r^2 Q)] \int_0^{\pi} \psi(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha$$

Dal calcolo dell'albedo, si ricava che Mercurio, Marte e Plutone hanno scarso potere riflettente; al contrario, Venere, avvolta da una densa atmosfera, riflette il 76% della luce solare. Gli altri pianeti, Terra compresa, hanno un'albedo intermedia.

9.8 Cenni sulla struttura del sistema solare

Si definisce *sistema solare* l'insieme del Sole e dei corpi maggiori e minori che ruotano attorno ad esso.

Il Sole costituisce il centro dinamico del sistema solare, ed intorno ad esso ruotano 9 pianeti, oltre 40 satelliti planetari, più di 1800 tra pianetini ed asteroidi, numerosissime comete ed una moltitudine di meteoriti.

I pianeti Mercurio, Venere, Marte, Giove, e Saturno sono conosciuti sin dall'antichità. Urano

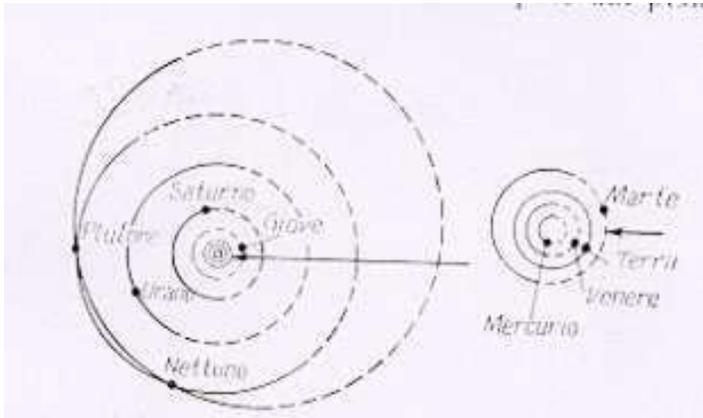


Fig. 9.14 – Schematizzazione del sistema solare. Le orbite dei pianeti sono in scala. A destra è rappresentata la parte interna del sistema solare. La freccia indica la direzione del punto vernale, da cui si calcolano le longitudini eliocentriche dei pianeti. La linea tratteggiata indica la parte dell'orbita al di sotto dell'eclittica.

è stato scoperto da W. Herschel nel 1781; nel 1846 è stato scoperto Nettuno, l'ottavo pianeta; la scoperta di Plutone, il nono pianeta, risale al 1930 e la si deve all'astronomo americano Clyde Tombaugh.

La Luna, satellite della Terra, è l'oggetto celeste più luminoso, dopo il Sole. Galileo scoprì che anche Giove possedeva dei satelliti e, successivamente, vennero scoperti anche i satelliti di Saturno, Marte, Urano, Nettuno, e Plutone. La ricerca di nuovi corpi del sistema solare prosegue sistematicamente e, ogni anno, si scoprono nuovi satelliti, asteroidi, comete.

Di ciascun pianeta sono stati determinati, con le osservazioni, i periodi siderali e sinodici di rivoluzione, le distanze dal sole, i raggi, le masse, le densità medie, i periodi di rotazione, l'inclinazione dell'asse, e gli altri elementi orbitali e , i , Ω , ω , T_0 . Non si conoscono satelliti naturali di Mercurio e di Venere; la Terra ne ha uno (la Luna); Marte ne ha due (Fobos e Deimos); Giove e Saturno ne hanno molti, più di tredici il primo, più di dieci il secondo; Urano ne ha cinque; Nettuno ne ha due; Plutone ne ha uno.

Nella Fig. 9.14 è schematizzata la disposizione delle orbite dei pianeti del sistema solare, mentre nella tabella 1 sono riportati i dati geometrici, dinamici e fisici dei pianeti.

I pianeti sono suddivisi in due gruppi, sulla base delle loro caratteristiche fisiche: i pianeti di tipo terrestre (Mercurio, Venere, Terra e Marte), ed i pianeti giganti (Giove, Saturno, Urano e Nettuno). Di Plutone non si conosce molto, anche se sembra avere caratteristiche fisiche simili a quelle dei grandi satelliti dei pianeti giganti. La Luna merita invece un discorso a parte in quanto, pur essendo il satellite della Terra, ha un rapporto tra la sua massa e quella della Terra pari a $(1/81)$, e quindi, a buon ragione, si può considerare il sistema Terra – Luna come un pianeta doppio, analogamente al sistema Plutone – Caronte. Nella tabella 2 sono riportate alcune caratteristiche fisiche dei pianeti, il cui confronto mette meglio in evidenza le differenze esistenti tra i pianeti di tipo terrestre e quelli giganti.

I Pianeti giganti hanno dimensioni e masse notevolmente maggiori, densità minori e ruotano più rapidamente. I pianeti giganti contribuiscono per circa il 98% della massa totale dei

pianeti del sistema solare. Vi è inoltre un altro fattore importante che differenzia le due famiglie di pianeti. Il flusso di calore emesso dall'interno di Giove e Saturno è confrontabile col flusso di calore fornito ai due pianeti dal Sole, mentre il flusso termico interno di tutti i pianeti di tipo terrestre è praticamente nullo. I pianeti giganti hanno numerose famiglie di satelliti che possono essere visti come dei mini sistemi solari ed inoltre hanno tutti degli anelli. Per finire, i pianeti giganti sono meno studiati rispetto ai pianeti terrestri essenzialmente per due motivi: a) nel loro studio, non è possibile fare analogie con la Terra; b) le loro distanze sono notevolmente maggiori rispetto ai pianeti terrestri, e quindi si possono ottenere informazioni più dettagliate solo inviando delle sonde spaziali nelle loro vicinanze. Le finalità del corso esulano dall'analisi e dalla descrizione degli aspetti caratteristici dei singoli pianeti, per cui si rimanda ai testi specialistici per l'approfondimento degli argomenti non trattati in queste dispense.

Tab. 9.1 – Dati geometrici, dinamici e fisici dei pianeti

	Mercurio	Venere	Terra	Marte	Giove	Saturno	Urano	Nettuno	Plutone
a (u.a)	0.3871	0.7233	1.000	1.5237	5.20	9.539	19.182	30.058	39.44
P	87 ^d .97	224 ^d .7	365 ^d .25	687 ^d	11 ^y .86	29 ^y .46	84 ^y .01	164 ^y .8	247 ^y .7
e	0.21	0.007	0.0167	0.093	0.048	0.056	0.047	0.009	0.250
i	7°	3° 23'	0.000	1° 51'	1° 18'	2° 29'	0° 46'	1° 46'	17° 10'
M	0.054	0.815	1.000	0.1075	317.8	95.15	14.54	17.23	0.0025
R	0.38	0.950	1.000	0.532	11.18	9.42	3.84	3.93	0.5
P_{rot}	59 ^d	244 ^d .3	23 ^h 56 ^m 4 ^s	24 ^h 37 ^m	9 ^h 50 ^m	10 ^h 14 ^m	15 ^h 36 ^m	18 ^h 26 ^m .4	---
<i>Inclin. asse</i>	---	- 177°	23°27'	23°59'	3°05'	26°44'	98°	28°48'	---
<i>dens.</i> (gr/cm)	5.4	5.2	5.52	3.95	1.34	0.70	1.58	2.30	---
V_{fuga} (km/s)	4.2	10.3	11.2	5.0	61	37	22	25	---
<i>albedo</i>	0.056	0.72	0.39	0.16	0.70	0.75	0.90	0.82	0.145
<i>Satell.</i>	---	---	1	2	> 13 + anelli	> 17 + anelli	5 (?) + anelli	2 (?) + anelli	1

9.9 Cenni sulle origini del sistema solare

Qualsiasi teoria che voglia spiegare le origini del sistema solare deve tener conto di alcune evidenze osservative, e cioè:

- le orbite dei pianeti attorno al Sole sono praticamente complanari, con le eccezioni di Mercurio e Plutone;
- tutti i pianeti si muovono sulle loro orbite con moto diretto;

c) le distanze dei pianeti dal Sole seguono la legge empirica di Titius-Bode.

Partendo da questi fatti, Kant e Laplace proposero una teoria secondo cui il sistema solare ha avuto origine da una nebulosa ruotante da cui, per successiva centrifugazione, si sarebbero staccati degli anelli da cui, per un successivo processo di condensazione, si sarebbero formati i pianeti.

Questa teoria, che ebbe successo fino al secolo scorso, è stata successivamente abbandonata perché violava il principio di conservazione del momento angolare. Infatti il Sole, pur avendo da solo il 99.87% della massa dell'intero sistema solare, possiede solo il 0.54% del momento angolare, mentre Giove e Saturno, da soli, possiedono il 99.46% del momento angolare.

Un'altra teoria che cercava di spiegare la formazione del sistema solare è quella dell'incontro del Sole con un'altra stella. Tale incontro avrebbe provocato un'onda di marea che avrebbe dato origine ad un filamento gassoso, spesso al centro e sottile all'estremità, da cui si sarebbero formati i pianeti. Questa teoria, molto seguita nei primi decenni del secolo scorso, è oggi del tutto abbandonata.

Oggi, il problema delle origini del sistema solare è affrontato nel contesto più ampio dello studio della formazione stellare.

Si sa che le stelle si formano attraverso un processo di condensazione di una nube di polvere e di gas che può raggiungere una massa pari a 10^8 masse solari. Questi processi danno luogo alla formazione non di una singola stella, ma di ammassi di stelle che, successivamente, si dissolvono nelle singole stelle. La probabilità che da una protostella si formi una singola stella, un sistema doppio o multiplo, o una singola stella circondata da un sistema planetario, dipende dalla massa iniziale della protostella. Il processo di formazione è analogo a quello ipotizzato da Kant – Laplace, con la differenza che, la stella centrale, cede gran parte del proprio momento angolare al mezzo interstellare circostante, attraverso il vento solare, mentre i pianeti mantengono inalterato il loro momento angolare.

In questo modo si giustifica quella che sembrava essere un'anomalia della teoria originale di Kant – Laplace, e cioè la non conservazione del momento angolare.

Esercizi

- 9.1** Il disco del Sole, visto da Marte, ha un diametro angolare pari a $22'.7$. Sapendo che il diametro lineare del Sole è pari a 109 raggi terrestri, determinare la distanza di Marte dal Sole in anni luce.
- 9.2** Un pianeta è visibile ad una distanza di 120° dal Sole. Si tratta di un pianeta inferiore o superiore?

- 9.3** Sapendo che i periodi di rivoluzione della Terra e di Marte sono, rispettivamente, 365.25 e 687 giorni, dire quanto guadagna ogni giorno la Terra rispetto a Marte.
- 9.4** Determinare il periodo di rivoluzione siderale di Marte, sapendo che il suo periodo sinodico è pari a 780 giorni.
- 9.5** Il periodo di rivoluzione sinodica di un pianeta immaginario è uguale a 3 anni. Qual'è il suo periodo di rivoluzione siderale?
- 9.6** La distanza di Giove dalla Terra è pari a 5.2 unità astronomiche. Qual'è la massima elongazione della Terra, vista da Giove, quando essa è visibile all'alba o al tramonto?
- 9.7** Determinare la distanza R di Venere dal Sole, in unità astronomiche, sapendo che la sua massima elongazione è pari a 47° .
- 9.8** Calcolare il raggio vettore r e l'anomalia vera θ di un pianeta minore nel momento in cui la sua anomalia eccentrica è $E = 60^\circ 4' .5$, ed i parametri della sua orbita sono: $\log a = 0.4603$, $e = 0.04625$
- 9.9** Il periodo di rivoluzione del satellite più interno di Saturno è pari a 23^h , mentre quello del suo sesto satellite è pari a $15^d 23^h$. Qual'è la relazione tra le loro distanze medie da Saturno?
- 9.10** Un satellite di Giove dista dal pianeta una distanza pari a 14.9 raggi planetari, ed il suo periodo di rivoluzione è pari a $7^d 3^h 7^m$. Qual'è il periodo di rivoluzione di un altro satellite la cui distanza dal pianeta è pari a 2.52 raggi planetari?

Bibliografia

Per l'approfondimento degli argomenti trattati, si consigliano i seguenti testi:

1. **Bakunin, P., Kononovic, E., Moroz, V.**, *Astronomia Generale*, Edizioni Mir
2. **Barbieri, C.**, *Lezioni di Astronomia*, Zanichelli
3. **Brouwer, D., Clemence, G.M.**, *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press
4. **M. Green, R.**, *Spherical Astronomy*, Cambridge University Press
5. **Rosino, L.**, *Lezioni di Astronomia*, CEDAM
6. **Smart, W.M.**, *Text-book of Spherical Astronomy*, Cambridge University Press
7. **Vorontsov-Vel'yaminov, B.A.**, *Astronomical Problems*, Pergamon Press
8. **Woolard, E.W., Clemence, G.M.**, *Spherical Astronomy*, Academic Press
9. **Zagar, F.**, *Astronomia Sferica e Teorica*, Zanichelli