

Prof. Filippo Frontera

DISPENSE DI
MISURE ASTRONOMICHE

Corso per gli studenti del Corso di Studio triennale in
Fisica

Università di Ferrara

Premessa

Queste dispense vanno intese come ausilio al corso di Misure Astronomiche, parte generale. Esse non sono completamente esaustive. Si consiglia perciò di approfondire gli argomenti trattati con i libri di testo suggeriti per il corso.

Desidero ringraziare lo studente Filippo Nobili, che ha trasformato in file Word le trasparenze che accompagnavano le lezioni.

Il testo e' stato rivisto successivamente con l'ausilio dello studente Francesco Taddia, che ringrazio.

Ultima revisione: dicembre 2011.

1. INTRODUZIONE

1.1 Sonde che trasportano informazioni sugli oggetti celesti

Sono:

- Radiazione elettromagnetica
- Raggi cosmici (ovvero fasci di particelle cariche come protoni, elettroni, nuclei di vario Z , neutrini, ecc.)
- In futuro: onde gravitazionali, particelle ancora esotiche (es. neutralini)

Le onde elettromagnetiche sono argomento di Fisica 2. Per chi non le ancora studiate, si pensi a un campo elettrico e magnetico che, accoppiati, si muovono nello spazio vuoto con velocità c di circa 300.000 km/s (velocità della luce). Fissato un punto nello spazio, la loro intensità, per via della propagazione dell'onda, è variabile nel tempo in modo sinusoidale. Analogamente, fissato un certo istante, anche l'intensità del campo elettrico e magnetico, varia in modo sinusoidale in punti diversi della direzione di propagazione.

La distanza tra due massimi del campo (elettrico o magnetico) determina la lunghezza d'onda λ dell'onda elettromagnetica, il periodo dell'onda T è la distanza temporale tra due massimi del campo (elettrico e magnetico), mentre la frequenza ν dell'onda è data dal numero di massimi (o minimi) del campo (elettrico o magnetico) che attraversano il punto dato in 1 secondo.

Relazioni tra le grandezze che caratterizzano un'onda elettromagnetica:

a) $\lambda = c \cdot T$,

b) $\nu = \frac{c}{\lambda}$, con $\nu = \frac{1}{T}$

Le onde elettromagnetiche risentono solo di campi gravitazionali molto forti, ma non di campi elettrici o magnetici; per questo permettono di determinare la direzione dell'oggetto osservato.

I raggi cosmici (RC) sono costituiti principalmente da particelle cariche (elettroni, protoni, nuclei di elementi), perciò sentono la presenza di campi elettrici e magnetici interstellari che ne cambia la loro direzione. Per questa ragione non possiamo associare ad essi una direzione di emissione e quindi una sorgente di produzione. Solo i RC di energia molto elevata (10^{18} - 10^{20} eV), il cui flusso è irrisorio, potrebbero mantenere la direzione di partenza e quindi potrebbero darci informazioni sulle sorgenti di emissione.

A scoprire i raggi cosmici furono, indipendentemente, il fisico austriaco **Victor Franz Hess** e il fisico italiano **Domenico Pacini**, con esperimenti eseguiti tra il 1907 e il 1912 e pubblicati nel 1912. Hess fu il primo ad avventurarsi nello spazio con un pallone con l'intento di scoprire se la velocità di scarica degli elettrometri osservata a terra fosse dovuta ad agenti esterni provenienti dalla terra o dal cielo. Avendo scoperto che tale velocità aumentava con l'altezza da terra, fu Hess che chiamò queste particelle che causavano la scarica degli elettrometri **Raggi Cosmici**.

Le onde gravitazionali, previste dalla Relatività Generale, sono campi gravitazionali variabili che si propagano nello spazio. Come conseguenza di tali perturbazioni, ci si aspetta una deformazione dello spazio euclideo. Finora non sono state osservate, nonostante che si sia giunti a apprezzare

deformazioni lineari dello spazio, dovute al passaggio di onde gravitazionali di estrema piccolezza, 10^{-22} cm. Ci si aspetta che si possano generare in fenomeni celesti, come la fusione di due stelle. Negli ultimi 50 anni, da quando è stato possibile osservare il cielo in tutte le bande dello spettro elettromagnetico (onde radio, IR, ottico, UV, raggi X, raggi γ), la qualità delle informazioni è notevolmente migliorata. Oggi tutte le bande dello spettro elettromagnetico sono accessibili, grazie anche all'astrofisica spaziale. Le varie bande dello spettro elettromagnetico sono riportate in Tabella 1.1

Tabella 1.1 - *Spettro elettromagnetico*

Radiazione	Lung. D'onda	Frequenza (Hz)	Energia (J)	Temp. (K)
Radio	30m – 3cm	$10^7 - 10^{10}$	$7 \times 10^{-27} - 7 \times 10^{-24}$	$5 \times 10^{-4} - 0.5$
Microonde	3cm - 1mm	$10^{10} - 3 \times 10^{11}$	$7 \times 10^{-24} - 2 \times 10^{-22}$	0.5 - 10
Infrarosso	1mm - 1 μ m	$3 \times 10^{11} - 3 \times 10^{14}$	$7 \times 10^{-22} - 2 \times 10^{-19}$	$10 - 10^4$
Ottico	1micro - 300nm	$3 \times 10^{14} - 10^{15}$	$2 \times 10^{-19} - 7 \times 10^{-19}$	$10^4 - 5 \times 10^4$
UV	300nm - 10nm	$10^{15} - 3 \times 10^{16}$	$7 \times 10^{-19} - 2 \times 10^{-7}$	$5 \times 10^4 - 10^6$
Raggi X	100A - 0.1A	$3 \times 10^{16} - 3 \times 10^{19}$	$2 \times 10^{-17} - 2 \times 10^{-14}$	$10^6 - 10^9$
Raggi gamma	< 0.1A	$> 3 \times 10^{19}$	$> 2 \times 10^{-14}$	$> 10^9$

- Relazioni utili

$$\lambda = c / \nu \qquad c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$E = h \nu \qquad h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$T(K) \approx h \nu / k = 1.16 \times 10^7 (h\nu)_{keV} \qquad k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg/K} = 8.61 \times 10^{-8} \text{ keV/K}$$

- Trasformazioni utili

$$1 \text{ \AA} = 1 \times 10^{-8} \text{ cm} = 1 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} \Rightarrow 1 \text{ \AA} = 10^{-1} \text{ nm}$$

$$1 \text{ keV} = 1,602 \times 10^{-16} \text{ J}$$

$$E_{keV} = 4,134 \times 10^{-18} \nu_{Hz}$$

$$1 \text{ nm} = 10 \text{ \AA}$$

$$E_{keV} = 12,3 / \lambda_{\text{\AA}}$$

$$1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg}$$

$$1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

$$1 \text{ J} = 6.25 \times 10^{18} \text{ eV}$$

in cui eV sta per elettron-volt, J per Joule, 1 keV =1000 eV.

Un elettron-volt è l'energia cinetica che acquista un elettrone quando, in un campo elettrico, è sottoposto alla differenza di potenziale di 1 Volt.

1.2 Le diverse astronomie e il loro ruolo

- Ad ogni banda dello spettro elettromagnetico è associata una diversa astronomia: astronomia radio, astronomia ottica, astronomia IR, astronomia UV, astronomia X, astronomia γ .
- Ogni banda dello spettro è diventata accessibile all'osservazione astronomica in tempi diversi. Fino agli anni '30 si faceva solo astronomia ottica. Poi si è passati alla radio-astronomia. Negli anni '60 fu la volta dei raggi X la cui osservazione è possibile solo al di sopra dell'atmosfera terrestre.
- L'apertura di una banda ha richiesto sviluppi tecnologici diversi: nuovi rivelatori, nuove tecniche di focalizzazione, razzi vettori (per le bande osservabili fuori dall'atmosfera).

Ogni regione spettrale è appropriata per l'osservazione di tipi molto diversi di oggetti e processi fisici. Per esempio, oggetti a temperatura diversa emettono onde elettromagnetiche in bande diverse di frequenza (o lunghezza d'onda). Gli oggetti celesti, osservati a frequenze diverse, assumono aspetti diversi e mostrano diverse peculiarità. Un esempio è mostrato in Figura 1.1: la galassia di Andromeda (M31) osservata in bande di frequenza diverse.

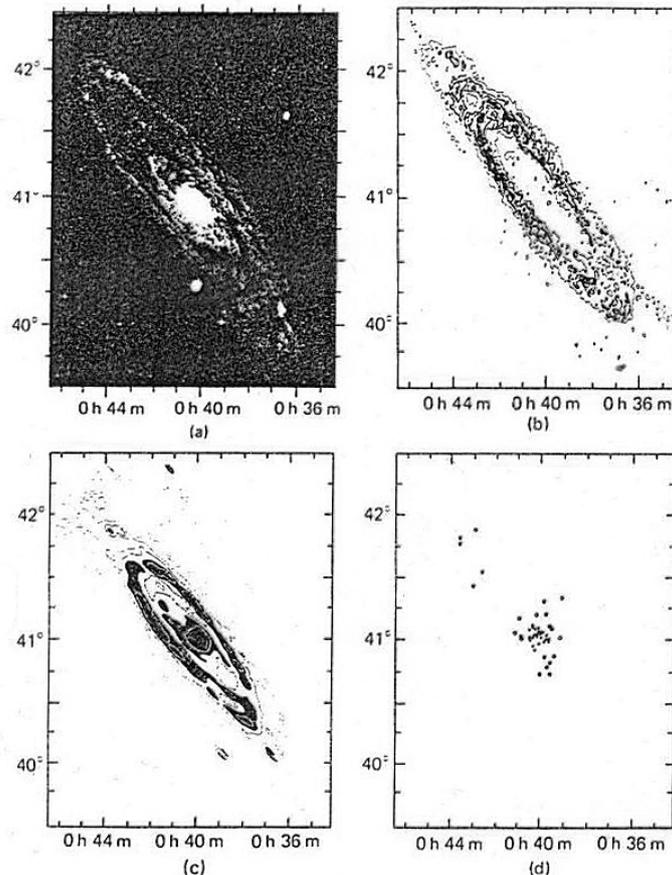


Figura 1.1 – *Quattro immagini della galassia Andromeda, M31, ripresa a differenti lunghezze d'onda: (a) blu, 430 nm; (b) radio, 21 cm; (c) IR, 60 μm ; (d) Raggi-x, da 0,5 a 4,5 keV.*

1.3 Informazioni deducibili dall'osservazione della radiazione elettromagnetica emessa dagli oggetti celesti

- a. Innanzitutto il comportamento dell'intensità dell'onda luminosa in una certa banda in funzione del tempo (FOTOMETRIA). Tale studio è stato di grande importanza per scoprire le pulsar (dal fatto che l'intensità misurata ha un profilo con uno/più massimi che si ripetono dopo un tempo T fisso), i sistemi binari (dall'andamento dell'intensità che presenta uno/due minimi che si ripetono a cadenza fissa), ecc.
- b. Lo studio dell'intensità della radiazione integrata in un certo intervallo di tempo in funzione della lunghezza d'onda (SPETTROMETRIA). Lo strumento utilizzato è lo spettrometro. La tipologia dello spettro osservato permette di capire i meccanismi di produzione della luce ed eventuali assorbimenti intervenuti tra il sito di produzione e l'osservatore. Uno spettro può essere continuo oppure può presentare degli avvallamenti a certe lunghezze d'onda (righe di assorbimento) che identificano il tipo di materiale che assorbe la radiazione, la sua quantità (determinata dalla profondità dell'avvallamento), la velocità con cui il materiale si avvicina o si allontana dalla sorgente di emissione, lo stato cinematica delle particelle nella nube e il loro stato di ionizzazione.
- c. Misura della costanza o meno della direzione del campo elettrico associato all'onda elettromagnetica (POLARIMETRIA). La polarimetria può dare informazione sui meccanismi di produzione della radiazione, sulla presenza di un campo magnetico e sulla sua configurazione rispetto all'osservatore, sull'effetto dello scattering della radiazione nel suo percorso dal sito di produzione all'osservatore. Un corpo caldo emette luce non polarizzata, mentre elettroni che si muovono in un campo magnetico uniforme emettono luce polarizzata.
- d. La distribuzione spaziale della radiazione proveniente da un determinato oggetto (IMMAGINE dell'oggetto). Ci può dare informazioni sull'estensione dell'oggetto osservato. È importante avere un telescopio con la capacità di separare radiazione in arrivo da punti il più vicino possibile, ovvero la capacità di risolvere in angolo oggetti diversi. Tale capacità del telescopio viene chiamata RISOLUZIONE ANGOLARE del telescopio.

Questo corso è un'introduzione alle misure astronomiche, con particolare riguardo a quelle nella banda del visibile.

2. GRANDEZZE FOTOMETRICHE

2.1 Flusso di radiazione (in energia)

È la quantità di radiazione Φ ricevuta da un oggetto celeste nell'unità di tempo su una superficie (di raccolta) unitaria in una determinata banda di lunghezza d'onda (o frequenza o energia dei fotoni):
Unità di misura di Φ :

$$u(\Phi) = \frac{W}{m^2} \quad (\text{oppure } \frac{J}{m^2 s} \text{ oppure } \frac{erg}{cm^2 s})$$

Esempio: Flusso di radiazione dal Sole (costante solare) = $(1366 \pm 3) W / m^2$

N.B. Il valore del flusso proveniente dalle stelle viene corretto per l'effetto dell'assorbimento da parte dell'atmosfera terrestre.

2.2 Flusso di radiazione (in numero di fotoni)

È il numero dei fotoni ricevuti da un oggetto celeste in una certa banda di lunghezza d'onda (o frequenza o energia dei fotoni) su una superficie unitaria, per unità di tempo. Viene utilizzato soprattutto per frequenze molto alte (raggi X).

$$F(t) = \frac{\Phi(t)}{\langle E \rangle} \quad (\langle E \rangle = \text{energia media dei fotoni})$$

N.B. Il simbolo associato alle varie quantità non è sempre lo stesso, per cui non bisogna formalizzarsi troppo con le lettere.

2.3 Densità di flusso di radiazione J (in energia)

È il flusso di radiazione in arrivo per intervallo unitario di lunghezza d'onda (o frequenza o energia dei fotoni):

$$J(t) = \frac{\Phi(t)}{\Delta\lambda} \quad (\text{oppure } \frac{\Phi}{\Delta\nu} \text{ oppure } \frac{\Phi}{\Delta E})$$

Unità di misura più usate:

$$u(J) = \frac{W}{m^3} \text{ oppure } \left(\frac{erg}{cm^2 \cdot s \cdot Hz}\right) \text{ oppure } \left(\frac{erg}{cm^2 s keV}\right)$$

In radioastronomia, come unità di densità di flusso si usa spesso lo Jansky (Jy):

$$1Jy = 10^{-26} W / m^2 Hz = 10^{-23} erg / cm^2 s \cdot Hz$$

Il nome di tale unità deriva dal nome di Karl Jansky, un ingegnere della Bell Telephone Company, che nel 1932 scoprì che la Via Lattea emette onde radio e segnò l'inizio della radioastronomia.

2.4 Brillanza (in inglese Brightness) B di un oggetto puntiforme

Indica l'energia proveniente da un oggetto puntiforme raccolta (dal rilevatore) nell'unità di tempo.

$$u(B) = W \quad (\text{oppure } \text{erg/s})$$

Se una stella vista ad occhio nudo ha una brillanza B_o e quando è vista attraverso un telescopio ha brillanza B_t , si ha:

$$\frac{B_t}{B_o} = \frac{D^2}{d^2}$$

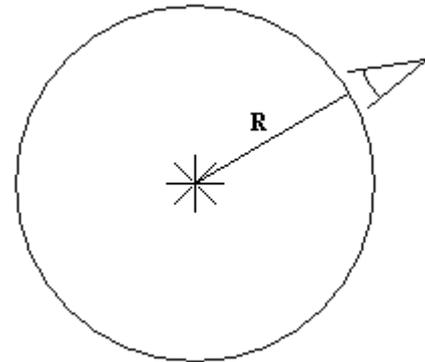
D = diametro telescopio

d = diametro pupilla occhio

2.5 Luminosità L di un oggetto celeste

È l'energia totale emessa da una sorgente nell'unità di tempo, in una banda prefissata ($\Delta\nu$ o $\Delta\lambda$ o ΔE). Essa è misurata considerando una superficie chiusa che circonda la sorgente. Per poter ricavare la luminosità a partire dalla misura del flusso di radiazione a Terra, si considera il raggio della sfera che circonda la sorgente pari alla distanza tra la sorgente stessa e la Terra.

Si possono distinguere due tipi di emissione: isotropa e anisotropa.



Emissione isotropa

$$L = \Phi \cdot 4\pi \cdot R^2$$

$$u(L) = \text{J/s (erg/s)}$$

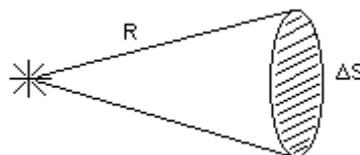
In cui R è la distanza dalla sorgente e Φ è il flusso misurato a quella distanza.

Emissione anisotropa

L'emissione può essere limitata ad un angolo solido $\Delta\Omega$

in cui $\Delta\Omega = \frac{\Delta S}{R^2}$ (se $\Delta S = 4\pi R^2 \Rightarrow \Delta\Omega = 4\pi$):

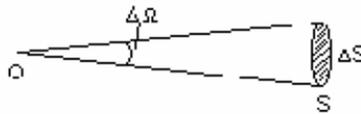
$$L = \Phi \cdot \Delta\Omega \cdot R^2$$



Si può dimostrare, che per un cono $\Delta\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta)$, in cui θ è la semi-apertura angolare del cono, mentre, in generale, in un sistema di riferimento sferico,

$$\Delta\Omega = \iint \sin\theta d\theta d\varphi,$$

in cui θ è l'angolo zenitale e φ l'angolo azimutale.



L'unità di misura dell'angolo solido è lo steradiano (sr). Per esempio l'angolo solido sotteso da una sfera è pari a 4π sr.

Per angoli piccoli, il calcolo è semplice: l'angolo solido non è altro che il prodotto degli angoli di apertura in ciascuna direzione espressi in radianti. Per esempio, se un telescopio ha un'apertura angolare di $1^\circ \times 1^\circ$, l'angolo solido corrispondente è:

$$\frac{\pi^2}{180^2} = (1,7 \times 10^{-2})^2 = 2,9 \times 10^{-4} \text{ sr}$$

Esempi di luminosità:

$$L_{Sole} = 1366 \cdot 4\pi \cdot (1,5 \times 10^{11})^2 = 3,8 \times 10^{26} \text{ W} = 3,8 \times 10^{33} \text{ erg/s}$$

Per confronto, per i Gamma Ray Bursts, la cui emissione potrebbe essere anisotropa (tipo cono), con angoli di apertura di pochi gradi, si è trovato che:

$$L_{lampe_gamma} \cong 10^{49} - 10^{50} \text{ erg/s}.$$

2.6 Brillanza superficiale B_s di un oggetto esteso (esempio un resto di supernova, una galassia)

È il rapporto tra il flusso misurato proveniente dall'oggetto esteso e l'angolo solido $\Delta\Omega$ sotto cui la sorgente è vista dall'osservatore:

$$B_s = \frac{\Phi}{\Delta\Omega} = \frac{L}{4\pi \cdot R^2} \cdot \frac{R^2}{\Delta S} = \frac{L}{4\pi \cdot \Delta S}$$

In cui ΔS è normale alla linea di vista e si è supposta l'isotropia. Si vede che B è indipendente dalla distanza, ma intrinseca alla regione emittente.

3. MISURA DEL FLUSSO LUMINOSO NELLA BANDA DEL VISIBILE

3.1 Sistema delle magnitudini

Nella banda ottica, il flusso luminoso in energia viene misurato introducendo la magnitudine. L'origine della magnitudine risale a Ipparco (I sec. A.C.) che catalogò circa 1000 stelle a occhio nudo, inserendole in 6 categorie e ponendo le più brillanti nella prima categoria (1^a).

Nel 1856 Prognon propose che queste categorie fossero chiamate magnitudini e fece notare che differenze in magnitudine (per la vista) corrispondono a rapporti in flusso luminoso. In particolare a una differenza di 5 nelle categorie di Ipparco corrispondeva a un rapporto 100:1 in flusso. Tale criterio fu assunto come base per definire il sistema di misura basato sulle magnitudini:

$$m_1 - m_2 = 5 \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = 100 \quad (1)$$

3.2 Magnitudine apparente

È la magnitudine osservata col telescopio:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = -2,5 \log \frac{F_1}{F_2}$$

in cui F_1 è il flusso di radiazione ricevuto dalla stella 1 e F_2 è il flusso di radiazione ricevuto dalla stella 2. Fissata m_2 come riferimento, si ha

$$m_1 = -2,5 \log \frac{F_1}{F_2} + m_2 \quad (2)$$

in cui la costante m_2 è definita attraverso una stella standard, a cui viene arbitrariamente attribuita una data magnitudine.

Per esempio, Vega è una stella standard a cui viene attribuita una magnitudine zero. Conoscendone il flusso F_{Vega} , si calcola la magnitudine m della stella generica di flusso luminoso F :

$$m = -2,5 \log \frac{F}{F_{Vega}} + 0 \text{ (magn. Vega)}$$

Dalla (2) si vede che maggiore è il flusso luminoso (o la brillantezza) di una stella, minore è il valore della magnitudine e viceversa.

Se F_1 e F_2 sono dello stesso ordine di grandezza $\left(\frac{F_1 - F_2}{F_2} \equiv \frac{\Delta F}{F_2} \ll 1 \right)$, tenendo presente che

$$\frac{F_1}{F_2} = 1 + \frac{\Delta F}{F_2}, \text{ si ha:}$$

$$\Delta m = -2,5 \log_{10} \left(1 + \frac{\Delta F}{F_2} \right) = -2,5 \frac{\ln(1 + \Delta F/F_2)}{\ln 10} \cong \frac{-2,5 \Delta F/F_2}{\ln 10} \approx -1,085 \frac{\Delta F}{F_2}$$

In definitiva Δm , per $\Delta F/F_2 \ll 1$, è data dalla variazione percentuale del flusso misurato tra le due stelle.

In conclusione, la magnitudine misura quindi la differenza di brillantezza (o il rapporto tra i flussi) tra due stelle.

È quindi necessaria una stella come riferimento. Esiste per questo un sistema di stelle standard a magnitudine fissata da utilizzare come riferimento. La principale tra queste è la stella Vega a cui è stata attribuita la magnitudine 0.

Ad occhio nudo si può arrivare alla sesta magnitudine, mentre il telescopio spaziale Hubble arriva fino alla ventottesima.

Esempi:

a) Se $\frac{F_1}{F_2} = 10$

allora: $m_1 - m_2 = -2,5$

b) Se $\frac{F_1}{F_2} = 100$

allora: $m_1 - m_2 = -5$

c) Se $m_1 - m_2 = 1$

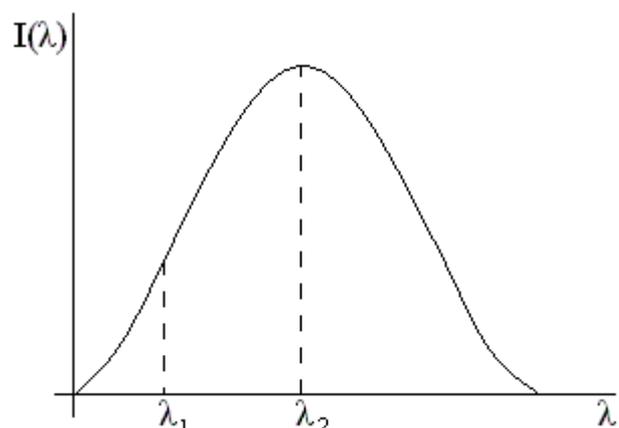
allora: $\frac{F_1}{F_2} = 10^{-1/2,5} = 0,398$

3.3 Colore di una stella (indice di colore apparente)

L'indice di colore apparente di una stella è definito come:

$$C_{\lambda_1 \lambda_2} = m(\lambda_2) - m(\lambda_1) = 2,5 \log_{10} \left(\frac{a F_{1,mis}}{b F_{2,mis}} \right)$$

in cui λ_1 e λ_2 sono due lunghezze d'onda medie a cui sono misurati i flussi F_1 e F_2 , mentre a e b sono parametri che tengono conto delle efficienze di rivelazione della radiazione a λ_1 e λ_2 , rispettivamente (non è detto che il rivelatore sia ugualmente sensibile ad entrambe le lunghezze d'onda).



$$a(\lambda_1) = \frac{1}{\varepsilon(\lambda_1)} \qquad b(\lambda_2) = \frac{1}{\varepsilon(\lambda_2)}$$

con $\varepsilon = \text{efficienza rivelazione}$:

$$\varepsilon = \frac{F_{\text{misurata}}}{F_{\text{incidente}}}$$

$$F_{\text{inc}}(\lambda_1) = \frac{F_{1,\text{mis}}(\lambda_1)}{\varepsilon(\lambda_1)} \qquad F_{\text{inc}}(\lambda_2) = \frac{F_{2,\text{mis}}(\lambda_2)}{\varepsilon(\lambda_2)}$$

In ogni caso $m(\lambda_2)$ è definita a meno di una costante ($= m(\lambda_1)$). Assumendo come standard Vega, si ha $m(\lambda_1) = 0$ per tutti i valori di λ (Vega ha colore zero a tutte le lunghezze d'onda visibili).

3.4 Indice di colore intrinseco di una stella

L'indice di colore apparente non è detto che sia il colore intrinseco della stella. La luce nel percorso dalla stella a noi può aver oltrepassato diversi mezzi materiali ed essere mutata. Si definisce allora l'INDICE DI COLORE INTRINSECO di una stella definito da:

$$C_{\lambda_1\lambda_2}^{(0)} = C_{\lambda_1\lambda_2} - E_{\lambda_1\lambda_2}$$

in cui $E_{\lambda_1\lambda_2}$ è chiamato eccesso di colore e tiene conto dell'effetto del mezzo interstellare sulla radiazione di una stella tenendo conto della direzione di osservazione. Il mezzo interstellare tende ad assorbire l'UV e quindi ad arrossare la stella.

3.5 Sistemi fotometrici e filtri fotometrici

Sulla base della disponibilità di rivelatori sensibili in diverse bande spettrali (ottico, IR) e attraverso l'impiego di opportuni materiali che agiscono da filtri della radiazione (e quindi permettono di far passare radiazioni di diverso colore), sono entrati nell'uso sistemi fotometrici operanti in diversi canali dello spettro ottico, IR.

I filtri permettono di vedere la stella sotto vari colori eseguendo una specie di spettroscopia. I primi filtri furono proposti da Johnson e Morgan ed hanno una ben precisa lunghezza d'onda a cui corrisponde la massima trasparenza.

I sistemi fotometrici più in uso sono:

- a) SISTEMA UBV (di Johnson e Morgan)
- b) SISTEMA INFRAROSSO (di Johnson)

Vi sono anche altri sistemi di filtri sviluppati in particolari osservatori astronomici, quale il SISTEMA ubvy β (di Strömgren-Crawford). Anche il telescopio spaziale Hubble ha un suo sistema di filtri.

Le caratteristiche dei filtri menzionati sono mostrate in Tabella 3.1 e nelle Figure 3.1 e 3.2 seguenti.

Tabella 3.1 – Caratteristiche dei filtri fotometrici

Sistema	Filtro	λ (nm)	$\Delta\lambda$ (nm)
UBV (Johnson-Morgan)	U	365	70
	B	440	100
	V	550	90
Infrared (Johnson)	R	700	220
	I	880	240
	J	1250	380
	K	2200	480
	L	3400	700
	M	5000	1200
	N	10400	5700
ubvy β (Strömgen-Crawford)	u	350	34
	b	410	20
	v	470	16
	y	486	24
	β	550	3,15

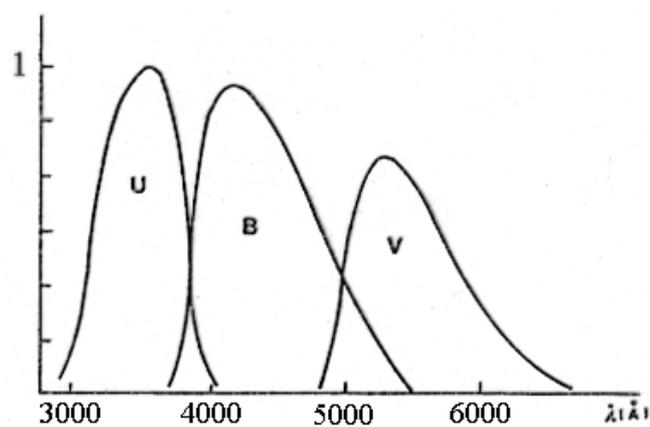


Fig. 3.1 - Curva di trasmittanza nel sistema (fotoelettrico) di Morgan e Johnson

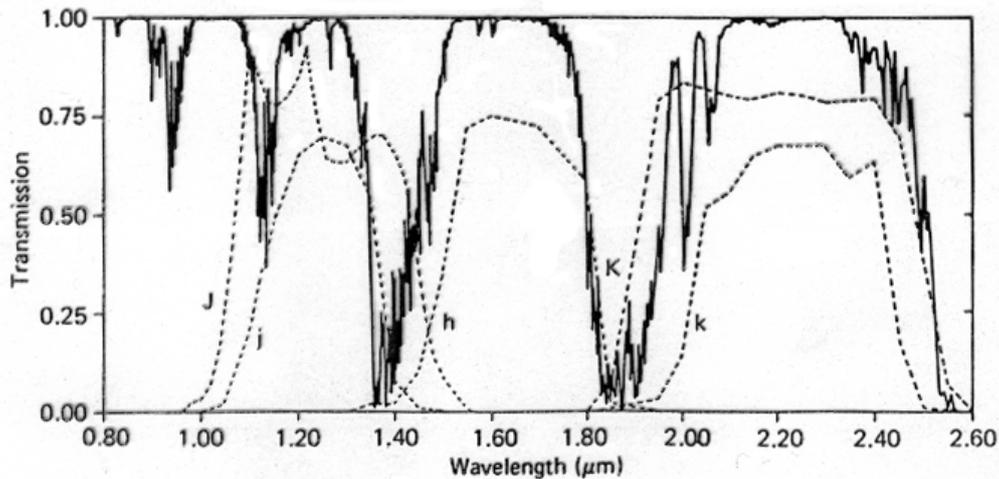


Fig. 3.2 – Trasmissione atmosferica estiva di Kitt Peak nel vicino infrarosso. Le curve di trasmissione per i filtri di Johnson J e K, e i filtri Kitt Peak J, H e K (indicati con j, h e k) sono rappresentati dalle linee tratteggiate.

Per le magnitudini riferite a una data banda i si scrive:

$$m_i = -2,5 \log F_i + K \quad (F_0 = 1)$$

Per esempio, nel caso del sistema UBV, si ha:

$$m_u \equiv U = -2,5 \log F_U + K$$

$$m_B \equiv B = -2,5 \log F_B + K$$

$$m_V \equiv V = -2,5 \log F_V + K$$

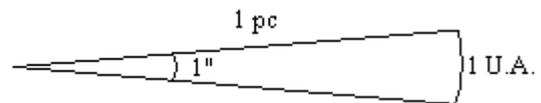
in cui K è una costante che dipende dalla stella di riferimento. Si tenga presente che F è in realtà il flusso relativo, ovvero il rapporto tra il flusso misurato dalla stella e quello misurato dalla stella di riferimento.

3.6 Magnitudine assoluta

È la magnitudine M che una stella avrebbe alla lunghezza d'onda λ se la sua distanza dall'osservatore fosse $d = 10 pc$.

Si rammenti che 1pc è la distanza a cui una unità astronomica, ovvero la distanza Terra-Sole (1 U.A.), è vista sotto un angolo di 1" d'arco.

$$1pc = 3,0856 \times 10^{18} cm$$



Dimostriamo ora che:

$$m(\lambda) - M(\lambda) = 5 \log_{10} d_{pc} - 5 + A(\lambda) \quad (1)$$

Ovvero che

$$M(\lambda) = m(\lambda) - 5 \log_{10} d_{pc} + 5 - A(\lambda)$$

in cui d_{pc} rappresenta la distanza della stella misurata in pc, $A(\lambda)$ è l'estinzione totale della radiazione, misurata in magnitudini, per effetto della polvere interstellare alla lunghezza d'onda λ . $m(\lambda) - M(\lambda)$ è detto MODULO DI DISTANZA.

La (1) si ricava immediatamente tenendo presente che, se F è il flusso della stella alla sua vera distanza d e F_0 è quello che si riceverebbe se essa fosse a $10 pc$, si ha:

$$\frac{F_0}{F} = \left(\frac{d_{pc}}{10} \right)^2$$

Segue che:

$$m(\lambda) - M(\lambda) = -2,5 \log_{10} \frac{F}{F_0} = -2,5 \log_{10} \left(\frac{10}{d_{pc}} \right)^2 = -5(\log 10 - \log d_{pc}) = 5 \log d_{pc} - 5$$

in cui si è supposto $A(\lambda) = 0$.

Nel filtro V si trova che l'estinzione A_V è data da

$$A_V = R \cdot E(B - V)$$

in cui R è una costante misurata:

$$R = 3,2 \pm 0,1 \text{ (per il mezzo interstellare standard)}$$

$$R = 4 - 5 \text{ (per nubi dense)}$$

mentre $E(B - V)$ rappresenta l'eccesso di colore tra B e V

$$E(B - V) = \underbrace{[m_B - m_V]}_{\text{Colore_misurato}} - \underbrace{[m_B - m_V]_0}_{\text{Colore_intrinseco}}$$

Noto $E(B - V)$, si può calcolare la colonna (con base di $1 cm^2$) di atomi di idrogeno atomico e molecolare (neutri) interposta tra la stella e il punto di osservazione (escluso l'effetto dell'atmosfera):

$$\left\langle \frac{N(HI + H_2)}{E(B - V)} \right\rangle = 5,8 \times 10^{21} \text{ atomi/cm}^2 \cdot \text{mag}$$

$$\left\langle \frac{N(HI)}{E(B - V)} \right\rangle = 4,8 \times 10^{21} \text{ atomi/cm}^2 \cdot \text{mag}$$

in cui $\langle \dots \rangle$ indica il valore medio.

Queste relazioni sono il risultato di osservazioni effettuate.

N.B:

Se l'estinzione fosse di due magnitudini, l'assorbimento sarebbe molto alto e la magnitudine passerebbe, per esempio, da 3 a 5.

3.7 Eccesso di colore normalizzato

È definito come

$$\Delta E_n = \frac{E(\lambda - V)}{E(B - V)}$$

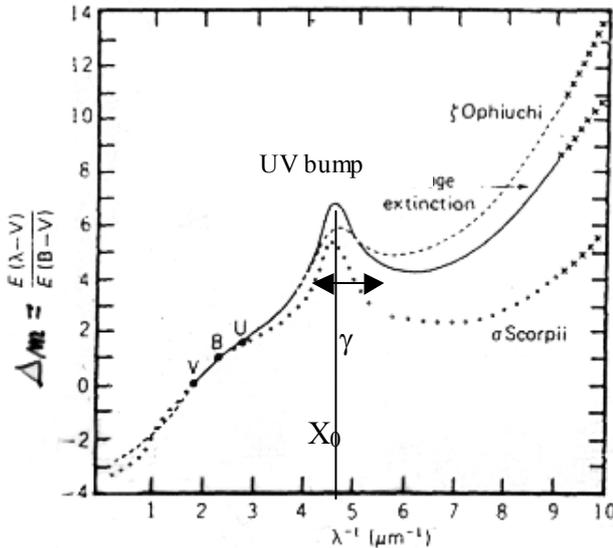


Fig. 3.3 – Curva di arrossamento interstellare. L'eccesso di colore normalizzato è distribuito come una funzione di λ^{-1} per l'ottico, UV e vicino alla regione spettrale dell'infrarosso. Sono anche rappresentate le curve di due stelle con arrossamento insolito. L'osservazione nell'ultravioletto è stata effettuata con il satellite OAO-2 e nella banda dei raggi X con Copernico.

L'UV bump è approssimabile col profilo di Drude $D(x, \gamma, x_0) = \frac{x^2}{(x^2 - x_0^2)^2 + \gamma^2 x^2}$, con $x = \lambda^{-1}$

Per cui:

$$\frac{E(\lambda - V)}{E(B - V)} = C_1 + C_2 x + C_3 D(x, \gamma, x_0) + C_4 F(x)$$

in cui

$$F(x) = \begin{cases} 0,5392(x - 5,9)^2 + 0,05644(x - 5,9)^3 & x > 5,9 \\ 0 & x < 5,9 \end{cases}$$

Come si può vedere nella banda ottica (U, B, V) l'eccesso di colore normalizzato ΔE_n varia linearmente con λ^{-1} .

3.8 Magnitudini bolometriche e correzioni bolometriche

Si definisce magnitudine bolometrica la magnitudine assoluta che dovrebbe essere misurata da uno strumento in grado di rilevare tutto il flusso di radiazione emessa dalla stella (bolometro).

3.8.1 Magnitudine bolometrica apparente

Se L è la luminosità della stella (in Watt), il flusso a Terra è dato da $F = L/(4\pi d^2)$, che è chiamato flusso bolometrico, misurato da un rivelatore sensibile a tutte le lunghezze d'onda. La magnitudine corrispondente è chiamata magnitudine bolometrica apparente data da

$$m_{bol} = -2.5 \log\left(\frac{L}{4\pi d^2}\right) + K = -2.5 \log L + 5 \log d + K$$

in cui K è una costante.

3.8.2 Magnitudine bolometrica assoluta

Tenendo presente la definizione di magnitudine assoluta, la magnitudine bolometrica assoluta è data da:

$$M_{bol} = -2.5 \log L + 5 \log 10_{pc} + K = -2.5 \log L + K$$

con $K = \text{costante}$.

Tenendo presente la definizione di magnitudine bolometrica apparente si ha:

$$m_{bol} - M_{bol} = 5 \log \frac{d}{10_{pc}}$$

Se la radiazione emessa dalla stella è di corpo nero (si veda il prossimo capitolo), si può calcolare M_{bol} attraverso la relazione:

$$M_{bol} = M_V + B.C.$$

in cui $B.C.$ è la correzione bolometrica.

Nella Tabella 3.2 viene riportata la correzione bolometrica per stelle di diverso colore, tipo spettrale e temperatura della stella (si veda prossimo capitolo).

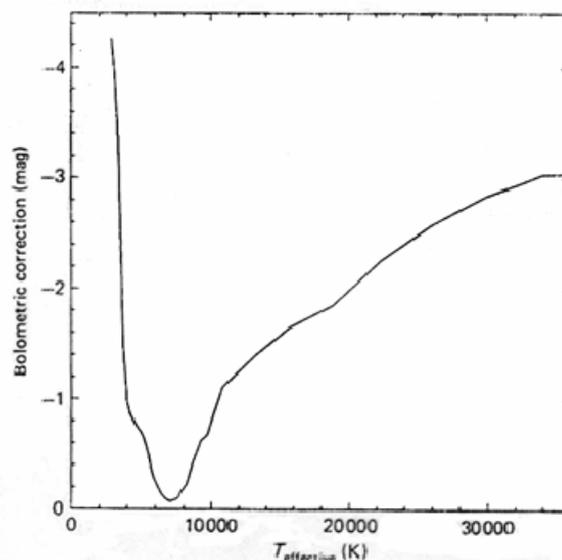


Fig. 3.4 - *Variatione della correzione bolometrica in funzione della temperatura per le stelle della sequenza principale.*

Tabella 3.2 – Relazione tra indice di colore $B-V$ e temperatura effettiva T_e per stelle della sequenza principale. Per le varie temperature sono anche riportati la correzione bolometrica (BC) e il tipo spettrale secondo la classificazione di Morgan e Keenan (MK) basata sulle righe di assorbimento presenti nello spettro.

B-V	MK	T_e	$\text{Log}T_e$	BC
-0,33	O 8	36250	4,559	-3,50
-0,31	O 9,5	32750	5,515	-3,25
-0,30		31130	4,493	-3,12
-0,29	B 0	29590	4,471	-2,99
-0,28		28127	4,449	-2,87
-0,26	B 0,5	25412	4,405	-2,60
-0,25		24155	4,383	-2,48
-0,23	B 1,5	21825	4,339	-2,22
-0,21		19715	4,295	-1,97
-0,20	B 3	18740	4,273	-1,84
-0,18	B 4	16930	4,229	-1,58
-0,17		16095	4,207	-1,46
-0,16	B 5	15300	4,184	-1,34
-0,12		12490	4,096	1,07
-0,11	B 8	12200	4,086	-0,72
-0,08	B 9	11200	4,049	-0,46
-0,05	B 9,5	10545	4,023	-0,32
-0,025		10000	4,000	-0,24
0,00	A 0	9570	3,981	-0,19
0,05	A 2	8995	3,954	-0,09
0,07	A 3	8790	3,944	-0,06
0,14	A 5	8200	3,914	-0,02
0,20	A 7	7800	3,892	0,00
0,33	F 1	7000	3,845	0,01
0,43	F 4	6500	3,813	-0,01

ESERCIZI

- a. Sia 4.8 la magnitudine bolometrica assoluta del Sole. Si calcoli la magnitudine bolometrica apparente.

$$m_{bol} - M_{bol} = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10 pc} \right)$$

Essendo $d = 1.5 \times 10^{13} cm = 4.87 \times 10^{-6} pc$, si ha:

$$m_{bol} - M_{bol} = 5 \log_{10} 4.87 \times 10^{-7} = -31,87$$

$$m_{bol} = 4.8 - 31,87 \cong -27$$

- b. Una stella ha una luminosità pari a 100 volte quella del Sole e una magnitudine bolometrica apparente di 9,8. Nota la magnitudine bolometrica assoluta del sole ($M_{bol} = +4,8$) determinare la distanza della stella.

4. MECCANISMI DI EMISSIONE DELLA RADIAZIONE DA UNA STELLA

Sono stati individuati vari meccanismi di emissione della radiazione elettromagnetica da un oggetto celeste. Alcuni sono noti come meccanismi termici, tra cui vi è l'emissione di corpo nero che discutiamo in questo corso. Ma vi sono altri meccanismi, noti come non termici, tra cui il sincrotrone, il Compton inverso, di cui si parlerà nel corso di Misure Astrofisiche.

L'emissione di corpo nero è il meccanismo più frequente con cui le stelle normali emettono la luce visibile che noi osserviamo.

4.1 Radiazione di corpo nero

Un CORPO NERO IDEALE è un corpo completamente isolato dall'ambiente circostante per mezzo di pareti adiabatiche, avente una temperatura $T(K)$ uniforme in tutte le sue parti (equilibrio termodinamico).

- La superficie di un corpo nero ideale ha la proprietà di assorbire tutta la radiazione incidente su di essa ($\alpha = 1$);
- La radiazione emessa da un corpo nero ideale è quella in grado di essere assorbita, in accordo con la legge di Kirchoff:

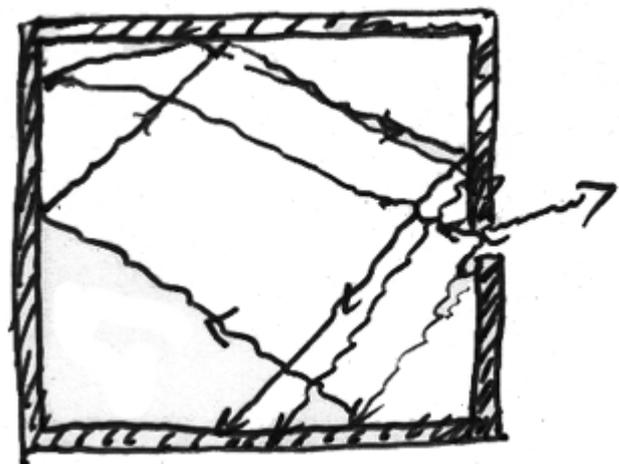
$$\varepsilon_{\lambda} = \alpha_{\lambda}$$

Un corpo nero ideale può essere rappresentato da una cavità, tipo una scatola isolata adiabaticamente dall'esterno e con pareti interne assorbenti, in cui viene praticato su una parete un foro d'ingresso molto piccolo rispetto alla dimensione totale. Un'onda luminosa che entra nella cavità attraverso il foro viene rapidamente assorbita dalle pareti, tanto che se cercassimo di guardare all'interno, la possibilità di poter vedere la luce (che in quel caso dovrebbe uscire dal foro) sarebbe molto bassa e vedremmo tutto buio. Le pareti, avendo assorbito tutta la luce, hanno nel contempo raggiunto uno stato di equilibrio termico.

4.2 Proprietà del corpo nero

- Lo spettro della radiazione emessa è continuo con un massimo a una lunghezza d'onda che dipende solo dalla temperatura $T(K)$ delle pareti interne della cavità attraverso la relazione:

$$\lambda_{\max} T = 0,2898 \text{ cm} \cdot K = C_0$$



$$C_0 = 0,2898 \text{ cm} \cdot K \quad \text{Costante universale}$$

ovvero:

$$\frac{kT}{v_{\max}} = 0,2014h$$

Legge dello spostamento
di Wien

con $h =$ costante di Planck $= 6,62 \times 10^{-34} J \cdot s$ e $k =$ costante di Boltzman $= 1,38 \times 10^{-23} J / K$

- b. La forma dello spettro è universale (non dipende dalla forma della cavità).
- c. L'intensità della radiazione emergente da un corpo nero è sempre maggiore, ad ogni lunghezza d'onda, della corrispondente intensità di emissione da una superficie alla stessa temperatura di un corpo non nero (grigio).

4.3 Flusso di energia e spettro emessi da un corpo nero

Le proprietà dell'emissione di un corpo nero sono ben noti ed hanno avuto un impatto notevole per la giustificazione dell'abbandono della fisica classica. Un contributo decisivo alla determinazione del vero spettro di corpo nero è dovuta a M. Planck.

Il flusso di energia emesso da un corpo nero è dato da:

$$F = \sigma \cdot T^4 \qquad J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}$$

in cui $\sigma = 5,670 \times 10^{-8} J / m^2 \cdot s \cdot K^4$ (costante di Stefan-Boltzman) e $T =$ temperatura efficace.

Distribuzione spettrale dell'energia emessa da un corpo nero (funzione di Planck):

$$J(\lambda) = \frac{2\pi \cdot h \cdot c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda \cdot k \cdot T}} - 1\right)} \qquad J / m^3 \cdot s$$

Tenendo presente che $v = \frac{c}{\lambda}$ e che deve sussistere l'uguaglianza

$$J(\lambda) \cdot d\lambda = J(v) \cdot dv$$

si ottiene:

$$J(v) = \frac{2\pi \cdot h \cdot v^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\left(e^{\frac{h \cdot v}{k \cdot T}} - 1\right)} \qquad J / m^2 \cdot s \cdot Hz$$

Tenendo presente che l'energia dei fotoni è $E = h \cdot v$ e che deve valere:

$$J(v) \cdot dv = J(E) \cdot dE$$

risulta che:

$$J(E) = J(v) \frac{dv}{dE} = J\left(\frac{E}{h}\right) \frac{1}{h} = \frac{2\pi \cdot E^3}{h^3 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{\left(e^{\frac{E}{k \cdot T}} - 1\right)} \qquad J / m^2 \cdot s \cdot J$$

Se si è interessati alla distribuzione spettrale dei fotoni (in numero) $I(E)$, tenendo presente che

$$J(E) = E \cdot I(E)$$

si ottiene

$$I(E) = \frac{2\pi \cdot E^2}{h^3 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{\left(e^{E/kT} - 1\right)} \quad \text{Fotoni/m}^2 \cdot \text{s} \cdot J$$

N.B.

La funzione di Planck definisce sia la forma che l'intensità della distribuzione spettrale dell'energia emessa da una sorgente di corpo nero.

Il massimo della $J(\nu)$ si ha per $\nu = \nu_m$ in cui

$$h\nu_m = 2,82 kT$$

ovvero:

$$\nu_m = 5,88 \times 10^{10} T \text{ Hz}$$

Si noti che il massimo della distribuzione $J(\nu)$ non è coincidente col massimo della distribuzione $J(\lambda)$.

La frequenza media $\bar{\nu}$ della radiazione si ha a:

$$h\bar{\nu} = 3,83 kT$$

ovvero

$$\bar{\nu} = 7,97 \times 10^{10} T \text{ Hz}$$

4.4 Distribuzioni limite della funzione di Planck o "Planckiana"

a) Per $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$ o $\frac{hc}{\lambda kT} \ll 1$, ovvero a grandi lunghezze d'onda ($\lambda \gg \frac{hc}{kT}$), attraverso uno sviluppo in serie, si ha

$$J(\lambda) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{1 + \frac{hc}{\lambda kT} - 1} = \frac{2\pi h c^2 \lambda}{h c \lambda^5} \times kT$$

da cui si ricava che:

$$J(\lambda) = 2\pi c k \frac{T}{\lambda^4} \quad \text{J/m}^3 \cdot \text{s}$$

Questa formula presenta un problema, se λ è piccola (ovvero se ν è elevata), $J(\lambda)$ diverge, ed è impossibile che un corpo nero emetta energia infinita.

Infatti:

$$J(\nu) = \frac{2\pi \cdot h \cdot \nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \xrightarrow{h\nu \ll hT} \frac{2\pi \cdot h \cdot \nu^3}{c^2} \cdot \frac{k \cdot T}{h \cdot \nu}$$

che diventa:

$$J(\lambda) = \frac{2\pi \cdot k}{c^2} T \cdot \nu^2 \quad \text{J/m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{Hz}$$

(Distribuzione classica di Rayleigh-Jeans)

$$\int_0^\infty J(\nu) d\nu = \infty$$

c) Per $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$ ovvero per $\frac{hc}{\lambda kT} \gg 1$, cioè per piccole lunghezze d'onda (es. raggi X)

$$J(\lambda) = \frac{2\pi \cdot h \cdot c^2}{\lambda^5} e^{-hc/\lambda kT} \quad \text{J/m}^3 \cdot \text{s}$$

e quindi :

$$J(\nu) = \frac{2\pi \cdot h}{c^2} \nu^3 \cdot e^{-h\nu/kT} \quad \text{J/m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{Hz}$$

Che è nota come distribuzione di Wien.

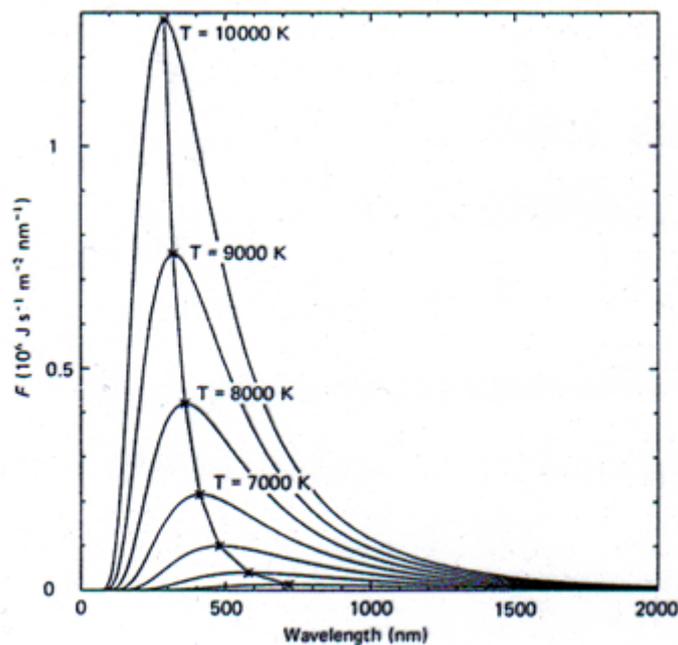


Fig. 4.1 - Distribuzione dell'energia spettrale per una sorgente di corpo nero nel range di temperatura tra 4000 K e 10000 K. È anche visualizzato lo spostamento della massima intensità di una lunghezza d'onda più piccola con l'incremento della temperatura in accordo con la legge di Wien.

4.5 Radiazione di corpo nero cosmica (fondo a microonde)

Le formule viste per la radiazione di corpo nero forniscono non solo la forma spettrale ma anche l'intensità dell'energia emessa senza richiedere costanti di normalizzazione. L'unico parametro

libero è la temperatura T . Ovviamente tutto ciò è vero solo se la sorgente è approssimabile al campo di radiazione di una cavità.

L'unico esempio astronomico di tale sorgente è la radiazione di fondo cosmico a $2,7 \text{ }^\circ\text{K}$. In tal caso, poiché questa permea completamente tutto l'universo, noi osserviamo tale radiazione come se fossimo all'interno della cavità. Tale radiazione è stata scoperta nel 1965 (confermando la teoria di Gamow sul Big Bang ripresa da Dicke e Peables) da Arno Penzias e Robert Wilson, due ingegneri della Bell Telephone Company che ricevettero il premio Nobel per tale scoperta. La Fig. 4.2 mostra lo spettro di tale radiazione, sulla base delle misure di Penzias e Wilson e della radiazione associata al CN interstellare.

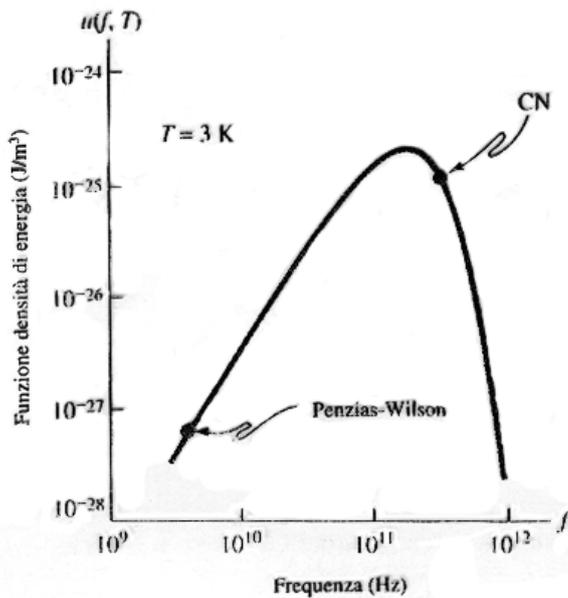


Fig. 4.2 - *Densità di energia della radiazione elettromagnetica in equilibrio termico a $T = 3 \text{ K}$. Sono evidenziate dai punti a frequenza misurata da Penzias e Wilson, e la frequenza associata al cianogeno interstellare, denominato CN.*

In effetti, la misura del cianogeno interstellare (CN) venne fatta nel 1941 ma venne ignorata dalla maggior parte degli scienziati: si trattava di misurare la quantità di luce emessa dalla molecola CN. La luce viene emessa con un'intensità tale che può essere spiegata solo se si pensa alla presenza di una radiazione di fondo con una temperatura originariamente stimata intorno ai $2,3 \text{ K}$. La frequenza relativa al CN è indicata in Fig. 4.2.

Ma fu nel 1965 che A.A. Penzias e R.W. Wilson dei Bell Telephone Laboratories di Holmdel, New Jersey (USA) casualmente scoprirono un fondo isotropo la cui temperatura effettiva era di circa 3 K .

Nei primi anni '90 venne lanciato in orbita un satellite, COBE (Fig. 4.3a) con lo scopo preciso di misurare la radiazione di fondo. Il satellite fu in grado di rilevare con straordinaria precisione un intervallo di frequenze da circa 30 GHz a 600 GHz , intervallo che contiene il massimo della curva di densità di energia. I risultati sono mostrati nella Fig. 4.3b: con un valore di temperatura di circa $2,7 \text{ K}$ si ha un'interpolazione perfetta (si può determinare la temperatura effettiva alla sesta cifra decimale). Questi risultati sono una conferma della validità del modello del big-bang, che prevede appunto la presenza di una radiazione di fondo del corpo nero. John Mather e George Smoot, responsabili scientifici del satellite COBE, hanno ricevuto il premio Nobel nel 2006.

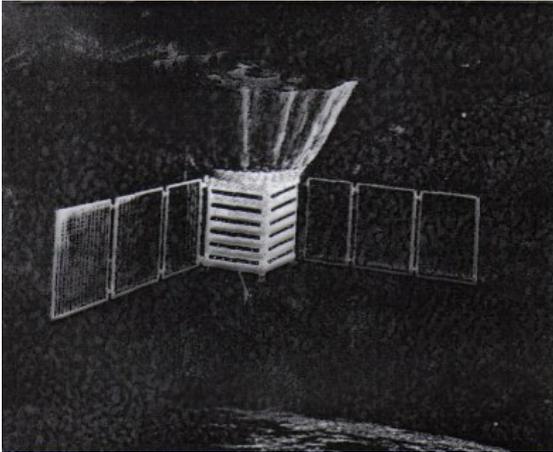


Fig. 4.3a: Il satellite COBE (Cosmic Orbiting Background Experiment) misurò per primo la radiazione cosmica di fondo

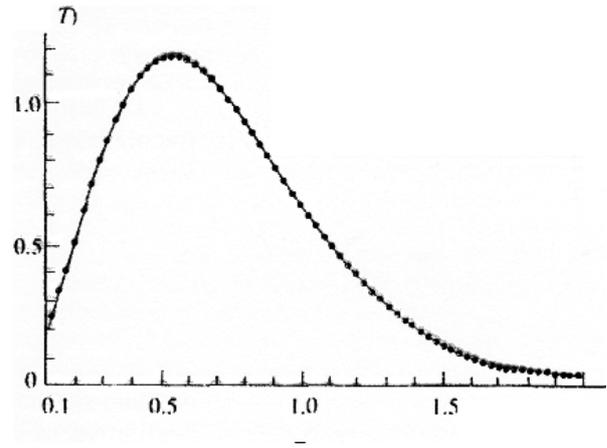


Fig. 4.3b- **Intensità in funzione della lunghezza d'onda (in cm).** Le misure rivelano un perfetto accordo con la formula di Planck. I dati sono interpolati con notevole precisione per $T = 2,7\text{ K}$.

4.6 Radiazione di corpo nero ricevuta da un corpo celeste

Quando si vuole misurare la radiazione da una stella che emette come un corpo nero, bisogna considerare che non ci si trova al centro della cavità.

Consideriamo una stella di raggio R . La radiazione di corpo nero emessa da questa viene distribuita uniformemente nell'universo ed a noi giunge una piccola frazione f_{mis} per unità di area per unità di tempo (il flusso ricevuto).

Confrontando la luminosità ottenute usando il flusso a terra con quella ricavata dalle dimensioni della stella (v. figura a fianco), si ha

$$f_{mis} \cdot 4\pi \cdot d^2 = \sigma \cdot T^4 \cdot 4\pi R^2 \quad \text{con } F_{BB} = \sigma \cdot T^4$$

Da cui:

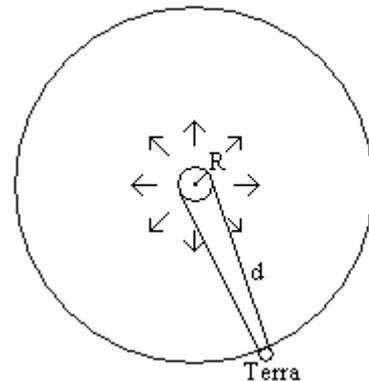
$$f_{mis} = \frac{R^2}{d^2} \sigma T^4 \quad (1)$$

Assumendo che le dimensioni angolari della stella siano α , si ha:

$$2R = \alpha \cdot d$$

da cui:

$$\frac{f_{mis}}{\sigma \cdot T^4} = \frac{R^2}{d^2} = \frac{\alpha^2 \cdot d^2}{4d^2} = \frac{\alpha^2}{4} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$



Da questa relazione si può ricavare la dimensione angolare della stella (in radianti):

$$\alpha = 2\sqrt{\frac{f_{mis}}{\sigma \cdot T^4}}$$

Dalle relazioni precedenti si può anche ricavare il raggio della regione emittente la radiazione di corpo nero. Infatti se è nota la distanza della stella, dal flusso misurato si può ricavare la luminosità, e se è noto lo spettro, si può stimare anche la temperatura effettiva, da cui il raggio della stella:

$$R = \left(\frac{L}{4\pi \cdot \sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{T^2} = d \left(\frac{f_{mis}}{\sigma \cdot T^4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

in cui $L = 4\pi \cdot d^2 \cdot f$.

4.7 Metodo della radiazione diluita per la misura della radiazione di corpo nero emesso da una stella

C'è anche un altro metodo per stimare il flusso di corpo nero ricevuto da una sorgente stellare, noto come metodo della radiazione di corpo nero diluita.

Sia S una sorgente circolare di raggio R che sottende un angolo α , O il punto di osservazione e sia f la radiazione ricevuta da S (in unità di $\frac{J}{m^2 \cdot s}$). Si è visto che la brillantezza

superficiale è data da:

$$B = \frac{f}{\Omega}$$

in cui

$$\Omega = \frac{\pi R^2}{d^2}$$

Dato che

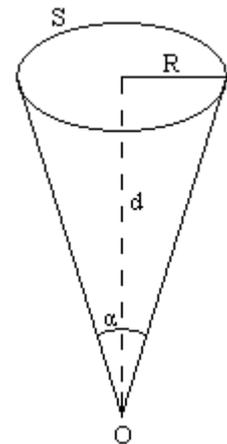
$$R = \frac{\alpha \cdot d}{2}$$

sostituendo nell'equazione si ottiene:

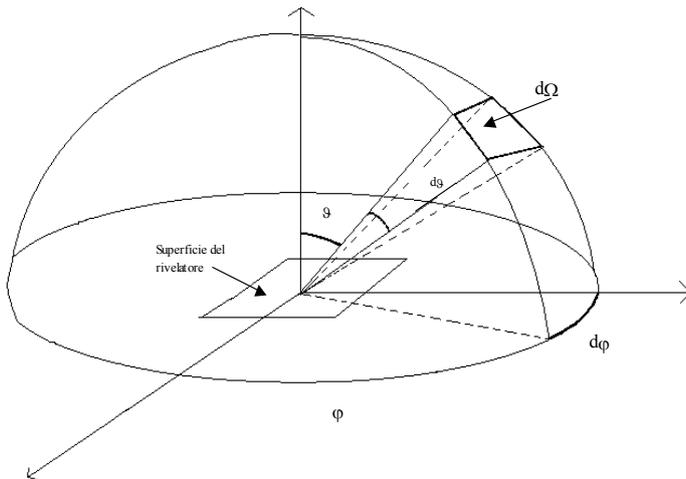
$$\Omega = \frac{\pi \left(\frac{\alpha \cdot d}{2}\right)^2}{d^2} = \frac{\pi \cdot \alpha^2}{4}$$

e quindi B diventa

$$B = \frac{f}{\frac{\pi \cdot \alpha^2}{4}} = \frac{4f}{\pi \cdot \alpha^2} \quad \frac{J}{m^2 \cdot s \cdot sr}$$



Con α espresso in radianti



Per calcolare il flusso atteso di radiazione di corpo nero equivalente bisogna immaginare che tale sorgente, con brillantezza superficiale B , abbia estensione pari ad un emisfero al centro del quale c'è la superficie (1m^2) a cui arriva la radiazione di corpo nero.

Il flusso atteso è:

$$F = B \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot d\vartheta = 2\pi B \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\vartheta}{2} d\vartheta = 2\pi B \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\vartheta}{4} d(2\vartheta) = \frac{2\pi B}{4} [-\cos 2\vartheta]_0^{\pi/2} = \pi B$$

Tenendo presente l'espressione di B , si ha:

$$F = \frac{\pi \cdot f}{4\alpha^2} = \frac{4f}{\alpha^2} \quad \text{J/m}^2 \cdot \text{s}$$

Una relazione analoga si può scrivere per la radiazione a una certa lunghezza d'onda λ

$$F_\lambda = \frac{4f_\lambda}{\alpha^2} \quad \text{J/m}^3 \cdot \text{s}$$

Si vede perciò che il rapporto tra flusso misurato e flusso atteso per una sorgente ideale di corpo nero è dato da:

$$\frac{f}{F} = \frac{\alpha^2}{4} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \quad (2)$$

con α in radianti.

Tenendo presente che $F = \sigma \cdot T^4$, se la temperatura è nota si calcola F , il valore atteso di F si può stimare. Poiché f si può misurare, dalla (2) si può calcolare l'estensione angolare della sorgente.

Esempio:

Osservando lo spettro di Vega in cui $\frac{f}{F} = 5,3 \times 10^{-17}$ si ricava che:

$$\alpha = 2\sqrt{\frac{f}{F}} = 2\sqrt{5,3 \times 10^{-17}} = 1,45 \times 10^{-8} \text{ rad} = 0,003 \text{ arc sec}$$

in cui:

$$\alpha_{\text{arc sec}} = \frac{3600}{\pi} \cdot 180 \cdot \alpha_{\text{rad}}$$

4.8 Notazioni importanti

- Si noti che non si riceve mai una curva di corpo nero da una stella perché la radiazione emessa dalla superficie di questa viene modificata durante l'attraversamento della sua atmosfera (vedi più avanti). Si mostra come esempio il caso di Vega (fig. 4.4).
- La temperatura determinata adattando la curva di Planck ad una porzione dello spettro osservato è nota come temperatura di colore, mentre se si conosce l'intero spettro si può determinare la temperatura effettiva.
- La distribuzione spettrale e/o il flusso degli oggetti celesti (in magnitudini o altro) ottenuti nelle osservazioni vengono sempre corretti per l'assorbimento atmosferico soprastante l'osservatorio.
- Per evitare errori sistematici nella determinazione dello spettro della radiazione luminosa di una stella, le osservazioni ottiche da terra vengono di effettuate confrontando una sorgente di corpo nero di geometria nota con la radiazione di una stella (si veda fig. 4.6).

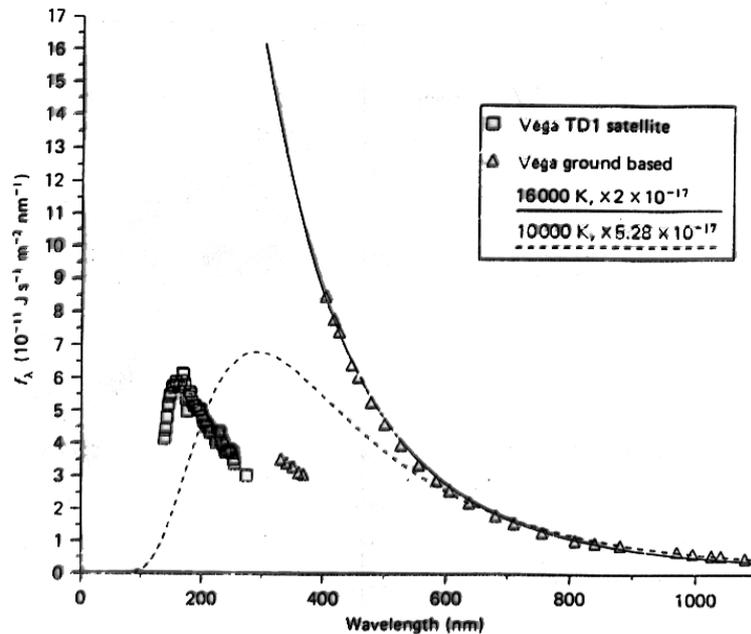


Fig. 4.4 - Spettro del flusso specifico proveniente da Vega ottenuto da terra nel visibile e vicino UV e dallo spazio nell'UV. La curva continua è un corpo nero a 16000 K, mentre la curva tratteggiata è un corpo nero a 10000 K

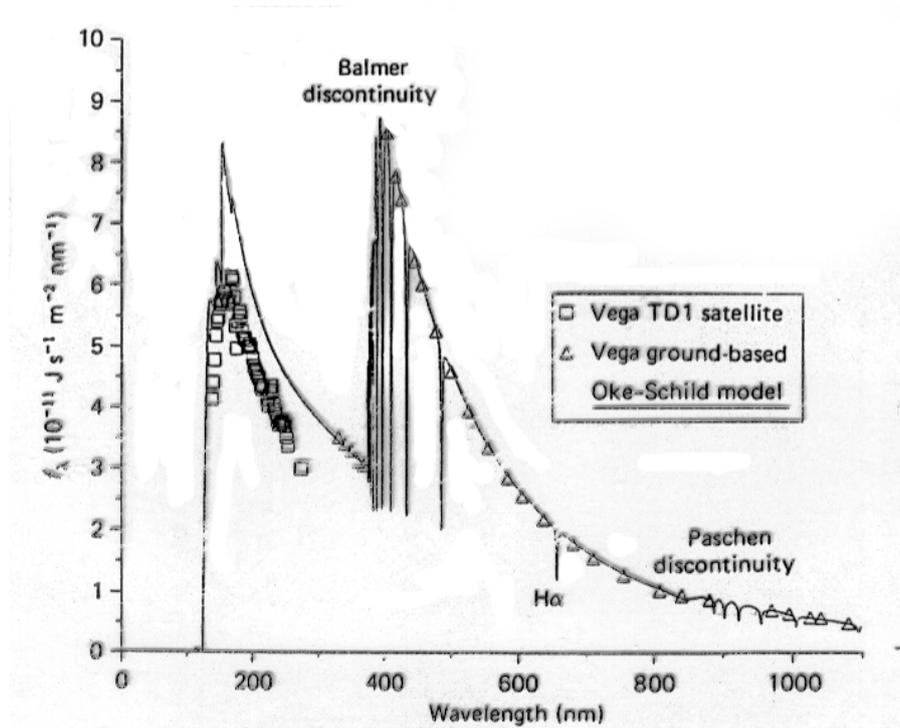


Fig. 4.5 - Confronto tra lo spettro di Vega misurato e predizione di un modello teorico di atmosfera stellare. Sono indicate le discontinuità di Balmer a 365 nm e di Paschen

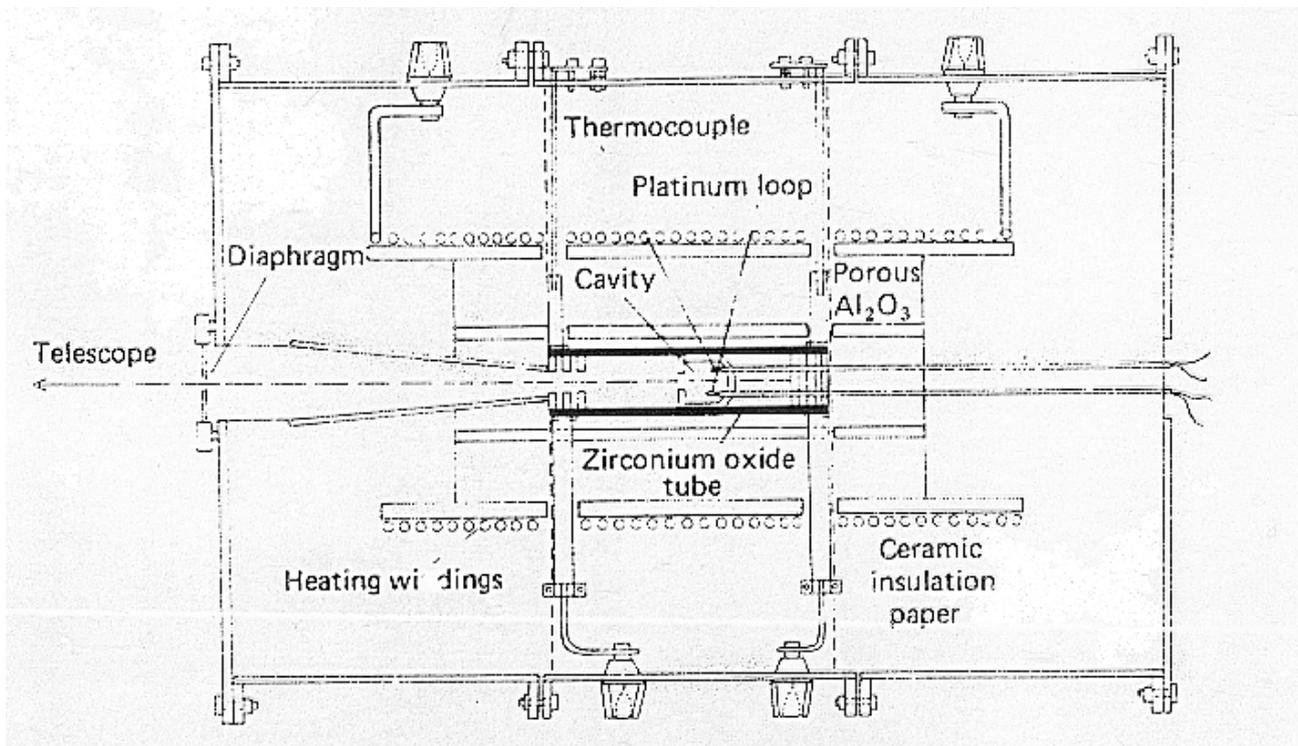


Fig. 4.6 Sezione di una sorgente di corpo nero usata nella calibrazione diretta della distribuzione dell'energia spettrale di Vega.

4.9 Radiazione di corpo nero in Raggi X

Emissione di radiazione di corpo nero non è stata solo osservata nella bande del visibile dalle stelle, ma anche nella banda dei raggi X. Un esempio è quello dei lampi X (X-ray bursters, v. Fig. 4.7 e Fig. 4.8) osservati da stelle di neutroni non pulsanti in sistemi binari di piccola massa.

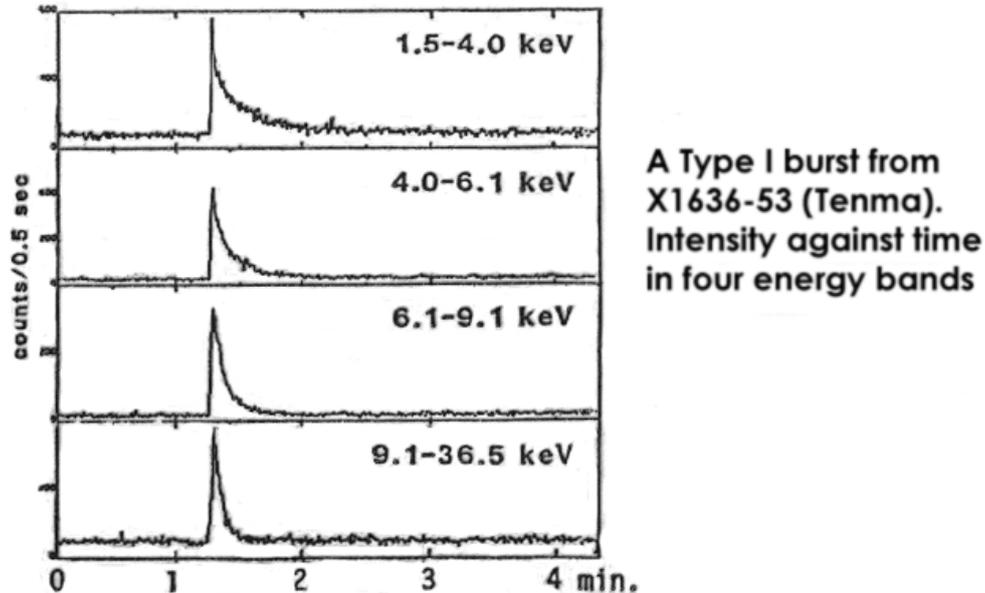


Fig. 4.7 - Emissione di corpo nero da x-ray bursters

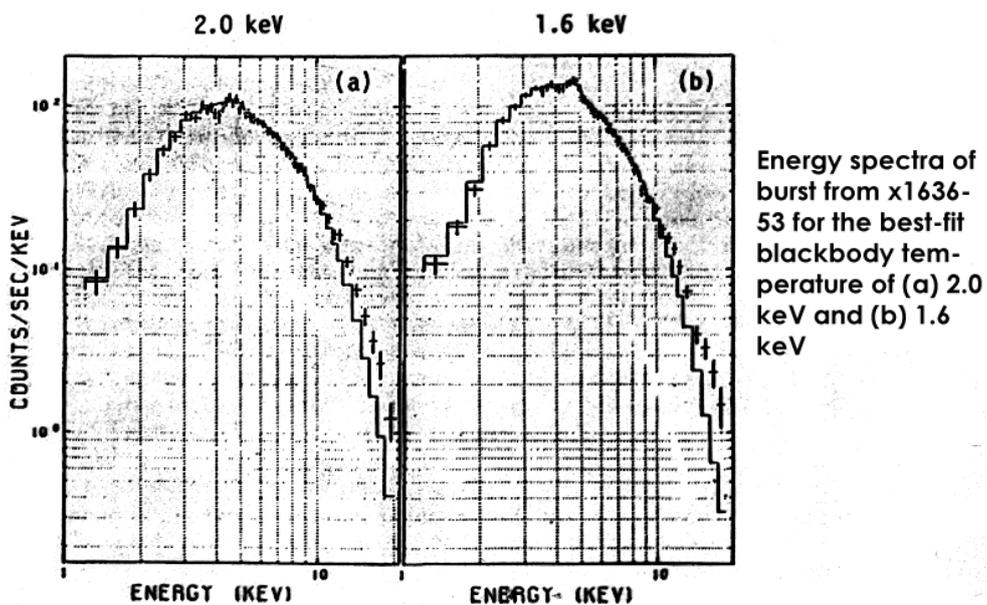


Fig. 4.8 – Spettro di emissione da x-ray bursters

ESERCIZIO

Calcolare il raggio (in unità solari) di una stella avente la stessa temperatura effettiva del Sole ma di luminosità 1000 volte maggiore.

Si rammenti che:

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T_{eff}^4 \quad \left(\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \right)$$

Il raggio del Sole è $R = 6,96 \times 10^8 m$

La temperatura efficace del Sole è $T_{eff} = 5780 K$

La luminosità del Sole è $L = 3,83 \times 10^{26} W$

La massa del Sole è $M = 1,99 \times 10^{30} Kg$

5. RIGHE SPETTRALI

5.1 Prime evidenze

La prima evidenza di righe spettrali fu trovata da Fraunhofer (1817) nello spettro del Sole. Egli trovò centinaia di righe nere. Le più prominenti furono indicate con le lettere A, B, C...

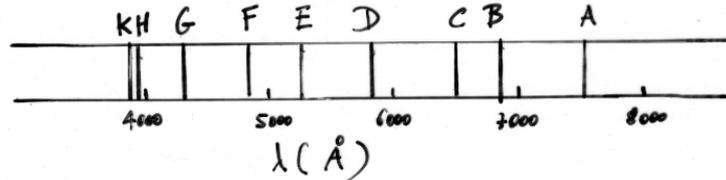


Fig. 5.1 – Righe di Fraunhofer

Fraunhofer fece analoghe scoperte guardando i pianeti e le stelle più brillanti (es. Sirio). Inizialmente non era in grado di dare una spiegazione alla loro origine.

5.2 Le prime interpretazione delle righe spettrali

Il primo a presentare un'interpretazione delle righe fu Kirchhoff nel 1859 come conseguenza di una legge che ricavò sperimentalmente.

Leggi di Kirchhoff

1. Un gas denso molto caldo o un corpo solido molto caldo producono uno spettro continuo senza righe spettrali. (Lo spettro continuo è quello di corpo nero.)
2. Un gas diffuso caldo produce righe di emissione.
3. Un gas diffuso freddo di fronte a una sorgente di spettro continuo produce righe di assorbimento nello spettro continuo.

Altra legge di Kirchhoff: ad una data temperatura, il rapporto tra il potere emissivo E_λ di un corpo e il potere assorbente A_λ in una banda $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ è una costante indipendente dalla natura del corpo:

$$\frac{E_\lambda}{A_\lambda} = \text{costante} = K(\lambda, T) \quad (1)$$

Per un corpo nero $A_\lambda = E_\lambda = I$ per ogni λ .

La (1) afferma quindi che se un corpo è un buon emettitore di radiazione a lunghezza d'onda λ è anche un buon assorbitore della stessa radiazione. Questo significa che, essendo il Sole un buon emettitore di radiazione, esso assorbe anche tale radiazione in modo efficiente. Segue che noi non possiamo vedere l'interno del sole, in quanto la radiazione dell'interno è completamente assorbita. Dalla legge (1) segue anche che se un corpo produce righe spettrali, lo stesso corpo assorbe radiazioni alla stessa λ delle righe emesse.

Kirckhoff confermò questa previsione facendo passare un fascio di luce solare attraverso una fiamma che conteneva del sale da cucina (NaCl) e trovò che una delle righe di emissione della fiamma coincideva con la riga D di Fraunhofer. Allora le righe di Fraunhofer sono causate

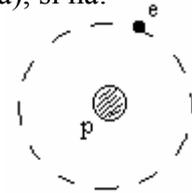
dall'assorbimento dello spettro continuo emesso dal Sole da parte degli elementi della regione esterna, più fredda del Sole.

5.3 Interpretazione di Bohr delle righe dell'idrogeno

N. Bohr diede l'interpretazione fisica delle righe imponendo la quantizzazione dell'energia e del momento angolare degli elettroni legati negli atomi di H e sfruttando la legge di Plank $E = h\nu$. Si ipotizza ora che un elettrone a distanza r dal protone abbia velocità v ed energia E . Dalla conservazione dell'energia (valida essendo la forza di attrazione conservativa), si ha:

$$E = T + U$$

con $T = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ ed U è l'energia potenziale dovuta alla forza elettrostatica (legge di Coulomb) tra elettrone e protone.



Esplicitiamo l'espressione di E . L'elettrone è soggetto alla forza elettrostatica data dalla legge di Coulomb:

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

in cui ϵ_0 = costante dielettrica nel vuoto = 8.8541×10^{-7} Faraday/m. Come conseguenza, sappiamo dalla meccanica classica che esso si muove su un'orbita pressoché circolare (a rigore ellittica):

Assumendo per semplicità un moto circolare, dalla II^a legge della dinamica si ha:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow v = e(4\pi\epsilon_0 m_e r)^{-\frac{1}{2}}$$

e quindi

$$T = \frac{1}{2} \frac{m_e}{m_e} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

D'altra parte l'energia potenziale del campo coulombiano,

$$U = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) \frac{e^2}{r}$$

e quindi

$$E = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) \frac{e^2}{r} \quad (2)$$

D'altra parte, il momento angolare dell'elettrone rispetto al centro del campo di forze elettriche generato dal protone è dato da:

$$L = m_e v \cdot r$$

e quindi

$$L = e \cdot \left(\frac{m_e r}{4\pi\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Bohr suppose che i raggi delle orbite non potevano prendere qualsiasi valore come atteso dalla meccanica classica.

Le sue ipotesi furono:

a) il momento angolare $L = n \frac{h}{2\pi}$, in cui h è la costante di Planck e n è detto numero quantico,

ed assume solo valori interi positivi (1, 2, ...); in realtà dalla Meccanica Quantistica si ha

$$L = \sqrt{n(n+1)} \hbar, \text{ in cui } \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \times 10^{-34} \text{ kg s}^{-1} \text{ m}^2$$

(\hbar è legato al momento angolare dell'elettrone rispetto al nucleo nell'atomo di idrogeno L_e che si può calcolare dalla definizione di momento angolare:

$$L_e = m_e r^2 \omega = (9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(5.29 \times 10^{-11} \text{ m})^2 (4.13 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}) = 1.05 \times 10^{-34} \text{ kg s}^{-1} \text{ m}^2$$

in cui r è la distanza media dell'elettrone dal nucleo e ω è la sua velocità angolare.

b) Mentre l'elettrone si trova in una di queste orbite non irradia.

L'ipotesi a) è chiamata quantizzazione del momento angolare.

Sulla base dell'ipotesi b), solo un salto dell'elettrone da un'orbita ad un'altra porta all'emissione o assorbimento di radiazione elettromagnetica. Poiché i raggi delle orbite sono discretizzati, segue che anche la quantità di radiazione è quantizzata.

Per $L = \frac{n \cdot h}{2\pi}$ si ottiene:

$$e \left(\frac{m_e \cdot r}{4\pi \cdot \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{n \cdot h}{2\pi} \quad (4)$$

e quindi

$$r_n = \frac{\epsilon_0 \cdot n^2 \cdot h^2}{\pi \cdot e^2 \cdot m_e} \quad (5)$$

con $n = 1, 2, 3 \dots$

Per $n = 1$ (stato fondamentale), dai valori di ϵ_0 , h , m_e ed e segue che:

$$r_1 = 0,53 \text{ \AA} \quad 1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$$

Inserendo la (5) nella (2) si ottiene:

$$E_n = -\frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 \cdot n^2 \cdot h^2} \quad (6)$$

con $n = 1, 2, 3 \dots$

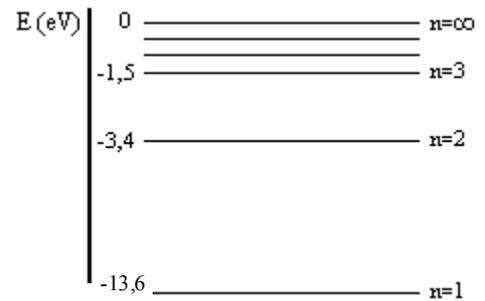
Per $n = 1$ si ha:

$$E_1 = -2,17 \times 10^{-18} J = -13,6 eV \quad \text{Energia dello stato fondamentale}$$

E, più in generale,

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} eV \quad (7)$$

I livelli di energia (quantizzati) sono descritti con una serie di linee orizzontali.



Ebbene, ad ogni cambiamento del livello di energia dell'elettrone (transizione) corrisponde un assorbimento o emissione di un quanto di radiazione di energia nella forma $E_{rad} = h \cdot \nu$. Si verifica un assorbimento di energia nel caso di una transizione verso l'alto (eccitazione dell'elettrone), mentre si ha un'emissione per una transizione verso il basso.

Siano $n = 1, 2, 3 \dots$, $m = 1, 2, 3 \dots$ e $n \neq m$:

$$\Delta E = E_m - E_n = h \cdot \nu_{mn}$$

da cui (per emissione $n > m$)

$$\nu_{mn} = \frac{E_m - E_n}{h} = \frac{\lambda_{mn}}{c} = -\frac{13,6}{h} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = 3,287 \times 10^{15} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) Hz$$

e

$$\lambda_{mn} = \frac{c \cdot h}{E_m - E_n} = \frac{8\epsilon_0^2 \cdot c \cdot h^3}{e^4 \cdot m_e} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)} = \frac{912}{\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)} \text{ \AA} \quad (8)$$

Dalla (8) si può vedere che, fissato n , al variare di $m(>n)$ si hanno delle serie di righe

Serie	n	m
Lyman	$n = 1$	$m \geq 2$
Balmer	$n = 2$	$m \geq 3$
Paschen	$n = 3$	$m \geq 4$
Brackett	$n = 4$	$m \geq 5$

La serie di Lyman dell'idrogeno cade nell'UV (fu scoperta prima di Bohr), quella di Paschen nell'infrarosso, quella di Balmer cade nel visibile e fornisce esattamente le lunghezze d'onda delle righe osservate da Fraunhofer:

$$H_{\alpha} \rightarrow C \qquad H_{\beta} \rightarrow F \qquad H_{\gamma} \rightarrow G$$

N.B:

In realtà la descrizione delle righe è più complessa e ne dà piena interpretazione la meccanica quantistica.

Se l'elettrone eccitato lascia l'atomo di H, quest'ultimo è detto ionizzato.

La teoria di Bohr fornisce anche una spiegazione delle righe di assorbimento/emissione di atomi di elementi diversi dall'idrogeno se sono ionizzati a tal punto da lasciare legato all'atomo un solo elettrone.

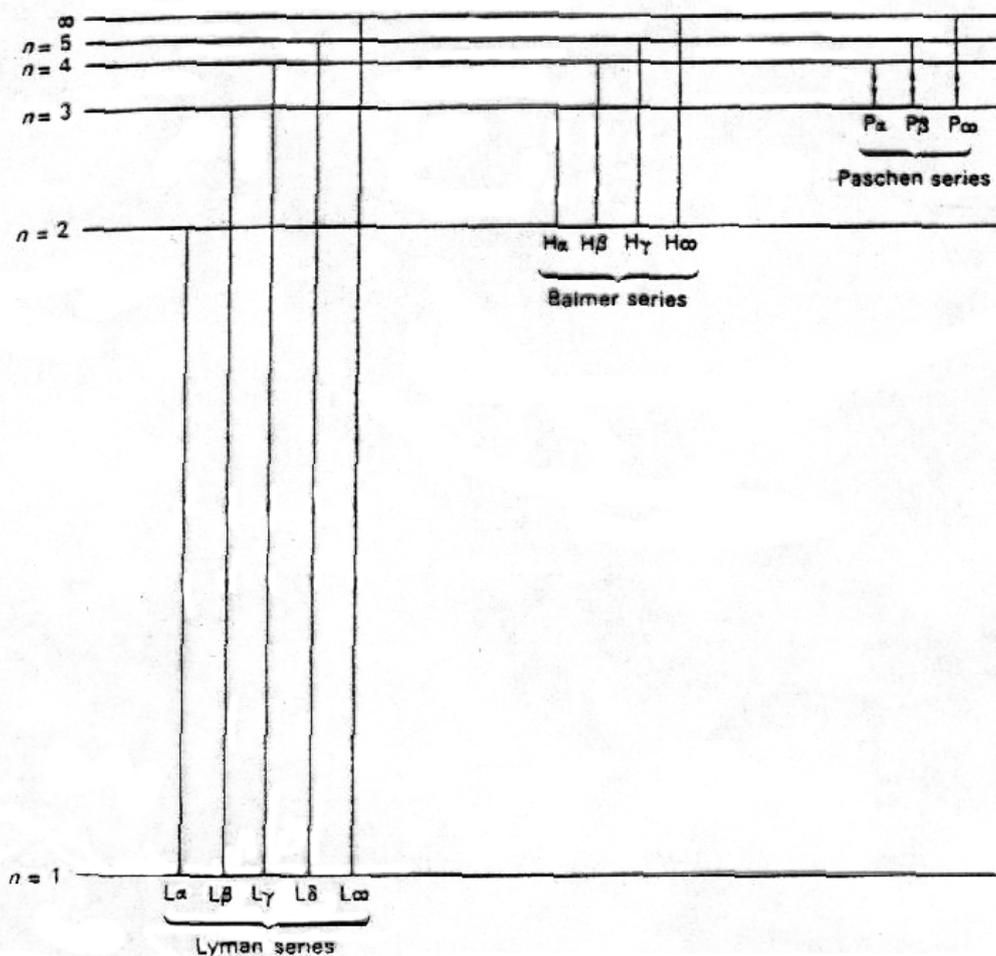


Fig. 5.2 – Transizioni di energia dello spettro dell'idrogeno nelle serie di Lyman, Balmer e Paschen

$n = 1$ Lyman series			$n = 2$ Balmer series			$n = 3$ Paschen series		
		λ (Å)			λ (Å)			λ (Å)
$m = 2$	$L\alpha$	1215	$m = 3$	$H\alpha$ (Fraunhofer C)	6562	$m = 4$	$P\alpha$	18 751
$m = 3$	$L\beta$	1025	$m = 4$	$H\beta$ (Fraunhofer F)	4861	$m = 5$	$P\beta$	12 818
$m = 4$	$L\gamma$	972	$m = 5$	$H\gamma$ (Fraunhofer G)	4340	$m = 6$	$P\gamma$	10 938
$m = 5$	$L\delta$	949						
.			.			.		
.			.			.		
.			.			.		
∞		912	∞		3646	∞		8 208

Fig. 5.3 – Posizione delle linee spettrali nello spettro dell'idrogeno

5.4 Righe molecolari

Anche le molecole possono dal luogo a righe di assorbimento/emissione negli spettri delle stelle. La presenza di righe è legata alla quantizzazione dell'energia di rotazione e vibrazione delle molecole.

Per esempio nel caso di una molecola biatomica (come il CO) si hanno moti di vibrazione che fanno oscillare la distanza assiale fra gli atomi componenti.

Inoltre le molecole hanno un momento angolare (spin) con componenti sia in direzione normale all'asse della molecola che lungo l'asse stesso.

Esempio:

L'energia rotazionale E_{rot} di una molecola è data da:

$$E = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

in cui I è il momento di inerzia, ω la velocità angolare.

Per una molecola biatomica, il momento calcolato rispetto al centro di massa dei due atomi:

$$I = \mu \cdot r^2 = \frac{M_1 \cdot M_2}{M_1 + M_2} r^2$$

Applicando il principio di quantizzazione di Bohr, il momento angolare della molecola

$$L = I \cdot \omega$$

è dato da:

$$I \cdot \omega = \frac{h}{2\pi} J \qquad J = 1, 2, 3, \dots$$

Si può mostrare che i possibili livelli energetici corrispondenti ai possibili stati di J sono dati da

$$E_J = \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2\mu \cdot r^2} J(J+1)$$

6. CLASSIFICAZIONE SPETTRALE DELLE STELLE NEL VISIBILE

Si tratta di una classificazione empirica, basata sul colore delle stelle, sul tipo di righe (in emissione o in assorbimento) presenti nello spettro continuo e sulla loro intensità. La classificazione è stata fatta agli inizi del '900 dall'osservatorio di Harvard (classificazione di Morgan e Keenan, MK).

6.1 Classi spettrali

Sulla base della classificazione MK, le stelle vengono suddivise in 7 classi spettrali note col nome O, B, A, F, G, K, M (per ricordarle, sono tutte contenute nelle iniziali della seguente frase inglese: **O, be a fine girl, kiss me**). Il loro ordine rappresenta un indice di diminuzione della temperatura di corpo nero della stella e il passaggio del colore dal blu al rosso (si veda Fig. 6.1).

Nell'ambito di ciascuna classe abbiamo 10 sottoclassi, esclusa la O (O4, O5, ..., O9,5) es: B0, B1, ..., B9.

Tabella 6.1 – *Classi spettrali con temperature e colori relativi*

Classe	Temperatura (K)	Colore
O	$(3 - 5,5) \times 10^4$	Bluastro
B	$(1 - 3) \times 10^4$	Bianco/Bluastro
A	$(7,5 - 10) \times 10^3$	Bianco
F	$(6,5 - 7,5) \times 10^3$	Giallastro/Bianco
G	$(5 - 6,5) \times 10^3$	Giallo
K	$(3,5 - 5) \times 10^3$	Arancione
M	$(2,0 - 3,5) \times 10^3$	Rosso

Anche le righe negli spettri cambiano da O a M. La classe O è caratterizzata dalla presenza di righe in emissione, mentre dal tipo B in avanti prevalgono le righe di assorbimento, prima di elementi parzialmente ionizzati, poi neutri di He, C, Si, N, O. Vi sono anche le righe di assorbimento dell'idrogeno che sono assenti nello spettro delle stelle di tipo O. Nelle stelle di tipo avanzato K, M si hanno anche righe di assorbimento molecolari (es. TiO).

Se lo spettro contiene righe di emissione si usa porre un indice e come suffisso (es: B5e).

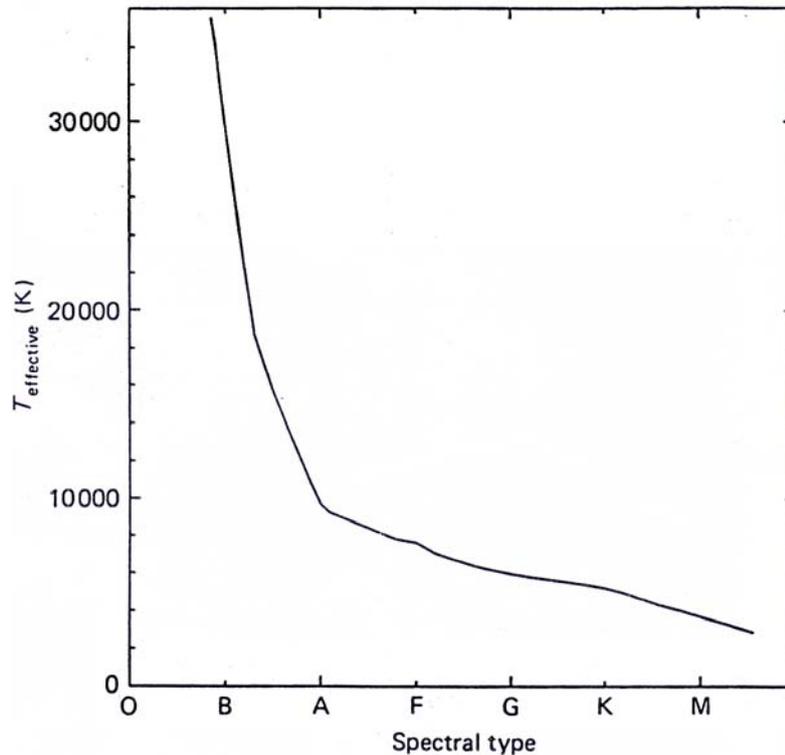


Figura 6.1 – *Temperatura effettiva in funzione del tipo spettrale*

6.2 Classi di luminosità

Nell'ambito di ciascuna classe spettrale vi è un ampio intervallo di luminosità fra diverse stelle aventi la stessa classe spettrale. La differente luminosità è legata alle dimensioni della stella e quindi alla sua massa. Si vedrà meglio questo punto studiando il diagramma di Hertzsprung-Russell. Sono state suddivise le stelle in 6 classi di luminosità indicate con numeri romani (classificazione MK):

- Ia supergiganti più luminose
- Ib supergiganti meno luminose
- II stelle giganti più luminose
- III stelle giganti normali
- IV subgiganti
- V stelle nane normali o stelle della sequenza principale

Per tener conto di questa ulteriore proprietà, nel classificare le stelle si assegna oltre alla classe spettrale anche la classe di luminosità. Nella Tabella 6.2 sono riportati valori di indice di colore e temperatura effettiva di stelle di diversa classe spettrale e luminosità.

Tabella 6.2 – *Scala delle temperature effettive delle stelle*

Classe spettrale	Classi di luminosità					
	Sequenza principale (V)		Giganti (III)		Supergiganti (I)	
	Indice di colore, B-V	Temperatura effettiva, K	Indice di colore, B-V	Temperatura effettiva, K	Indice di colore, B-V	Temperatura effettiva, K
O5	-0,35	40.000				
BO	-0,31	28.000			-0,21	
B5	-0,17	15.500				
A0	0,00	10.000			0,00	
A5	0,16	8.500				
F0	0,30	7.400			0,30	6.400
F5	0,45	6.600				
G0	0,57	6.000	0,65	5.700	0,76	5.400
G5	0,70	5.400	0,84	5.000	1,06	4.700
K0	0,84	4.700	1,06	4.300	1,42	4.000
K5	1,11	4.000	1,40	3.600	1,71	3.400
M0	1,39	3.600	1,65	3.400	1,94	2.800
M5	1,61	3.000	1,84	2.800	2,15	

Dalla legge di Stefan-Boltzman, nota la luminosità della stelle, si può determinare il suo raggio

$$R = \frac{1}{T_e^2} \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma}}$$

Nella Figura 6.2 viene confrontato l'indice di colore B-V atteso da un corpo nero a diversa temperatura con quello osservato dalle stelle.

Nella Figura 6.3 vengono mostrati spettri osservati di stelle di diversa classe spettrale e luminosità. Si notino le righe osservate e come il picco dello spettro continuo si sposta verso lunghezze d'onda maggiori (come previsto dalla relazione dello spostamento di Wien) nel passare dalle prime alle ultime classi spettrali.

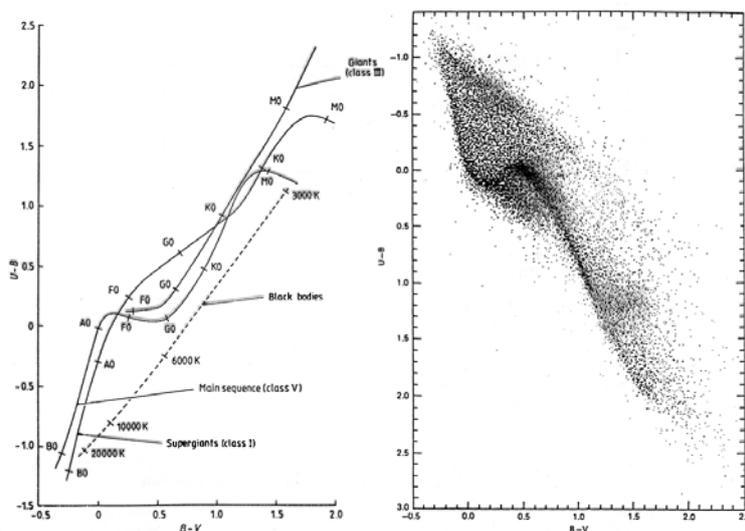


Figura 6.2 – *Diagramma colore-colore per stelle di diverse classi spettrali (a sinistra). Risultati di fotometria UB_v per 46000 stelle (a destra).*

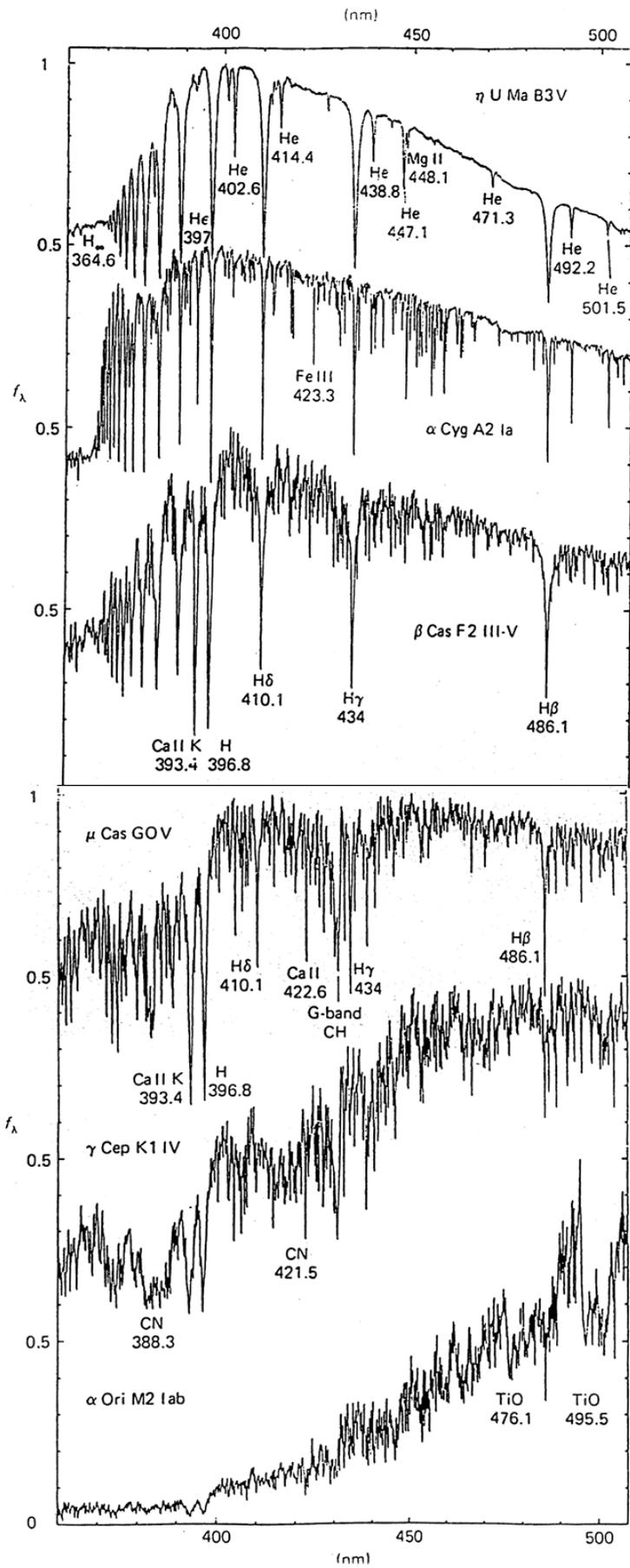


Figura 6.3 – Sei spettri ottici di differenti tipi spettrali

6.3 Relazione osservata tra luminosità e colore delle stelle: Diagramma di Hertzsprung-Russell

Il fatto che la luminosità delle stelle normali sia dovuta ad emissione di corpo nero ha trovato il suo riscontro anche nel diagramma (H-R) di Hertzsprung-Russell (dal nome dei due astronomi, Ejnar Hertzsprung e Henry Norris Russell, che verso il 1910 lo scoprirono indipendentemente). Esso mette in relazione il colore di una stella con la sua magnitudine bolometrica assoluta. Se è nota la distanza per altra strada, si può determinare la luminosità della stella, mentre sappiamo che il colore è legato alla temperatura. Quindi il diagramma H-R fornisce la luminosità delle stelle in funzione della temperatura (v. Figura 6.4). Esse sono quantità fisiche che dipendono strettamente dalle caratteristiche intrinseche della stella (massa, età e composizione chimica), che non sono misurabili direttamente dall'osservatore ma possono essere derivate attraverso modelli fisici.

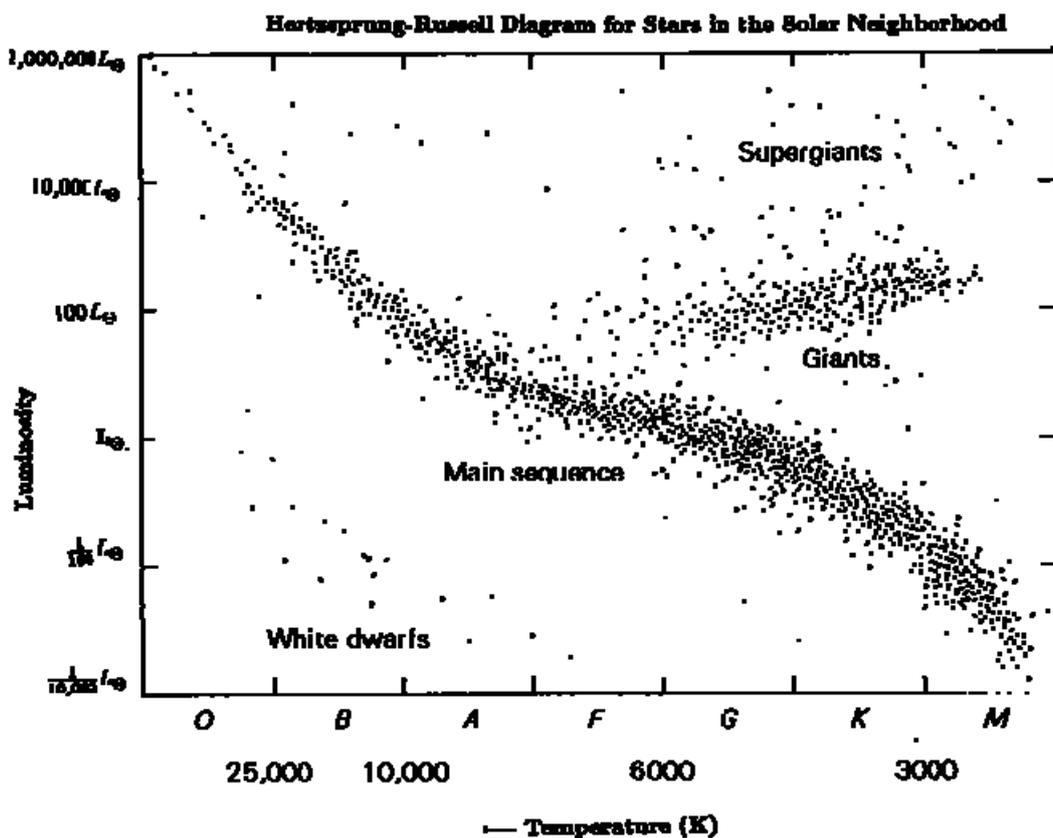


Fig. 6.4 – Diagramma H-R per stelle di distanza nota. In ascissa è riportata la temperatura effettiva e in ordinata la luminosità in unità di quella solare.

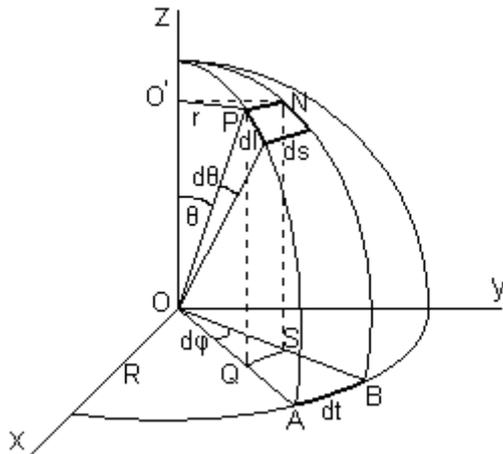
Si vede che il diagramma non è uniformemente popolato: le stelle in massima parte si posizionano in certe regioni del diagramma. Le stelle che si posizionano lungo la diagonale sono chiamate stelle della **sequenza principale**.

Si può vedere che la pendenza del diagramma approssimativamente è in accordo con la legge di Stefan-Boltzmann ($L \propto R^2 T_{eff}^4$) per le stelle della sequenza principale, mentre noi vediamo che ci sono stelle che pur avendo la stessa temperatura effettiva hanno luminosità molto maggiori e in alcuni casi anche minori. Ciò dipende dal raggio R della stella. Stelle di grandi dimensioni (giganti, supergiganti) si trovano al di sopra della sequenza principale, mentre stelle di piccole dimensioni (nane bianche) si trovano al di sotto.

Dal punto di vista evolutivo, le stelle della sequenza principale sono stelle che bruciano, per fusione nucleare, idrogeno ed elio. Le stelle trascorrono la maggior parte della loro vita bruciando tali elementi. Man mano che invecchiano passano attraverso lo stadio delle giganti e supergiganti, prima di terminare la loro vita “normale”.

7. CENNI DI TRIGONOMETRIA SFERICA

7.1 Angolo solido infinitesimo



$$d\Omega = \frac{dl \cdot ds}{R^2} = \frac{Rd\vartheta \cdot rd\varphi}{R^2} = \frac{Rd\vartheta \cdot R \sin \vartheta \cdot d\varphi}{R^2} = \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi$$

$$PN = r \cdot d\varphi$$

$$QS = r \cdot d\varphi$$

$$AB = R \cdot d\varphi$$

$$\frac{PN}{AB} = \frac{r}{R}; \quad PN = AB \cdot \frac{r}{R}; \quad \frac{r}{R} = \sin \vartheta \Rightarrow PR = AB \cdot \sin \vartheta$$

ed essendo $OP = R$, si ha $PO' = R \cdot \sin \vartheta$

7.2 Formule di trigonometria sferica

1) Formule del coseno

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$$

$$\cos b = \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos \beta$$

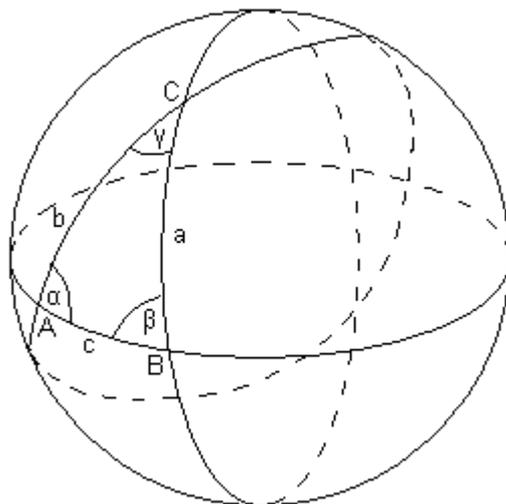
$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma$$

2) Formule del seno

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

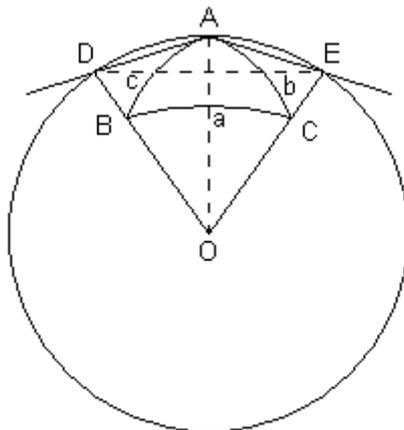
3) Altra formula fondamentale

$$\sin a \cdot \cos \beta = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos \alpha$$



7.3 Dimostrazione della formula del coseno

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$



Dal triangolo DAE

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \cdot \cos A \quad (1)$$

Dal triangolo DOE

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD \cdot OE \cdot \cos a \quad (2)$$

(L'angolo DOE è sotteso dall'arco BC = a)

Dal triangolo rettangolo (in A) DAO:

$$OD^2 - AD^2 = AO^2 \quad (3)$$

Dal triangolo rettangolo (in A) OAE:

$$OE^2 - AE^2 = AO^2$$

Sottraendo membro a membro (1) e (2):

$$2OD \cdot OE \cdot \cos a = (OD^2 - AD^2) + (OE^2 - AE^2) + 2AD \cdot AE \cdot \cos A$$

e quindi:

$$2OD \cdot OE \cdot \cos a = 2AO^2 + 2AD \cdot AE \cdot \cos A$$

$$\cos a = \frac{AO}{OD} \cdot \frac{AO}{OE} + \frac{AD}{OD} \cdot \frac{AE}{OE} \cos A$$

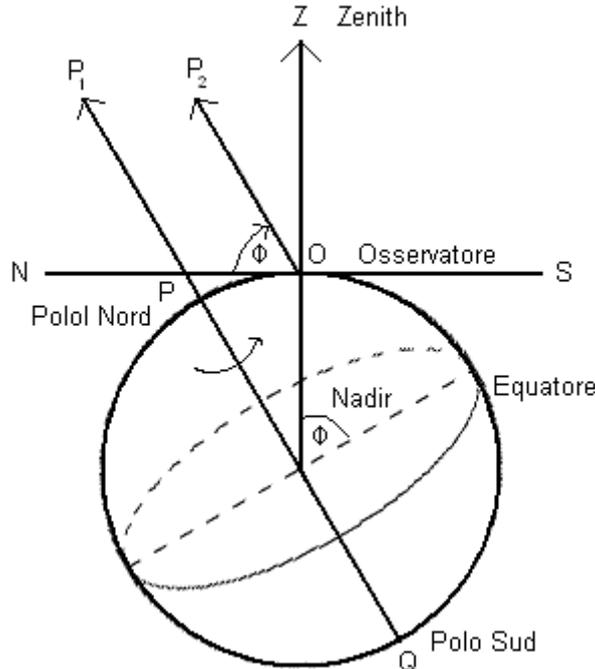
Ma

$$\frac{AO}{OD} = \cos c; \quad \frac{AO}{OE} = \cos b; \quad \frac{AD}{OD} = \sin c; \quad \frac{AE}{OE} = \sin b$$

C.V.D.

8. SISTEMI DI RIFERIMENTO ASTRONOMICI

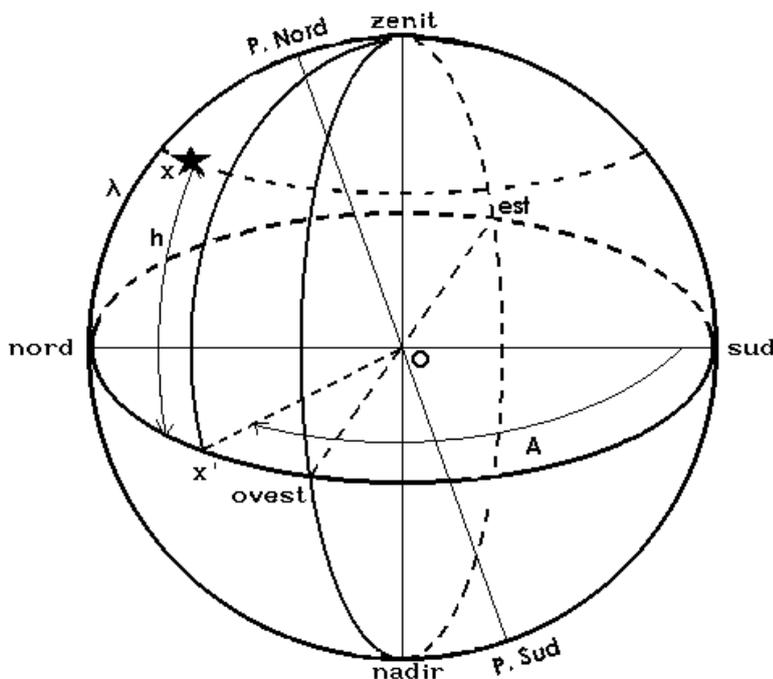
8.1 Definizione di sfera celeste



Si intende per sfera celeste l'estensione a raggio infinito della superficie terrestre.

Lo zenith è l'intersezione con la sfera celeste della verticale del luogo (verso l'alto) in cui si trova l'osservatore. Agli antipodi si trova il nadir. La latitudine del luogo di osservazione è data dall'angolo tra equatore ed asse zenith-nadir. Il cerchio massimo passante per lo zenith e per il polo celeste visibile si chiama meridiano celeste o meridiano astronomico del luogo.

8.2 Sistema Alt-Azimutale



X è la stella o in generale l'oggetto di cui si vuole determinare la posizione in cielo.

Il piano di riferimento per il sistema alt-azimutale è il piano dell'orizzonte dell'osservatore (Sud-Nord-Ovest-Est).

Il sistema alt-azimutale fa uso di due coordinate (A, h) o (A, Z) in cui:

A è l'angolo azimutale o azimuth ed è dato da $\widehat{SOX'} = SX'$;

h è l'altezza data da $X'\widehat{OX} = X'X$

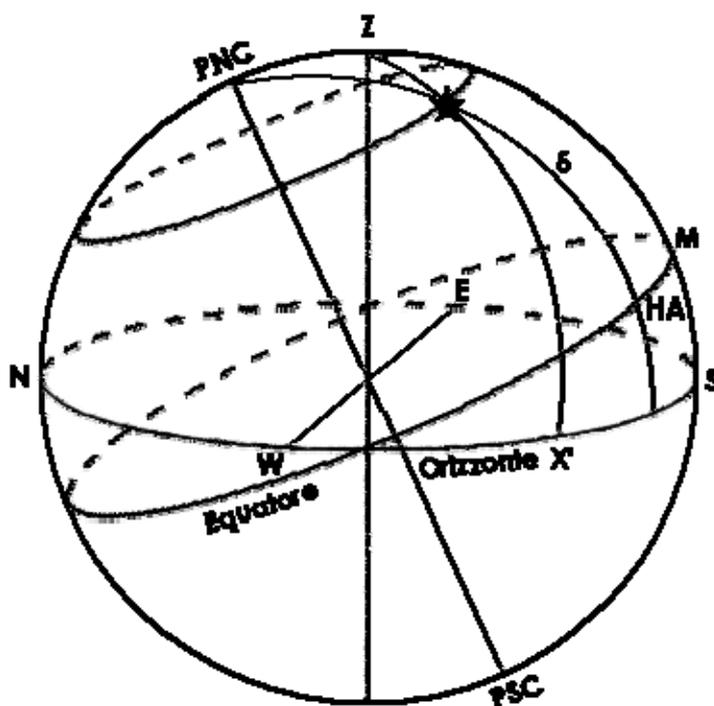
Al posto di h, spesso si ha Z che equivale alla distanza Zenitale: $Z = Z\widehat{OX} = ZX$.

L'azimut A è contato a partire da Sud.

λ è la latitudine del luogo riferita all'angolo $N\widehat{OP}$ sotteso dall'arco NP

Si noti bene che in questo sistema di coordinate, le stelle cambiano continuamente di posizione e quindi di coordinate.

8.3 Sistema orario



L'equatore celeste è il piano perpendicolare all'asse PNC-PSC e non è altro che l'equatore terrestre proiettato nel cielo.

Il meridiano astronomico incontra l'equatore celeste nel punto M, detto anche Mezzocielo.

Il cerchio massimo passante per PNC, X e X' si chiama cerchio orario.

In questo sistema di coordinate il piano di riferimento è l'equatore celeste.

Le coordinate di un oggetto celeste sono espresse da (HA, δ).

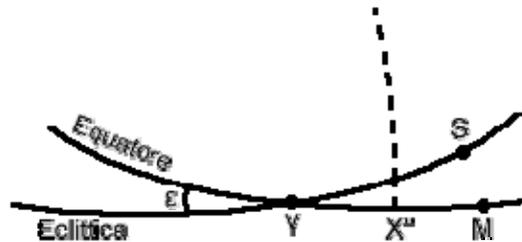
La coordinata HA viene chiamata angolo orario ed è data dall'arco MX' contata a partire da M verso Ovest. Si noti che l'arco MX' cresce continuamente per effetto del moto della Terra attorno al suo asse.

La coordinata δ è data dall'arco X'X e si chiama declinazione. Questa può essere positiva o negativa a seconda che la stella sia nell'emisfero NORD o nell'emisfero SUD.

Quando la stella passa per il meridiano del luogo, dalla parte di Z, si dice che è in culminazione superiore, nel caso opposto si dice che è in culminazione inferiore.

Se $\delta > 90 - \lambda$, la stella non tramonta mai e si dice circumpolare.

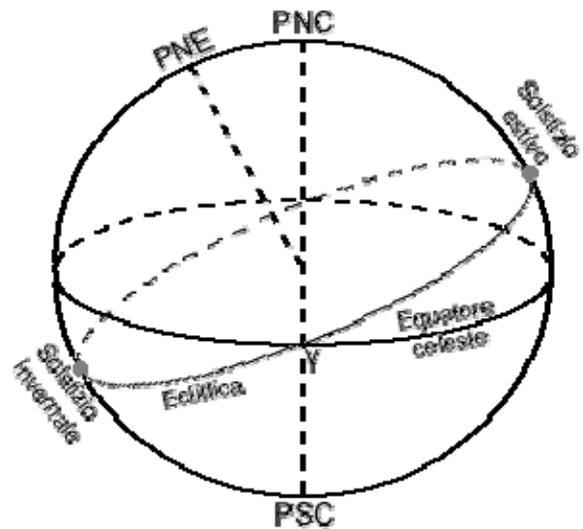
8.4 Punto Gamma o Primo Punto di Aries



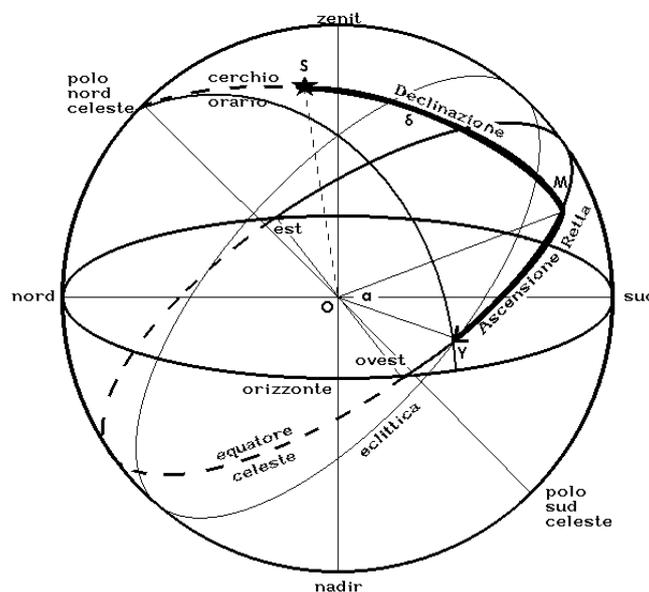
L'insieme dei punti occupati dal Sole nel corso dell'anno è chiamato eclittica, anch'essa un cerchio massimo.

Il piano dell'eclittica è inclinato di $23^\circ 27'$ ($= \epsilon$) sull'equatore celeste e lo interseca in 2 punti detti equinozi. L'equinozio di primavera, corrispondente al punto di intersezione tra eclittica ed equatore celeste quando la declinazione del Sole si muove da valori negativi a valori positivi, è chiamato punto γ o primo punto di Aries (in quanto nel tempo in cui fu definito, tale punto era nella costellazione dell'Ariete).

Il punto γ è l'origine di una delle due coordinate del sistema equatoriale.



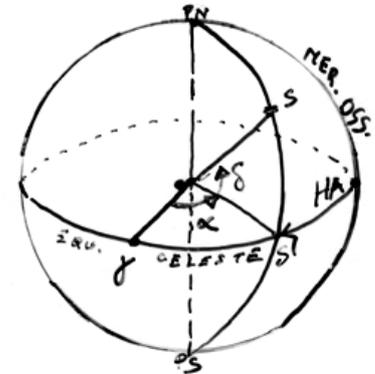
8.5 Coordinate equatoriali



In questo sistema, che ha l'equatore celeste come riferimento, le coordinate di una stella sono definite da due angoli (o archi corrispondenti) α e δ .

La Declinazione δ rappresenta l'angolo che la direzione della stella forma con l'equatore celeste. L'ascensione retta α della stella è definita tramite l'angolo orario HA della stella S già visto e il punto γ .

Il vantaggio di utilizzare il punto γ è che esso è un punto del cielo pressoché fisso, per cui le coordinate equatoriali forniscono coordinate che cambiano in modo molto lento (principalmente per effetto della precessione dell'asse della Terra attorno al polo dell'eclittica).



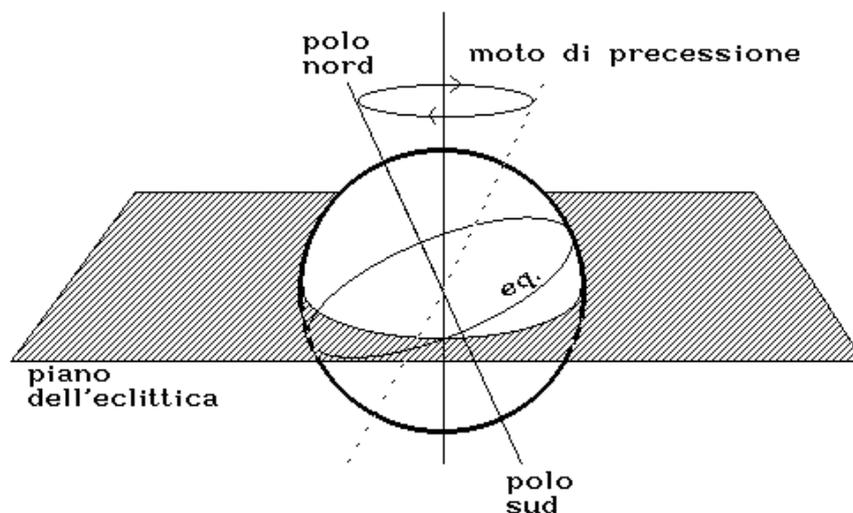
Definito Tempo Siderale (T.S.) l'angolo orario del punto γ (si veda anche più avanti), l'ascensione retta α (espressa di solito in (h,m, s)) è l'angolo compreso tra il punto γ e il cerchio orario della stella ed è contato in senso antiorario. Esso soddisfa la seguente relazione:

$$T.S. = HA + \alpha$$

ovvero

$$\alpha = TS - HA$$

8.6 Precessione



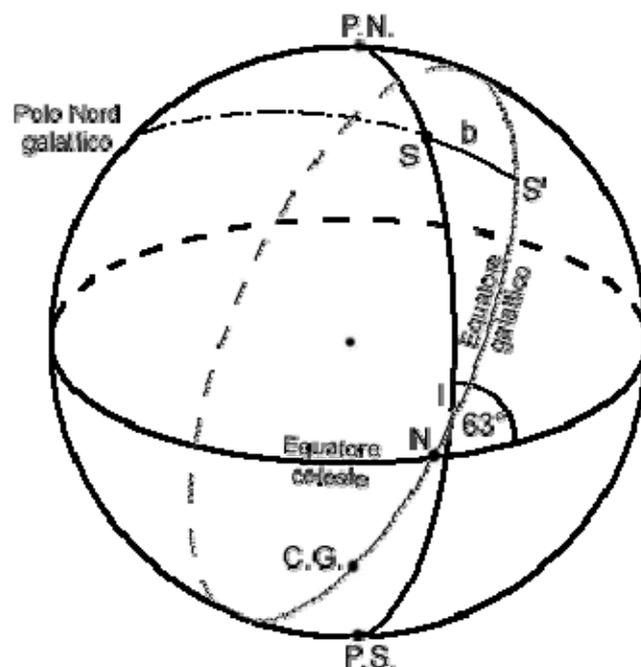
È noto che l'asse di rotazione della Terra (inclinato di circa $23,5^\circ$ rispetto all'asse del piano dell'eclittica), subisce un moto di precessione descrivendo un cono di semi-angolo di $23,5^\circ$ rispetto a tale asse con un periodo di circa 26.000 anni. Ciò determina un cambiamento dell'orientamento dell'equatore celeste rispetto alle stelle. Di conseguenza le coordinate delle stelle nel sistema equatoriale cambiano di anno in anno. In aggiunta alla precessione vi è anche un moto di nutazione. Per effetto di questi moti si hanno le seguenti variazioni di α e δ :

$$\frac{\Delta\alpha}{\text{anno}} = (3,0730 + 1,3362 \cdot \sin \alpha \cdot \tan \delta) \text{ sec}$$

$$\frac{\Delta\delta}{\text{anno}} = (20,043 \cdot \cos \alpha) \text{ arc sec}$$

Attualmente le coordinate equatoriali sono riferite all'anno 2000 ($\alpha_{2000}, \delta_{2000}$) con α in generale misurato in (hh,mm,ss.xx) e δ misurato in ($^{\circ}, ', ''$).

8.7 Coordinate Galattiche



Specie per lo studio della nostra Galassia, è conveniente lavorare in coordinate galattiche.

In tale sistema di coordinate il piano di riferimento è il disco della nostra Galassia.

L'intersezione del disco Galattico con la sfera celeste costituisce l'equatore galattico.

L'equatore galattico è inclinato di 63° rispetto all'equatore celeste.

Nel sistema di coordinate galattico, una stella ha coordinate (l, b), in cui:

- l (longitudine galattica) è l'equivalente dell'ascensione retta ed è misurata nella stessa direzione (antioraria), ma lungo l'equatore galattico. Nel primo sistema di coordinate galattiche (l^I), (prima del 1959), l si misurava a partire dall'intersezione tra equatore celeste ed equatore galattico (punto N). Nel secondo sistema di coordinate galattiche (l^{II}) introdotto dopo il 1959, l si misura a partire dalla direzione del centro galattico.
- b (latitudine galattica) è l'angolo tra l'equatore galattico e la direzione della stella (può essere positiva o negativa) lungo il cerchio massimo passante per il polo nord Galattico.

N.B. Si tenga presente che la longitudine galattica del polo nord celeste (P.N.) (epoca 1950) è esattamente 123° . Il sistema ora in uso è (l^{II}, b^{II}) \equiv (l, b).

Nella Fig. 8.1, viene mostrata la distribuzione delle binarie X di piccola massa (con oggetti compatti) nella nostra Galassia in coordinate galattiche.

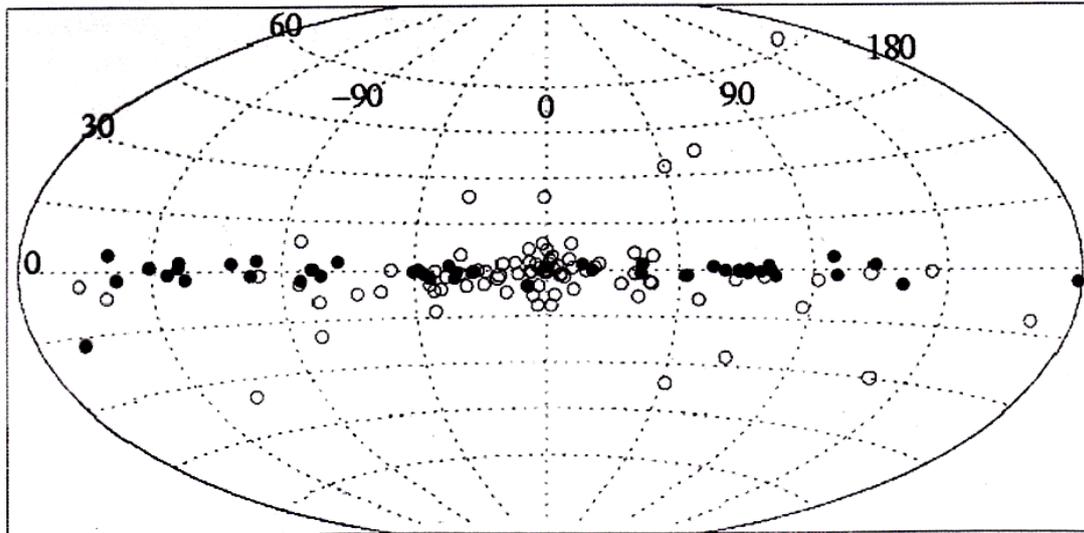


Figura 8.1 – Distribuzione delle binarie X di piccola massa Galattiche in coordinate galattiche

8.8 Giorno giuliano (JD) e giorno giuliano modificato (MJD)

In astronomia il tempo è suddiviso in giorni Giuliani (JD), in cui il numero di giorni Giuliani è contato a partire dal mezzogiorno (12 UT) del 1° Gennaio 4713 a.C. (JD=0.0), in cui la durata di un anno è quella fissata dal calendario Gregoriano (1 anno= 365.2425 giorni).

Il Giorno Giuliano fu introdotto da Giuseppe Giusto Scaligero nel 1581 (in onore di Giulio Scaligero).

La data Giuliana dà anche la frazione di giorno.

Ad esempio:

1° Gennaio 1980, ore 12 UT → JD 2444238.0

1° Gennaio 2000, ore 12 UT → JD 2451545.0

Dividendo il numero di giorni giuliani corrispondenti a una determinata data, si può ottenere anche il giorno della settimana: lunedì se il resto è zero, martedì se il resto è uno, ecc.

Nel caso del Giorno Giuliano Modificato (MJD), il giorno inizia a mezzanotte invece che a mezzogiorno; inoltre si trasporta l'origine al 17 Novembre 1958 (JD 2400000.5):

$$\text{MJD} = \text{JD} - (240)0000.5$$

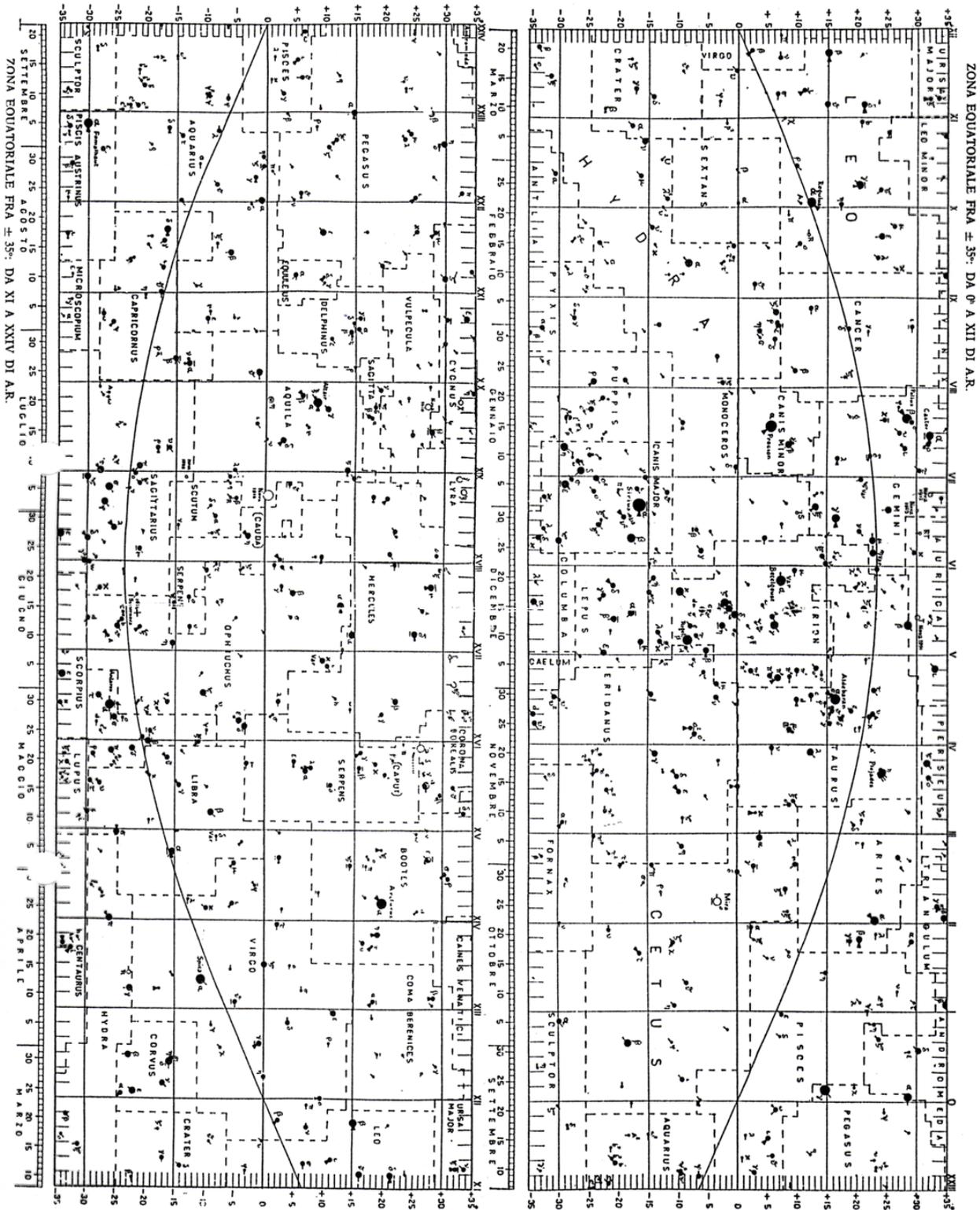


Figura 8.2 – Mappa celeste della zona equatoriale nei 12 mesi dell'anno

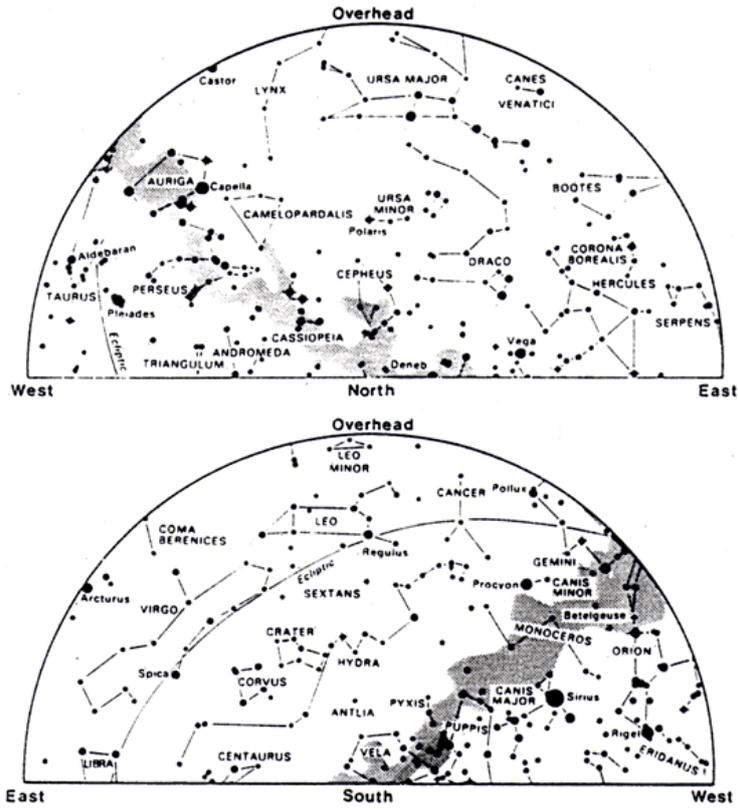


Figura 8.3 – Costellazioni notturne nei mesi da febbraio ad aprile per l'emisfero Nord

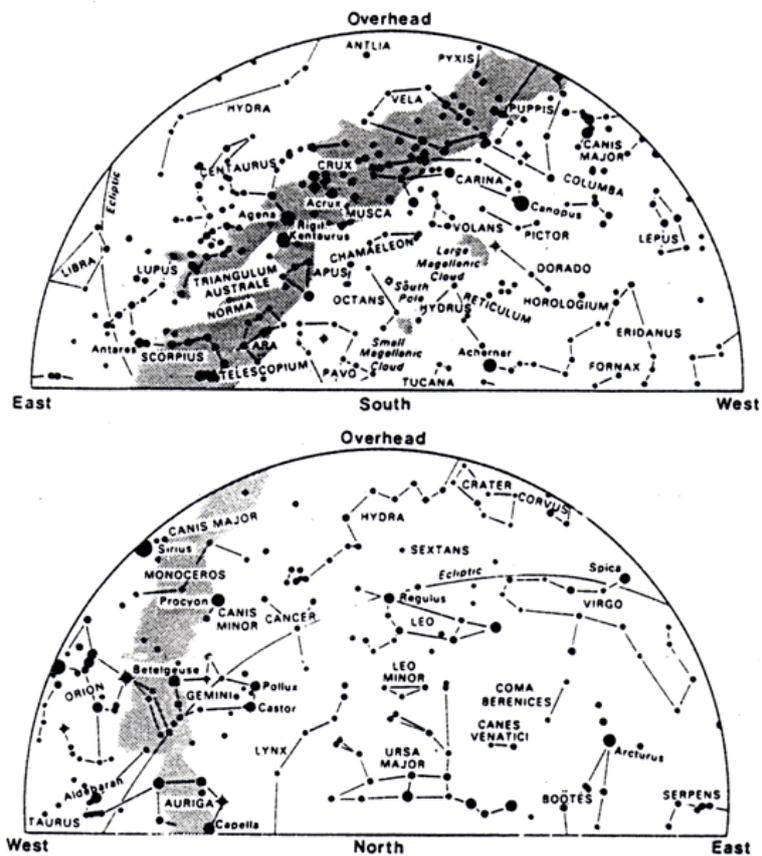
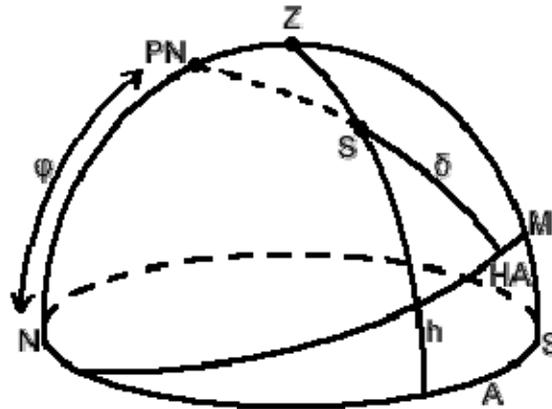


Figura 8.4 – Costellazioni notturne nei mesi da febbraio ad aprile per l'emisfero Sud

8.9 Trasformazione coordinate astronomiche

Si riassumono le trasformazioni di coordinate da un sistema di riferimento alt-azimutale a un sistema orario e viceversa



$$\begin{cases} \sin HA \cos \delta = \sin A \cos h \\ \cos HA \cos \delta = \cos A \cos h \sin \varphi + \sin h \cos \varphi \\ \sin \delta = -\cos A \cos h \cos \varphi + \sin h \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos h \sin A = \cos \delta \sin HA \\ \cos h \cos A = \cos \delta \cos HA \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \\ \sin h = \cos \delta \cos HA \cos \varphi + \sin \delta \sin \varphi \end{cases}$$

HA = angolo orario

δ = declinazione celeste

h = altezza sull'orizzonte

A = azimut

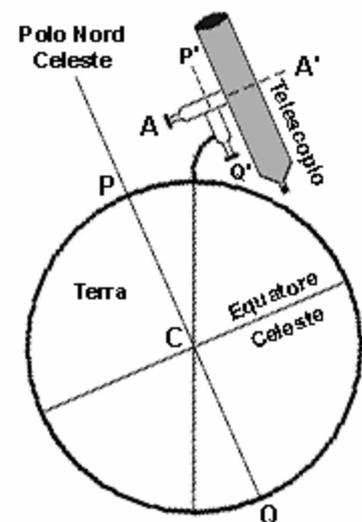
8.10 Montatura equatoriale di un telescopio e suo uso

La montatura equatoriale di un telescopio è quella mostrata nella figura a fianco. Ruotando lo strumento attorno all'asse di declinazione AA' si orienta il telescopio sulla corretta declinazione della stella, mentre ruotando attorno all'asse polare P'Q' si insegue l'oggetto durante il suo moto diurno apparente dovuto alla rotazione della Terra attorno al proprio asse.

Le RA e le declinazioni ad una data epoca (es. 2000) degli oggetti celesti noti sono tabulate. Corrette per la precessione e nutazione, si possono riportare al tempo dell'osservazione.

Note α , δ e il TS, è possibile puntare un telescopio con montatura equatoriale nella direzione in cui è l'oggetto in qualsiasi istante

anche se non è visibile ad occhio nudo. L'angolo iniziale corretto per l'asse polare è dato da:



$$HA(X) = TS - RA(X) \quad (2.4)$$

Tramite un motore, si far ruotare uniformemente il telescopio attorno all'asse polare per compensare la rotazione della Terra in senso opposto.

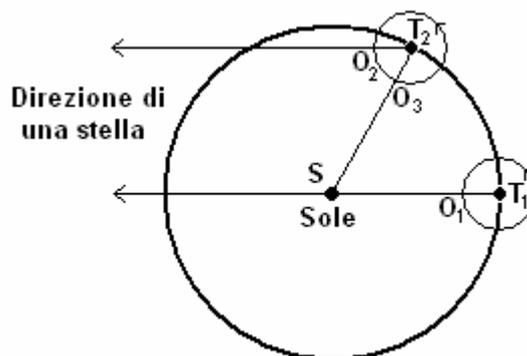
Esercizio

Calcolare l'angolo orario di una stella con $RA = 18^h 24^m 42^s$ e $TSL = 4^h 13^m 22^s$

9. LA MISURA DEL TEMPO: TEMPO SIDERALE E TEMPO SOLARE MEDIO

9.1 Il giorno siderale

Il giorno siderale è definito come l'intervallo tra due successivi passaggi di una stella attraverso il meridiano dell'osservatore. Tale intervallo è diverso dal giorno solare, misurato dal tempo necessario per due successivi passaggi del Sole attraverso il meridiano dell'osservatore. Questo accade perché, se si osserva una stella lontana (distanza approssimativamente infinita), la direzione corrispondente al passaggio sopra allo stesso meridiano è la stessa (o comunque sempre parallela) in ogni punto dell'orbita terrestre. Il Sole invece, poiché più vicino, per poterlo vedere nella stessa posizione del giorno precedente è necessario che la Terra ruoti di un angolo supplementare di circa 1° , che determina un ritardo di circa $3^m 56^s$ rispetto al giorno siderale.



9.2 Il Tempo Siderale

Come abbiamo visto, l'angolo orario del primo punto di Aries (γ) definisce il Tempo Siderale Locale (TSL). Esso dipende dalla longitudine del luogo di osservazione sulla Terra. Data una stella X di angolo orario HA(X) ed ascensione retta RA(X), si ha:

$$\text{TSL} = \text{HA}(X) + \text{RA}(X) \quad (2.1)$$

Se il tempo siderale locale è noto e lo sono pure le coordinate equatoriali di X ($\text{RA} \equiv \alpha$ e $\text{declinazione} \equiv \delta$) all'epoca dell'osservazione, si può immediatamente calcolare HA(X) e quindi stabilire la posizione dell'oggetto nella sfera celeste.

Poiché l'angolo orario di una stella X è zero quando transita sul meridiano dell'osservatore, la RA(X) coincide con TSL quando la stella passa davanti al meridiano dell'osservatore

$$\text{TSL} = \text{RA}(X) \quad \text{se } \text{HA}(X)=0 \quad (2.2)$$

In ogni osservatorio c'è un orologio che segna il TSL e può essere sincronizzato con il tempo di transito di stelle con RA nota. In realtà oggi il tempo siderale locale viene calcolato a partire da un segnale radio distribuito per questo scopo.

Il tempo tra il transito di un oggetto celeste X dal meridiano di Greenwich a quello locale, coincide con la longitudine dell'osservatore in quel luogo.

Quindi l'angolo orario per Greenwich di una stella X che sta transitando sul meridiano locale che si trova a longitudine λ , coincide con λ .

Più in generale:

$$\text{GHA}(X) = \text{HA}(X) + \lambda \quad (2.3)$$

in cui GHA(X) è l'angolo orario di X per Greenwich, HA(X) è l'angolo orario per il meridiano locale e la longitudine λ è misurata positiva verso Ovest e negativa verso Est.

Quando il punto γ transita sul meridiano del luogo, si ha:

$$\text{HA}(\gamma) = 0$$

e quindi:

$$\text{TSL}(\gamma) = 0$$

9.3 Suddivisione del giorno siderale in h, m, s

1 giorno siderale viene suddiviso, come il giorno solare, in 24 ore siderali
Analogamente:

1 ora siderale = 60 minuti siderali

1 minuto siderale = 60 secondi siderali

9.4 Tempo solare medio (TSM)

Il giorno solare apparente è il tempo fra due successivi passaggi del Sole attraverso il meridiano dell'osservatore. Tale passaggio veniva una volta stabilito con le meridiane: quando il Sole transita sul meridiano del luogo, l'ombra dello gnomone diventa più corta e giace in direzione N-S.

La durata del giorno solare apparente non è costante durante l'anno per due ragioni principali:

- L'orbita della Terra attorno al Sole è ellittica e, come spiega la seconda legge di Keplero, la velocità areolare è costante e quindi la velocità lineare è soggetta a cambiamenti durante l'anno;
- L'eclittica è inclinata di circa $23,5^\circ$ rispetto all'equatore ma l'angolo orario è misurato su quest'ultimo.

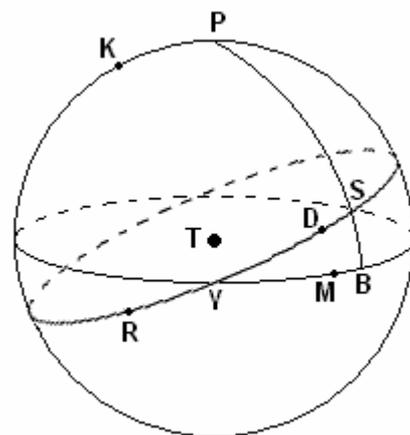
È stato allora introdotto il giorno solare medio (GSM), inerente al transito di un corpo fittizio, chiamato sole medio, strettamente legato al Sole che si muove però lungo l'equatore celeste nella direzione delle ascensioni rette crescenti con velocità angolare costante che è uguale alla velocità angolare media del Sole reale lungo l'eclittica (circa $1^\circ/\text{giorno}$) durante il suo moto annuale.

Per capire meglio la relazione tra il Sole reale S e il Sole medio M, si introduce prima un Sole medio dinamico D che parte con S al perigeo R (al perigeo il Sole si trova alla minima distanza dalla Terra, e si ha attorno al 1 Gennaio) e si muove lungo l'eclittica con la velocità angolare media del Sole reale per cui D ed S ritornano insieme al perigeo.

Quando D raggiunge il punto γ , il Sole medio parte lungo l'equatore celeste e si muove con la velocità angolare media del Sole, ritornando al punto γ contemporaneamente con il Sole medio dinamico.

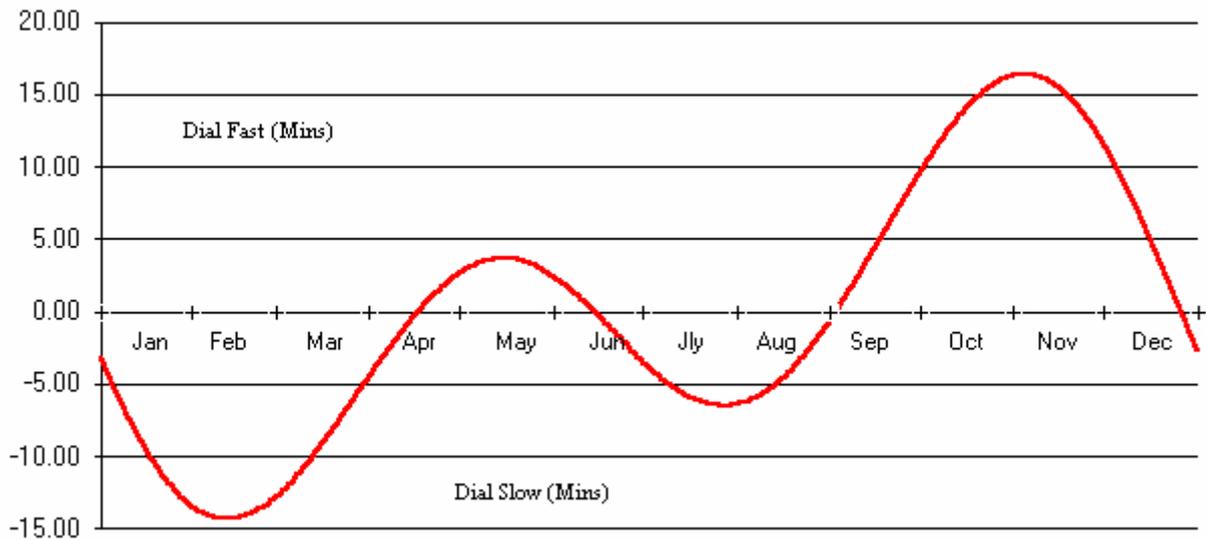
Dalla figura si vede che $RA(S)$ coincide con l'arco γB e che $RA(M)$ coincide invece con l'arco γM .

L'arco MB è detto equazione del tempo (ϵ):



$$\varepsilon = RA(M) - RA(S) \quad (2.5)$$

Durante l'anno il valore di ε varia tra -14,5 minuti e 16,25 minuti.



Quindi il Tempo Solare Medio (TSM) viene segnato dall'angolo orario di M:

$$HA(M) = TSL - RA(M)$$

Quando sono trascorse 24 hr di HA(M) è trascorso 1 GSM.

Quindi il GSM è suddiviso in 24 ore solari medie, a loro volta suddivise in 60 minuti solari medi. Ogni minuto è composto da 60 secondi solari medi.

Dalla relazione $TSL = HA + RA$, segue che,

a) per il sole S

$$TSL = HA(S) + RA(S) \quad (2.6)$$

Per il Sole medio M

$$TSL = HA(M) + RA(M) \quad (2.7)$$

Quindi: $HA(S) + RA(S) = HA(M) + RA(M)$

Da cui

$$\varepsilon = RA(M) - RA(S) = HA(S) - HA(M)$$

e quindi

$$\varepsilon = HA(S) - HA(M) \quad (2.8)$$

Se si riferisce HA(M) al meridiano di Greenwich (GHA), si ottiene il Tempo Medio di Greenwich (GMT), chiamato anche tempo Universale (UT), tale che:

$$UT = GMT = GHA(M) \pm 12^h = GHA(S) - \varepsilon \pm 12^h \quad (2.9)$$

Si rammenti che al transito $GHA(M) = 0$. Si utilizza il segno “ \pm ” a seconda che $GHA(M)$ sia maggiore o minore di 12^h rispettivamente.

Quindi il Tempo Universale (UT) è il tempo solare medio riferito al meridiano di Greenwich.

Si noti che 1 s di T.S. corrisponde a 0,997269 s di UT. Infatti un giorno siderale è più corto di un giorno solare medio di circa $3^m 56^s$ (v. sotto).

2.4 Relazione tra tempo solare medio e tempo siderale

Si è visto che per il Sole Medio:

$$TSL = HA(M) + RA(M)$$

Consideriamo questa relazione ad un tempo particolare ed a uno separato di un giorno solare medio.

Al primo tempo si ha $T_1 = H_1 + R_1$, dopo un giorno solare medio: $T_2 = H_2 + R_2$

in cui, per definizione $H_2 - H_1 = 24^h$ in quanto è trascorso un GSM.

Quindi

$$T_2 - T_1 = 24^h + (R_2 - R_1) \quad (2.10)$$

Ora si sa che il Sole Medio avanza in RA al ritmo di

$$360^\circ / 365 \frac{1}{4} / \text{giorno solare medio}$$

ovvero

$$24^h / 365 \frac{1}{4} / \text{giorno solare medio}$$

Quindi

$$T_2 - T_1 = 24^h + 24^h / 365 \frac{1}{4} = 24^h \left(1 + 1 / 365 \frac{1}{4} \right) = 24^h \left(\frac{366 \frac{1}{4}}{365 \frac{1}{4}} \right) \text{ di tempo siderale} \quad (2.11)$$

$$\text{Quindi } 24^h \text{ di tempo solare medio} = 24^h \left(\frac{366 \frac{1}{4}}{365 \frac{1}{4}} \right) = 24^h 03^m 56^s .5554 \text{ di tempo siderale}$$

$$\text{Viceversa, } 24^h \text{ di tempo siderale} = 24^h \left(\frac{365 \frac{1}{4}}{366 \frac{1}{4}} \right) = 23^h 56^m 04^s .0905 \text{ di tempo solare medio}$$

In conclusione:

- un giorno solare medio = $24^h 03^m 56^s .5554$ di tempo siderale
- un giorno siderale = $23^h 56^m 04^s .0905$ di tempo solare medio

Esercizio

Una stella ha RA = $9^{\text{h}}46^{\text{m}}12^{\text{s}},7$. Quando la stella transita in due notti consecutive, l'orologio segna un $\text{LST}_1 = 9^{\text{h}}46^{\text{m}}21^{\text{s}},0$ e $\text{LST}_2 = 9^{\text{h}}46^{\text{m}}18^{\text{s}},6$. Calcolare l'errore dell'orologio e la velocità dell'orologio (errore commesso per giorno siderale).

10. ASSORBIMENTO DELLA LUCE DAGLI OGGETTI CELESTI

10.1 Spessore ottico (o profondità ottica)

Si definisce spessore ottico alla frequenza ν la quantità τ_ν data da

$$\tau_\nu = \int_{S_0}^S \mu_\nu ds' \quad (1)$$

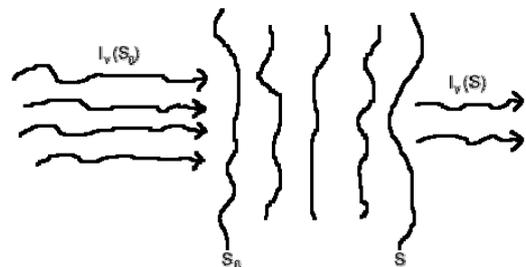
In cui μ_ν è il coefficiente di assorbimento del materiale attraversato. Tale coefficiente è legato alla probabilità che la radiazione venga diffusa (e quindi sottratta al fascio) o assorbita. L'integrale (1) è legato quindi alla probabilità che nel tratto da S_0 a S la radiazione sia stata sottratta al fascio che procede fino all'osservatore. Se ci si limita all'assorbimento (fotoelettrico), bisogna usare il coefficiente appropriato. Il coefficiente di assorbimento dipende dalla frequenza della radiazione. μ_ν è misurato in cm^{-1} o in cm^2/g . Nel primo caso s è misurato in cm, nel secondo caso in g/cm^2 .

Nell'ipotesi che il gas assorbente la radiazione non produca a sua volta, per effetto dell'energia assorbita, una sua emissione, si trova che la diminuzione percentuale dell'intensità alla frequenza ν è proporzionale allo spessore infinitesimo attraversato:

$$\frac{dI_\nu}{I_\nu} = -\mu_\nu ds$$

in cui μ è la costante di proporzionalità che dipende dal materiale e dalla frequenza della radiazione ed è chiamato coefficiente di assorbimento del materiale alla frequenza ν . Integrando l'equazione precedente si trova che:

$$I_\nu(S) = I_\nu(S_0)e^{-\tau_\nu} \quad (2)$$



Perciò

$$\tau_v = \ln \frac{I_v(S_0)}{I_v(S)} \quad (3)$$

In termini di variazione di magnitudine, essendo $m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10} \frac{I_v}{I_{0v}}$, ovvero

$$\Delta m = m_s - m_{s_0} = 2.5 \log_{10} \frac{I_{0v}}{I_v} = 2.5 \frac{\ln I_{0v} / I_v}{\ln 10}$$

segue che

$$\Delta m = \frac{2.5 \tau_v}{\ln 10} = 1.085 \tau_v \quad (4)$$

Se la radiazione attraversa più strati, ciascuno con spessore ottico $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, lo spessore ottico complessivo è

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$$

Esempi

a) $\tau = 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2.718} I_0 \approx 37\% I_0$

b) $\tau = 0.5 \Rightarrow I \approx 60\% I_0$ (Strato otticamente sottile)

c) $\tau = 3 \Rightarrow I \approx 5\% I_0$ (Strato otticamente spesso)

Uno strato si dice otticamente sottile se $\tau < 1$

Dalla definizione di spessore ottico (1) segue che se lo strato ha densità uniforme, si ha

$$\tau_v = \mu_v l \quad (5)$$

con $l = S - S_0$

Se μ_v è misurato in cm^2/g (coefficiente di assorbimento di massa), la (5) diventa:

$$\tau_v = \mu_v \rho \cdot l$$

in cui ρ è la densità del materiale dello strato.

10.2 Sezione d'urto e libero cammino medio nel caso di interazione tra radiazione e materia

Per sezione d'urto (espressa spesso in cm^2) si intende una quantità proporzionale alla probabilità di interazione di una particella con la radiazione o con altre particelle. E' come se ad ogni particella o alla radiazione viene associata una superficie perpendicolare alla direzione della particella o radiazione, tale che se tale superficie intercetta una particella avviene l'interazione.

Se σ_v è la sezione d'urto atomica del materiale, se n è la densità in numero di atomi del materiale (cm^{-3}), è intuitivo che

$$\mu_v = \sigma_v n$$

e quindi τ_v è dato da:

$$\tau_v = \sigma_v n \cdot l$$

(assumendo densità uniforme)

Il percorso libero medio l_v della radiazione è definito come la distanza media che un fotone può percorrere in un materiale assorbente prima che esso venga assorbito.

Tenendo presente che la profondità ottica media

$$\langle \tau \rangle = \int_0^{\infty} \tau_v e^{-\tau_v} d\tau_v = 1$$

segue che, per spessori omogenei, essendo $\langle \tau_v \rangle = \langle l_v \rangle \mu_v$,

$$\langle l_v \rangle = \frac{1}{\mu_v} = \frac{1}{n\sigma_v}$$

11. ASSORBIMENTO DELLA RADIAZIONE DAGLI OGGETTI CELESTI DA PARTE DELL'ATMOSFERA

11.1 Assorbimento radiazione in atmosfera

La figura qui sotto mostra la quota a cui la radiazione elettromagnetica di una data frequenza arriva con intensità dimezzata rispetto a quella incidente sulla cima dell'atmosfera terrestre. Si vede bene che la radiazione visibile e quella radio raggiungono la superficie terrestre, mentre le altre subiscono assorbimento. Nella banda infrarossa vi sono solo brevi intervalli di λ in cui la radiazione arriva a terra. In realtà anche nella banda ottica vi è estinzione della luce che ora discutiamo.

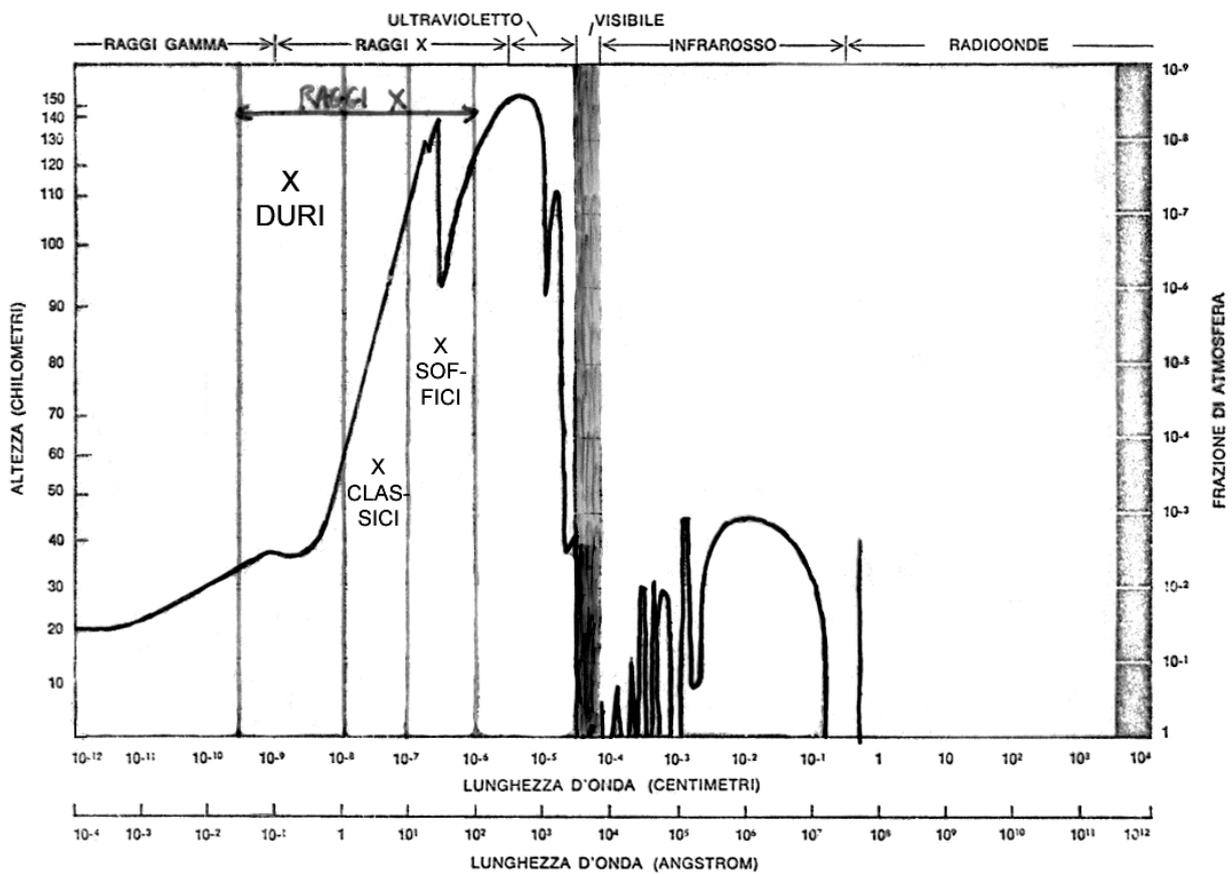
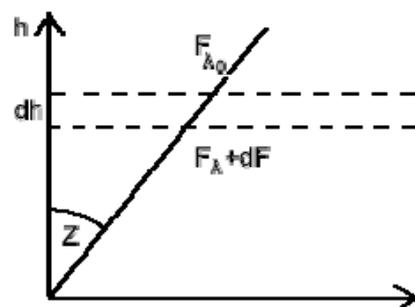


Figura 11.1 La dipendenza della quota a cui si ha un dimezzamento dell'intensità della radiazione (in Km) dalla lunghezza d'onda della radiazione.

11.2 Massa d'aria atmosferica

Se F_0 è il flusso di luce fuori dall'atmosfera ad una lunghezza d'onda λ , e se $\mu(h, \lambda)$ è il coefficiente di assorbimento della radiazione alla quota h e alla lunghezza



d'onda λ , è facile vedere che al suolo ($h=0$) si ha:

$$F_{\lambda}(Z) = F_0 e^{-\sec Z \int_0^{\infty} \mu(h, \lambda) dh} \quad (\alpha)$$

Per $Z=0$ (allo zenith) si ha:

$$F_{\lambda}(0) = F_0 e^{-\int_0^{\infty} \mu dh} \quad (\beta)$$

Introducendo la (β) nella (α) , si ha:

$$F_{\lambda}(Z) = F_0 \left(\frac{F_{\lambda}(0)}{F_0} \right)^{\sec z}$$

$$\Rightarrow \log_{10} F_{\lambda}(Z) = \log_{10} F_0 + \sec z \log_{10} \frac{F_{\lambda}(0)}{F_0}$$

Ricordando che

$$m_{\lambda} = -2.5 \log_{10} F_{\lambda} + K$$

si ha:

$$m_{\lambda}(Z) = m_0(\lambda) + \Delta m_0(\lambda) \sec Z \quad (\gamma)$$

in cui

$$\Delta m_0 = -2.5 \log_{10} \left(\frac{F_{\lambda}(0)}{F_0} \right)$$

è l'assorbimento totale (in magnitudini) allo zenith.

Osservando m_{λ} a varie distanze zenitali, si può calcolare sia m_0 che Δm_0 . Infatti m_{λ} è una funzione lineare di $\sec Z$. Ovviamente ciò va fatto a diverse λ .

Valori medi di Δm_0 sono 0.6 magnitudini in U, 0.3 magnitudini in B, e 0.2 magnitudini in V.

Per $z > 60^\circ$ non si può trascurare né la rifrazione della luce né la curvatura della Terra. In tal caso bisogna sostituire alla (γ) la seguente espressione

$$m_{\lambda} = m_0 + \Delta m_0 M(z)$$

in cui $M(z)$ è data da:

$$M(z) = \sec Z - 0.0018167(\sec Z - 1) - 0.002875(\sec Z - 1)^2 - 0.0008083(\sec Z - 1)^3$$

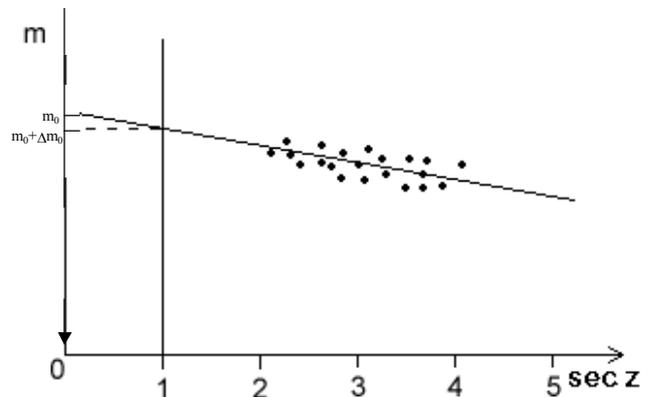


Fig. 11.2 Metodo di stima di m_0 e Δm da misure della magnitudine m misurata con un telescopio a diversi valori di $\sec Z$.

Per $z > 80^\circ$, occorre per $M(z)$ uno sviluppo del sesto ordine in $(\sec Z - 1)$. $M(z)$ è chiamata **massa d'aria**.

In funzione di δ e HA , si può dimostrare dalle formule di trasformazione dei sistemi di coordinate (lo studente lo faccia come esercizio) che:

$$\frac{1}{\sec Z} = \cos Z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos HA$$

11.3 Effetto atmosfera sull'indice di colore

Da quanto abbiamo visto e dal fatto che l'assorbimento è in generale dipendente dalla lunghezza d'onda o frequenza della luce, si ha che esso modifica anche gli indici di colore delle stelle, che perciò vanno corretti per l'effetto dell'atmosfera, come si fa usualmente.

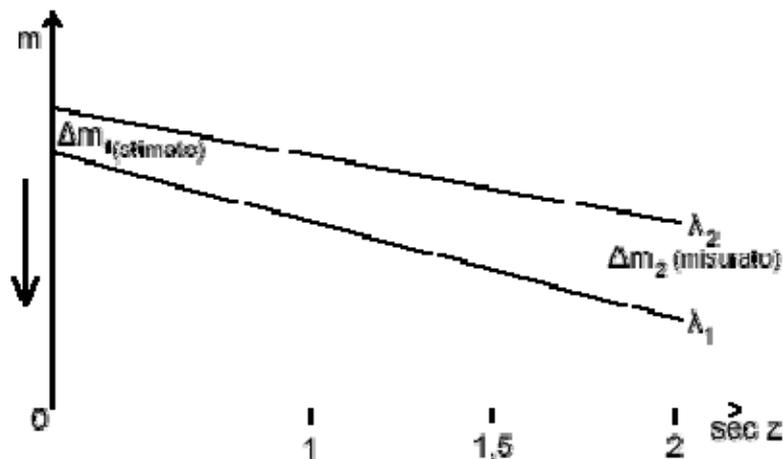


Figura 11.3 – Dipendenza della magnitudine apparente dalla $\sec Z$, in cui Z è la distanza zenitale, a due diverse lunghezze d'onda.

11.4 Cause dell'estinzione della luce da parte dell'atmosfera

Vi sono tre componenti che causano l'estinzione (in magnitudini)

- i) **Scattering Rayleigh** da molecole con elettroni atomici strettamente legati al nucleo (molecole di dimensioni $\ll \lambda$). Esso dipende da temperatura e pressione del luogo. Alla pressione standard di 1 atm e a 15°C , l'estinzione della luce, in magnitudini per unità di massa d'aria ($\sec Z=1$), è data da:

$$A_1(\lambda, h) = 9,4977 \times 10^{-3} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^4 \left(\frac{N}{N_{1\mu}} \right)^2 e^{-h/7.996} \quad (\text{blu scatterato molto più del rosso})$$

in cui N e $N_{1\mu}$ sono i moduli di rifrazione ($N = (n - 1) \times 10^6$, n =indice di rifrazione) dell'aria alla lunghezza d'onda λ (μm) e a $1 \mu\text{m}$, rispettivamente; e h = quota dell'osservatorio (in Km). $N_{1\mu\text{m}}$ dipende dalla temperatura T (°K) e pressione P (Pa)

$$N_{1\mu\text{m}} = 0,79 P/T$$

ii) **Effetto aerosoli** (polvere fine, gocce d'acqua, inquinamento)

L'estinzione da tali particelle (di dimensione circa λ) per unità di massa d'aria è data da:

$$A_2(h, \lambda) = A_0 \lambda^{-\alpha} e^{-h/H} \quad (\text{blue scatterato più del rosso})$$

in cui A_0 ed α dipendono dal sito e H è la scala d'altezza in cui si trovano tali particelle. Valori tipici sono: $\alpha=0.8$ e $H=1.5$ Km.

11.5 Effetto della turbolenza atmosferica sulla luce dalle stelle

L'atmosfera della Terra non è mai in quiete, essendo affetta da flussi d'aria e turbolenza su diverse scale. Come conseguenza, i fronti d'onda associati alla radiazione che attraversa l'atmosfera sono soggetti a ritardi di fase. Gli effetti sono duplici: rapide fluttuazioni della brillantezza della luce dalle stelle (**scintillazione**), peggioramento della qualità delle immagini stellari (**seeing**).

Una spiegazione semplice di entrambi i fenomeni è la seguente. Nei vortici turbolenti in atmosfera si verificano minuscole differenze di temperatura in punti diversi dello stesso vortice, e di conseguenza, piccole differenze dell'indice di rifrazione. Come risultato, i fronti d'onda diventano corrugati (v. Figura 11.4a), per cui, essendo la direzione dell'onda perpendicolare al fronte d'onda, si avrà, come conseguenza, che a certi istanti vi sarà una crescita del flusso di luce che entra nel telescopio mentre ad altri istanti le deformazioni del fronte d'onda portano a diminuzioni del flusso. Nel caso di grandi telescopi, tali deformazioni, essendo su piccole scale, non influenzano il flusso ricevuto a diversi istanti, mentre per piccoli telescopi o, nel caso, in cui l'apertura del telescopio viene ridotta a una dimensione pari a una singola corrugazione, allora il flusso mostra fluttuazioni e si ha la scintillazione. Per un telescopio di 1 m di apertura, la scintillazione è pari al 2-3%, con tempi scala da alcuni ms a circa 1 sec.

E' ben noto che la luce dai pianeti, visti ad occhio nudo, non fluttua. Questo succede perché i pianeti hanno dimensioni angolari molto maggiori di quelle delle stelle. In realtà se si selezionasse un elemento piccolo del pianeta, la scintillazione si vedrebbe. Si trova che la scintillazione comincia a sentirsi nel caso di dimensioni angolari minori di 10 arcsec e cresce col diminuire delle dimensioni angolari. Quando l'oggetto ha una dimensione angolare minore di 3 arcsec, la scintillazione diventa uguale a quella delle stelle, le cui dimensioni angolari, come abbiamo visto, sono estremamente piccole (centesimi di arcsec o minori).

Le dimensioni angolari delle corrugazioni dei fronti d'onda sono dell'ordine di 3 arcsec, mentre quelle lineari sono dell'ordine di 100 mm, per cui la distanza tipica a cui si hanno le deformazioni dei fronti d'onda sono di circa 7 km.

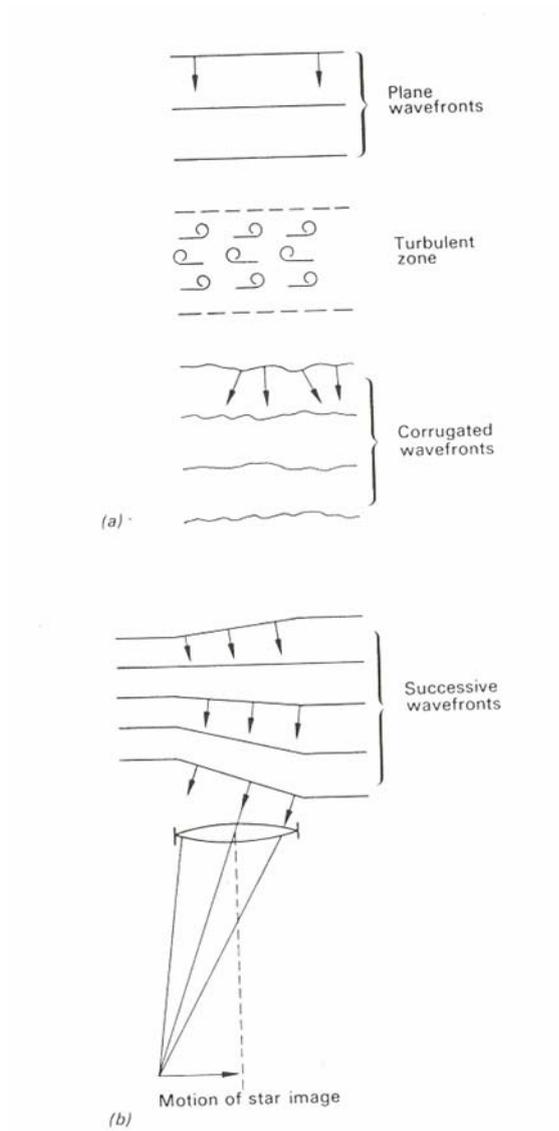


Fig. 11.4 – (a) Effetto della turbolenza atmosferica sui fronti d'onda. (b) Movimento dell'immagine stellare vista da un telescopio per effetto della scintillazione atmosferica.