

# LEZIONI DI ASTROFISICA TEORICA



# Indice

<b>I</b>	<b>Elettrodinamica e radiazione</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>Elettrodinamica</b>	<b>11</b>
1.1	Introduzione . . . . .	11
1.2	Equazioni di Maxwell . . . . .	11
1.3	Equazioni di Maxwell macroscopiche . . . . .	12
1.4	Conservazione dell'energia e dell'impulso . . . . .	13
1.5	Teoria delle orbite: campi uniformi . . . . .	14
1.5.1	Moto non relativistico . . . . .	14
1.5.2	Campi gravitazionali e magnetici . . . . .	15
1.5.3	Forza perpendicolare a $B$ . . . . .	15
1.5.4	Drift del gradiente . . . . .	15
1.5.5	Drift di curvatura . . . . .	16
1.6	Specchi magnetici . . . . .	16
1.7	Onde piane . . . . .	18
1.7.1	Polarizzazione . . . . .	20
1.8	Pressione di radiazione . . . . .	20
1.8.1	Compressione parallela al campo . . . . .	21
1.8.2	Compressione perpendicolare al campo . . . . .	21
1.9	Schermatura di Debye . . . . .	22
1.10	Propagazione in un mezzo tenue . . . . .	23
1.11	Rotazione di Faraday . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Teoria della radiazione</b>	<b>27</b>
2.1	Introduzione . . . . .	27
2.2	Equazione del trasporto . . . . .	27
2.3	Emissione e assorbimento continui . . . . .	29
2.3.1	Transizioni free-free . . . . .	30
2.3.2	Intensità del continuo radio termico . . . . .	30
2.4	Radiazione di sincrotrone . . . . .	31
2.5	Eccitazione in condizioni interstellari . . . . .	33
2.5.1	Livelli metastabili . . . . .	35
2.6	Righe di ricombinazione . . . . .	35
2.7	Intensità delle righe . . . . .	37

2.8	Equilibrio termodinamico . . . . .	38
2.9	Sezione d'urto . . . . .	39
2.10	Ionizzazione . . . . .	39
2.11	Righe e livelli . . . . .	41
<b>II</b>	<b>Principi di struttura stellare</b>	<b>43</b>
<b>3</b>	<b>Equilibrio</b>	<b>47</b>
3.1	Equilibrio meccanico . . . . .	47
3.1.1	Teorema del Viriale . . . . .	48
3.1.2	Deviazione dall'equilibrio . . . . .	49
3.2	Equilibrio termico . . . . .	49
3.3	Equilibrio termodinamico . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Equazione di stato e ionizzazione</b>	<b>53</b>
4.1	Distribuzioni statistiche . . . . .	53
4.2	Pressione ed equazione di stato . . . . .	54
4.3	Effetti della radiazione . . . . .	56
4.3.1	Trasformazioni politropiche . . . . .	57
4.4	Ionizzazione . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Trasporto dell'energia</b>	<b>59</b>
5.1	Trasporto radiativo . . . . .	59
5.2	Trasporto convettivo . . . . .	62
5.2.1	Teoria della mixing length . . . . .	64
5.3	Trasporto conduttivo . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Sorgenti di energia</b>	<b>69</b>
6.1	Energia gravitazionale . . . . .	69
6.1.1	Teorema del Viriale . . . . .	69
6.2	Energia nucleare . . . . .	71
6.2.1	Bruciamento dell'idrogeno . . . . .	73
6.2.2	Bruciamento dell'elio . . . . .	75
6.2.3	Bruciamento del carbonio, etc. . . . .	75
6.3	Energia dei neutrini . . . . .	76
<b>7</b>	<b>Politropi</b>	<b>79</b>
<b>8</b>	<b>Evoluzione stellare</b>	<b>83</b>
8.1	Fase di pre-sequenza . . . . .	83
8.1.1	Formazione . . . . .	83
8.1.2	Collasso . . . . .	84
8.1.3	Contrazione in pre-sequenza . . . . .	84
8.1.4	La linea di Hayashi . . . . .	85

<i>INDICE</i>	5
8.2 Sequenza principale . . . . .	86
8.3 Fase di post-sequenza . . . . .	87
8.3.1 Stelle di piccola massa . . . . .	87
8.3.2 Stelle di massa intermedia . . . . .	89
8.3.3 Stelle quasi massicce e massicce . . . . .	90
<b>A Distribuzioni statistiche</b>	<b>93</b>
A.1 Maxwell-Boltzmann . . . . .	93



## Parte I

# Elettrodinamica e radiazione





## Introduzione

In questa prima parte affronteremo principalmente due argomenti: da un lato vedremo alcuni processi elettrodinamici che trovano larga applicazione nel campo astrofisico, dall'altro ci occuperemo più in dettaglio della teoria della radiazione.<sup>1</sup>

I primi processi elettrodinamici che andremo a considerare saranno gli specchi magnetici, la rotazione di Faraday e la pressione di radiazione nel caso in cui sia presente un campo magnetico. Queste nozioni a prima vista possono sembrare prettamente fisiche, senza nessun collegamento con l'astronomia. Non ci si deve preoccupare di questo: nella seconda parte faremo largo uso delle nozioni acquisite fin qui, e si capirà come questioni strettamente fisiche trovino largo spazio nella trattazione della dinamica stellare.

Per quanto riguarda la teoria della radiazione, ci soffermeremo in particolare sull'equazione del trasporto radiativo, che sarà poi argomento di discussione nella seconda parte, analizzandone i processi che contribuiscono all'assorbimento ed emissione della radiazione elettromagnetica. Vedremo quindi la radiazione di sincrotrone, responsabile degli spettri osservati delle Galassie Attive, e analizzeremo gli effetti dell'assorbimento ed emissione di radiazione sulle popolazioni atomiche, prestando attenzione alle righe di ricombinazione osservate negli spettri. Dimostreremo che esse ci danno informazioni sul numero di fotoionizzazioni che avvengono nelle nebulose, e quindi sulla densità di tali regioni di gas interstellare.

E' di fondamentale importanza comprendere queste prime nozioni perché la conoscenza della dinamica del gas interstellare, fornisce un valido strumento per studiare la dinamica delle galassie, in quanto questa si basa sull'analisi dei cosiddetti *traccianti di potenziale*, il più importante fra i quali è senz'altro il gas interstellare.

---

<sup>1</sup>In questa prima parte, come pure nella seconda, la comprensione degli argomenti trattati richiede nozioni di Analisi Matematica 2, quali flussi, equazioni differenziali, e campi vettoriali.



# Capitolo 1

## Elettrodinamica

### 1.1 Introduzione

L'Elettrodinamica è una classica 'teoria dei campi', che si occupa dei fenomeni elettromagnetici. Essa si basa su osservazioni che risalgono fino alla seconda metà del diciottesimo secolo, quando Coulomb studiava la forza fra corpi carichi. Circa 50 anni più tardi Faraday studiò gli effetti di correnti e campi magnetici.

L'attuale forma dell'Elettrodinamica si basa su quattro equazioni, formulate da Maxwell nel 1864, dalle quali si possono derivare tutti gli effetti elettromagnetici. Il legame fra il movimento di particelle cariche e i campi elettromagnetici viene realizzato tramite l'equazione della forza di Lorentz.

Dal punto di vista matematico l'Elettrodinamica è elegante ed economica: al contrario della Meccanica Newtoniana è per giunta una teoria relativistica, nella quale viene tenuto conto della velocità finita di propagazione dell'informazione. A seguito di ciò, particelle, il cui vettore distanza è di tipo spazio, non possono interagire l'una con l'altra. Analogamente alla Meccanica, anche nell'Elettrodinamica si è affermato con successo il concetto di particelle puntiformi. Tuttavia l'Elettrodinamica Classica non è valida fino alle più piccole distanze ma deve essere considerata come caso limite classico di una teoria del campo, l'Elettrodinamica Quantistica.

### 1.2 Equazioni di Maxwell

Le equazioni che descrivono il campo elettromagnetico sono le equazioni di Maxwell che in unità CGS-Gauss si scrivono così:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

L'altra importante equazione dell'elettromagnetismo è la relazione che fornisce il moto di una carica in un campo elettromagnetico data dalla forza di Lorentz:

$$\mathbf{F}_L = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Da questa segue che la forza è perpendicolare a  $\mathbf{B}$  e quindi che il campo magnetico non compie alcun lavoro sulla particella: in poche parole il campo elettrico cambia l'energia della carica mentre il campo magnetico cambia la sua direzione di propagazione.

La prima delle equazioni di Maxwell deriva direttamente dalla legge di Gauss:

$$\int_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{F} = 4\pi Q(t),$$

essendo  $Q(t)$  la carica contenuta all'interno della superficie  $F$ .

La seconda equazione di Maxwell è diretta conseguenza della legge d'induzione di Faraday: la variazione temporale del campo magnetico attraverso una superficie  $F$  produce una forza elettromotrice  $V$  che risulta dall'integrale di linea del campo elettrico indotto lungo il contorno  $C$  che limita la superficie  $F$ . Matematicamente:

$$V(t) = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{1}{c} \int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{F},$$

dove l'ultimo termine è il flusso  $\phi_m$  del campo magnetico.

La terza equazione esprime l'assenza di monopoli magnetici: infatti il flusso magnetico attraverso una qualsiasi superficie chiusa è nullo. Per questo le linee del campo magnetico sono linee chiuse, al contrario di quelle del campo elettrico.

La quarta equazione invece contiene la corrente di spostamento di Maxwell, e cioè il termine

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

necessario per poter descrivere i fenomeni elettromagnetici nel vuoto e solo tramite di esso campi elettromagnetici dipendenti dal tempo diventano campi a vortice che non scompaiono e tramite i quali viene resa possibile la loro propagazione nel vuoto. L'altro termine esprime la cosiddetta legge di Ampère: una corrente induce un campo magnetico le cui linee di campo (chiuse) circolano attorno alla corrente. Analiticamente si esprime con la relazione:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c} I(t).$$

### 1.3 Equazioni di Maxwell macroscopiche

Se le cariche non sono nel vuoto, ma presenti all'interno di qualche materiale, bisogna far ricorso delle equazioni di Maxwell macroscopiche, espresse

attraverso l'induzione elettrica  $\mathbf{D}$  e l'intensità del campo magnetico  $\mathbf{H}$ , date da:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho_{fr}, & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{fr},\end{aligned}$$

essendo  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$  e  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{M}$  la polarizzazione media e magnetizzazione media rispettivamente. La densità di carica  $\rho_{fr}$  e la densità di corrente  $\mathbf{j}_{fr}$  rappresentano la parte di cariche libere di muoversi all'interno del reticolo cristallino del materiale.

## 1.4 Conservazione dell'energia e dell'impulso

Sia  $E_{mec}$  l'energia meccanica di un sistema di cariche, l'equazione del bilancio dell'energia è:

$$\frac{dE_{mec}}{dt} = -\frac{c}{4\pi} \int_F (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{F} - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} \right) d^3x.$$

Se si considera il caso di un volume infinitamente esteso, il primo termine scompare, e resta il secondo che rappresenta la densità di energia del campo elettromagnetico  $\mathcal{E}_{em}$ . Il primo termine è il vettore di Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}).$$

Allora l'equazione del bilancio dell'energia diventa:

$$\frac{dE_{mec}}{dt} = - \int_V \left( \nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial \mathcal{E}_{em}}{\partial t} \right) d^3x.$$

Siccome questa relazione deve valere per qualsiasi volume, si ha:

$$\frac{dE_{mec}}{dt} + \frac{d\mathcal{E}_{em}}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{S}.$$

La conservazione dell'impulso di un sistema di cariche si esprime attraverso la relazione:

$$\left( \frac{\partial \mathbf{g}_{mec}}{\partial t} \right)_i + \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{em}}{\partial t} \right)_i = \nabla \cdot \mathbf{T}_i,$$

dove

$$\frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \mathbf{g}_{em}$$

è la densità di impulso elettromagnetico,  $\mathbf{g}_{mec}$  la densità di impulso meccanica e  $\mathbf{T}_i$  il tensore tensione di Maxwell. Analogamente al teorema dell'energia, per sistemi chiusi vale la conservazione dell'impulso:

$$\mathbf{P}_{mec} + \mathbf{P}_{em} = \text{cost.}$$

## 1.5 Teoria delle orbite: campi uniformi

Consideriamo una particella di carica  $q$  e massa  $m$  che si muove di moto relativistico in un campo magnetico  $\mathbf{B}$  in assenza di campo elettrico. L'equazione del moto è:

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{v}) = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Supponiamo che  $\mathbf{B}$  sia tale per cui  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  e che la direzione del moto sia lungo l'asse  $x$ . Le equazioni del moto saranno allora per ciascuna componente date da:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{qB}{\gamma mc} v_2, \quad \frac{dv_2}{dt} = -\frac{qB}{\gamma mc} v_1, \quad \frac{dv_3}{dt} = 0.$$

La soluzione dell'ultima equazione è immediata: la componente della velocità parallela a  $\mathbf{B}$  è una costante, e quindi si integra subito, fornendo:

$$x_3 = v_{||} t.$$

Ponendo:

$$\omega_g = \frac{|q|B}{\gamma mc},$$

detta *girofrequenza*, le altre due componenti della velocità sono:

$$v_1 = v_{\perp} \cos(\omega_g t), \quad v_2 = -v_{\perp} \sin(\omega_g t),$$

da cui:

$$x_1 = r_{\perp} \sin(\omega_g t), \quad x_2 = r_{\perp} \cos(\omega_g t),$$

dove si è posto  $r_{\perp} = v_{\perp}/\omega_g$  detto giroradio. Se  $r_c$  è il raggio di curvatura, esso è dato da:

$$r_c = \frac{r_g}{\sin \theta}, \quad r_g = \frac{v_t}{\omega_g},$$

dove  $v_t$  è la velocità totale ( $v_t = ds/dt$ ).

### 1.5.1 Moto non relativistico

Consideriamo il moto non relativistico di una particella di carica  $q$  e massa  $m$  in un campo elettromagnetico. Si ha che:

$$\frac{dv_{||}}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{E}_{||}, \quad \frac{dv_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m} (\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}).$$

Se consideriamo la possibilità che la  $\mathbf{v}_{\perp}$  si possa scomporre in una componente costante e una variabile nel tempo, cioè si possa scrivere:

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v}_d + \mathbf{v}_g,$$

dove la parte costante è la  $\mathbf{v}_d$ , detta *velocità di drift*, allora sostituendo nella seconda equazione e separando le parti costanti e dipendenti dal tempo, si ottiene l'espressione per la velocità di drift:

$$\mathbf{v}_d = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}.$$

Questa non dipende né dalla massa né dalla carica della particella: *anche se ci sono particelle con cariche diverse non si produce corrente.*

### 1.5.2 Campi gravitazionali e magnetici

Consideriamo ora una particella in moto in un campo magnetico ed ad esso perpendicolare agisce un campo gravitazionale  $\mathbf{g}$ . L'equazione del moto è:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} + \frac{q}{mc} \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

che è l'equazione del moto in un 'effettivo' campo elettrico  $\mathbf{E}_{eff} = \frac{m}{q} \mathbf{g}$ , per cui la velocità di drift è:

$$\mathbf{v}_d = \frac{mc}{q} \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{c^2}.$$

Ora la velocità di drift dipende dalla massa e dalla carica, *per cui particelle con cariche diverse danno luogo ad una corrente.*

### 1.5.3 Forza perpendicolare a $\mathbf{B}$

In questo caso l'equazione del moto è:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

da cui la velocità di drift è:

$$\mathbf{v}_d = \frac{c}{q} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2},$$

ed anche questa dipende dalla carica, per cui anche in questo caso si origina una corrente per particelle con cariche opposte. Da notare è il fatto che la direzione del drift è perpendicolare alla forza e al campo magnetico e che nel punto più basso della traiettoria la curvatura è maggiore di quella nel punto più alto.

### 1.5.4 Drift del gradiente

Consideriamo un campo magnetico lungo  $z$  il quale abbia una variazione nella direzione dell'asse  $y$ ,  $B_z(y)\hat{\mathbf{k}}$ . Se questo gradiente è piccolo, allora si può espandere in serie di Taylor:

$$B_z(y) = B_0 + \frac{\partial B_z}{\partial y} y,$$

e la forza è:

$$F_y = -\frac{q}{c}u_x B_0 - \frac{q}{c}u_x \frac{\partial B_z}{\partial z}y.$$

Prendendo il valore medio, il primo termine si annulla, mentre resta il secondo:

$$\overline{F_y} = \mp \frac{q}{2c}u_{\perp} r_{\perp} \nabla B_z(y).$$

Sostituendo nell'espressione della velocità di drift si ottiene:

$$\mathbf{v}_d = \pm \frac{1}{2}u_{\perp} r_{\perp} \frac{\mathbf{B} \times \nabla \cdot B_z(y)}{B^2}.$$

Questa dipende dalla carica  $q$ , infatti bisogna ricordare che  $r_{\perp} = \gamma m c v_{\perp} / q B$ .

### 1.5.5 Drift di curvatura

Se le linee di un campo magnetico (costante) presentano una curvatura di raggio  $R_C$ , anch'essa costante, allora la particella che ruota attorno alle linee di campo subisce una forza centrifuga data da:

$$F_C = -m u_{\parallel}^2 \frac{\mathbf{R}_C}{R_C^2},$$

che è ovviamente perpendicolare a  $\mathbf{B}$ . Inserendo questa espressione nella relazione della velocità drift, e otteniamo:

$$\mathbf{v}_d = -\frac{c m u_{\parallel}^2}{q B^2} \frac{\mathbf{R}_C \times \mathbf{B}}{R_C^2},$$

detto *drift di curvatura*. È importante notare che un campo magnetico curvo deve avere qualche disomogeneità associata ad esso: infatti se questo è vero allora è presente qualche drift del gradiente accanto a quello di curvatura. Anche in questo caso il drift di curvatura dipende dalla carica della particella, e quindi per cariche di segno opposto si instaurano moti in versi opposti, e dunque si origina una corrente.

## 1.6 Specchi magnetici

Consideriamo una configurazione simmetrica del campo magnetico rispetto all'asse  $z$  che lo prendiamo come direzione di del moto di una particella di massa  $m$  e carica  $q$ . Se questo campo ha intensità massima  $B_m$  in un punto  $M$  nelle vicinanze dell'asse  $z$ , allora dimostreremo che la particella non può penetrare oltre questo punto, si ferma e si riflette indietro.

Per far ciò poniamoci in un sistema di coordinate cilindriche: quello che si osserva è che la componente predominante di  $\mathbf{B}$  è quella parallela a  $z$  e cioè



$B_z$ . Tuttavia c'è anche una componente radiale  $B_r$ , che si può determinare attraverso la relazione  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , che in coordinate cilindriche si riscrive:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,$$

che nelle vicinanze dell'asse centrale può essere risolta facilmente per  $B_r$ , in virtù del fatto che  $\partial B_z / \partial z \simeq \text{cost.}$  Allora si ha:

$$B_r = -\frac{1}{2}r \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

Abbiamo detto che la particella ruota attorno alle linee di campo, per cui subisce una forza (di Lorentz) data da:

$$F_z = -\frac{q}{c}u_\theta B_r,$$

dove  $u_\theta = r\dot{\theta}$  ed è positiva per cariche negative e negativa per cariche positive (in pratica dipende dal verso di rotazione,  $> 0$ : verso antiorario,  $< 0$ : verso orario). Allora la componente trasversa della velocità,  $u_\perp$  è nella direzione negativa di  $\theta$  per cariche positive. In definitiva:

$$F_z = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z},$$

avendo posto  $\mu = \pm \frac{q}{2c}u_\perp r_\perp$ . Poichè  $\frac{1}{2}mu_\perp^2 = \mu B$ , allora si ottiene:

$$\mu = \pm \frac{\omega_g}{c2\pi} q\pi r_\perp^2,$$

che è il *momento magnetico*.

Si dimostra facilmente che la variazione dell'energia cinetica longitudinale è uguale alla variazione nel tempo del campo magnetico cambiata di segno e moltiplicata per  $\mu$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mu_\parallel^2 \right) = -\mu \frac{dB}{dt}.$$

Poichè l'energia cinetica di una particella carica in un campo magnetico uniforme non può cambiare, allora l'energia cinetica totale (trasversa + longitudinale) si conserva e quindi:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mu_\parallel^2 \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mu_\perp^2 \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\mu}{dt} = 0.$$

Abbiamo cioè che una condizione sulla conservazione dell'energia si trasforma in una condizione sul momento magnetico: il momento magnetico si conserva.

Ciò significa che se  $B$  aumenta, allora aumenta anche  $E_{K,trasv}$  ma sarà sempre  $E_{K,trasv} < E_{K,tot}$ . Al massimo le due energie cinetiche possono essere uguali. Quando questo avviene, la particella si ferma e torna indietro.

In pratica quello che succede è che la particella inizialmente si muove longitudinalmente verso la zona di massimo  $B$ . Man mano che prosegue essa guadagna energia cinetica trasversa (comincia a ruotare sempre più velocemente) a discapito di quella longitudinale. Quando arriva in  $M$  la particella ha solo  $E_{K,transv}$ , per cui si ferma e non può più proseguire oltre. Allora torna indietro: la riflessione si spiega con il fatto che le linee di campo magnetico in prossimità dell'asse centrale non sono perfettamente parallele fra di loro e perpendicolari a  $u_{\perp}$ , ma presentano una curvatura, ed è proprio la componente  $B_r \neq 0$  la responsabile della riflessione. Per questo motivo il fenomeno appena descritto prende il nome di *specchio magnetico*.

Tuttavia se la particella si trova inizialmente sull'asse centrale, essa prosegue indisturbata al di là dello specchio, per cui deve esistere un angolo critico  $\alpha_m$  per il quale si ha la riflessione. Si dimostra che suddetto angolo vale:

$$\alpha_m = \sin^{-1} \sqrt{\frac{B}{B_m}}.$$

Le particelle che hanno  $\alpha < \alpha_m$  penetrano oltre lo specchio.

## 1.7 Onde piane

Vediamo ora brevemente come le equazioni di Maxwell forniscano anche le equazioni d'onda per la radiazione elettromagnetica ed esponiamo le principali caratteristiche.

Consideriamo allora un mezzo **conduttore** nel quale la densità di corrente  $\mathbf{j}$  si possa scrivere come  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , essendo  $\sigma$  la conducibilità del mezzo. Allora sostituendo questa espressione nelle equazioni di Maxwell e facendo il rotore della II e della IV si ottengono le due equazioni:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} &= \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \nabla^2 \mathbf{H} &= \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \end{aligned}$$

dette *equazioni dei telegrafi*.

Esaminiamo ora il caso di mezzi **non conduttori**, nei quali  $\sigma = 0$ . Allora le precedenti equazioni diventano:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0, \\ \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned}$$

Queste sono le *equazioni d'onda*, simmetriche in  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Le soluzioni sono del tipo:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)},$$

dove  $\mathbf{k}$  è il vettore d'onda. Queste sono le equazioni di onde piane monocromatiche (hanno cioè tutte la stessa frequenza  $\omega$ ) che si muovono in direzione del vettore  $\mathbf{k}$ . *I campi fisici sono dati dalla parte reale.* Sostituendo le soluzioni precedenti nelle equazioni d'onda si ottiene:

$$\omega^2 = \frac{c^2 k^2}{\epsilon \mu} = \frac{c^2 k^2}{n^2}, \quad n = \sqrt{\epsilon \mu},$$

dove  $n$  è l'indice di rifrazione del mezzo. I vettori  $\mathbf{E}_0$  e  $\mathbf{B}_0$  sono complessi. Si trova inoltre che:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}_0,$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = -\epsilon \mu \frac{\omega}{c} \mathbf{E}_0.$$

Questo vuol dire che  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B} \perp \mathbf{k}$ .

Si può dimostrare che i valori mediati nel tempo di  $\mathbf{S}$  e  $\epsilon_{em}$  sono dati da:

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathbf{E}_0|^2 \hat{k}, \quad \bar{\epsilon}_{em} = \frac{1}{8\pi} \epsilon |\mathbf{E}_0|^2.$$

Il loro rapporto vale  $\bar{\mathbf{S}}/\bar{\epsilon}_{em} = c/\sqrt{\epsilon \mu} \hat{k} = v_\varphi \hat{k}$ , dove  $v_\varphi$  è la velocità di fase. Essa esprime la velocità con la quale si propagano treni d'onda di fase costante in direzione  $\mathbf{k}$ .

Torniamo ora al caso di mezzi **conduttori**; supponiamo che i campi  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$  siano dati dalla solita espressione esponenziale. In questo caso però si ha che:

$$k^2 = \frac{\omega^2 p^2}{c^2},$$

dove  $p = \sqrt{\mu \eta}$  e

$$\eta = \epsilon + \frac{4\pi i \sigma}{\omega}.$$

La costante  $\eta$  è la costante dielettrica generalizzata e si vede che essa è complessa. Allora anche  $\mathbf{k}$  è complessa nei mezzi conduttori e questo significa che la propagazione è smorzata. Infatti se  $k = \alpha + i\beta$ , allora  $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = e^{-\beta x} e^{i(\alpha x - \omega t)}$  ( $\beta > 0$ ), e  $\beta$  dà quindi una misura della profondità di penetrazione dell'onda nel mezzo. Si trova allora che:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \frac{\omega \mu}{c} \mathbf{H}_0,$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 = -\frac{\omega \eta}{c} \mathbf{E}_0.$$

Se il mezzo è dispersivo, allora  $\omega = \omega(k)$  ed in questo caso la quantità  $U = \partial \omega / \partial k$  è la velocità di gruppo che rappresenta la velocità a cui viene trasmessa l'informazione e l'energia.

### 1.7.1 Polarizzazione

Grazie alla linearità delle equazioni d'onda, la sovrapposizione lineare di soluzioni dà nuovamente una soluzione. Consideriamo perciò due soluzioni della forma:

$$E_1(\mathbf{r}, t) = E_1 \mathbf{e}_1 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad E_2(\mathbf{r}, t) = E_2 \mathbf{e}_2 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}.$$

La sovrapposizione dei due campi porta alla nuova soluzione:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1 |E_1| e^{i\delta_1} + \mathbf{e}_2 |E_2| e^{i\delta_2}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)},$$

dove  $\delta_1$  e  $\delta_2$  sono due fasi. Questa espressione si fa classificare a seconda dei valori delle fasi  $\delta_1$  e  $\delta_2$  e delle ampiezze  $|E_1|$  e  $|E_2|$ . Abbiamo allora tre casi importanti:

- *Polarizzazione ellittica*: è il caso più generale in cui  $\delta_1 \neq \delta_2$ . In questo caso il vettore campo elettrico ruota su di una ellisse sul piano determinato da  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  con un periodo  $T = 2\pi/\omega$ .
- *Polarizzazione circolare*: si ha quando  $\delta_1 = \delta_2 \pm \pi/2$  ed  $|E_1| = |E_2|$ . In questo caso il vettore campo elettrico descrive una circonferenza di raggio  $|E_1|$  e il verso di rotazione dipende dal segno  $\pm$ .
- *Polarizzazione lineare*: si verifica quando  $\delta_1 = \delta_2$  ed in questo caso il campo elettrico si muove lungo una retta sul piano determinato da  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ .

## 1.8 Pressione di radiazione

Un'onda elettromagnetica trasporta l'energia del campo elettromagnetico, il cui flusso attraverso una superficie è dato dal vettore di Poynting  $\mathbf{S}$ . La densità di energia è:

$$\rho_{em} = \frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}.$$

Se consideriamo una superficie qualunque e vi facciamo incidere delle onde elettromagnetiche, vedremo che esse esercitano una forza di pressione sulla superficie. Si può mostrare che tale pressione vale:

$$P = \frac{1}{3} \rho_{em} = \frac{1}{3} \frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi},$$

e si dice *pressione di radiazione*. Vediamo come si può applicare questo concetto ai casi astrofisicamente rilevanti.

### 1.8.1 Compressione parallela al campo

Consideriamo un cubo di lato  $l$  immerso in un puro campo magnetico  $\mathbf{H}$  diretto nel verso dell'asse  $x$ . Supponiamo ora di comprimere il cubo in tale direzione di una quantità  $dl$  e proponiamoci di determinare l'energia del campo e la pressione di radiazione.

Come prima cosa calcoliamo l'energia del campo prima della compressione; poiché siamo in un puro campo magnetico,  $\mathbf{E} = 0$  e quindi:

$$E_0 = \rho_{em} V = \frac{\mu H^2}{8\pi} l^3,$$

essendo  $V$  il volume del cubo. Dopo la compressione, l'energia passa al valore  $E_1$  dato da:

$$E_1 = \frac{\mu H^2}{8\pi} l^2 (l - dl).$$

La differenza tra le due energie sarà quindi:

$$dE = E_1 - E_0 = -\frac{\mu H^2}{8\pi} l^2 dl.$$

Se assumiamo il lato unitario ( $l = 1$ ), allora il lavoro compiuto per comprimere il cubo è:

$$dW = dE = -\frac{\mu H^2}{8\pi} dl = PdV = Pdl,$$

quindi:

$$P = -\frac{\mu H^2}{8\pi},$$

che è negativa. Dunque si vede come una compressione lungo l'asse parallelo alla direzione del campo, provochi una pressione di radiazione negativa, che agisce in modo da contrastare il campo magnetico stesso. Tuttavia è facile immaginare come ciò avvenga, mentre è più difficile pensare a cosa succeda quando la compressione avviene lungo un asse ortogonale alla direzione del campo.

### 1.8.2 Compressione perpendicolare al campo

Consideriamo sempre il cubo di lato  $l$  e il campo magnetico  $\mathbf{H}$  rivolto verso l'asse  $x$  e immaginiamo di comprimere il cubo di una quantità  $dl$  perpendicolarmente alla direzione del campo.

Innanzitutto la conservazione delle linee di campo impone che dette linee debbano essere le stesse sia prima che dopo la compressione, per cui l'unico modo con cui questo può avvenire è che il campo magnetico cambi da una

parte all'altra. Infatti se  $H_0$  rappresenta l'intensità del campo prima la compressione e  $H_1$  quella successiva, si ha che:

$$H_0 l^2 = H_1 (l - dl) l \quad \Rightarrow \quad H_1 = \frac{H_0}{1 - dl/l}.$$

La densità allora varia da  $\rho_0$  a  $\rho_1$ , e quindi le energie sono:

$$E_0 = \frac{\mu H_0^2}{8\pi} l^3, \quad E_1 = \frac{\mu}{8\pi} \frac{H_0^2}{1 - 2dl/l} l^2 (l - dl),$$

per cui la loro differenza è:

$$dE = \frac{\mu H_0^2}{8\pi} \frac{dl}{1 - 2dl/l},$$

avendo assunto  $l = 1$ . Come prima, il lavoro compiuto dalle forze di pressione è  $dW = dE = PdV = Pdl$  e quindi:

$$P = \frac{\mu H_0^2}{8\pi}.$$

Come si vede, ora la pressione di radiazione è positiva e quindi la compressione di un volume perpendicolarmente alla direzione del campo provoca una forza che agisce nel verso del campo controbilanciando la compressione.

## 1.9 Schermatura di Debye

Consideriamo un campo avente potenziale elettrostatico  $\phi$  e in cui valga l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho = -4\pi(n_i - n_e)e,$$

dove  $n_i$  ed  $n_e$  sono il numero di ioni e di elettroni rispettivamente. Ci si aspetta che le espressioni di tali densità siano del tipo

$$n_i = ne^{-e\phi/kT}, \quad n_e = ne^{e\phi/kT}.$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione di Poisson si ottiene:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi ne(e^{e\phi/kT} - e^{-e\phi/kT}).$$

Sviluppando in serie gli esponenziali ed arrestandoci al primo ordine si ottiene facilmente:

$$\nabla^2 \phi = \frac{8\pi ne^2}{kT} \phi = \frac{\phi}{\lambda_D^2},$$

dove  $\lambda_D$  è la *lunghezza d'onda di Debye* e vale:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{kT}{8\pi ne^2}}.$$

Quindi se  $Q$  è una carica posta all'interno del plasma, allora il potenziale ammette la soluzione data da:

$$\phi = \frac{Q}{r} e^{-r/\lambda_D}.$$

Si capisce dunque che l'effetto della carica è schermato al di là della distanza  $\lambda_D$ , essendo questo un raggio di taglio. Tutto ciò sta a significare che un plasma può essere considerato neutro quando si considerano distanze maggiori di  $\lambda_D$ . Inoltre sebbene il campo elettrico di una particella carica si dovrebbe estendere all'infinito, l'influenza di una particella carica in un plasma viene sentita solo fino a una distanza  $\lambda_D$  cioè all'interno di un volume  $\lambda_D^3$  chiamato volume di Debye.

## 1.10 Propagazione in un mezzo tenue

Consideriamo ora un mezzo ionizzato in cui  $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$  e che non ci siano collisioni tra gli elettroni e gli ioni, in questo senso tenue. Per piccole deviazioni dall'equilibrio i campi elettrici che si trovano nell'onda elettromagnetica accelerano gli elettroni relativamente agli ioni più pesanti. In questo caso l'equazione del moto è:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E},$$

essendo  $\mathbf{E}$  il campo associato all'onda. Assumiamo che l'onda abbia la forma  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$ , e quindi sostituendo e risolvendo rispetto ad  $\mathbf{r}$  si trova:

$$\mathbf{r} = -\frac{e}{m\omega^2} \mathbf{E}.$$

Lo spostamento degli elettroni provoca la formazione di  $n$  dipoli orientati che originano un campo di polarizzazione  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P} = ne\mathbf{r} = -\frac{ne^2}{m\omega^2} \mathbf{E}.$$

Ricordando l'espressione di  $\mathbf{P}$  ricorrendo all'induzione elettrica, non è difficile ottenere:

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi ne^2}{m\omega^2}.$$

Poiché la velocità di fase è inversamente proporzionale all'indice di rifrazione che dipende da  $\epsilon$ , allora si può notare come in un plasma  $v_\phi > c$ . In questo caso nessuna informazione ed energia vengono trasmesse.

Poniamo ora  $\mu = 1$  e ricordiamo che  $\omega^2 = c^2 k^2 / \epsilon$ , e quindi sostituendo  $\epsilon$  con l'espressione appena trovata non è difficile vedere che si arriva a:

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2,$$

dove  $\omega_p$  è la frequenza di plasma ed è data da:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}}.$$

Si può dimostrare che la  $\omega_p$  è legata a  $\lambda_D$  secondo la:

$$\sqrt{\frac{2m\lambda_D^2}{kT}} = \frac{1}{\omega_p}.$$

Notiamo che se  $\omega < \omega_p$  allora  $k$  è immaginario e quindi l'onda non si propaga. Se invece  $\omega > \omega_p$  l'onda si propaga con velocità di gruppo:

$$U = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2}}},$$

che dipende dalla frequenza della radiazione e quella del plasma.

É interessante calcolare il tempo di arrivo di un segnale proveniente da una distanza  $D$ :

$$t = \frac{D}{c} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2}}.$$

Questo dipende dalla frequenza e quindi è opportuno andare a vedere come questo intervallo vari con la frequenza; non è difficile dimostrare che:

$$\frac{dt}{d\omega} \simeq -\frac{D}{c} \frac{\omega_p^2}{\omega^3}.$$

Integrando tra due frequenze di ha:

$$t = \frac{D}{2c} \omega_p^2 (\omega_1^{-2} - \omega_2^{-2}) \propto D \cdot n.$$

La quantità  $nD$  rappresenta la densità di colonna degli elettroni sulla distanza  $D$  lunga la visuale. Questo prodotto è chiamato *misura della dispersione*:

$$\mathcal{D} = \int_0^D n(s) ds = D \langle n \rangle.$$

### 1.11 Rotazione di Faraday

Consideriamo ora una sorgente e supponiamo che essa emetta luce monocromatica di frequenza  $\omega_0$ . Ora, in assenza di campo elettrico esterno, gli elettroni si muovono su orbite ellittiche attorno al nucleo. Questo moto può essere visto come una combinazione di tre moti oscillatori armonici lineari. Poiché  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , allora sia la frequenza sia il vettore  $k$  devono essere gli



stessi per tutti gli oscillatori. Supponiamo ora di avere un'onda monocromatica polarizzata circolarmente di frequenza  $\omega$ . Le forze che agiscono su di un singolo elettrone sono la forza elastica ( $-k\mathbf{r}$ ) e il campo elettrico associato all'onda ( $-e\mathbf{E}$ ) e quindi l'equazione del moto sarà:

$$-e\mathbf{E} - k\mathbf{r} = -m\omega^2\mathbf{r},$$

dove l'ultimo termine è la forza associata ad un moto circolare. Supponiamo ora di accendere un campo magnetico  $\mathbf{B}$  parallelo all'asse  $x$ . In questo caso il campo esercita su ciascun elettrone una forza diretta secondo il raggio dell'orbita data da  $\pm \frac{e}{c}B\omega\mathbf{r}$ , dove il segno negativo indica un verso di rotazione antiorario e quello positivo il verso orario. Dunque, l'equazione del moto diventa:

$$-e\mathbf{E} \mp \frac{e}{c}B\omega\mathbf{r} - k\mathbf{r} = -m\omega^2\mathbf{r}.$$

Non è difficile dimostrare che si crea un campo di polarizzazione  $\mathbf{P}$  dato da:

$$\mathbf{P} = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 \pm \frac{eB\omega}{mc}} \mathbf{E}.$$

Come fatto in precedenza, possiamo esprimere l'indice di rifrazione in questo modo:

$$n^2 = \epsilon = 1 + 4\pi \left( \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 \pm \frac{eB\omega}{mc}} \right),$$

dove il segno negativo corrisponde ad un indice di rifrazione  $n_A$  (senso antiorario) e quello positivo a  $n_O$  (senso orario). Si può dimostrare che la differenza tra i due indici di rifrazione per onde polarizzate circolarmente con verso opposto vale:

$$\Delta n = \frac{4\pi Ne^2\omega_0}{m\omega^3}.$$

La velocità dell'onda è:

$$\Delta v = \frac{c}{n} \frac{1}{n/\Delta n} = \frac{c\Delta n}{n^2} \simeq c\Delta n,$$

essendo  $n \simeq 1$ . Lo spostamento  $\Delta x$  sarà quindi  $\Delta x = \Delta v \Delta t = c\Delta n \Delta t$ . La quantità  $\omega \Delta n \Delta t$  rappresenta l'intervallo di fase corrispondente ad una rotazione del piano di polarizzazione di un angolo:

$$\Delta \theta = \frac{1}{2} \omega \Delta n \Delta t.$$

Questo fenomeno prende il nome di *rotazione di Faraday*. Esso avviene principalmente nei radio jets delle galassie attive, dove sussiste un alto grado di polarizzazione e questo fa sì che a basse frequenze non è più possibile distinguere l'emissione dei jets da quella diffusa.



## Capitolo 2

# Teoria della radiazione

### 2.1 Introduzione

Vogliamo occuparci ora dell'analisi di quanto avviene nel mezzo interstellare, e studiare quindi i processi che caratterizzano la formazione dello spettro osservato di stelle e galassie. Vedremo quindi come avviene l'interazione tra la radiazione e la materia interposta tra la sorgente e l'osservatore e analizzeremo i processi di emissione e di assorbimento del gas interstellare. Vedremo anche come la sua temperatura influisca sul continuo e ne daremo una descrizione in termini di profondità ottica e di frequenza.

In seguito andremo a considerare le transizioni responsabili dello spettro osservato, in particolare l'emissione ed assorbimento tra stati liberi (*free-free*), fra stati liberi e legati (*free-bound*, *bound-free*) e fra stati legati (*bound-bound*). In quest'ultimo caso ci proporremo di determinare le popolazioni dei livelli sotto le ipotesi che effettivamente si verificano nel gas interstellare, e quindi vedremo i processi attraverso i quali si popolano i livelli degli atomi in tali condizioni.

### 2.2 Equazione del trasporto

Consideriamo dapprima l'interazione fra radiazione e materia nel gas interstellare, ad esempio nelle regioni di HII e nebulose planetarie. Prendiamo come caso generale l'esempio di radiazione proveniente da una sorgente che attraversa una nube di tale materia. Per caratterizzare i vari processi a cui è sottoposta la radiazione definiamo le seguenti quantità:

**Intensità specifica:** un elemento di materia di area  $dA$  emette radiazione nella direzione  $\mathbf{k}$  formante un angolo  $\theta$  con la normale alla superficie. Se  $d\omega$  è l'angolo solido sotto cui è vista tale area, allora l'intensità della radiazione emessa è:

$$I_\nu = \frac{dE_\nu}{dA \cos \theta d\omega dt d\nu},$$

avente dimensioni  $[\text{erg cm}^{-3} \text{ sec}^{-1} \text{ Hz}^{-1}]$ .

**Coefficiente di emissione:** se ammettiamo che l'emissione di radiazione avvenga attraverso un cilindro di altezza  $ds$  e volume  $dV$ , si ha che il coefficiente di emissione è:

$$\epsilon_\nu = \frac{dE_\nu}{ds dA \cos \theta d\omega dt d\nu},$$

avente dimensioni  $[\text{erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1} \text{ Hz}^{-1}]$ .

**Coefficiente di assorbimento:** il coefficiente di assorbimento fornisce la quantità di radiazione che viene assorbita dal mezzo e si esprime come:

$$k_\nu I_\nu = -\frac{dE_\nu}{ds dA \cos \theta d\omega dt d\nu}.$$

Allora sul tratto  $ds$  preso lungo la visuale avremo che la variazione di intensità specifica  $dI_\nu$  è data dall'espressione:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -k_\nu I_\nu + \epsilon_\nu.$$

Questa è l'**equazione del trasporto**. Se ammettiamo un puro assorbimento, allora il secondo termine si annulla e la soluzione di tale equazione è:

$$I_\nu = I_{\nu 0} \exp \left( - \int_0^{s^*} k_\nu(s) ds \right),$$

essendo  $I_{\nu 0}$  l'intensità specifica incidente. Passando dalla parte dell'osservatore e usando le coordinate radiali, essendo  $ds = -dr$ , si definisce la quantità:

$$\tau_\nu = \int_0^{r^*} k_\nu dr,$$

detta **profondità ottica**. Usando questa espressione e riarrangiando i termini, si ottiene un'espressione dell'equazione del trasporto molto utile ai fini astrofisici:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - \frac{\epsilon_\nu}{k_\nu}.$$

Conviene introdurre la funzione sorgente  $S_\nu$  (*source function*) data dal rapporto  $S_\nu = \epsilon_\nu/k_\nu$  e moltiplicare ambo i membri per  $e^{-\tau_\nu}$ . Integrando si ha:

$$I_\nu = \int_0^{\tau^*} S_\nu(\tau_\nu) e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu + I_{\nu 0} e^{-\tau_\nu^*}.$$

Abbiamo cioè che l'intensità della radiazione è la somma dei vari contributi degli elementi  $dr$  attenuati e della  $I_{\nu 0}$  incidente attenuata. Se  $S_\nu$  è spazialmente costante, allora il precedente integrale diviene:

$$I_\nu = S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu^*}) + I_{\nu 0} e^{-\tau_\nu^*}.$$

Ora si presentano due casi, a seconda del valore della profondità ottica. Infatti:

- se  $\tau_\nu \gg 1$  allora il mezzo è **otticamente spesso** e  $I_\nu = S_\nu$ ;
- se  $\tau_\nu \ll 1$  allora il mezzo è **otticamente sottile** e  $I_\nu = \tau_\nu^*(S_\nu - I_{\nu 0}) + I_{\nu 0}$ .

Nel caso di equilibrio termodinamico locale (ETL) in ogni volumetto  $dV$  deve risultare che l'energia assorbita ( $k_\nu I_\nu$ ) sia uguale all'energia emessa ( $\epsilon_\nu$ ) e quindi  $\epsilon_\nu/k_\nu = I_\nu = B_\nu(T)$ , essendo  $B_\nu(T)$  la plankiana. Nel caso di massimo assorbimento  $k_\nu = 1$  e quindi  $B_\nu(T) = \epsilon_\nu$  e siamo nelle condizioni di emissione di corpo nero. Allora in queste condizioni la funzione di Plank vale:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = 2 \left( \frac{\nu}{c} \right)^2 kT,$$

se  $h\nu \ll kT$ . Tale approssimazione si può ben applicare nel campo delle frequenze radio e per temperature maggiori di 10 K. In questo caso le intensità specifiche osservate si possono esprimere in funzione della temperatura di radiazione.

## 2.3 Emissione e assorbimento continui

I processi che danno luogo ad emissione e assorbimento continui nel gas interstellare sono, come già detto in precedenza:

- transizioni *free-free*: un elettrone libero quando passa vicino ad uno ione positivo emette un picco di radiazione. L'emissione avviene nel radio, nell'ottico e nei raggi X;
- transizioni *bound-free*: un elettrone legato assorbe un fotone e viene riemesso. Questo processo si dice anche *fotoionizzazione* e in questo caso viene assorbita radiazione UV ionizzante. L'emissione avviene nell'ottico e non vi è contributo radio. Il processo inverso (*free-bound*) è detto *ricombinazione* e avviene quando un elettrone libero viene assorbito da uno ione positivo ed emette un fotone;
- moto nei campi magnetici interstellari di elettroni non termici della radiazione cosmica produce radiazione di sincrotrone (*bremstrahlung magnetica*) in tutti gli intervalli di frequenza;
- transizioni fra stati legati: sono le transizioni che avvengono all'interno degli atomi e danno luogo sia ad emissione che assorbimento continui.

### 2.3.1 Transizioni free-free

Consideriamo ora il caso dell'**emissione**. Per ioni idrogenoidi di carica  $Ze$  il coefficiente di emissione free-free vale

$$\epsilon_\nu(ff) \approx 5.44 \times 10^{-39} \frac{Z^2 g_{ff}}{T^{1/2}} N_e N_i e^{-h\nu/kT},$$

espresso in  $\text{erg cm}^{-3} \text{ sec}^{-1} \text{ sterad}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$ . Il fattore esponenziale fa sì che alle temperature tipiche delle regioni HII ( $\sim 10^4 \text{ K}$ ) viene emesso solo nel range radio-lonanissimo infrarosso. In questo caso il fattore di Gaunt  $g_{ff}$  si può approssimare a  $g_{ff} \sim T^{0.15} \nu^{-0.1}$ . Integrando il coefficiente di emissione su tutte le frequenze e ammettendo l'isotropia si ottiene:

$$4\pi\epsilon_\nu(ff) = 1.426 \times 10^{-27} Z^2 T^{-1/2} N_e N_i \bar{g}_{ff},$$

dove  $\bar{g}_{ff} \sim 1$ .

Consideriamo ora il caso di **assorbimento**. Il coefficiente  $k_\nu(ff)$  può essere calcolato da  $\epsilon_\nu(ff)$ , ammettendo l'esistenza di equilibrio termodinamico. Sotto queste ipotesi si ottiene:

$$k_\nu(ff) = N_e N_i \frac{10\pi^2 Z^2 e^6}{(6\pi m k T)^{3/2}} g_{ff}.$$

Tramite questa espressione, la profondità ottica è:

$$\tau_\nu(ff) = 8.24 \times 10^{-2} Z^2 T^{-1.35} \nu^{-2.1} E,$$

da cui si nota come  $\tau$  diminuisce all'aumentare di  $T$  e  $\nu$  e aumenta con  $E$ . Questo sta a significare che a basse frequenze le nebulae diventano otticamente spesse.

### 2.3.2 Intensità del continuo radio termico

Nel caso di una distribuzione maxwelliana degli elettroni liberi e in assenza di radiazione incidente ( $I_{\nu 0} = 0$ ), la soluzione dell'equazione del trasporto è:

$$I_\nu = S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}),$$

che assume diversi valori a seconda della profondità ottica. Sostituendo l'espressione trovata poco prima per  $\tau_\nu$  si trova:

$$I_\nu \approx \nu^{-0.1} T_e^{-0.35} E \quad \text{per} \quad \tau_\nu \ll 1,$$

$$I_\nu \approx B_\nu(T) \approx \nu^2 T_e \quad \text{per} \quad \tau_\nu \gg 1.$$

Per quanto riguarda l'ultimo caso abbiamo perso ogni informazione contenuta all'interno della nebula e per frequenze sufficientemente basse, misurando

$I_\nu$  abbiamo anche una misura della temperatura. Per quanto riguarda il primo caso, si osserva che alle alte frequenze  $I_\nu \sim \text{cost}$ , per cui possiamo avere una determinazione di  $E$ , che si dice *misura di emissione*.

Si definisce *densità di radiazione* l'integrale:

$$U_\nu = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \int_{\nu} I_\nu d\Omega,$$

integrando sull'angolo solido e sulle frequenze. Nel caso di isotropia diventa:

$$U_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu.$$

## 2.4 Radiazione di sincrotrone

Consideriamo un elettrone che si muove di moto circolare in un campo magnetico  $B$  uniforme. Su di esso agisce la forza di Lorentz:

$$F_L = \frac{e}{c} v B,$$

e subisce quindi un'accelerazione  $a = F_L/m$ , cioè:

$$a = \frac{evB}{mc} = \frac{epB}{m^2c}, \quad (2.1)$$

essendo  $p = mv$  la quantità di moto dell'elettrone e  $m$  la sua massa. La potenza emessa è:

$$\phi = \frac{2}{3} \frac{e^4 B^2 p^2}{m^4 c^5}. \quad (2.2)$$

Nel caso in cui il moto dell'elettrone sia relativistico, e cioè si ha che  $v \sim c$ , allora il suo impulso diventa  $p = \gamma mv$ , per cui la potenza risulta essere ora:

$$\phi_{rel} = \frac{2}{3} \frac{e^4 B^2 \gamma^2}{m^2 c^3}, \quad (2.3)$$

differisce cioè di un termine  $\gamma^2 c^2/v^2$  rispetto al caso classico. Questo mostra perciò perchè l'emissione di sincrotrone è trascurabile per elettroni che hanno  $v \ll c$ .

La frequenza di rotazione dell'elettrone si ottiene imponendo l'uguaglianza tra la forza di Lorentz e la forza centripeta:

$$F_L = F_c = m \frac{v^2}{r} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{eB}{mc} = \gamma \omega. \quad (2.4)$$

Ora, essendo  $\omega_L = eB/mc$  la frequenza di Larmor, si ottiene:

$$\omega = \frac{\omega_L}{\gamma}. \quad (2.5)$$

Contrariamente a quanto si potrebbe pensare, a causa dell'elevata velocità dell'elettrone la frequenza caratteristica della radiazione emessa, non è dell'ordine di  $\omega$  ma molto più alta.

La radiazione infatti viene emessa in direzione del moto, all'interno di un cono di apertura  $\vartheta = 2\gamma^{-1}$ , che si riduce all'aumentare della velocità dell'elettrone. Come nel caso di un faro, un osservatore riceve la radiazione solo per un tempo limitato. Questo tempo sarebbe il tempo necessario all'elettrone per ruotare di un angolo  $\vartheta = \omega\Delta t$ . Cioè:

$$\Delta t = \frac{2}{\gamma\omega},$$

sempre nel caso in cui  $v \ll c$ .

Se invece la velocità dell'elettrone diventa confrontabile con quella della luce, allora bisogna tener conto che l'ultimo raggio visibile all'osservatore viene emesso quando l'elettrone ha compiuto un tratto di lunghezza  $v\Delta t$  in direzione dell'osservatore. Allora la durata dell'impulso luminoso, ovvero la differenza fra l'arrivo del primo e dell'ultimo raggio visibile, è data da:

$$\Delta t_{rel} = \Delta t \left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Dato che ora  $v \sim c$  possiamo approssimare  $1 - \frac{v}{c} \sim \frac{1}{2\gamma^2}$ , e quindi considerare il fattore di correzione  $1/2\gamma^2$  rispetto al caso classico. In conclusione:

$$\Delta t_{rel} = \frac{\Delta t}{2\gamma^2} = \frac{1}{\gamma^3\omega}, \quad (2.6)$$

che tenuto conto della (2.5), diventa:

$$\Delta t_{rel} = \frac{1}{\gamma^2\omega_L}. \quad (2.7)$$

È noto che l'energia di un'onda è proporzionale alla sua frequenza, pertanto la frequenza dell'impulso luminoso osservata sarà tanto maggiore quanto minore è la durata dell'impulso, perchè l'osservatore possa ricevere la stessa energia in un tempo minore. Allora la frequenza caratteristica della radiazione di sincrotrone è pari a:

$$\omega_S = \frac{1}{\Delta t_{rel}} = \omega_L\gamma^2. \quad (2.8)$$

Ora, se la distribuzione di energia delle particelle è a legge di potenza, ossia della forma  $N(\epsilon)d\epsilon = C\epsilon^{-p}d\epsilon$ , allora anche l'emissione di sincrotrone è a legge di potenza. In particolare se  $\nu$  è la frequenza a cui avviene l'emissione, si ha:

$$S_\nu \propto \nu^{\frac{p-1}{2}},$$

dove  $p$  è un parametro.



## 2.5 Eccitazione in condizioni interstellari

Discutiamo ora i rapporti di popolazione che hanno origine nel gas interstellare sotto l'effetto combinato di processi radiativi e collisionali. Facciamo degli esempi ideali che ci saranno molto utili per interpretare la realtà. Supponiamo quindi che le ionizzazioni e le ricombinazioni (cioè le transizioni free-bound e bound-free) siano molto più rare delle transizioni fra stati legati (cioè le transizioni bound-bound). In questo caso le equazioni statistiche possono essere scritte considerando solo le transizioni tra stati legati.

Ammettiamo che l'atomo (o molecola) possieda solo due livelli di energia, in particolare per  $n = 1$  si ha il livello fondamentale, mentre per  $n = 2$  quello eccitato. Supponiamo inoltre che la transizione  $2 \rightarrow 1$  corrisponda ad una riga nell'ottico. Ammettiamo che questo atomo si trovi in un campo di radiazione di corpo nero diluita. Questa situazione si verifica per esempio in una regione HII in cui la sorgente di radiazione è una stella calda di temperatura  $T_*$ .

Consideriamo allora una stella di raggio  $R_*$  ad una distanza  $r$  da un osservatore posto in un punto  $P$ . Essa sottende l'angolo:

$$\Omega_* = \frac{\pi R_*^2}{r^2}.$$

Se in  $P$  il flusso osservato è  $\phi_\nu(r)$ , allora l'intensità media del disco stellare è:

$$\overline{I_\nu^*(r)} = \frac{\phi_\nu(r)}{\Omega_*}.$$

Poichè  $\overline{I_\nu^*(R_*)} = \phi_\nu(R_*)/\pi$ , allora:

$$\frac{\overline{I_\nu^*(r)}}{\overline{I_\nu^*(R_*)}} = 1,$$

cioè  $\overline{I_\nu^*}$  è indipendente dalla distanza. In questo modo la densità di radiazione in  $P$  sarà:

$$U_\nu = \frac{\Omega_*}{c} \overline{I_\nu^*}.$$

Se esprimiamo la densità di radiazione rispetto ad un campo di radiazione isotropo, equivalente  $I_\nu$  (cioè di uguale densità di radiazione) si ha:

$$\frac{4\pi}{c} I_\nu = \frac{\Omega_*}{c} \overline{I_\nu^*},$$

da cui:

$$I_\nu = W \overline{I_\nu^*}.$$

La quantità  $W = \frac{\Omega_*}{c}$  rappresenta il *fattore di diluizione*.

Ammettiamo ora che i partner d'urto degli atomi (o molecole) siano elettroni, per cui nelle equazioni statistiche si pone  $N' = N_e$ . Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} N_n \left( \sum_m B_{nm} \frac{4\pi}{c} I_\nu + \sum_{m < n} A_{nm} + N' \sum_m Q_{nm} \right) = \\ = N_m \left( \sum_m B_{mn} \frac{4\pi}{c} I_\nu + \sum_{m > n} A_{mn} + N' \sum_m Q_{mn} \right). \end{aligned}$$

Nel caso del nostro atomo a due livelli, il rapporto  $N_m/N_n = N_2/N_1$  vale:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{B_{12} \frac{4\pi}{c} I_\nu + N_e Q_{12}}{B_{21} \frac{4\pi}{c} I_\nu + A_{21} + N_e Q_{21}}.$$

Si può dimostrare che essendo  $g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$ , allora il precedente rapporto si riscrive:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \frac{N_e \left( \frac{Q_{21}}{A_{21}} \right) e^{-h\nu/kT} + W(e^{h\nu/kT} - 1)^{-1}}{1 + N_e \left( \frac{Q_{21}}{A_{21}} \right) e^{-h\nu/kT} + W(e^{h\nu/kT} - 1)^{-1}},$$

avendosi  $Q_{12}/Q_{21} = (g_2/g_1)e^{-h\nu/kT}$ . Applicando questa legge ai casi astrofisici, si nota come si possano tranquillamente trascurare i termini in cui compare il fattore  $W$ , in quanto molto piccoli ( $\sim 10^{14}$ ). Si ottiene quindi:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \frac{e^{-h\nu/kT}}{1 + \frac{A_{21}}{N_e Q_{21}}}.$$

La condizione di equilibrio termodinamico si realizza quindi ponendo:

$$\frac{A_{21}}{N_e Q_{21}} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad A_{21} \ll N_e Q_{21}.$$

Questo significa che si ha equilibrio termodinamico quando predominano gli urti, in quanto  $A_{21}$  rappresenta la probabilità di transizione spontanea mentre  $Q_{21}$  è la velocità di diseccitazione collisionale. In questo caso viene anche rispettata la distribuzione di Boltzmann ed è quindi possibile definire la temperatura.

Quando i partner d'urto sono elettroni, il calcolo del rapporto  $b_2/b_1$  (rappresenta le deviazioni dalla formula di Boltzmann  $b_n = N_n/N_n^*$ ) per righe permesse mostra che non vi è equilibrio termodinamico e che *tutti gli atomi neutri sono al livello fondamentale*. Inoltre in questo caso il coefficiente  $Q_{21}$  è dato da:

$$Q_{21} = \frac{8.63 \times 10^{-6} < \Omega(1, 2) >}{\sqrt{T} g_2},$$

dove  $\Omega(1, 2)$  è la cosiddetta *efficienza collisionale*.

### 2.5.1 Livelli metastabili

Diversa è invece la situazione per le transizioni proibite dei livelli cosiddetti *metastabili*. Essi si trovano al di sopra del livello fondamentale di qualche eV e un atomo eccitato può permanere su tali stati per un tempo  $t \gg 10^{-7}$  s. Le transizioni fra questi livelli e il livello fondamentale (e tra di loro) sono proibite. Questi livelli dunque non sono popolati tramite ricombinazione e cascata perchè dovremmo osservare anche righe provenienti da livelli alti. Quindi essi vengono popolati tramite diseccitazioni collisionali dal livello fondamentale. Le righe dovute a transizioni proibite sono quelle per cui  $\Delta s \neq 0$  essendo  $s$  il numero quantico di spin.

Consideriamo quindi a titolo d'esempio le righe nebulari dello spettro dello [OIII] 5007, 4959. Per quanto riguarda la prima transizione  $A_{21} = 2.1 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ , mentre per la seconda  $A_{21} = 0.7 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ . Si dimostra che ponendo  $T = 10^4 \text{ K}$ ,  $N_e = 10^3 \div 10^4$ , si trova  $b_2/b_1 \simeq 0.1 \div 0.01$ .

Questo significa che la popolazione del livello superiore raggiunge lo 1% fino al 10% del suo valore in caso di equilibrio termodinamico (perciò una piccola deviazione rispetto ai livelli non metastabili). Rispetto ai livelli con vita media normale ( $b_2/b_1 = 10^{-11}$ ) vengono così favoriti, in condizioni interstellari, i livelli metastabili ( $b_2/b_1 = 10^{-1}$ ) con lunga vita media nel rapporto  $10^{10} : 1$ .

Le molecole interstellari di CN sono quindi dei sensibili indicatori della radiazione di fondo cosmica. Per le righe di questa molecola gli urti non sono perciò importanti e predominano le eccitazioni radiative da parte del campo di radiazione a 3 K.

## 2.6 Righe di ricombinazione

Le righe di ricombinazione si formano per fotoionizzazione e successiva ricombinazione con uno stato legato. Se si ha una transizione a cascata, l'energia prodotta (e cioè i fotoni) non riesce più ad ionizzare altri atomi. Potremmo però avere un'eccitazione dovuta all'energia emessa per ricombinazione dallo stato libero ad uno stato più elevato. Gli elettroni liberi sono in media 1 eV sopra il continuo. L'unico modo per produrre una nuova ionizzazione, è la ricombinazione con il livello fondamentale che crea un fotone di energia superiore a 13.6 eV. Questa radiazione ionizzante è diffusa e può propagarsi in qualsiasi direzione.

Supponiamo a tal proposito che la radiazione ionizzante viene creata e riassorbita 'in loco', cioè in una cella pari al libero cammino medio del fotone. Così evitiamo di dover risolvere l'equazione del trasporto. Inoltre per l'He si ipotizza che una ricombinazione diretta a livello fondamentale generi un fotone che viene riassorbito immediatamente da un altro atomo di He. Quindi la transizione  $2 \rightarrow 1$  ( $\text{Ly}\alpha$ ) dell'He viene riassorbita da un He oppure ionizza all'istante un altro He. Le ipotesi che facciamo sono plausibili

con le condizioni presenti nelle regioni di HII. Ammettiamo allora che la popolazione del livello di partenza  $n$  avvenga per ricombinazione diretta e per ricombinazione diretta a livelli più alti seguita da transizioni radiative ad  $n$ , ma mai per assorbimento. Si suppone quindi che:

- non vi sia emissione indotta;
- non vi sia popolazione del livello  $n$  per urto o assorbimento di radiazione;
- gli atomi neutri siano al livello fondamentale e da questo vengano fotoionizzati;
- vi sia equilibrio statistico.

Premettiamo a questo proposito che il rate di ionizzazione sia di  $\sim 10^{-8} \text{ s}^{-1} \ll 10^4 \div 10^8 \text{ s}^{-1}$ , e quindi si possono trascurare i processi di ionizzazione dagli stati legati nelle equazioni statistiche. Inoltre si suppone che la probabilità di transizione da  $n$  a  $m > n$  per assorbimento radiativo sia molto minore della probabilità di fotoionizzazione. Sotto queste ipotesi le equazioni dell'equilibrio statistico sono:

$$N_n \sum_{m=1}^{n-1} A_{nm} = \sum_{m=n+1}^{\infty} N_m A_{mn} + N_p N_e \alpha_{0,n}(T_e),$$

dove  $\alpha_{0,n}(T_e)$  è il coefficiente di ricombinazione diretta al livello  $n$  [ $\text{cm}^3 \text{ s}^{-1}$ ] e  $T_e$  è la temperatura elettronica. Supponiamo anche che la nube gassosa sia otticamente sottile, e cioè che una riga emessa non venga riassorbita. Si può dimostrare che in questo caso  $b_n$  dipende soltanto da  $T_e$  e non da  $N_e$ . Ciò è vero perchè consideriamo il caso di bassissima densità in cui i solo processi che originano le righe sono la cattura di elettroni su livelli eccitati e la caduta radiativa ai livelli inferiori.

Se però aumentiamo anche di poco la densità, la prima serie a diventare opaca è la Lyman. In questo caso  $\text{Ly}\alpha$  e  $\text{Ly}\beta$  scatterano: dopo meno di 8 scattering la  $\text{Ly}\beta$  decade in una  $\text{Ly}\alpha$  che scappa. Per cui se si hanno ricombinazione a livelli superiori, dopo meno di 8 scattering, si generano righe  $\text{Ly}\alpha$  più righe di serie superiori.

Quindi il numero di ricombinazioni è uguale al numero di righe  $\text{Ly}\alpha$ . Inoltre se siamo all'equilibrio, il numero di fotoionizzazioni è identico al numero di ricombinazioni. Mettendo assieme le due cose, il numero di fotoni prodotti dalla  $\text{Ly}\alpha$  è una misura diretta del numero di fotoionizzazioni al secondo che avvengono nella nebula, e cioè abbiamo determinato il numero di fotoni ionizzanti emessi dalla sorgente centrale.

Misurando poi l'intensità della  $\text{Ly}\alpha$  su tutta la nebula, misuriamo di conseguenza l'integrale della planckiana e quindi la temperatura della sorgente centrale ionizzante. Lo stesso ragionamento si può applicare alle altre serie, tenendo presente che non sempre siamo nel caso otticamente sottile.

## 2.7 Intensità delle righe

Non si può terminare una discussione sui rapporti di popolazione senza parlare delle intensità previste di alcune righe. Per risolvere il problema dobbiamo ricordare le equazioni che abbiamo visto finora e cioè quella del trasporto, la funzione sorgente e l'equazione dell'equilibrio statistico.

Consideriamo quindi in primo luogo due casi in cui **non avvengono** eccitazione radiativa e emissione indotta ma **avvengono** eccitazione per urto, diseccitazione per urto ed emissione spontanea. In tal modo l'equazione del trasporto non è più necessaria. Queste condizioni si verificano per righe di ioni pesanti eccitati per urto e per righe di ricombinazione ottiche in una nebulosa gassosa otticamente sottile, come abbiamo visto.

L'intensità di una riga di emissione è data da:

$$I_\nu^L = I_\nu - I_{\nu 0},$$

dove  $I_\nu$  è dato dall'equazione del trasporto, che ricordiamo essere:

$$I_\nu = \int_0^{\tau_\nu^*} S_\nu(\tau_\nu) e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu + I_{\nu 0} e^{-\tau_\nu^*},$$

in cui  $S_\nu^L$  può dipendere da  $I_{\nu 0}$  per le eccitazioni radiative e per l'emissione indotta. Tale dipendenza scompare per le righe di emissione ottiche eccitate per urto e generate per ricombinazione (nel caso sottile). Allora  $S_\nu^L$ ,  $k_\nu^L$  e di conseguenza  $\epsilon_\nu^L$  sono indipendenti da  $I_{\nu 0}$  e si può considerare  $I_{\nu 0} \ll I_\nu$  a causa della diluizione. Nell'ipotesi di nebulose otticamente sottili infatti  $\tau_\nu^L \ll 1$  e quindi si può scrivere la seguente relazione:

$$S_\nu^L d\tau_\nu^L = S_\nu^L k_\nu^L dr = \epsilon_\nu^L dr.$$

Sostituendo al posto di  $\epsilon_\nu^L$  la sua espressione:

$$\epsilon_\nu^L = \frac{h\nu_{nm}}{4\pi} \psi(\nu) A_{nm} N_n,$$

si ottiene:

$$I_\nu^L = I_\nu - I_{\nu 0} = \int_0^l \epsilon_\nu^L dr = \frac{h\nu_{nm}}{4\pi} \psi(\nu) A_{nm} \int_0^l N_n dr.$$

Ammettiamo che la densità e la temperatura del gas siano costanti. In questo caso il rapporto di due righe di emissione con uguale livello inferiore  $m$  e uguale profilo  $\psi(\nu)$  è:

$$\frac{I_{nm}^L}{I_{n'm}^L} = \left( \frac{\nu_{nm}}{\nu_{n'm}} \right) \left( \frac{A_{nm}}{A_{n'm}} \right) \left( \frac{N_n}{N_{n'}} \right).$$

Nel caso che le ionizzazioni e le ricombinazioni siano molto più rare delle transizioni fra stati legati, ricordiamo che il rapporto di popolazione fra due livelli vale:

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{g_n}{g_m} \frac{e^{-h\nu_{mn}/kT}}{1 + \frac{A_{nm}}{N_e Q_{nm}}}.$$

Sostituendo questo rapporto nell'equazione precedente si trova infine:

$$\frac{I_{nm}^L}{I_{n'm}^L} = \frac{\nu_{nm} A_{nm} g_n}{\nu_{n'm} A_{n'm} g_{n'}} \left[ \frac{1 + (A_{n'm}/N_e Q_{n'm})}{1 + (A_{nm}/N_e Q_{nm})} \right] \exp \left( -\frac{h\nu_{nm} - h\nu_{n'm}}{kT} \right).$$

Notiamo che se i livelli  $n$  ed  $n'$  sono vicini l'uno all'altro, allora  $\nu_{nm} \sim \nu_{n'm}$  e quindi il rapporto di intensità delle righe dipende da  $N_e$  e dalla temperatura elettronica  $T_e$  che compare in  $Q_{nm}$ . Perché ciò sia vero occorre che  $A_{n'm} \neq A_{nm}$  e che  $Q_{n'm} \neq Q_{nm}$ . Questa situazione si verifica per le righe proibite di [NI], [OII], [SII], [ClIII], [ArIV], [NeIV]. Per alte densità il rapporto di intensità diventa:

$$\frac{I_{nm}^L}{I_{n'm}^L} = \frac{A_{nm} g_n}{A_{n'm} g_{n'}}.$$

Prendendo come esempio il caso delle righe per [OII] si nota come le dis-eccitazioni collisionali  $3 \rightarrow 2$  sono poco importanti a basse densità. Inoltre  $I_{32}(4363)$  è molto piccola rispetto a  $I_{21}(5007, 4959)$  e quindi il livello 3 è poco popolato perciò il livello 2 non è popolato per transizioni radiative dal livello 3.

## 2.8 Equilibrio termodinamico

Ritorniamo al concetto di equilibrio termodinamico equivalente (ETE): per definizione si ha l'ETE quando non c'è trasformazione dell'energia meccanica in altre forme di energia, ad esempio radiazione. Infatti si ha l'ETE quando sono presenti processi collisionali: consideriamo come esempio un atomo di ossigeno nell'atmosfera terrestre o una qualsiasi miscela di gas come può avvenire in una nebula: se l'O si trova al livello 2, la densità dell'atmosfera è più alta e quindi prima o poi troverà un partner d'urto che collide con l'ossigeno. Questo si diseccita senza però emettere radiazione. Siamo in presenza di equilibrio termodinamico equivalente. In questo caso valgono le relazioni di Boltzmann (che lega le popolazioni di due livelli) e di Saha (che lega le popolazioni dei livelli di atomi ionizzati). Possiamo quindi definire una temperatura (la temperatura che compare nelle suddette equazioni è la temperatura cinetica). È importante notare che la temperatura cinetica aumenta verso l'esterno dell'atomo: infatti gli elettroni creati dagli ioni a 13.6 eV (energia necessaria a eccitare di una volta l'atomo di H) sono fermi (tutta l'energia fornita è stata utilizzata per ionizzare l'atomo), mentre quelli creati dagli ioni a 15 eV avranno una energia cinetica, e quindi saranno in movimento.

Se invece siamo in presenza di una densità di circa  $10^3$  elettroni/cm<sup>3</sup> è molto improbabile che avvengano delle collisioni e quindi il nostro atomo di ossigeno si scarica emettendo un fotone di energia  $h\nu_{21}$ , corrispondente cioè al salto energetico fra i due livelli. Altri atomi allora seguiranno lo stesso processo ma il fotone  $h\nu_{21}$  non ne risente poichè ha un'energia corrispondente ad una transizione proibita. Allora in questo caso viene prodotta radiazione e abbiamo trasformato l'energia meccanica in energia radiativa e quindi non siamo più nella condizione di ETE.

Un'altra condizione perché si verifichi l'ETE è che la densità di radiazione deve essere tale per cui essa fornisca l'energia necessaria per portare un atomo dal livello 2 al 3 e successivamente dal 3 all'1 (in questo caso la transizione è permessa). Abbiamo bisogno quindi di una densità molto bassa. Inoltre non basta neppure una densità troppo elevata, come nel primo caso, perché ha un'importante influenza la sezione d'urto.

Un'altra considerazione a riguardo è che se immaginiamo di inserire in un gas diluito elementi pesanti (come ad esempio O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, Ne, S), questi vengono dapprima eccitati (transizione  $1 \rightarrow 2$ ) e poi emettono spontaneamente (transizione  $2 \rightarrow 1$ ), questo perchè hanno livelli che sono vicini al livello fondamentale.

## 2.9 Sezione d'urto

La sezione d'urto di ricombinazione  $\sigma(v)$  dipende da  $v^{-2}$ , per cui quando la velocità relativa è grande la sezione d'urto è piccola e quindi per elettroni con alte velocità è poco probabile che avvenga la ricombinazione. È più probabile invece che avvengano urti elastici tra protoni ed elettroni, in quanto in questo caso la sezione d'urto è di 4-5 ordini di grandezza maggiore. In particolare se  $Ze$  è la carica della particella bersaglio (ferma) e  $ze$  è quella della particella in moto, allora essendo  $v$  la velocità relativa delle due particelle, si dimostra che la sezione d'urto vale:

$$\sigma = \sigma(v) = \pi r_0^2 = \pi \left( \frac{2Zze^2}{mv^2} \right)^2,$$

dove  $r_0$  è il raggio della sezione d'urto.

Abbiamo anche visto come il coefficiente di diseccitazione collisionale influisca sull'intensità delle righe. In via del tutto generale questo coefficiente è dato da:

$$Q(v) = \sigma(v)v.$$

## 2.10 Ionizzazione

La ionizzazione avviene quando un fotone viene assorbito da un elettrone che si porta a livelli energetici più alti, in corrispondenza dell'energia del

fotone incidente.

Le righe proibite dell'ossigeno neutro e dell'idrogeno neutro, in una zona con molti elettroni, possono essere viste al bordo delle nebulose planetarie. Infatti, all'interno della nebula è presente una sfera di HII prodotto da fotoni ionizzanti, mentre al bordo c'è una zona di transizione, con O<sub>2</sub>I, O<sub>2</sub>II, HI e HII. Qui si scaricano i livelli dell'ossigeno. Sotto determinate ipotesi si può capire se tutti i fotoni emessi hanno contribuito alla ionizzazione (*emission bounded*) oppure vi era troppo poco gas, con quindi conseguente fuga di fotoni (*mass bounded*). Un tale spettro non avviene in condizioni di equilibrio termodinamico.

Le righe proibite sono più strette delle altre: nelle regioni responsabili delle righe larghe non ci sono le condizioni necessarie di densità per la formazione di righe strette proibite ( $\sim 10^8$  elettroni/cm<sup>3</sup>).

La ionizzazione ha due principali cause:

- **Fotoni:** c'è un legame fra l'intensità della sorgente sottostante e la quantità di fotoni ionizzanti. Un legame quindi tra il continuo e l'intensità delle righe. La ionizzazione avviene principalmente per fotoni, quando in quel tipo di oggetti celesti (quali ad esempio le galassie di Seyfert) le quantità di certi elementi sono circa costanti.
- **Onda d'urto:** si verifica nelle supernovae. È un'onda di compressione che ionizza per riscaldamento il gas. Ionizza l'HI, l'elettrone poi si ricombina ma emette fotoni con  $E > 13.6$  eV perché parte da livelli superiori di ionizzazione. C'è dissociazione completa tra l'energia delle righe e quella del continuo sottostante.

Un fatto importante da notare è che misurando l'intensità di certe righe possiamo avere una misura diretta della temperatura elettronica  $T_e$ , supponendo nota la densità  $N_e$ . Infatti molto utile a tal fine è il parametro  $R$  dato dal rapporto:

$$R = \frac{I(4959) + I(5007)}{I(4363)} = \frac{7.73 \times \exp[(3.29 \times 10^4)/T_e]}{1 + 4.5 \times 10^{-4} N_e / T_e},$$

dove si pone  $N_e \sim 10^2 \div 10^3$  e<sup>-</sup>/cm<sup>3</sup>.

In realtà con questo metodo le temperature che si trovano non sono esattamente quelle vere. Questo perché commettiamo degli errori nella stima dell'intensità delle righe. Questo avviene per due motivi:

- il continuo è rumoroso ed è difficile distinguere la riga a 4363 Å;
- bisogna correggere per estinzione, dovuta a polveri e gas. Se non si corregge si misurano  $T_e$  basse perché  $R$  resta grande.

Un'altra considerazione importante è il fenomeno della stratificazione di ionizzazione: in molti casi avviene (in particolare nelle nebulose planetarie)



che il grado di ionizzazione decresce verso l'esterno. Quindi la temperatura che noi misuriamo è inferiore di quella reale.

Ma come possono esistere più o meno gradi di ionizzazione assieme? Innanzitutto più calda è la radiazione ionizzante e meno forti sono le righe a bassi gradi di ionizzazione. Se si ha ionizzazione per onda d'urto questo non si verifica. Misurando la larghezza equivalente dell' $H_\beta$ , si vede che questa è circa la stessa in tutti gli oggetti e quindi si ha un accoppiamento tra radiazione del continuo e numero di fotoni.

Se si ha una sorgente non termica (come ad esempio la radiazione di sincrotrone) si crea un eccesso di fotoni di alta energia che, siccome la sezione d'urto va' come  $\nu^{-3}$ , vengono riassorbiti al bordo, dove si forma una zona di transizione più ampia rispetto al caso di una sorgente termica. Questo fa' sì che certe righe diventino più forti rispetto alla sorgente termica.

## 2.11 Righe e livelli

Riprendiamo alcune considerazioni sulle righe e sui livelli. In particolare abbiamo visto che se le densità del mezzo sono molto elevate, i livelli si popolano per collisione e non si vedono più le righe. Ciò suggerisce che ogni riga proibita abbia una sua densità critica.

Abbiamo visto come in condizioni di equilibrio il numero di fotoionizzazioni è uguale al numero di ricombinazioni. Ebbene, l'energia ionizzante è:

$$h\nu = h\nu_{Pc} + h\nu_{H\alpha} + h\nu_{Ly\alpha} = \frac{1}{2}mv^2 + \chi_0,$$

dove le frequenze che compaiono sono quelle relative alla serie di Paschen e Lyman. Da notare il fatto che se siamo in condizioni di diluizione di radiazione e ci siano atomi di H neutri al livello fondamentale, allora prima che arrivi un fotone ionizzante l'H ha avuto il tempo di ricombinarsi al livello base. Infatti abbiamo visto come avvenga una ionizzazione ogni  $10^8$  secondi! Inoltre un urto non riesce a portare un atomo a livello 2 (servirebbero 10.4 eV).

Una transizione  $3 \rightarrow 2$  che provoca la riga  $H_\alpha$  non può venire riassorbita dall'atomo di H per cui la riga scappa fuori. Si capisce allora come si può definire la diluizione: quando pochi atomi si stanno ricombinando e parte di essi potrebbero non passare per l' $H_\alpha$ , ma dare Pc e Ly $\beta$  direttamente.

Se nella ricombinazione diretta a livello fondamentale si fosse prodotto un fotone in grado di ionizzare un atomo, dov' viene riassorbito? Bisogna innanzitutto risolvere l'equazione del trasporto, ipotizzando in prima approssimazione che questo fotone venga assorbito *on the spot*, e ovviamente dovremo definire una scala minima sotto cui possa avvenire detto processo. Siamo fra 1-2 eV sopra lo stato libero, e quindi gli elettroni che si ricombinano sono quelli con velocità più bassa, ricordando la definizione di sezione d'urto di ricombinazione.

La ricombinazione a cascata, vale a dire popolare dall'alto i livelli, può avvenire in condizioni di diluizione di radiazione quando l'unica radiazione ad essere assorbita è quella ionizzante, per cui si può popolare dall'alto il livello 2 o 3. Tuttavia la probabilità che questo avvenga è molto bassa per via della vita media piccolissima ( $10^{-8}$  s). In questo caso, che rappresenta il caso otticamente sottile, non si avrà neanche emissione indotta.

Abbiamo visto che una transizione  $2 \rightarrow 1$  provoca l'emissione di un fotone  $\text{Ly}\alpha$ . Ipotizziamo che non incontri nessun atomo neutro. Aumentando la densità, il fotone  $\text{Ly}\alpha$  ha più probabilità di trovare un atomo neutro e quindi di venire assorbito. È dunque aumentata l'opacità della serie Lyman. Questo significa che aumenta la densità delle serie più basse. Questo vale anche per la  $\text{Ly}\beta$  ( $3 \rightarrow 1$ ). Ogni volta viene riemessa in una direzione diversa. La  $\text{Ly}\beta$  si è indebolita rispetto alla  $\text{Ly}\alpha$  in questo caso non più sottile: al limite scompare in  $\text{H}\alpha + \text{Ly}\alpha$ . Tendono quindi a scaricarsi in cascata sopprimendo le righe alte della serie.

Abbiamo visto come una misura dei fotoni  $\text{Ly}\alpha$  fornisca il numero di fotoni ionizzanti. In particolare il numero di fotoni al secondo è dato dall'integrale

$$\int_{\lambda_0}^0 B_{\lambda}(T) d\lambda.$$

Quello che si fa quindi è determinare l'area sottesa dalla planckiana entro una  $\lambda_0$  così da avere l'indice della temperatura di corpo nero della stella al centro della nebulosa considerata.

## Parte II

# Principi di struttura stellare



## Introduzione

In questa parte ci occuperemo di tutti quei fenomeni che regolano l'evoluzione di una stella, dal momento della sua formazione all'istante in cui essa si 'spegne'.

Nei primi capitoli vedremo di caratterizzare alcuni concetti che utilizzeremo nel seguito, quali l'equilibrio termodinamico, alcune nozioni di meccanica statistica che dovrebbero essere già conosciute, l'opacità stellare e i vari meccanismi di trasporto dell'energia, quali il trasporto radiativo e convettivo. Vedremo poi come avviene la produzione di energia attraverso le reazioni nucleari che avvengono all'interno delle stelle e andremo a tracciarne le caratteristiche generali, quali temperatura e densità necessarie all'innesco del bruciamento termonucleare.

Finalmente vedremo come, in base alle nozioni acquisite, si possa descrivere la struttura di una stella, facendo uso dei *politropi*, modelli prettamente fisici che simulano abbastanza bene una stella.

Arriveremo quindi a descrivere i meccanismi che portano alla formazione stellare quali la frammentazione e il collasso della protostella, fino all'innesco del bruciamento dell'idrogeno nel centro. A questo punto è nata la stella, ed essa si va a collocare sulla Sequenza Principale (MS) del diagramma H-R. Descriveremo a questo punto le fasi di presequenza e postsequenza distinguendo le stelle in base alla loro massa iniziale. Si vedrà come stelle di piccola massa evolvano in maniera diversa rispetto a stelle massicce e che a queste diverse masse iniziali corrisponderanno stati fisici finali diversi, come nane bianche, nebulose planetarie, stelle di neutroni, supernove fino ai buchi neri, ognuno caratterizzato da una propria massa critica.



## Capitolo 3

# Equilibrio

Se ci poniamo la domanda: quale è il motore principale che governa l'evoluzione stellare?, inevitabilmente concluderemo che si tratta della gravità. Tuttavia numerosi fenomeni fisici bilanciano, ritardano e impediscono alla gravitazione di arrivare al compimento ultimo.

Innanzitutto le stelle perdono energia, come si vede facilmente dalla loro luminosità. Ci vuole quindi una sorgente di energia per compensare tale perdita. Quella principale è sicuramente l'energia nucleare. Inoltre sappiamo benissimo che le stelle restano stabili per un periodo che varia in funzione della loro massa, e quindi esse sono in equilibrio meccanico e termico. Vediamo quindi come si definisce l'equilibrio in una stella e quali condizioni debbano sussistere affinché la struttura sia stabile.

### 3.1 Equilibrio meccanico

Come prima cosa definiamo una stella: essa è un sistema autogravitante di plasma caldo che emette energia dalla superficie. Nella discussione assumeremo assenza di rotazione e di campo magnetico.

Nella descrizione euleriana, la massa  $dM_r$  in una shell  $dr$  è:

$$dM_r = 4\pi r^2 \rho dr - 4\pi r^2 \rho v dt,$$

derivando rispetto ad  $r$  il primo membro e rispetto a  $t$  il secondo ed eguagliando si ottiene l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho v r^2) = -\nabla \cdot (\rho \cdot \mathbf{v}).$$

Nella descrizione lagrangiana bisogna trasformare la grandezza  $dM_r$  con la legge:

$$\frac{\partial}{\partial M} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial M}.$$

In questo modo l'equazione di continuità diviene:

$$\frac{\partial}{\partial M_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Sia ora  $\phi$  il potenziale gravitazionale; esso soddisfa l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho,$$

ed è della forma:

$$\phi = \frac{-GM_r}{r} + \text{cost.}$$

Se viene integrato, la quantità  $-\int_0^\infty \phi(r) dr$ , rappresenta l'energia necessaria a disperdere completamente la stella.

A questo punto possiamo definire l'equilibrio idrostatico: esso è il bilancio esatto fra la forza di gravità e le forze di pressione, ovvero è l'equazione:

$$\frac{\partial P}{\partial M_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^4} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}.$$

Se  $P = 0$  ovunque (assenza di pressione) allora la struttura stellare è governata dalla gravità e si definisce un tempo di caduta libera dato da  $t_{ff} \simeq \sqrt{R/g}$ . Se invece  $G = 0$ , ovvero c'è assenza di gravità, allora una scala di tempo analoga è la  $t_{exp} \simeq R/v_s$ , dove  $v_s$  è la velocità del suono. In pratica  $t_{exp}$  rappresenta il tempo necessario ad un'onda sonora per poter attraversare la stella. In equilibrio idrostatico le due scale di tempo si equivalgono.

### 3.1.1 Teorema del Viriale

Il Teorema del Viriale è una relazione fra le energie globali: infatti dalla relazione di equilibrio idrostatico, assumendo  $P = 0$  e  $M_r = M$ , si ha:

$$\int_0^M \frac{GM_r}{r} dM_r = 3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dM_r.$$

Il primo termine è l'energia gravitazionale  $E_g$ , mentre l'integrando del secondo si può scrivere  $P/\rho = (2/3)u = (2/3)c_V T$ , per un gas ideale monoatomico. Abbiamo quindi che:

$$E_g = -2E_i,$$

essendo  $E_i$  l'energia interna del gas. In generale  $3P/\rho = \zeta u$  con  $\zeta = 3(\gamma - 1)$ . Allora l'energia totale è  $W = E_g + E_i$ . La luminosità è data da  $L = dW/dt = (\zeta - 1)dE_i/dt$ , e quindi:

$$L = \dot{E}_i = -\frac{1}{2}\dot{E}_g,$$

avendo assunto  $\gamma = 5/3$  e  $\zeta = 2$  per un gas ideale monoatomico.



Vediamo di dare brevemente una dimostrazione della relazione del Viriale. Consideriamo l'equazione dell'equilibrio idrostatico e moltiplichiamo per il volume infinitesimo della sfera  $\frac{4\pi}{3}r^3dr$ ; introduciamo la continuità della massa, e si ottiene:

$$V(r)dP = -\frac{1}{3}\left(\frac{GM_r}{r}\right)dM_r.$$

Integriamo sulla stella imponendo che  $V(r) = 0$  per  $r = 0$  e  $P = 0$  per  $r = R$ ; si ottiene così:

$$-3 \int P dV = - \int \frac{GM_r}{r} dM_r = \Omega.$$

Il legame fra  $P$  e l'energia interna  $u$  varia a seconda che il gas sia relativistico o non relativistico. In particolare, per un gas non relativistico l'energia interna totale è:

$$U_T = -\frac{1}{2}\Omega,$$

mentre nel caso relativistico  $U_T = -\Omega$ .

### 3.1.2 Deviazione dall'equilibrio

Supponiamo ora che

$$\left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}\right| < \frac{GM_r}{r},$$

cosa avviene? Il materiale subisce una certa accelerazione verso il centro data da:

$$-\ddot{\mathbf{r}} = \frac{GM_r}{r^2} - \frac{1}{\rho}\left|\frac{d\rho}{dr}\right|.$$

Se  $\ddot{\mathbf{r}}$  non varia nel tempo, allora detta  $\alpha R$  la frazione del raggio totale, si ha:

$$\alpha R = \frac{1}{2}(-\ddot{\mathbf{r}})t^2,$$

da cui si ricava  $t$ . Si dimostra che se  $\alpha = 0.1$ ,  $r = 0.5R$  e  $M_r = 0.5M$ , per il Sole  $t \sim 5 \times 10^3$  secondi.

## 3.2 Equilibrio termico

Si ha equilibrio termico quando tutte le parti del sistema hanno la stessa temperatura e non vi sono scambi di energia tra le parti. Nelle stelle un perfetto equilibrio termico non è possibile. L'energia totale è  $E = U + \Omega + K$ , dove  $U$  è l'energia interna,  $\Omega$  quella potenziale e  $K$  quella cinetica, che possiamo trascurare perché dovuta ai moti di materia su grande scala. La conservazione dell'energia impone che:

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho \epsilon dV,$$

dove  $\mathbf{F}$  è il flusso attraverso la superficie  $S$  e  $\epsilon$  è il tasso netto di produzione di energia. Localmente quindi possiamo scrivere, facendo uso del teorema della divergenza, che  $\nabla \cdot \mathbf{F} = \rho\epsilon$ . Esprimendo la divergenza del flusso utilizzando le coordinate sferiche, si ottiene:

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon,$$

essendo  $L(r) = 4\pi r^2 F(r)$ .

Consideriamo ora un altro punto di vista e vediamo cosa succede all'energia se questa varia durante un certo intervallo di tempo  $dt$ . Calcoliamo quindi la  $dE/dt$ : innanzitutto l'energia potenziale  $\Omega$  la scriviamo ricordando che essa è il lavoro delle forze di pressione  $d\Omega = PdV = (-P/\rho^2)d\rho$ , essendo  $V = 1/\rho$  per unità di massa. Riconoscendo che la variazione di energia nel tempo è per definizione la luminosità della stella, si trova che:

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \left( \epsilon + \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} - \frac{dU}{dt} \right).$$

In generale il termine tra parentesi si pone uguale a  $\epsilon_g$ , detta sorgente di energia gravitazionale. Ora, il flusso di energia totale è dato dalla somma dei vari flussi corrispondenti ai diversi meccanismi di trasporto energetico, ovvero il trasporto radiativo, convettivo, conduttivo e il trasporto di energia da parte dei neutrini. In questo modo anche il tasso di produzione di energia è dato dalla somma di vari effetti, il più rilevante dei quali è sicuramente la produzione di energia da parte delle reazioni termonucleari all'interno della stella. Tuttavia da questa  $\epsilon_n$  dobbiamo sottrarre quella prodotta dai neutrini, in quanto non contribuisce in maniera rilevante al sostentamento energetico della stella (solo nelle fasi finali di vita di una stella di grande massa, la produzione di neutrini diventa significativa).

In totale quindi abbiamo che la condizione di equilibrio termico è data da:

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho (\epsilon_n - \epsilon_\nu + \epsilon_g).$$

Se  $\epsilon_g = 0$  allora si dice che si ha un quasi equilibrio termico.

### 3.3 Equilibrio termodinamico

Si ha l'equilibrio termodinamico (ET) quando in una ipotetica cavità adiabatica isolata sia stato raggiunto l'equilibrio meccanico, termico e chimico e temperatura uniforme. Si comprende quindi che una stella non è un sistema in rigoroso ET perché essa irraggia energia, non ha temperatura costante e tantomeno composizione chimica costante nel tempo. Tuttavia poiché il gradiente di temperatura  $dT/dR \sim 10^{-4}$  K/cm e il cammino libero medio è di circa 1 cm, allora ogni  $\text{cm}^3$  può essere considerato come un sistema in

ET. Questo è confermato dal fatto che le scale di tempo delle reazioni nucleari sono molto lunghe e quindi anche la composizione chimica resta quasi costante nel tempo. Ecco quindi che in questo modo il campo di radiazione è descritto dalla legge di Planck, lo stato fisico della materia dalla legge di Boltzmann e l'interazione materia-radiazione da quella di Kirchoff.

Si può dimostrare che per  $T > 10^5$  K, il gas si comporta come un gas perfetto nel quale le interazioni tra le particelle sono trascurabili. Ora, la prima legge della termodinamica afferma che:

$$dU = dQ + dW.$$

Per una variazione infinitesima di volume  $dV$  dovuto alle forze di pressione  $P$ , si compie un lavoro  $dW = -PdV$ , e quindi  $dQ = dU + PdV$ . Poiché  $U = U(V, T)$ , allora:

$$dQ = \left( \frac{\partial U}{\partial V} + P \right) dV + \frac{\partial U}{\partial T} dT.$$

Se  $dQ = 0$  allora si ha la trasformazione adiabatica.

La seconda legge della termodinamica afferma che esiste una funzione  $S$  detta entropia, tale che per una trasformazione quasi statica infinitesima, si ha:

$$dS = \frac{dQ}{T}.$$

In un sistema adiabatico  $\Delta S \geq 0$ . Vale 0 per i processi reversibili. In ogni caso ogni sistema completamente isolato tende spontaneamente a trasformarsi in modo tale da far aumentare l'entropia. Si capisce quindi che possiamo dare una definizione più rigorosa di ET: *si ha equilibrio termodinamico quando il sistema ha raggiunto lo stato di massima entropia.*

Per quanto detto prima si ha che  $TdS = dU + PdV$  e poiché  $S = S(V, T)$ , allora:

$$dS = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial V} + P \right) dV + \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right) dT.$$

Ricordando che  $dS$  è un differenziale esatto, si ottiene finalmente:

$$\frac{\partial U}{\partial V} = T \frac{\partial P}{\partial T} - P,$$

ovvero una relazione che lega l'energia interna del gas alla pressione che agisce su di esso.



## Capitolo 4

# Equazione di stato e ionizzazione

Vediamo in questo capitolo alcune nozioni che ci permetteranno di caratterizzare lo stato fisico degli interni stellari, quali l'equazione di stato e la ionizzazione del gas. Prima però riassumiamo le principali distribuzioni statistiche (classiche e quantistiche).

### 4.1 Distribuzioni statistiche

Senza entrare nei dettagli diamo le espressioni delle statistiche di un gas di particelle più usate.

**Maxwell-Boltzmann.** Nella trattazione classica del gas perfetto si fa uso della distribuzione statistica di Maxwell-Boltzmann secondo la quale la densità degli stati energetici di un sistema composto da  $N$  particelle è data da:

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-E_i/kT},$$

dove  $Z$  è la funzione di partizione,  $g_i$  è il peso statistico di un dato livello,  $E_i$  la sua energia,  $k$  la costante di Boltzmann e  $T$  la temperatura. Ovviamente  $\sum_i n_i = N$ .

Se andiamo a considerare il caso quantistico, allora esistono due tipi di distribuzioni, a seconda che le particelle costituenti il gas obbediscano o meno al Principio di Pauli.

**Fermi-Dirac.** Questa statistica è valida per particelle con spin semi-intero per le quali vale il Principio di Pauli, ad esempio gli elettroni. In questo caso la densità degli stati è:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{(E_i - \epsilon_F)/kT} + 1},$$

dove  $\epsilon_F = (h^2/8m)(3N/\pi V)^{2/3}$  è l'energia di Fermi. Di particolare rilevanza è il caso in cui  $T = 0$ . Si dimostra infatti che l'energia totale  $U$  è  $U =$

$(3/5)N\epsilon_F \neq 0$ , a differenza del caso classico.

**Bose-Einstein.** Questa statistica vale per particelle di spin intero che non risentono del Principio di Pauli, ad esempio i fotoni. In questo caso la densità degli stati è:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{E_i/kT} - 1}.$$

Nel caso si avesse a che fare con un gas di fotoni, allora  $E = h\nu$  e si dimostra che la distribuzione di energia corrisponde alla planckiana  $B_\nu(T)$ , e quindi per un campo di radiazione isotropo l'energia totale è:

$$U = \frac{4\pi}{c} B(T) = aT^4,$$

avendo integrato la  $B_\nu(T)$  su tutte le frequenze ( $B(T) = \int_\nu B_\nu(T) d\nu = (\sigma/\pi)T^4$ ).

## 4.2 Pressione ed equazione di stato

Abbiamo visto che il gas perfetto è una valida approssimazione fintanto che l'energia di interazione fra le particelle è trascurabile rispetto alla loro energia cinetica. E' noto inoltre che un gas isotropo incidente su una parete esercita una certa pressione su questa e le trasmette una determinata componente di impulso  $\Delta p = 2p \cos \theta$ , essendo  $\theta$  l'angolo formato dalla direzione di incidenza con la normale alla parete. In questo modo possiamo scrivere la pressione usando il flusso di particelle  $F(\theta, p) d\theta dp$  con angolo compreso fra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  e impulso  $p$  e  $p + dp$ :

$$P = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} F(\theta, p) \Delta p \, dp d\theta.$$

Un'espressione più conveniente del flusso è data da  $F(\theta, p) d\theta dp = n(\theta, p) v(p) \cos \theta \, d\theta dp$ , e quindi:

$$P = 2 \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} n(\theta, p) v(p) p \cos^2 \theta \, dp d\theta.$$

Assumendo l'isotropia del gas, si ha:

$$P = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} p v(p) n(p) \cos^2 \theta \sin \theta \, dp d\theta.$$

Ora, integrando sugli angoli si ha un fattore  $1/3$  e quindi la pressione del gas diventa:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty p v(p) n(p) \, dp.$$

Ricordiamo che se  $\epsilon(p)$  è l'energia cinetica traslazionale di una singola particella, allora l'energia totale sarà data dall'integrale:

$$U_K = \int_0^\infty \epsilon(p)n(p) dp.$$

Si possono ora distinguere vari casi a seconda delle condizioni del gas. In particolare per un gas non relativistico  $\epsilon = p^2/2m$  e quindi si trova  $P = (2/3)U$ . Per particelle relativistiche l'energia è  $\epsilon = pc$  e quindi  $P = (1/3)U$ . Nel caso di un gas di fotoni, non è difficile trovare la pressione di radiazione data da  $P_r = \frac{1}{3}aT^4$ .

Supponiamo di avere un gas di elettroni, e quindi dobbiamo usare la statistica di Fermi-Dirac, e vogliamo studiarne la pressione. Abbiamo tre casi separati.

**Gas totalmente degenere e non relativistico.** In questo caso tutti gli stati di momento minore di un certo  $p_0$  sono occupati e gli altri vuoti. Allora la densità degli stati per  $p < p_0$  è:

$$n_e = \frac{8\pi p_0^3}{3h^3},$$

e quindi la pressione è data da:

$$P_e = 1.004 \times 10^{13} \left( \frac{\rho}{\mu} \right)^{5/3},$$

ovvero una relazione di tipo politropico (cioè del tipo  $P \propto \rho^{(n+1)/n}$ ) di indice  $n = 3/2$ . Da notare che non dipende dalla temperatura.

**Gas totalmente degenere relativistico.** In questo caso la velocità degli elettroni da inserire nella relazione della pressione è:

$$v(p) = \frac{p}{m_0} \sqrt{1 + \left( \frac{p}{m_0 c} \right)^2}.$$

Svolgendo i calcoli si trova un'espressione della pressione data da:

$$P_e = 1.244 \times 10^{15} \left( \frac{\rho}{\mu} \right)^{4/3},$$

cioè ancora una relazione politropica di indice  $n = 3$  indipendente dalla temperatura.

**Gas parzialmente degenere non relativistico.** In questo caso l'espressione della pressione si complica e bisogna introdurre le cosiddette funzioni di Fermi che esprimono la parziale degenerazione del gas. Saltando i passaggi matematici enunciamo la pressione nel caso parzialmente degenere, cioè:

$$P = n^{5/3} \left( 1 + \frac{k^2 T^2}{n^{4/3}} + \dots \right),$$

dove ci siamo arrestati al primo termine.

In queste realzioni compare la quantità  $\mu$ , detta peso molecolare, che è legata alla densità della materia secondo la:

$$\mu = \frac{\rho}{nH},$$

dove  $H = 1/N_A$  è la massa in AMU dell'idrogeno. Secondo questa relazione quindi l'equazione di stato di un gas  $PV = nRT$ , si può scrivere in termini del peso molecolare, ricordando la definizione della costante dei gas  $R$  e considerando  $V = 1/\rho$  per unità di massa. Si ottiene:

$$P_g = \frac{k}{\mu H} \rho T.$$

E' anche possibile a questo punto distinguere fra ioni ed elettroni, ottenendo un'espressione per la pressione data da:

$$P_g = \left( \frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_e} \right) \frac{k}{H} \rho T.$$

### 4.3 Effetti della radiazione

Da quanto esposto sopra, l'energia interna per grammo di un gas (non degenere e non relativistico) è:

$$U(T) = \frac{3kT}{2\mu H}.$$

Nel caso sia presente anche la radiazione, bisogna tenere conto del contributo della  $P_r$ , e quindi l'energia diventa:

$$U(T) = aT^4V + \frac{3kT}{2\mu H}.$$

Ricordiamo che si definisce *calore specifico*  $c_\alpha$  la quantità di calore necessaria ad aumentare di 1 grado la temperatura, mantenendo il parametro  $\alpha$  costante:

$$c_\alpha = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_\alpha.$$

Esistono due tipi di calori specifici, quello a volume costante,  $c_V$  e quello a pressione costante,  $c_P$ . Il rapporto  $\gamma = c_P/c_V$  fornisce le relazioni adiabatiche:

$$TV^{\gamma-1} = \text{cost}, \quad PV^\gamma = \text{cost}, \quad P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cost}.$$



Se agisce anche la radiazione, allora la pressione che bisogna considerare è la somma di quella del gas,  $P_g$ , e quella di radiazione, cioè  $P = P_g + P_r$ . E' utile inoltre definire il rapporto  $\beta = P_g/P$  e calcolare il calore corrispondente:

$$dQ = \left(4aT^3V + \frac{3k}{2\mu H}\right) dT + \left(\frac{4aT^4}{3} + \frac{kT}{\mu HV}\right) dV.$$

Poichè adesso l'esponente  $\gamma$  non è più uguale per tutte le trasformazioni, si definiscono tre esponenti adiabatici  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  che sono dati da:

$$\Gamma_1 = \frac{32 - 24\beta - 3\beta^2}{24 - 21\beta}, \quad \Gamma_2 = \frac{32 - 24\beta - 3\beta^2}{24 - 18\beta - 3\beta^2}, \quad \Gamma_3 = \frac{32 - 27\beta}{24 - 21\beta}.$$

Dividendo  $dQ$  per  $T$  si ottiene la variazione infinitesima di entropia  $dS$ . Integrando, non è difficile mostrare che l'entropia per una miscela gas+radiazione è data da:

$$S = \text{cost} + \frac{k}{\mu H} \ln \left( \frac{T^{3/2}}{\rho} \right) + \frac{4a}{3} \frac{T^3}{\rho},$$

dove il primo termine dà l'entropia per grammo del gas mentre il secondo termine fornisce l'entropia per grammo della componente fotonica.

#### 4.3.1 Trasformazioni politropiche

Si definisce *trasformazione politropica* un cambiamento quasi statico tale che la quantità  $c = dQ/dT$  vari in maniera assegnata. Ad esempio il caso adiabatico è tale per cui  $c = 0$ , mentre quello isoterma è  $c \rightarrow \infty$ . Analogamente a quanto fatto in precedenza si introducono tre esponenti  $\Gamma'$  tali per cui:

$$\Gamma'_1 = \frac{d \ln P}{d \ln \rho}, \quad \frac{\Gamma'_2}{\Gamma'_2 - 1} = \frac{d \ln P}{d \ln T}, \quad \Gamma'_3 - 1 = \frac{d \ln T}{d \ln \rho}.$$

Esistono opportune relazioni tra gli esponenti  $\Gamma$  e  $\Gamma'$ , tra le quali noi enunciamo la più utile (la ritroveremo nella trattazione del trasporto convettivo):

$$\frac{\Gamma'_2}{\Gamma'_2 - 1} = \left(1 - \frac{c}{c_P}\right) \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1}.$$

## 4.4 Ionizzazione

Le variabili termodinamiche viste fin qui variano con il grado di ionizzazione che dipende da  $P$  e da  $T$ . Sia quindi  $g_s$  il peso statistico dello stato energetico  $s$  e consideriamo lo stato fondamentale avente  $s = 0$ , separati da un'energia  $\psi_s$ . In condizioni di equilibrio il numero di ionizzazioni al secondo è uguale a quello di ricombinazioni e la popolazione nei due stati energetici è descritta dall'equazione di Boltzmann:

$$\frac{n_s}{n_0} = \frac{g_s}{g_0} e^{-\psi_s/kT}.$$

Nel caso dell'eccitazione si ha a che fare con stati energetici discreti, mentre nel caso della ionizzazione gli elettroni hanno una distribuzione continua di energia.

Consideriamo dunque un atomo in uno stato  $r$  e  $r + 1$  separati dall'energia  $\chi_r + p_e^2/2m_e$ . Si ha quindi uno ione nello stato  $r + 1$  e un elettrone libero. Le densità degli ioni sono  $n_r$  e  $dn_{r+1}$ , mentre i pesi statistici sono  $g_r$  e  $g_{r+1}dg(p_e)$ , dove  $dg(p_e)$  è il peso statistico dell'elettrone libero. Introducendo il principio di Pauli, ovvero ponendo:

$$dg(p_e) = \frac{2\pi p_e^2 dV dp_e}{n_e h^3},$$

e integrando su tutti gli stati di momento, si ottiene:

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = \frac{g_{r+1}}{g_r} f_r(T) \quad \text{con} \quad f_r(T) = 2 \frac{2\pi m_e kT}{h^3} e^{-\chi_r/kT},$$

che è l'equazione di Saha, che descrive la popolazione di un atomo rispetto al grado di ionizzazione. Questo lo definiamo nel caso dell'idrogeno come:

$$x = \frac{n_1}{n_0 + n_1},$$

e quindi per l'H  $n_1 = n_e$ . Sostituendo nell'equazione di Saha la pressione elettronica al posto della densità, e notando che  $P_e = [x/(1+x)]P_g$ , si ha:

$$\frac{x^2}{1-x^2} = K_H.$$

## Capitolo 5

# Trasporto dell'energia

Il trasporto dell'energia nelle stelle avviene principalmente in tre modi:

- trasporto radiativo
- trasporto convettivo
- trasporto conduttivo.

Vediamo allora più in dettaglio le varie possibilità, tenendo presente che in condizioni particolari deve anche essere considerato il trasporto di energia dovuto ai neutrini, ma che in condizioni ordinarie può essere trascurabile in quanto essi sono molto debolmente interagenti con la materia.

### 5.1 Trasporto radiativo

Definiamo  $I(r, \theta)$  come l'intensità della radiazione a distanza  $r$  dal centro lungo la direzione inclinata dell'angolo  $\theta$  rispetto ad  $r$ . Sia  $U(r, \theta)d\omega$  la densità di energia uscente lungo  $\theta$  sotto l'angolo solido  $d\omega$ . Si ha quindi che  $I(r, \theta)d\omega = cU(r, \theta)d\omega$  e la densità di energia totale è l'integrale:

$$u(r) = \int_{\omega} U(r, \theta)d\omega.$$

Sia ora  $H(r)$  il flusso attraverso una superficie unitaria perpendicolare ad  $r$ : si dimostra che:

$$H(r) = \int_{\omega} I(r, \theta) \cos \theta d\omega.$$

Un campo di radiazione ha energia  $E = h\nu = pc$  e quindi la pressione di radiazione è (usando i risultati del capitolo precedente):

$$P_r = \frac{2\pi}{c} \int_0^\pi I(r, \theta) \cos^2 \theta \sin \theta d\theta.$$

Poiché il campo è isotropo, allora possiamo espandere  $I(r, \theta)$  in serie del  $\cos \theta$ , ovvero  $I = I_0 + I_1 \cos \theta + I_2 \cos^2 \theta + \dots$ . Siccome si nota che  $I_1 \ll I_0$ , non è difficile dimostrare che si ottengono le seguenti relazioni:

$$u(r) = \frac{4\pi}{c} I_0, \quad H(r) = \frac{4\pi}{3} I_1, \quad P_r = \frac{1}{3} u(r).$$

Il flusso di energia uscente  $j$  è:

$$j = 2\pi \int_0^{\pi/4} (I_0 + I_1 \cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi I_0 + \frac{2\pi}{3} I_1 \simeq \pi I_0.$$

Abbiamo visto nel §2, che nell'attraversare un tratto  $ds$  la radiazione si attenua della quantità  $dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds$ . Integrando si ottiene la ben nota relazione:

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) e^{-\tau_\nu},$$

essendo  $\tau_\nu = \int \kappa_\nu \rho ds$  la profondità ottica. La variazione di intensità può essere dovuta ad assorbimento vero o diffuso. Conviene allora introdurre i due coefficienti  $\kappa_{\nu,a}$  e  $\kappa_{\nu,s}$  per distinguere i due casi. Dunque  $\kappa_\nu = \kappa_{\nu,a} + \kappa_{\nu,s}$  e per l'assorbimento diffuso:

$$dI_\nu = - \int_{\omega'} \kappa_{\nu,s} \rho I_\nu p(\cos \theta') ds \frac{d\omega'}{4\pi},$$

dove  $p(\cos \theta')$  è la probabilità che un fotone venga diffuso in una direzione  $\theta'$  in quanto la diffusione non è un processo isotropo ed è detta funzione di fase. In totale quindi:

$$dI_\nu = -(\kappa_{\nu,a} + \kappa_{\nu,s}) \rho I_\nu ds.$$

Sia ora  $J_\nu(\theta)$  il coefficiente di emissione spontaneo e quindi l'intensità  $I_\nu$  viene aumentata della quantità  $dI_\nu = J_\nu \rho ds$ . Poiché  $dT/dr$  è molto piccolo, così pure il cammino libero medio  $l$ , allora i fotoni vengono assorbiti quasi alla stessa temperatura di dove vengono emessi. In condizioni di ETL (equilibrio termodinamico locale), la radiazione è quella di corpo nero e vale la legge di Kirchoff (energia assorbita = energia emessa). La quantità di energia assorbita è:

$$dE_\nu(\theta) = -\kappa_{\nu,a} \rho c U_\nu dx,$$

e poiché  $dm = \rho dx$ , allora assumendo l'isotropia della radiazione:

$$4\pi J_\nu = \kappa_{\nu,a} c U_\nu.$$

Poiché  $c U_\nu / 4\pi = B_\nu(T)$ , allora  $J_\nu = \kappa_{\nu,a} B_\nu(T)$ . Nel caso dell'emissione c'è quella spontanea e quella indotta. Si dimostra che:

$$\frac{\text{Spont}}{\text{Indot}} = 1 - e^{-h\nu/kT}, \quad \frac{\text{Indot}}{\text{Tot}} = e^{-h\nu/kT}.$$

In realtà bisogna considerare che anche per l'emissione si ha una componente  $J_{\nu,s}$  diffusa, data da:

$$J_{\nu,s} = \frac{\kappa_{\nu,s}}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} p(\theta, \nu; \theta', \nu') I_\nu(\theta', \nu') \sin \theta d\theta' d\nu'.$$

In questo modo dunque il coefficiente di emissione totale è  $J_\nu = J_{\nu,e} + J_{\nu,s}$ . L'equazione del trasporto radiativo si ottiene a questo punto imponendo la conservazione dell'energia. I vari termini che la compongono sono:

- $\frac{1}{\rho} \frac{dI_\nu}{dr} \cos^2 \theta d\omega = \frac{c}{\rho} \frac{dP_\nu}{dr}$ ;
- $(\kappa'_{\nu,a} + \kappa_{\nu,s}) I_\nu \cos \theta d\omega = (\kappa'_{\nu,a} + \kappa_{\nu,s}) H_\nu$ ;
- $\kappa'_{\nu,a} B_\nu(T) \cos \theta d\omega = 0$ ;
- l'integrale contenente la funzione di fase vale anch'esso zero perché la funzione  $p(\theta, \nu; \theta', \nu')$  è simmetrica.

In totale quindi, risolvendo rispetto ad  $H_\nu$  ed integrando su tutte le frequenze si ha:

$$H = -\frac{c}{3\rho} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa'_{\nu,a} + \kappa_{\nu,s}} \frac{dU_\nu}{dr} d\nu,$$

essendo  $P_r = (1/3)U_\nu$ . Poiché ora  $\frac{dU_\nu}{dr} = \frac{dU_\nu}{dT} dT dr$ , allora moltiplicando e dividendo per gli integrali:

$$\frac{d}{dT} \int U_\nu d\nu = \frac{dB(T)}{dT} = 4aT^4,$$

si ottiene:

$$L(r) = -4\pi r^2 \left( \frac{4ac}{3\kappa\rho} \right) T^3 \frac{dT}{dr},$$

ovvero l'equazione del trasporto radiativo. La quantità:

$$\kappa = \frac{\int \frac{dU_\nu}{dr} d\nu}{\int (\kappa'_{\nu,a} + \kappa_{\nu,s})^{-1} \frac{dU_\nu}{dr} d\nu},$$

detta opacità media di Rosseland.

L'opacità  $\kappa$  dipende dall'assorbimento, ovvero è caratterizzata dalla somma dei vari contributi, bound-bound, bound-free, free-free e scattering Thompson:

$$\kappa'_{\nu,a} = (\kappa_{bb} + \kappa_{bf} + \kappa_{ff})(1 - e^{-h\nu/kT}) + \kappa_s.$$

Nelle regioni con  $T < 10^4$  K sono importanti gli assorbimenti da parte di ioni negativi, assorbimenti molecolari a causa di fotodissociazione o assorbimento di bande, diffusione Rayleigh, eccitazione fotonica a stati di autoionizzazione. Nelle regioni con  $T > 10^9$  K sono dominanti i processi di creazione di coppie, la diffusione Compton, l'assorbimento nucleare, la diffusione fotone-fotone e processi fotoneutrini. A densità molto grandi ( $\rho > 10^4$  g/cm<sup>3</sup>) la conduzione da parte di elettroni degeneri diventa importante.

## 5.2 Trasporto convettivo

Se il gradiente di temperatura è solo radiativo, può verificarsi una situazione di instabilità e la generazione di moti convettivi. Consideriamo dunque un elemento di materia  $\delta m$  che subisce un aumento di temperatura tale che  $\Delta T = T_{\delta m}(r) - T_M(r) \geq 0$ . Supponiamo che gli elementi non abbiano il tempo di scambiarsi apprezzabili quantità di calore, ovvero il moto avviene adiabaticamente. Si parla in questo caso di *stabilità dinamica*. Secondo l'equazione di stato, la pressione del  $\delta m$  aumenterebbe, ma poiché l'elemento torna all'equilibrio immediatamente ( $v_s \gg v$ ), si può porre  $\Delta P = 0$ . Si verifica però un eccesso di densità  $\Delta \rho = \rho_{\delta m}(r) - \rho_M(r) < 0$ , ovvero l'elemento è più leggero del mezzo e comincia a salire per effetto delle forze di galleggiamento. Le fluttuazioni di temperatura sono accompagnate da moti radiali. Dopo un raggio  $r + \Delta r$  si ha:

$$\Delta \rho = \left[ \left( \frac{d\rho}{dr} \right)_{\delta m} - \left( \frac{d\rho}{dr} \right)_M \right] \Delta r.$$

Una variazione finita  $\Delta \rho$  fornisce la componente radiale della forza di galleggiamento  $K_r = -g\Delta \rho$ , come vedremo. Abbiamo quindi che:

- se  $\Delta \rho < 0$  allora  $K_r > 0$  e l'elemento è più leggero, quindi viene spinto verso l'alto e la situazione è **instabile**: una piccola perturbazione allontana l'elemento dalla sua posizione iniziale;
- se  $\Delta \rho > 0$  allora  $K_r < 0$  e l'elemento è più pesante, quindi viene spinto verso il basso e la situazione è **stabile**: la  $K_r$  lo riporta alla posizione iniziale.

Per quanto detto sopra quindi, una prima condizione per la stabilità è:

$$\left( \frac{d\rho}{dr} \right)_{\delta m} - \left( \frac{d\rho}{dr} \right)_M > 0 \quad \text{ovvero} \quad \left( \frac{d\rho}{dr} \right)_{\delta m} > \left( \frac{d\rho}{dr} \right)_M.$$

Tuttavia questa condizione è poco utile e difficile da valutare in quanto bisogna conoscere i gradienti. Dobbiamo inoltre considerare che agiscono gli scambi di energia. Supponiamo per semplicità che il moto sia adiabatico. É più comodo scrivere la condizione di cui sopra usando la temperatura e questo si fa utilizzando l'equazione di stato, secondo la quale:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} \frac{dP}{P} - \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \frac{dT}{T} + \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln \mu} \frac{d\mu}{\mu} = \chi_P \frac{dP}{P} - \chi_T \frac{dT}{T} + \chi_\mu \frac{d\mu}{\mu}.$$

Possiamo dunque riscrivere la condizione della stabilità moltiplicando tutti i termini per l'altezza di scala  $H_P = -(dr/d \ln P)$  e ricordando che  $\Delta P = 0$  e  $(\Delta \mu)_{\delta m} = 0$ :

$$\left( \frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_M < \left( \frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{\delta m} + \frac{\chi_\mu}{\chi_T} \left( \frac{d \ln \mu}{d \ln P} \right)_M,$$

cioè, avendo introdotto la quantità  $\nabla = \frac{d \ln T}{d \ln P}$ ,

$$\nabla_M < \nabla_{\delta m} + \frac{\chi_\mu}{\chi_T} \nabla_\mu.$$

Se l'energia è trasportata solo dalla radiazione allora  $\nabla_M = \nabla_R$  e poiché abbiamo supposto l'adiabaticità  $\nabla_{\delta m} = \nabla_A$ , ovvero ricordando i risultati del capitolo precedente:

$$\frac{1}{T} \left( \frac{dT}{dr} \right)_A = \left( \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \right) \frac{1}{P} \frac{dP}{dr}.$$

Abbiamo quindi:

$$\nabla_R < \nabla_A + \frac{\chi_\mu}{\chi_T} \nabla_\mu \quad \text{cond. di Ledoux.}$$

Nel caso in cui  $\nabla_\mu = 0$ , allora:

$$\nabla_R < \nabla_A \quad \text{cond. di Schwarzschild.}$$

Si nota quindi che il gradiente di  $\mu$  favorisce la stabilità. Ora, usando l'equazione di stato e ricordando l'espressione della pressione  $P = P_g + P_r$ , si ottiene:

$$\frac{\chi_\mu}{\chi_T} = \frac{\beta}{4 - 3\beta}.$$

Supponiamo ora che il gradiente radiativo sia instabile, cioè che non valgano più le condizioni di cui sopra. In questo caso ogni piccola perturbazione della temperatura provocherebbe uno spostamento finito dell'elemento lontano dalla posizione iniziale. Si instaura una condizione di equilibrio in cui sia la radiazione che la convezione contribuiscono al trasporto dell'energia. La vera temperatura quindi è intermedia tra quella radiativa e quella adiabatica e si dice che esiste un certo grado di superadiabaticità  $\Delta T/T$ . Per calcolarlo consideriamo una shell convettiva di spessore  $\Lambda$  e sia  $t$  il tempo medio di vita di un elemento. L'energia alla base della shell per unità di massa è  $(L(r) \cdot t)/\Delta M$ , essendo  $\Delta M$  la massa contenuta nella shell. Ora, dalle relazioni termodinamiche discusse in precedenza, sappiamo che  $c_V = \Delta U/\Delta T$ , da cui  $\Delta T = \Delta U/c_V$ . In questo modo il grado di superadiabaticità è dato da:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{L(r)t}{c_V T \Delta M}.$$

All'interno delle stelle si trova che questa quantità è  $\sim 10^{-8}$  e quindi trascurabile. Nelle regioni interne quindi il gradiente di temperatura è a tutti gli effetti descrivibile mediante quello adiabatico, mentre nelle regioni esterne bisogna valutare il vero gradiente di temperatura che si instaura. Questo si fa utilizzando la teoria della *mixing length*.

### 5.2.1 Teoria della mixing length

L'idea che sta alla base di questa teoria è che un elemento di materia convettiva di dimensioni tipiche  $\Lambda$  percorra in maniera adiabatica una certa distanza media  $\Lambda$  prima di dissolversi e disperdere la sua energia nel mezzo circostante. Il cammino medio  $\Lambda$  viene posto essere uguale a  $\Lambda = \alpha H_P$ , dove  $H_P$  è un'altezza di scala di pressione e  $\alpha$  è un parametro che vale circa 1.6. Dall'equazione dell'equilibrio idrostatico non è difficile mostrare che:

$$H_P = -\frac{dr}{d \ln P} = \frac{P}{g\rho},$$

essendo  $g$  la forza gravitazionale.

In presenza della convezione, se non ci sono sorgenti di energia (nucleare) né perdite, allora vale la relazione fra i gradienti:

$$\nabla_M > \nabla_{\delta m} > \nabla_A.$$

In realtà l'elemento perde calore per irraggiamento per cui parte del flusso trasportato nelle regioni convettive è dovuto alla radiazione. Conviene dunque porre  $F_R = F_c + F_r$ . Supponiamo che il flusso trasportato nella zona convettiva sia descrivibile come un flusso radiativo fittizio:

$$F_R = \frac{4acg}{3} \frac{T^4}{\kappa\rho} \nabla_R.$$

Nel procedere con il calcolo del flusso convettivo bisogna tenere presente che  $F_c = \Delta M \Delta Q$  e dopo opportune semplificazioni<sup>1</sup> si ottiene  $F_c = \rho v c_P \Delta T$ . Il problema si sposta dunque nel calcolo di  $v$ , dato che  $\Delta T = \frac{T\Lambda}{H_P} (\nabla_{\delta m} - \nabla_M)$ . Si trova un'espressione per il flusso data da:

$$F_c = \frac{c_P T \rho}{4\sqrt{2}} \sqrt{g\tilde{Q}} \frac{\Lambda^2}{H_P^{3/2}} (\nabla_M - \nabla_{\delta m})^{3/2}.$$

Un elemento convettivo in moto ascensionale è più caldo del mezzo e quindi tenderà a cederli calore. Se all'interno dell'elemento sono presenti sorgenti di energia, tale elemento può guadagnare calore invece di perderlo. Tuttavia i contributi di perdita/produzione di energia non contribuiscono al flusso osservato. Essi però contribuiscono in maniera indiretta all'efficienza della convezione.

Definiamo a questo punto l'efficienza della convezione come il rapporto tra l'eccesso di calore posseduto dall'elemento e la perdita di energia dello stesso. Ora, la perdita di energia avviene per irraggiamento e quindi viene spontaneo usare l'equazione del trasporto radiativo vista prima. Assumendo

---

<sup>1</sup>Si suppone di avere un flusso di energia fluente in un cilindro di base unitaria  $\sigma = 1 \text{ cm}^2$  e altezza  $\Delta s = v\Delta t$  in un intervallo di tempo unitario,  $\Delta t = 1$  secondo. Ovviamente  $\Delta M = \rho\Delta V = \rho\sigma\Delta s$ .



che la distanza percorsa dall'elemento prima di dissolversi sia  $\Lambda/2$ , e sia  $t = \Lambda/v$  il tempo di vita di tale elemento, si ha che l'energia irradiata è:

$$\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{\Delta T}{\Lambda/2} \frac{\Lambda}{v} A,$$

essendo  $A$  la superficie dell'elemento. L'eccesso di calore posseduto dall'elemento è dato dall'equazione  $c_P = \Delta Q/(\Delta T)_{\max}$ , da cui ponendo  $(\Delta T)_{\max} = 2\Delta T$ , si ha  $c_P \rho V 2\Delta T$ . Facendo il rapporto tra queste due quantità si ottiene l'efficienza della convezione:

$$\Gamma = \left( \frac{c_P}{12\sqrt{2}ac} \right) \left( \frac{\kappa g \sqrt{Q} \rho^{5/2} \Lambda}{\sqrt{P} T^3} \right) (\nabla_M - \nabla_{\delta m})^{1/2}.$$

Ricordando quanto vale  $F_R$ , si dimostra che vale la relazione tra i gradienti:

$$\nabla_R = \nabla_M + \frac{9}{4} \Gamma (\nabla_M - \nabla_{\delta m}).$$

Restano da determinare i due gradienti fra parentesi. Cerchiamo dunque un'altra relazione per  $\Gamma$ . Sappiamo dalle trasformazioni politropiche<sup>2</sup> che:

$$\nabla_{\delta m} = \frac{\nabla_A}{1 - c/c_p},$$

e che la variazione di  $Q$  nel tempo è:

$$\frac{dQ}{dt} = \Delta\epsilon - \Delta \left( \frac{\nabla \cdot \mathbf{F}}{\rho} \right),$$

dove  $\Delta\epsilon$  è l'energia prodotta e  $\Delta \left( \frac{\nabla \cdot \mathbf{F}}{\rho} \right)$  è quella persa. Ricordando la definizione dell'efficienza data in precedenza, ovvero nei nuovi termini il rapporto:

$$\Gamma = \frac{c_P \left( \frac{dT'}{dt} - \frac{dT}{dt} \right)}{\Delta \left( \frac{\nabla \cdot \mathbf{F}}{\rho} \right)},$$

e ponendo  $\eta = \Delta\epsilon/\Delta \left( \frac{\nabla \cdot \mathbf{F}}{\rho} \right)$ , non è difficile ottenere un'altra relazione tra i gradienti, cioè:

$$\frac{\Gamma}{1 - \eta} = \frac{\nabla_M - \nabla_{\delta m}}{\nabla_{\delta m} - \nabla_A},$$

che combinata con quella precedente permette di risolvere il problema.

Se non ci sono sorgenti di energia  $\eta = 0$  e quindi si può notare che:

---

<sup>2</sup>Si assume che

$$\nabla_A = \frac{d \ln T}{d \ln P} = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2},$$

e analogamente per  $\nabla_{\delta m}$ .

- se  $\Gamma \rightarrow \infty$  (grande efficienza), allora  $\nabla_{\delta m} \rightarrow \nabla_A$  e  $\nabla_M \rightarrow \nabla_{\delta m}$ . Ne viene che  $F_C/F \sim (\nabla_R - \nabla_A)/\nabla_R$ . Se  $\nabla_R > \nabla_A$  allora il rapporto tra i flussi tende a 1 (è il caso ad esempio delle zone più interne), se invece i due gradienti tendono a coincidere, allora il rapporto  $F_C/F \rightarrow 0$  e questo è valido nelle zone di transizione fra una zona stabile alla convezione e quella instabile;
- se  $\Gamma \rightarrow 0$  (piccola efficienza), allora  $\nabla_M, \nabla_{\delta m} \rightarrow \nabla_R$  e dunque  $F_C/F \rightarrow 0$ , e il flusso è radiativo.

Da notare il fatto che una grande efficienza non implica necessariamente un grande flusso convettivo.

Riscriviamo ora la relazione dell'efficienza come  $\nabla_R = \nabla_M + a_0\Gamma(\nabla_M - \nabla_{\delta m})$  dove  $9/4 = a_0$ ; definendo una nuova variabile  $\zeta$  come:

$$\zeta = \frac{\nabla_R - \nabla_M}{\nabla_R - \nabla_A},$$

si può arrivare a dimostrare che:

$$\zeta^{1/3} + B\zeta^{2/3} + a_0B^2\zeta - a_0B^2 = 0,$$

detta equazione cubica della mixing length, nella quale:

$$B = \left[ \left( \frac{A^2}{a_0} \right) (\nabla_R - \nabla_A) \right]^{1/3}.$$

$A$  è il fattore che contiene tutti i parametri, quali temperatura, pressione, densità, opacità eccetera. La scelta di  $a_0$  è legata alla geometria degli elementi convettivi.

La teoria appena esposta è applicabile solo se le velocità convettive sono piccole rispetto a quella del suono, in quanto vale la condizione di equilibrio di pressione tra gli elementi convettivi in moto e il mezzo circostante. In particolare, per poter trattare il trasporto dell'energia con la teoria della mixing length, deve essere soddisfatta la condizione:

$$\frac{v}{v_s} \ll 1,$$

essendo  $v_s$  la velocità del suono.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Infatti, se indichiamo con  $t_P \sim \Lambda/v_s$  il tempo necessario per ristabilire l'equilibrio di pressione e  $t \sim \Lambda/v$  è la vita media dell'elemento, allora deve essere  $t_P < t$ , ovvero:

$$\frac{t_P}{t} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Lambda}{v_s} \frac{v}{\Lambda} \ll 1,$$

cioè  $v/v_s \ll 1$ .

### 5.3 Trasporto conduttivo

Il trasporto conduttivo diventa importante quando si è in presenza di gas di elettroni degeneri: infatti a causa della degenerazione elettronica, la maggior parte degli stati di piccolo momento  $p$  sono occupati, e dunque gli elettroni sono forzati a stati di momento via via crescenti, il che rende il cammino libero medio degli elettroni molto lungo. La relazione che fornisce il flusso conduttivo è:

$$F_{cond} = -\frac{4ac\kappa}{3\rho}T^3\frac{dT}{dr},$$

dove  $\kappa = 1/\kappa_r + 1/\kappa_c$ .

Concludiamo facendo un'importante osservazione: mentre il gradiente  $\nabla_R$  è semplicemente la derivata spaziale che connette  $P$  e  $T$  in due shells di massa vicine, il gradiente  $\nabla_A$  rappresenta la variazione termica dello stesso elemento di massa durante la sua compressione adiabatica. Solo in casi speciali, come in precedenza considerato, essi hanno lo stesso valore: in questo caso si parla di *stratificazione adiabatica*.

Inoltre il  $\nabla_R$  ha anche il senso del gradiente che ristabilisce l'equilibrio idrostatico in uno strato radiativo, in un punto avente gli stessi valori di  $P, T, L$  ed  $M$ .



## Capitolo 6

# Sorgenti di energia

Tra le sorgenti di energia di una stella, quelle che predominano sono quella gravitazionale, nucleare e la produzione di neutrini. Vediamo brevemente di caratterizzare queste tre sorgenti.

### 6.1 Energia gravitazionale

Nel caso del Sole il tasso di produzione di energia per unità di massa è dato dal rapporto  $L/M \sim 2$ . Per una stella della sequenza principale si ha  $0.1 \leq \epsilon \leq 1000$ . La contrazione di una sfera di gas autogravitante da dimensioni infinite ad una configurazione finale di raggio  $R$ , libera energia gravitazionale. Vediamo di valutare quanto vale.

L'energia potenziale gravitazionale è:

$$\Omega = -q \frac{GM^2}{R},$$

dove  $q$  è una quantità adimensionale che per le stella della MS vale circa 1.5. Per un politropo (poi si chiarirà questo concetto) di indice  $n$ ,  $\Omega$  vale:

$$\Omega = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R}.$$

#### 6.1.1 Teorema del Viriale

Nel §3 abbiamo affrontato una trattazione alquanto semplificata del Teorema del Viriale. Vediamo ora di descriverlo più precisamente, soffermandoci soprattutto sui risultati che ne deriveranno.

Consideriamo dunque l'equazione del moto di un elemento di fluido, gas nel nostro caso:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{F},$$

dove  $\mathbf{P}$  è il tensore pressione e il termine  $\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{P}$  rappresenta la forza per unità di massa dovuta al gradiente di pressione. Moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{r}$  e integrando, si ottiene:

$$\int_M \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \, dM = - \int_V \mathbf{r} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}) \, dV + \int_M \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} \, dM.$$

Ora, il primo termine si può scrivere come  $\frac{1}{2} \ddot{I} - 2K_M$ , dove  $I$  è il momento di inerzia e  $K_M$  è l'energia cinetica. Il secondo termine, manipolandolo opportunamente, risulta essere uguale a

$$\oint_S (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}_S) d\vec{A} - 3 \int_V \bar{P} \, dV,$$

mentre l'ultimo termine si usa indicare con Virial. In totale quindi abbiamo:

$$\frac{1}{2} \ddot{I} = 2K_M + 3 \int_V \bar{P} \, dV - 3P_S V + \text{Virial},$$

avendo assunto  $P_S$  costante. Da questa relazione si vede che se  $\text{Virial} = \Omega$  e  $\bar{P} = (2/3)u$ , allora:

$$\frac{1}{2} \ddot{I} = 2K_M + 2U + \Omega.$$

Supponiamo ora che  $P$  e  $u$  siano legata dalla relazione più generale  $P = (\gamma - 1)u$ . Poniamo a zero l'energia cinetica e quella rotazionale; facendo i calcoli non è difficile dimostrare che:

$$E = U + \Omega = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} \Omega.$$

Sostituendo a  $\Omega$  la sua espressione, si nota che per  $R \rightarrow \infty$  l'energia  $E$  tende a 0, mentre è  $E < 0$  per  $R$  finito. Dalla ben nota relazione  $-dE/dt = L(r)$  che fornisce la luminosità della stella, si può ricavare il tempo di scala  $t_{\text{contr}}$  che rappresenta il tempo necessario ad una stella di contrarsi dall'infinito. Si distinguono tre casi a seconda del valore di  $\gamma$ :

- $\gamma > 4/3$ : in questo caso  $\Delta E < 0$  così pure  $\Delta \Omega$ . Se  $\gamma = 5/3$  allora  $\Delta \mathcal{E} = (\Delta \Omega)/2$ , come abbiamo già incontrato;
- $\gamma = 4/3$ : in questo caso  $\Delta E = 0$ , indipendentemente da  $\Delta \Omega$ . Dunque  $\Delta U = -\Delta \Omega$ ; se però  $\gamma$  scende a  $4/3$ , si vede che la stella collassa: infatti  $\Omega$  cresce fino a 0, quindi la somma di  $K_M$  e  $\frac{1}{2} \ddot{I}$  deve diventare molto piccola. Tuttavia sappiamo che  $K_M \simeq 0$ , per cui si deve avere che  $\frac{1}{2} \ddot{I} \ll 0$ , cioè avviene il collasso dinamico;
- $\gamma < 4/3$ : in questo caso l'energia è positiva se  $\Delta \Omega < 0$ . Si dice allora che la stella tende a rimanere dispersa all'infinito.

## 6.2 Energia nucleare

Il principio che sta alla base delle reazioni nucleari è la conversione di massa in energia, secondo la famosa relazione:

$$\Delta E = c^2 \Delta M.$$

Il  $\Delta M$  è da intendere in questo modo: consideriamo ad esempio la fusione di quattro atomi di idrogeno per formarne uno di elio. Non è difficile vedere che la somma delle masse di 4 idrogeni è diversa dalla massa dell'elio, differisce di una certa quantità  $\Delta M$ . La deficienza in massa è un altro aspetto del fatto che i nuclei coinvolti nella reazione hanno diverse energie di legame. Definiamo dunque l'energia di legame  $E_B$ , di un nucleo con  $A$  nucleoni (protoni + neutroni) e  $A - Z$  neutroni, come:

$$E_B = [M_p Z + (A - Z)M_n - M_N]c^2 > 0.$$

Essa è da intendere come l'energia necessaria per separare i nucleoni ma è anche l'energia guadagnata se essi vengono uniti dall'infinito. La  $E_B$  ha un massimo per  $40 < A < 80$ , detta regione del ferro, e diminuisce ai lati. L'energia cinetica disponibile per le particelle è quella data dal moto termico. Tuttavia essa è molto più piccola (di circa un fattore 1000) dell'energia coulombiana, dunque la probabilità che avvenga una reazione è molto bassa. Esiste però un meccanismo quantistico, l'effetto tunnel, secondo il quale la particella ha una probabilità non nulla di attraversare il potenziale coulombiano. Si capisce quindi che una maggiore probabilità di penetrazione significa maggiore probabilità di reazione.

Solitamente una generica reazione si indica con:

$$a + X \rightarrow Y + b,$$

oppure nella forma abbreviata  $X(a, b)Y$ . L'energia prodotta da questa reazione è data dal  $Q$ -valore:

$$Q = (M_a + M_X - M_Y - M_b)c^2.$$

Per conoscere  $Q$  bisogna sapere quanto vale la sezione d'urto della reazione, ovvero il rapporto tra il numero di reazioni per il nucleo  $X$  nell'unità di tempo e il numero di particelle incidenti su  $\text{cm}^2$  e secondo. Il numero di reazioni al secondo si dice velocità della reazione e vale:

$$r = \int_0^\infty \int_0^\infty dN_1(v_1) dN_2(v_2) v \sigma(v).$$

Per  $\rho < 10^{14} \text{g cm}^{-3}$  le distribuzioni  $dN_i$  corrispondono a quelle maxwelliane delle velocità, viste in precedenza. Definiamo inoltre la velocità relativa come  $v = v_1 - v_2$  e la velocità del baricentro come  $(m_1 + m_2)V = m_1 v_1 + m_2 v_2$ . In

questo modo, indichiamo anche la massa ridotta  $m = (m_1 m_2) / (m_1 + m_2)$  e dunque la velocità di reazione è:

$$r = N_1 N_2 < \sigma v >,$$

dove

$$< \sigma v > = \frac{(kT)^{-3/2}}{2\pi} \int_0^\infty e^{-E/kT} v \sigma(v) \sqrt{E} dE,$$

avendo integrato sulla velocità del baricentro.  $< \sigma v >$  è la probabilità che le due particelle subiscano la reazione per unità di tempo. Dunque, la probabilità che una coppia reagisca in un volume  $V$  è  $< \sigma v > / V$ , e se ci sono  $N$  particelle allora:

$$r = \frac{N^2}{2} < \sigma v >,$$

per unità di volume. La vita media del nucleo  $X$  sarà data da  $t_X = 1 / (N_a < \sigma v >)$ , e per la particella incidente  $a$ ,  $t_a = 1 / (N_X < \sigma v >)$ . La quantità di energia liberata per grammo e per secondo è:

$$\epsilon = N_0^2 \rho \frac{X_a X_X}{A_a A_X} < \sigma v > Q.$$

Se le particelle sono identiche, bisogna moltiplicare per il fattore  $1/2$ .

Consideriamo ora un nucleo e sia  $E_{\min}$  l'energia richiesta per portare un nucleone dallo stato fondamentale all'infinito con velocità nulla (avente cioè  $E = 0$ ). Se  $E < E_{\min}$ , allora il nucleone viene ricatturato dal nucleo (prevale l'attrazione coulombiana) e l'emissione di particelle (radiazione elettromagnetica) è trascurabile. I livelli energetici con  $E < E_{\min}$  si dicono **stazionari** ed hanno una vita media piuttosto lunga. Dalla relazione  $\Gamma = \hbar / \tau$ , essendo  $\Gamma$  la larghezza del livello, si nota che gli stati stazionari hanno una piccola larghezza. Essi corrispondono a stati legati, dunque sono discreti.

La particella abbiamo detto che può comunque, sotto certe condizioni, attraversare la buca di potenziale per effetto tunnel: ci possono quindi essere stati **quasi-stazionari** aventi  $E > E_{\min}$ . Essi hanno vite medie corte e dunque grande  $\Gamma$ . Quando però  $E > E_{\max}$ , la larghezza diventa confrontabile con quella tra due livelli vicini e la loro sovrapposizione dà luogo al continuo. È importante notare che anche se l'energia non è quella degli stati quasi-stazionari o compresa tra due di essi, la probabilità che avvenga la reazione aumenta con la probabilità di penetrazione. Quando però l'energia coincide con quella di uno stato quasi-stazionario, possono aver luogo le *risonanze*: sono dei picchi ad energie ben definite  $E_{\text{ris}}$  che fanno aumentare la sezione d'urto del processo. La dipendenza dell'energia dalla  $\sigma$  contiene un fattore di risonanza dato da:

$$\xi(E) = \frac{\text{costante}}{(E - E_{\text{ris}})^2 + (\Gamma/2)^2}.$$



Per  $E = E_{\text{ris}}$  la  $\sigma$  ha il valore massimo dato da  $\pi\lambda^2 = \pi(\hbar/p)^2 = \pi[\hbar/(2mE)^{1/2}]^2$ . Secondo la Meccanica Quantistica le particelle in moto con momento  $p$  si vedono non come un preciso punto ma come ‘sbrodolate’ attorno a  $\lambda$ . La sezione d’urto dunque può essere scritta come:

$$\sigma(E) \sim \pi\lambda^2 P_0(E)\xi(E),$$

dove  $P_0$  è legato alla probabilità di transizione nella barriera, ovvero:

$$P_0(E) = p_0\sqrt{E}e^{-2\pi\eta}, \quad \text{con} \quad \eta = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar\sqrt{E}}.$$

Il fattore  $p_0$  può essere posto uguale a  $p_0 = E_{\text{coul}}^{1/2}(r_0) \exp[(32mZ_1 Z_2 e^2 r_0 / \hbar^2)^{1/2}]$ . Per una singola risonanza  $\xi \rightarrow 1$ . In ogni caso  $\sigma \sim \lambda^2 P_0$  e conglobando tutte le proprietà nucleari in  $S(E)$ , si ottiene:

$$\sigma(E) = S(E)E^{-1}e^{-2\pi\eta}.$$

È difficile misurare  $S(E)$  perché essendo la sezione d’urto molto piccola serve più energia, circa un fattore 10 rispetto ai casi astrofisici. Inoltre per basse energie bisogna estrapolarla dai dati.

Consideriamo ora la quantità  $\langle \sigma v \rangle$  vista in precedenza. Applicando le relazioni fin qui trovate, non è difficile dimostrare che un’espressione più corretta di  $\langle \sigma v \rangle$  è:

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{2^{3/2}}{(m\pi)^{1/2}(kT)^{3/2}} \int_0^\infty e^{-E/kT - \tilde{\eta}/\sqrt{E}} dE,$$

con  $\tilde{\eta} = 2\pi\eta\sqrt{E}$ . Bisogna tuttavia specificare  $S(E)$ . Per reazioni non risonanti si può porre  $S(E) \sim S_0 = \text{costante}$ . Si porta quindi fuori dall’integrale e resta qualcosa del tipo

$$J = \int e^{f(E)} dE, \quad \text{con} \quad f(E) = -\frac{E}{kT} - \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{E}}.$$

L’integrando dunque ha valori apprezzabili solo attorno ad un massimo, che si trova imponendo  $f' = 0$ , ovvero  $E_0 = (\frac{1}{2}\tilde{\eta}kT)^{2/3}$ . Questo massimo si dice **picco di Gamow** e il relativo intervallo è la cosiddetta **finestra di Gamow**. Ponendo  $\tau = 3E_0/kT$  ed espandendo  $f(E)$  in serie di  $\tau$  attorno a  $E_0$ , non è difficile dimostrare che:

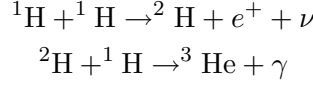
$$\langle \sigma v \rangle \sim \tau^2 e^{-\tau}.$$

### 6.2.1 Bruciamento dell’idrogeno

La fusione di 4  $^1\text{H}$  per formare un  $^4\text{He}$  produce 26.731 MeV che corrispondono a circa lo 0.71% della massa iniziale. Questo valore è circa 10 volte l’energia liberata da qualsiasi altra reazione nucleare.

Ci sono due modi per bruciare l'idrogeno: le catene protone-protone (P-P) o le catene del CNO.

**Catene P-P.** La catena P-P è in pratica la fusione diretta ma non contemporanea di 4 protoni per formare un nucleo di He. La catena principale è:



Dopo due cicli, avviene la reazione  ${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + 2 {}^1\text{H}$ , detta **catena PP1**. Essa produce 26.20 MeV di energia.

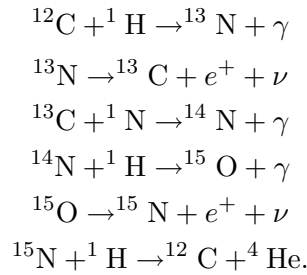
Un  ${}^3\text{He}$  può unirsi ad un  ${}^4\text{He}$  e dare origine alle catene **PP2 e PP3**. Queste producono 25.67 MeV e 19.20 MeV rispettivamente. La frequenza relativa dipende dalla composizione chimica, temperatura, pressione e densità.

Per  $T_6 \sim 8$  domina la catena PP1, per la quale si calcola il tasso di generazione di energia. Per  $T_7 \simeq 1$  dominano prima la PP2 e poi la PP3. Per temperature più grandi si sarà un equilibrio di abbondanze stabilito per i nuclei coinvolti e si può prendere la  $\epsilon_{PP}$  proporzionale a quella della PP1, correggendola con un fattore  $\psi$  che tiene conto dell'addizionale produzione di energia delle PP2 e PP3 se c'è abbastanza  ${}^4\text{He}$ . In totale dunque:

$$\epsilon_{PP} = 2.38 \times 10^6 \psi f_{11} g_{11} \rho X_1^2 T_6^{-2/3} e^{-33.80/T_6^{1/3}},$$

dove  $f = e^{E_D/kT}$  è il fattore di schermaggio<sup>1</sup>,  $E_D = Z_1 Z_2 e^2 / r_D$  e  $g_{11}$  è una funzione di  $T_6$ .

**Ciclo CNO.** Il ciclo del CNO consiste nella fusione indiretta di quattro protoni per formare un  ${}^4\text{He}$ . Esso richiede la presenza degli isotopi del C, N ed O. Si capisce quindi che il ciclo CNO può avvenire per temperature superiori di quelle necessarie alle catene P-P. Il ciclo è:



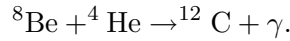
A questo punto il  ${}^{15}\text{N} + {}^1\text{H}$  può reagire in modo diverso dando luogo ( $10^4$  volte meno probabile) ad un'altra catena il cui prodotto finale è  ${}^{14}\text{N} + {}^4\text{He}$  che può essere riutilizzato per la reazione  ${}^{14}\text{N} + {}^1\text{H}$  che è la più lenta. Questa essenzialmente controlla il tempo di completamento del ciclo CNO ed agisce come un collo di bottiglia.

L'energia liberata dal processo è 24.97 MeV. Il bruciamento dell'idrogeno avviene per temperature comprese tra 8 e 50  $T_6$  K, poi si esaurisce.

<sup>1</sup>Si veda in §1.9 la trattazione della schermatura di Debye.

### 6.2.2 Bruciamento dell'elio

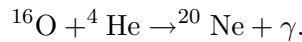
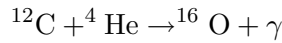
Le reazioni del bruciamento dell'elio consistono nella fusione di  ${}^4\text{He}$  per formare  ${}^{12}\text{C}$ ,  ${}^{16}\text{O}$  etc. Questo richiede temperature  $T_8 > 1$ . La trasformazione di 3 nuclei di He per dare un  ${}^{12}\text{C}$  è chiamata *reazione*  $3\alpha$ . Il ciclo è:



Dopo circa  $10^{-6}$  secondi il  ${}^8\text{Be}$  decade in altre  $2\alpha$ . L'energia liberata per  ${}^{12}\text{C}$  è 7.275 MeV. Il tasso di produzione della reazione  $3\alpha$  dipende fortemente dalla temperatura, infatti:

$$\epsilon_{3\alpha} = 5.09 \times 10^{11} f_{3\alpha} \rho^2 X_4^3 T_8^{-3} e^{-43.2/T_8}.$$

Una volta che sono stati costruiti abbastanza  ${}^{12}\text{C}$ , si hanno le reazioni:



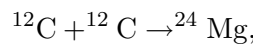
Nei tipici interni stellari il  ${}^{20}\text{Ne}$  è raro. L'energia liberata dalla reazione  ${}^{12}\text{C}(\alpha, \gamma){}^{16}\text{O}$  è di 7.162 MeV, ovvero  $E_{12,\alpha} = 4.320 \times 10^{17}$  erg  $\text{g}^{-1}$  per  ${}^{16}\text{O}$  prodotto. L'energia della  ${}^{16}\text{O}(\alpha, \gamma){}^{20}\text{Ne}$  libera 4.73 MeV.

Riassumendo, durante il bruciamento dell'elio le reazioni appena viste avvengono simultaneamente, pertanto l'energia totale è data dalla somma dei vari contributi, ossia:

$$\epsilon_{\text{He}} = \epsilon_{3\alpha} + \epsilon_{12,\alpha} + \epsilon_{16,\alpha}.$$

### 6.2.3 Bruciamento del carbonio, etc.

La temperatura necessaria ad innescare il bruciamento del carbonio è di circa  $T_8 \simeq 5 \div 10$  K. La reazione



è complessa perché il  ${}^{24}\text{Mg}$  decade in modi diversi, a seconda delle condizioni fisiche. Tuttavia tra i diversi modi di decadimento l'emissione  ${}^{24}\text{Mg} + \gamma$  è altamente improbabile.

Dopo il bruciamento del carbonio avviene quello dell'ossigeno per temperature  $T_9 > 1$ . Come nel caso del carbonio la reazione può procedere in diversi canali. Per queste temperature bisogna anche tener presenti gli effetti della fotodissociazione dei nuclei debolmente legati: il campo di radiazione contiene fotoni con energia sufficiente a rompere un nucleo attraverso

il decadimento  $\alpha$ . Come per la fotoionizzazione, per descrivere il fenomeno si usa un analogo dell'equazione di Saha, ovvero:

$$\frac{n_i n_j}{n_{ij}} \simeq T^{3/2} e^{-Q/kT},$$

essendo  $Q$  il potenziale di fotodissociazione. Da notare il fatto che la fotodisintegrazione è endotermica: le particelle emesse vengono subito ricatturate, ovvero seguono la reazione:

$$X_{ij} \leftrightarrow X_i + X_j.$$

La reazione  $X_i + X_j \rightarrow X_{jk}$  è però endotermica. Un esempio di ciò è la disintegrazione del Ne:

$$^{20}\text{Ne} + \gamma \rightarrow ^{16}\text{O} + \alpha,$$

per la quale il  $Q$ -valore è  $Q = -4.73$  MeV. Il nucleo  $\alpha$  emesso reagisce con un altro  $^{20}\text{Ne}$  e forma il  $^{24}\text{Mg} + \gamma$ . Il risultato netto è la reazione:

$$2^{20}\text{Ne} + \gamma \rightarrow ^{16}\text{O} + ^{24}\text{Mg} + \gamma,$$

con  $Q = 4.583$  MeV.

Per  $T_9 \sim 3$  avviene la fotodisintegrazione del  $^{28}\text{Si}$ , mentre per  $T_9 > 5$  quella del  $^{56}\text{Fe}$ . Non si va oltre perché da questo punto in poi le reazioni saranno endotermiche, ovvero servirà energia per fondere nuclei più pesanti di quelli del ferro, energia che la stella non possiede ormai più.

### 6.3 Energia dei neutrini

Il neutrino è una particella che fu introdotta nella trattazione dei decadimenti per ripristinare le leggi di conservazione dell'energia e del momento. Infatti seguendo semplici ragionamenti si era visto che nel decadimento  $\beta$  la reazione

$$n \rightarrow p + e^-,$$

non conservava il momento di spin (tutte le particelle hanno spin  $1/2$ , per cui la loro somma deve fare 0 e non  $1/2$ ) e nemmeno la quantità di moto. Dunque la conservazione è ripristinata introducendo una particella con carica nulla e spin semintero la cui massa è piccolissima, possibilmente nulla. Inoltre, come è stato ampiamente dimostrato, ogni particella ha la sua controparte, ovvero una particella con le stesse proprietà di quella originale ma carica opposta, detta *antiparticella*. Quando particella e antiparticella entrano in collisione esse si annichilano ed emettono fotoni altamente energetici. In alcuni casi gli stessi fotoni possono interagire e dare origine ad una coppia particella-antiparticella.

In quest'ottica dunque, anche il neutrino deve avere la sua controparte, ovvero l'antineutrino. Applicando le considerazioni di cui sopra, la conservazione dell'energia e dei momenti, assieme a quella del numero barionico e leptonico, è ristabilita, pur di assumere che:

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e,$$

essendo  $\tilde{\nu}_e$  l'antineutrino.

L'emissione dei neutrini può avvenire in diversi modi, alcuni meno probabili degli altri. Brevemente essi sono:

- **Processi URCA.** Questi processi avvengono secondo lo schema:

$$\begin{aligned} e^- + (Z, A) &\rightarrow (Z-1, A) + \nu \\ (Z-1, A) &\rightarrow (Z, A) + e^- + \tilde{\nu}. \end{aligned}$$

Il ciclo non varia la composizione della stella, ma produce una coppia  $(\nu, \tilde{\nu})$  con conseguente liberazione di energia. La velocità della prima reazione cresce molto con la temperatura, ma la seconda non mostra una forte dipendenza da  $T$ . Pertanto il numero di processi URCA raggiunge un valore massimo al crescere di  $T$ .

- **Foto-neutrini.** Il processo è schematizzato secondo la:

$$\gamma + e^- \rightarrow e^- + \nu_e + \tilde{\nu}_e$$

In sostanza è un analogo dello scattering Compton, soltanto che al posto del fotone viene prodotta la coppia  $(\nu, \tilde{\nu})$ . La sezione d'urto per produzione di  $\nu$  è circa  $10^{-19}$  volte più piccola di quella dello scattering Compton. Bisogna inoltre tener presente che in condizioni degli interni stellari ordinarie, i neutrini prodotti hanno cammini liberi medi molto lunghi e fuoriescono facilmente dalla stella.

- **Neutrini di coppie.** Per temperature maggiori di  $10^9$  K i fotoni raggiungono energie maggiori di  $2m_e c^2$  e producono così coppie  $(e^+, e^-)$ . Esse si annichilano dando origine, come già detto, ad altri fotoni. Una certa frazione di questi fotoni possono dare origine alla reazione:

$$\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^- \rightarrow \nu_e + \tilde{\nu}_e.$$

Tuttavia si osserva che la reazione di cui sopra avviene circa  $10^{19}$  volte meno che la reazione 'ordinaria'.

- **Neutrini di plasma.** All'interno delle stelle i fotoni non si muovono nel vuoto, ma in un mezzo ionizzato. Nel §1.10 si è visto che in queste condizioni è come se i fotoni si spostassero con velocità minori di quelle della luce. In questo caso l'onda elettromagnetica che ne deriva ha un eccesso di energia che rende possibile la formazione della coppia  $(\nu, \tilde{\nu})$ , nella quale le due antiparticelle si muovono in direzioni opposte.

- **Neutrini di brehmsstrahlung.** Quando un elettrone libero interagisce con il campo coulombiano creato da un nucleo, viene emesso un fotone (sono le transizioni free-free viste in precedenza). A volte al posto del fotone può essere emessa la solita coppia  $(\nu, \bar{\nu})$ . Questo processo è importante per basse temperature ed alte densità.

Riassumendo, possiamo dire che le densità e le temperature per le quali la produzione di energia da parte di neutrini diventa importante sono rispettivamente  $10^2 < \rho < 10^9 \text{ g cm}^{-3}$  e  $10^8 < T < 5 \times 10^9 \text{ K}$ .

## Capitolo 7

# Politropi

Ci occupiamo ora di descrivere la struttura di una stella. Un semplice modello fisico è il *politropo* secondo il quale la pressione negli interni stellari è descritta da una legge del tipo:

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}.$$

Non è difficile vedere che questi modelli non sono artifici puramente matematici, ma trovano applicazione in numerosi casi fisici. Infatti proviamo a pensare ad un gas misto a radiazione, il quale è descrivibile mediante la solita relazione:

$$P = \frac{1}{3}aT^4 + \frac{k}{\mu H}\rho T.$$

Raccogliendo a fattor comune  $T$  e risolvendo rispetto a  $P$  si trova che questa è una legge di tipo politropico con indice 3, ovvero:  $P = K\rho^{4/3}$ . Abbiamo visto nel §4.2 che per un gas di elettroni totalmente degenere non relativistico la pressione aveva un andamento del tipo  $P \propto \rho^{5/3}$ , ovvero una relazione politropica con indice  $n = 3/2$ . Per un gas relativistico inoltre  $P \propto \rho^{4/3}$  cioè una relazione politropica con  $n = 3$ . Vediamo dunque di caratterizzare per bene questo modello fisico.

Assumiamo che la densità  $\rho$  sia descritta da una funzione  $\phi$  dipendente dalla coordinata radiale  $r$ :

$$\rho = \lambda\phi^n,$$

dove  $\lambda$  è un parametro definito dalla  $\phi$ . Al centro infatti possiamo dire che  $\rho_c = \lambda$  e quindi  $\phi = 1$ . Inserendo questa relazione in quella per la pressione, otteniamo:

$$P = K\lambda^{1+\frac{1}{n}}\phi^{n+1}.$$

Imponiamo a questo punto l'equilibrio idrostatico, secondo il quale  $dP/dr = -\rho g$  e dunque, derivando la precedente espressione, si ottiene:

$$(n+1)K\lambda^{1/n}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = -4\pi G\lambda\phi^n.$$

Sostituiamo ora ad  $r$  la variabile adimensionale  $\xi = r/\alpha$ , dove:

$$\alpha = \sqrt{\frac{(n+1)K\lambda^{(1-n)/n}}{4\pi G}}.$$

Si ottiene quindi un'equazione in  $\xi$ , ovvero:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\phi}{d\xi} \right) = -\phi^n,$$

detta *equazione di Lane-Emden*. Questa equazione governa la distribuzione di densità all'interno di una stella, al variare dell'indice politropico  $n$ . Le soluzioni di tale equazione sono note solo per pochi valori di  $n$ . I tre casi principali sono:

- per  $n = 0$  si ha, come già detto  $\phi^0 = 1$  e dunque si ottiene la densità centrale  $\rho_c$ . La soluzione dell'equazione precedente è:

$$\phi(\xi) = 1 - \frac{1}{6}\xi^2,$$

che corrisponde ad una sfera omogenea di gas;

- per  $n = 3$  la soluzione è:

$$\phi(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi},$$

la quale non ci dice niente dal punto di vista fisico;

- per  $n = 5$  la soluzione è:

$$\phi(\xi) = \frac{1}{(1 + \xi^2/3)^{1/2}},$$

ovvero notiamo che la soluzione non si annulla mai per  $r \neq \infty$ . I politropi con  $n \geq 5$  hanno dunque raggio infinito.

Per altri valori di  $n$  si dimostra (per via numerica) che le soluzioni decrescono continuamente dal centro verso l'esterno, finchè ad un certo  $\xi_1$  intersecano l'asse  $\xi$ . Risulta quindi evidente che l'annullarsi di  $\phi$  ad un certo  $\xi_1$  significa che in questo punto  $P = 0$  e dunque è possibile ricondurre  $\xi_1$  al raggio  $R$  della stella.

La massa  $M$  contenuta all'interno del raggio  $\xi_1$  è dunque:

$$M(\xi_1) = \frac{(n+1)^{3/2}}{\sqrt{4\pi G^{3/2}}} \frac{P_c^{3/2}}{\rho_c^2} \left( -\xi^2 \frac{d\phi}{d\xi} \right)_{\xi_1}.$$

Da qui non è difficile ricavare il raggio  $R$  dato da  $\xi_1 \alpha$ . Fissati  $M$  ed  $R$  si determinano  $K$  e  $\lambda$  e la struttura della stella è presto calcolata. Le relazioni



precedenti permettono inoltre di trovare i valori di pressione e densità al centro, dalle quali si deriva una relazione massa-raggio. Infatti la relazione politropica  $P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$  è valida dappertutto, e quindi anche al centro. Si dimostra che:

$$K \propto M^{(n-1)/n} R^{(3-n)/n},$$

da cui si nota che per  $n = 3$  scompare la dipendenza dal raggio. È interessante a questo punto andare a calcolare il rapporto tra la densità media e quella centrale. Esso vale:

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_c} = -\frac{3}{\xi_1} \left( \frac{d\phi}{d\xi} \right)_{\xi_1}.$$

Si nota che per  $n = 0$ ,  $\bar{\rho} \rightarrow \rho_c$ , mentre per  $n = 5$ ,  $\rho_c/\bar{\rho} \rightarrow \infty$ , ovvero politropi con  $n = 5$  sono infinitamente concentrati verso il centro. Tramite questo rapporto è possibile calcolare la pressione centrale e da questa, usando l'equazione di stato, derivare la temperatura al centro:

$$T_c = 4.6 \times 10^6 \mu\beta \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{2/3} \rho^{1/3}.$$

Le stelle della sequenza principale hanno  $n = 3$ .

Soffermiamoci ora sull'energia potenziale gravitazionale dei politropi. Abbiamo che essa si può scrivere come:

$$d\Omega = d \left( \frac{GM_r^2}{2r} \right) - \frac{GM_r^2}{2r^2} dr.$$

Usando l'equazione dell'equilibrio idrostatico sostituiamo  $dr$  con  $dP$ . Ne viene che, utilizzando la relazione politropica  $P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$ , si ottiene:

$$\frac{dP}{\rho} = (n+1)d \left( \frac{P}{\rho} \right).$$

Dal teorema del viriale, assumendo che in superficie  $P = 0$ , si ricava:

$$d\Omega + \frac{3P}{\rho} dM_r - 3d(P4\pi r^3/3) = 0,$$

che risolta rispetto a  $(P/\rho)dM_r$  e sostituito nella precedente, porge:

$$\Omega = -\frac{3}{5-n} \frac{GM_r^2}{R}.$$

Notiamo che per  $n = 5$  l'energia potenziale di un politropo è infinita, come risulta anche dal rapporto  $\rho_c/\bar{\rho}$ .

Per un politropo con  $n = 3$  il rapporto  $\beta = P_g/P \simeq$  costante e nella relazione massa-raggio la dipendenza da quest'ultimo scompare. Abbiamo che

$K \propto M^{2/3}$  e ricordando la definizione di  $K$  ottenuta mediante l'equazione di stato, si trova:

$$\frac{1 - \beta}{\beta^4} = 0.002979 \mu^4 \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^2.$$

Da qui si vede che per  $M \rightarrow \infty$ ,  $\beta \rightarrow 0$ , ovvero la pressione diventa dominante al crescere della massa.

## Capitolo 8

# Evoluzione stellare

A questo punto siamo pronti per cominciare a descrivere le varie fasi che caratterizzano l'evoluzione delle stelle. Possiamo dividere la vita di una stella in tre fasi principali: fase di pre-sequenza, di sequenza e di post-sequenza, a seconda della posizione che la stella occupa nel diagramma H-R. Le fasi di pre-sequenza e di sequenza principale sono pressoché uguali per quasi tutte le stelle, mentre solamente nella fase di post-sequenza dovremo andare a considerare diversi stadi evolutivi a seconda della massa della stella in questione. Distingueremo pertanto stelle di piccola massa da quelle di massa intermedia, fino ad arrivare alle stelle massicce.

### 8.1 Fase di pre-sequenza

Questa fase la possiamo dividere in altre tre fasi distinte: formazione, collasso e contrazione.

#### 8.1.1 Formazione

Consideriamo una nube molecolare di  $1 M_{\odot}$  avente inizialmente  $T \simeq 10$  K e  $\rho < 10^{-19}$  g cm<sup>-3</sup>. Quando la densità raggiunge questo limite, allora inizia il collasso, che però può avvenire solamente se è verificata la condizione:

$$|\Omega| > U_T,$$

essendo  $U_T$  l'energia interna del gas. Questo si traduce in due condizioni, una per la massa e una per il raggio, ovvero la nube può collassare se:

$$R < R_J = 0.4 \frac{GH\mu}{k} \frac{M}{T}, \quad M > M_J = \left( 2.5 \frac{kT}{H\mu G} \right)^{3/2} \left( \frac{4\pi\rho}{3} \right)^{-1/2}.$$

$R_J$  e  $M_J$  si dicono raggio di Jeans e massa di Jeans rispettivamente. Poiché però si osservano masse molto minori della  $M_J$ , si deduce che deve esistere un processo di **frammentazione** che spezza la nube originaria in tanti altri

frammenti. Questo è suggerito anche dal fatto che in base alla dinamica galattica, il momento angolare della nube deve diminuire di un fattore  $10^7$ , compatibilmente con la rotazione delle protostelle osservate. In pratica quello che avviene è che la frammentazione distribuisce il momento angolare a ciascun frammento, il quale si spezza ancora e dà origine ad altri frammenti. Il processo procede in questo modo finché i valori del momento angolare diminuiscono, e si stabilizzano su quelli osservati.

Durante questa fase, la densità aumenta ma la temperatura resta costante in quanto l'energia interna è convertita in radiazione, ovvero la nube è trasparente rispetto alla propria radiazione.

### 8.1.2 Collasso

La frammentazione continua finché la nube diventa opaca, ovvero quando la densità raggiunge il valore di circa  $10^{-14} \text{ g cm}^{-3}$ . Fintantoché la nube è trasparente alla radiazione, si dice che il collasso è *isotermo*. Con l'aumento della densità, le regioni centrali collassano più velocemente e si instaura un gradiente di pressione che va a contrastare la gravità. Le regioni centrali diventano opache e l'energia gravitazionale liberata va a riscaldare il gas. A questo punto il tempo del collasso diventa confrontabile con quello necessario alla radiazione per diffondere e il collasso diventa *adiabatico*.

Il gradiente di pressione aumenta fino a fermare la forza di gravità: si crea una sfera in quasi equilibrio idrostatico. Quando la temperatura sale a 2000 K, l'idrogeno molecolare ( $\text{H}_2$ ) si dissocia e assorbe l'energia gravitazionale. Il collasso del core continua fino a  $\rho \sim 10^{-2} \text{ g cm}^{-3}$  e  $T \simeq 3 \times 10^4 \text{ K}$ . Si forma un nucleo in equilibrio idrostatico avente massa di circa  $0.1 M_{\text{iniz}}$ .

Quando il materiale che cade sul nucleo raggiunge velocità superiori a quella del suono, allora al bordo del core si forma un fronte d'urto ed inizia la *fase di accrescimento*: esso rallenta la materia in caduta che va a sistemarsi sul nucleo in quasi equilibrio idrostatico. L'energia cinetica posseduta è convertita in calore e viene irradiata. Essa emerge dalla superficie come radiazione infrarossa e la temperatura superficiale cresce da 100 K a 3000 K, quando tutto l'involuppo è caduto verso il nucleo. Il tempo speso dalla protostella in questa fase è di circa  $10^5 \div 10^6$  anni.

### 8.1.3 Contrazione in pre-sequenza

Quando la temperatura supera i  $10^5 \text{ K}$  l'idrogeno è ionizzato e la pressione contrasta la gravità, formando una struttura in equilibrio idrostatico. La luminosità è data dalla contrazione gravitazionale che avviene in una serie di stati, ognuno in equilibrio idrostatico.

Le stelle prima passano per una fase in cui sono totalmente convettive, durante la quale la stella viene omogeneizzata. Contraendosi, la temperatura interna aumenta mentre l'opacità diminuisce. A causa di ciò la stella diventa

instabile alla convezione e si instaura un core radiativo. In stelle massicce il core radiativo si forma presto e i tempi di contrazione sono brevi. Stelle con  $M \sim 0.3M_\odot$  arrivano in sequenza principale totalmente convettive e in questi casi il tempo  $t_K$  non è più un buon indicatore.

Quando il 75% della massa è nel core radiativo, la perdita di energia è controllata dall'opacità media della regione radiativa. La stella si sposta verso il luogo del diagramma H-R a luminosità debolmente crescenti ed alte  $T_{eff}$ . A questo punto si innesca il bruciamento dell'idrogeno nel centro e la stella entra in sequenza principale.

Prima di procedere con la descrizione della MS, soffermiamoci brevemente sul luogo del diagramma H-R dove sostano le stelle totalmente convettive: la linea di Hayashi.

#### 8.1.4 La linea di Hayashi

Come appena detto, la linea di Hayashi (HL) è il luogo delle stelle totalmente convettive: per ogni massa e composizione chimica esiste una HL diversa. Le HL sono situate sulla destra del diagramma H-R per  $T_{eff} \simeq 3000 \div 5000$  K. Queste sono rette molto ripide, quasi verticali e il loro significato sta nella separazione tra zone permesse, alla loro sinistra, e zone vietate, alla loro destra.

La HL è il percorso di una stella appena formata e di una molto evoluta: in sostanza si può dire che la vita di una stella è confinata tra la HL e la sequenza principale (MS).

La luminosità delle stelle convettive è  $L_C = K'_C(\nabla - \nabla_A)^{3/2}$ . A differenza di quella radiativa essa non è completamente determinata, perché bisogna conoscere  $\nabla$  con grande precisione. Questo non è possibile in quanto quello che si può sapere è la differenza  $(\nabla - \nabla_A)^{3/2}$ , che in alcuni casi può essere anche molto piccola ( $\sim 10^{-7}$ ) quando la convezione è efficiente. Possiamo però fare questo ragionamento: assumiamo che l'atmosfera di una stella sulla HL sia governata da una legge del tipo  $\kappa = \kappa_0 P^a T^b$ , mentre la struttura interna è regolata da una relazione politropica  $P = CT^{1+n}$ . Queste due equazioni definiscono due rette nel diagramma H-R, l'intersezione delle quali costituisce la HL. Si trova che essa ha un'equazione del tipo:

$$\log T_{eff} = A \log L + B \log M + \text{cost.}$$

Dalla relazione  $L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$ , si nota che ogni HL è individuata da un certo  $R$ , dati  $M$  e  $\mu$ .

Per  $T \leq 5000$  K l'assorbimento nell'atmosfera stellare è costituito principalmente dallo ione  $H^-$ . La quantità  $\partial L / \partial T_{eff} = 1/A$  fornisce la pendenza della HL, e poiché  $A \ll 1$  si nota come sia molto ripida. Inoltre dalla  $B = \partial T_{eff} / \partial \log M$ , si nota come al crescere della massa, la HL si sposta verso sinistra.

Abbiamo detto che per ogni  $L$  esiste una differente HL. Poniamoci dunque la domanda: esiste una luminosità minima  $L_{\min}$  delle stelle sulla HL oltre la quale esse diventano radiative? Per rispondere a questa domanda assumiamo che il gradiente radiativo  $\nabla_R$  sia descritto da una legge del tipo  $\nabla_R \sim T^{-3.5}$  ed abbia un minimo al centro, mentre aumenti verso l'esterno. Con queste posizioni, possiamo dire che il nucleo è il primo punto della stella totalmente convettiva dove  $\nabla_R \sim \nabla_A$  se  $L < L_{\min}$ . Si dimostra che  $L_{\min} \propto M^{4.4}$ . Se per un certo valore di  $M$ , la  $L_{\min}$  coincide con la luminosità sulla sequenza principale, allora la HL di questa massa interseca la MS: esiste dunque un limite superiore per la massa di una stella, sotto il quale le stelle restano totalmente convettive anche in MS. Si trova che questa massa limite vale  $0.3M_{\odot}$ . Stelle con  $M > 0.3M_{\odot}$  sviluppano in MS un nucleo radiativo: questi sono modelli che hanno un core radiativo crescente e un involucro convettivo decrescente.

Stelle alla sinistra della HL hanno dunque un core radiativo, il che significa che  $\bar{\nabla} < \nabla_A$ , dove si è assunto  $\nabla_R = \bar{\nabla}$ . Quelle sulla HL hanno  $\bar{\nabla} = \nabla_A$ , mentre alla destra  $\bar{\nabla} > \nabla_A$ . Quest'ultima condizione significa che esiste una stratificazione superadiabatica della temperatura. Un piccolo eccesso di  $\bar{\nabla}$  rispetto a  $\nabla_A$  fa trasportare qualunque luminosità nelle regioni interne. Le conseguenze saranno grandi flussi convettivi con velocità molto elevate che raffreddano l'interno fino a ristabilire la condizione  $\bar{\nabla} < \nabla_A$ . Ovvero, le stelle sulla destra della HL, dopo un brevissimo tempo sono riportate alla sinistra.

Per quanto detto fin qui, la HL non può essere superata a  $T_{eff}$  minori e pertanto essa è il uogo più freddo del diagramma H-R.

## 8.2 Sequenza principale

Come abbiamo già detto, la sequenza principale è il luogo del diagramma H-R dove le reazioni nucleari forniscono l'intera luminosità irradiata dalla stella. È la fase più lunga e stabile della vita di una stella e a seconda della massa, le reazioni termonucleari avvengono in maniera diversa.

Ad esempio stelle con  $M > 2M_{\odot}$  bruciano l'idrogeno con il ciclo CNO: esse hanno un nucleo convettivo, nel quale  $\nabla_A$  diminuisce fino al valore  $\nabla_A \sim 0.25$ , ed un esteso involucro esterno radiativo.

Stelle con  $1.5M_{\odot} < M < 2M_{\odot}$  hanno un nucleo convettivo, una zona radiativa intermedia ed un esteso involucro convettivo.

Stelle con  $M < 1.1M_{\odot}$  bruciano l'idrogeno con le catene P-P: esse hanno un nucleo radiativo ed un involucro convettivo. Da notare il fatto che la zona convettiva diventa più profonda al diminuire della massa. Stelle con massa inferiore non raggiungono una temperatura tale da far reagire l'elio, per cui esse fermano la loro evoluzione alle catene PP1 e PP2.

La parte inferiore della sequenza principale si estende fino a  $0.08 M_{\odot}$  e il

tempo di vita sulla MS è regolato da una relazione del tipo  $t \sim (M/M_\odot)^{-3}$ . Oltre questo limite il nucleo non raggiunge le condizioni necessarie ad innescare il bruciamento dell'idrogeno: il gas diventa degenere prima di acquistare la temperatura necessaria al bruciamento dell'H. L'energia gravitazionale liberata va in energia cinetica degli elettroni. Questa energia, assieme a quella termica degli ioni e a quella gravitazionale, viene spesa a controbilanciare l'energia irradiata. La stella si contrae (poco a causa degli elettroni degeneri) e si raffredda.

Durante la fase di sequenza principale, l'equazione di stato è prevalentemente quella di un gas perfetto di ioni ed elettroni. La struttura della stella cambia durante questo periodo perché stelle di alta MS bruciano l'H uniformemente (esse hanno nuclei convettivi), mentre stelle di bassa MS bruciano l'idrogeno preferibilmente nelle zone centrali (hanno un nucleo radiativo). La conversione di H in He diminuisce anche l'opacità negli strati interni, il che tende a produrre un lento aumento di  $L$ . Durante la fase di bruciamento dell'idrogeno centrale, una stella dunque tende ad evolversi verso  $L$  crescenti e  $T_{eff}$  decrescenti.

### 8.3 Fase di post-sequenza

Vediamo a questo punto come evolve una stella dopo che l'idrogeno nel centro si sia esaurito. Distingueremo pertanto l'evoluzione in post-sequenza di stelle con massa diversa, partendo da quelle di piccola massa. Possiamo però già dare alcune informazioni generali su questa fase: quando l'idrogeno nel centro si esaurisce, esso si accende in una shell che si muove verso l'esterno, lasciando un nucleo di elio in contrazione. Gli strati sopra la shell si espandono fino a che la  $T_{eff} \sim 3500$  K. Raggiungono a questo punto la HL in quanto presentano una regione esterna convettiva. Quando  $T_c \sim 10^8$  K si accende il bruciamento dell'elio nel centro. Questo è possibile solo per stelle con  $M > 0.5M_\odot$ . Per stelle con  $M < 2.2M_\odot$  esso avviene in condizioni di gas degenere.

#### 8.3.1 Stelle di piccola massa

Queste stelle hanno una MS caratterizzata dall'assenza della convezione, pertanto l'idrogeno nel nucleo si esaurisce presto. Si accende in una shell che si sposta verso l'esterno e man mano che procede diventa sottile. La stella allora raggiunge la HL e il bordo della regione convettiva penetra. La temperatura nella shell diventa alta abbastanza da far sostituire il CNO alle catene PP. L'involuppo convettivo penetra portando in superficie i prodotti della CNO: avviene cioè quello che si chiama il **I dredge up**.

Quando il nucleo degenere ha una massa di  $M \sim 0.45 \div 0.55M_\odot$  si accende il bruciamento dell'elio, che come abbiamo visto è molto sensibile alla temperatura, ma non alla pressione  $P_e$ . Il gas è degenere e le parti

centrali si riscaldano ma non avviene l'esplosione (non c'è la dipendenza da  $P_e$ ) e il nucleo si riscalda. In questa fase la luminosità cresce fino a raggiungere  $10^{11} L_\odot$ , ma resta confinata all'interno perché l'energia liberata è spesa a riscaldare il nucleo e a rimuovere la degenerazione.

La sdegenerazione fa raffreddare il nucleo e si instaura la convezione interna che però rimane separata da quella esterna. Durante questa fase la stella ha una doppia sorgente di energia: l'elio nel nucleo e l'idrogeno in shell. La stella raggiunge l'*horizontal branch* (HB) e la HL. Quando l'elio è esaurito nel centro il bruciamento si sposta in una shell, lasciando un nucleo di C + O inerte. La convezione ripenetra fino agli strati sovrastanti la shell di H: a causa dell'espansione la shell si spegne e la convezione penetra e porta in superficie i prodotti della CNO. Avviene il **II dredge up**.

La struttura della stella è quindi: nucleo degenero di C + O, shell bruciante He, strato sottile di He, shell bruciante H e un esteso involucro convettivo. Quando la shell di He è sottile c'è l'instabilità e avviene il ciclo del **III dredge up**. Il piccolo spessore della shell di elio causa l'instabilità termica che induce il runaway termico: c'è un aumento improvviso di produzione di energia e compare una zona convettiva sopra la shell di He. Gli strati sovrastanti si espandono e raffreddano l'interno tanto da far scomparire la zona convettiva e spegnere la shell bruciante H. La convezione esterna dunque penetra e porta in superficie i prodotti delle reazioni nucleari. Il nucleo in contrazione fa aumentare la temperatura così da riaccendere la shell di H e la convezione recede. Ma quali sono le cause di questo processo?

Consideriamo una shell di spessore  $D$  confinata tra  $r_0$  e  $r = r_0 + D$ . Se  $D$  è piccolo, una perturbazione nella produzione di energia induce l'espansione della shell tale che  $dr = dD$  e quindi:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dD}{D} = -\frac{r}{D} \frac{dr}{r}.$$

Poiché  $P \propto r^{-4}$ , allora  $dP/P = -4dr/r$ , e il calore specifico gravotermico<sup>1</sup> diventa:

$$c^* = c_P \left( 1 - \nabla_A \frac{4\delta}{4\alpha - r/D} \right).$$

Poiché vale la relazione:

$$c^* \frac{dT}{dt} = d\epsilon,$$

---

<sup>1</sup>Il calore specifico gravotermico nasce dal fatto che in una stella dinamicamente stabile, tra presenza di effetti non adiabatici porta alla possibilità di instabilità vibrazionale e secolare. Quest'ultima è proprio la causa dell'instabilità termica della shell di elio. Infatti si può dimostrare che in risposta ad una piccola quantità di calore  $dq$  nella sfera centrale, la stella si espande un poco aumentando il raggio di  $dr$ . Sulla base delle relazioni di omologia e del primo principio della termodinamica, è possibile dimostrare che:

$$dq = du + Pdv = c_P T_c (\theta_c - \nabla_A p_c) = c^* T_c \theta_c,$$

dove  $p_c = (4\delta)/(4\alpha - d\rho/\rho)\theta_c$  e  $\theta_c$  rappresenta una perturbazione della temperatura.



si vede che se  $c^* > 0$  la shell è instabile perché un aumento di energia  $d\epsilon > 0$  comporta un aumento di temperatura e quindi ancora produzione di energia. Dunque se  $r/D$  è grande ( $D$  è piccolo) la shell è instabile e si parla pertanto di *pulso termico*. Dunque lo spessore ridotto della shell di He induce l'instabilità e dunque il pulso termico.

Al crescere della luminosità si sviluppa un vento stellare che riduce la massa ai prodotti della nucleosintesi interna, lasciando in superficie una grande abbondanza di carbonio. Si creano quelle che si chiamano *carbon stars*.

Con il crescere ulteriore della luminosità l'ampiezza delle oscillazioni aumenta finché una parte della materia raggiunge velocità  $v > v_{fuga}$ : resta uno strato di H che copre le shell brucianti e il nucleo. L'involuppo esterno viene espulso dalla stella e si forma una *nebulosa planetaria*. La stella al centro della nebulosa consuma l'H e l'He e resta con il nucleo di C-O. A causa della degenerazione la contrazione del nucleo non procede oltre e la stella si raffredda. Si forma una *nana bianca* la quale ha un tempo di vita molto lungo.

### 8.3.2 Stelle di massa intermedia

Si definiscono stelle di massa intermedia quelle stelle per le quali le reazioni nucleari procedono fino al bruciamento del carbonio nel nucleo in condizioni di alta degenerazione, causando la distruzione della stella.

Sulla MS queste stelle bruciano l'idrogeno nel nucleo convettivo con il ciclo CNO, pertanto c'è un consumo uniforme. Quando l'abbondanza del carbonio  $X_C \sim 0.05$  la contrazione gravitazionale accende il bruciamento dell'H in shell in spostamento verso l'esterno. La materia sopra la shell la attraversa, viene processata e arricchisce il nucleo. La stella si sposta verso  $L$  e  $T_{eff}$  decrescenti: è una fase veloce che difficilmente si osserva e viene usualmente chiamata *gap di Hertzsprung*. A questo punto la stella raggiunge la HL, sale a luminosità crescenti e l'involuppo penetra fino a costituire il 50% della massa intera. Quando l'elio nel nucleo raggiunge circa  $0.75 M_\odot$  si innesca il suo bruciamento. La struttura della stella è: nucleo convettivo centrale dove l'He è trasformato in C + O, una regione ricca di He, shell bruciante H (con il CNO) e un involucro esterno con abbondanze di H e He originali.

Al progredire del bruciamento dell'He nel nucleo, le regioni centrali si espandono così che la temperatura diminuisce. L'involuppo esterno si contrae e la stella scende lungo la HL allontanandosi a  $T_{eff}$  crescenti. La stella a questo punto staziona a completare il bruciamento dell'elio, per cui la produzione di energia passa dalla shell di H al nucleo di He. Man mano che l'He si esaurisce il nucleo si contrae aumentando la temperatura. C'è un'espansione dell'involuppo fino a raggiungere ancora una volta la HL, finché si

accende l'elio in shell e la stella risale sulla HL. Ora la struttura è: nucleo di C + O degeneri, shell di He, strato di He, shell di He, inviluppo convettivo.

Come in precedenza avviene il III dredge up, il cui numero di cicli aumenta con il crescere della massa. Se il nucleo di C + O ha una massa di circa  $1.4 M_{\odot}$ , allora avviene la deflagrazione del carbonio che causa la distruzione della stella e la creazione di una *supernova di tipo I-1/2*.

### 8.3.3 Stelle quasi massicce e massicce

**Stelle quasi massicce.** Si definiscono stelle quasi massicce quelle per cui l'accensione del carbonio nel centro avviene in condizioni non degeneri, ma subito dopo sì. La massa minima richiesta per l'accensione del C è circa  $1.06 M_{\odot}$ . Dopo del carbonio inizia il bruciamento del  $^{22}\text{Ne}$  in condizioni di alta degenerazione. Sopra il nucleo si forma una shell di C che non brucia. Quando  $\rho \sim 2.5 \times 10^{10} \text{ g cm}^{-3}$ , c'è l'accensione dell'ossigeno esplosiva. Si produce una *supernova di tipo II* che libera  $2 \times 10^{51}$  ergs. Resta una *stella di neutroni*.

**Stelle massicce.** Si definiscono stelle massicce quelle stelle le cui reazioni nucleari procedono in condizioni non degeneri fino al  $^{56}\text{Fe}$ . Esse hanno  $M > 12 M_{\odot}$ : la massa contenuta nei nuclei convettivi è molto grande, e in questi casi domina la pressione di radiazione  $P_r$ . Come abbiamo detto in precedenza, per le alte temperature che caratterizzano queste stelle, l'opacità  $\kappa$  è essenzialmente quella dello scattering Thompson  $\kappa_{Th}$ .

In queste stelle la perdita di massa per vento stellare raggiunge valori molto elevati (circa  $10^{-7} \div 10^{-4} M_{\odot}$  all'anno). Anche le velocità di questi venti sono molto alte: ad esempio nelle stelle OB si osservano strati superficiale in espansione con  $v \sim 2000 \text{ km/s}$  (quando  $v_{fuga} \sim 600 \text{ km/s}$ ). Fra le stelle dei primi tipi spettrali, la maggiore perdita osservata è nelle *Wolf-Rayet stars*. Esse si possono dividere in quattro categorie, a seconda della composizione chimica:

- WLN: prive di H e ricche di N
- WNE: prive di H ma dominate da N
- WC: assenza totale di H e dominate dal C
- WO: assenza totale di H e dominate dall'O

Dopo l'esaurimento dell'H nel nucleo, questo diventa radiativo e il bruciamento si sposta in una shell convettiva. Il gas nelle regioni interne non è degeneri. Il nucleo è in contrazione e quando  $T \sim 10^8 \text{ K}$  si accende l'He e si instaura la convezione centrale. Esaurito l'He resta il nucleo di C + O che contraendosi, accende il bruciamento del C in condizioni convettive. Per  $T \sim 1.75 \times 10^9 \text{ K}$  brucia il Ne. L'ossigeno brucia a  $2.3 \times 10^9 \text{ K}$ , mentre il Si a  $T \sim 4 \times 10^9 \text{ K}$ . In questo modo viene costruito un nucleo di Fe + Ni di circa

$1M_{\odot}$  circondato da shell brucianti Si, O, C e He. Alla fine la temperatura raggiunge i  $7 \times 10^9$  K e la densità centrale è  $\rho_c \sim 10^8$  g cm<sup>-3</sup>.

Come avevamo predetto, ora diventano importanti le perdite di energia per neutrini e in queste condizioni il gas diventa degenere. Si ha l'instaurarsi della fotodissociazione del Fe in nuclei di He + protoni + neutroni: la  $P_g$  non sale a sufficienza per compensare la crescente forza gravitazionale. In un tempo che varia sulla scala dei secondi, la densità sale a  $\rho \sim 10^{14}$  g cm<sup>-3</sup> e la temperatura a  $T \sim 3 \times 10^{10}$  K. Gli elettroni vengono catturati dai nuclei.

Si raggiunge così una situazione in cui la materia è fatta di neutroni liberi. Sotto queste condizioni, il nucleo con una massa iniziale di  $1.6M_{\odot}$  è collassato in un raggio  $R \sim 10^6$  cm: si è così formata una *stella di neutroni*.

Alla superficie del nucleo si forma un'onda d'urto che passa attraverso le shell brucianti aumentandone la temperatura. Quando essa raggiunge la superficie della stella, ha una velocità di circa 10000 km/s e si forma una *supernova di tipo II*, che libera  $10^{51}$  ergs di energia.



## Appendice A

# Distribuzioni statistiche

### A.1 Maxwell-Boltzmann

Consideriamo  $N$  particelle ognuna delle quali ha a disposizione  $E_1, E_2, \dots$  stati di energia. In un certo istante le particelle sono distribuite in modo tale che  $n_1$  particelle hanno energia  $E_1$ , e così via. Ovviamente dovrà essere  $\sum_i n_i = N$ . Sia ora  $g_i$  la probabilità intrinseca di occupazione del livello  $i$ -esimo. In questo caso il numero di modi possibili di combinare  $n_i$  particelle in  $E_i$  livelli energetici è:

$$P = \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}.$$

La partizione più probabile è data ovviamente da  $dP = 0$ . Per far questo portiamo tutto in scala logaritmica e assumiamo che per grandi  $n$  valga l'approssimazione  $\ln n! \simeq n \ln n - n$ . Introducendo i moltiplicatori di Lagrange  $\eta$  e  $\beta$  si ottiene:

$$\sum_i \left( \ln \frac{n_i}{g_i} + \eta + \beta E_i \right) dn_i = 0.$$

Banalmente, risolvendo rispetto a  $n_i$ , si ha:

$$n_i = g_i e^{-\eta - \beta E_i}.$$

Dalla condizione  $\sum_i n_i = N$  non è difficile dimostrare che  $e^{-\eta} = N/Z$  dove  $Z$  è detta funzione di partizione e vale  $\sum_i g_i e^{-\beta E_i}$ . Allora:

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta E_i}.$$

L'energia totale è  $U = \sum_i n_i E_i$ , per cui sostituendo l'espressione trovata per  $n_i$  è facile ottenere:

$$U = -N \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}.$$

In generale  $\beta = 1/kT$ . Per un gas perfetto la somma in  $Z$  deve essere sostituita da un integrale e quindi:

$$Z = \int g(E)e^{-E/kT}dE,$$

dove  $g(E)dE \propto E^{1/2}dE$ .