# Elementi di Cristallografia Geometrica

Mauro Prencipe

Torino - Marzo 2007

# Indice

# Elenco dei Simboli

| | |
|---|---|
| $\Lambda^R$ | reticolo su uno spazio affine |
| $\Lambda^{R*}$ | reticolo reciproco/duale |
| $\mathcal{C}$ | campo dei numeri complessi |
| $E^*$ | duale di uno spazio vettoriale $E$ |
| $End(E)$ | insieme degli endomorfismi di $E$ |
| $GA(E)$ | gruppo delle affinità |
| $GA_\circ(E)$ | gruppo delle affinità aventi un *punto fisso* (gruppo centroaffine) |
| $G_B$ | gruppo spaziale |
| $G_{0B}$ | gruppo puntuale cristallografico |
| $GL(E)$ | gruppo degli automorfismi di $E$ |
| $GL_n(\mathcal{R})$ | gruppo delle matrici invertibili di ordine $n$, a valori in $\mathcal{R}$ |
| $\mathcal{G}_p$ | insieme di simmetrie puntuali |
| $\mathcal{G}_P$ | gruppo di simmetrie puntuali di un insieme di punti |
| $\mathcal{G}_R$ | gruppo delle simmetrie di un reticolo |
| $\mathcal{G}_{0G}$ | gruppo delle simmetrie puntuali di un reticolo con metrica $G$ |
| $\mathcal{G}_{0R}$ | gruppo delle simmetrie puntuali di un reticolo |
| $\mathcal{G}_S$ | gruppo delle simmetrie di un insieme di punti |
| $\mathcal{H}$ | iperpiano affine |
| $\mathcal{H}^R$ | iperpiano reticolare |
| $\{H^R\}_\parallel$ | famiglia di iperpiani reticolari paralleli |
| $Hom(E,F)$ | insieme degli omomorfisfi (tra due spazi vettoriali $E$ ed $F$) |
| $im(f)$ | immagine dell'applicazione lineare $f$ |
| $Ker(f)$ | nucleo dell'applicazione lineare $f$ |
| $\mathcal{N}$ | insieme dei numeri naturali |
| $\mathcal{N}^*$ | insieme dei naturali privato dello 0 |
| $\mathcal{O}(E)$ | gruppo ortogonale di $E$ (gruppo delle isometrie di $E$) |
| $\mathcal{O}_G(E)$ | gruppo delle isometrie compatibili con una metrica $G$ |
| $\mathcal{O}_n(\mathcal{R})$ | gruppo delle matrici ortogonali di ordine $n$, a valori in $\mathcal{R}$ |
| $\mathcal{O}_R(\mathcal{Z})$ | gruppo delle isometrie associato a simmetrie puntuali di un reticolo |
| $\mathcal{O}_G(\mathcal{Z})$ | gruppo delle isometrie compatibili con una metrica $G$, a componenti intere |

| | |
|---|---|
| $\mathcal{Q}_S$ | elemento di simmetria puntuale associato alla simmetria $S$ |
| $\mathcal{SO}(E)$ | gruppo ortogonale speciale di $E$ (delle isometrie a determinante positivo) |
| $\mathcal{R}$ | campo dei numeri reali |
| $R$ | gruppo dei reali rispetto all'operazione di somma |
| $\mathcal{T}$ | gruppo delle traslazioni |
| $T$ | sottogruppo delle traslazioni di un gruppo spaziale |
| $T_\Lambda$ | gruppo cristallografico di traslazioni |
| $\mathcal{Z}$ | anello degli interi |
| $\mathcal{Z}^*$ | anello degli interi privato dello 0 |

# Prefazione

Queste note, relative alla prima parte di un corso *tradizionale* di cristallografia, sono centrate sulle definizioni e sullo studio delle proprietà dei reticoli, vale a dire di *sottoinsiemi ordinati di punti* di uno spazio affine. I primi due capitoli, il quinto e il sesto sono in realtà superflui per gli studenti di matematica, che hanno già ampiamente studiato in altri corsi (geometria e algebra) il materiale che vi è contenuto; tali capitoli sono stati inclusi qui per *completezza*, come riferimento per studenti di altri corsi di laurea, e *non* riportano la gran parte delle dimostrazioni dei teoremi enunciati, peraltro facilmente reperibili su qualsiasi testo di geometria o di algebra.

Allo stato attuale, la parte riguardante la simmetria puntuale dei reticoli bidimensionali è stata sviluppata in modo sistematico, mentre lo stesso non è ancora stato fatto relativamente ai reticoli tridimensionali, dove l'approccio non è sistematico e si procede per analogia col bidimensionale, limitandosi a pochi esempi. La parte sui gruppi spaziali viene presentata nelle sue linee generali; viene vista con qualche dettaglio la situazione relativamente al caso bidimensionale e manca l'applicazione sistematica alle strutture tridimensionali.

È stato incluso un capitolo sui reticoli incommensurati, utile come base per affrontare studi più avanzati sulle strutture *quasi-cristalline* e *quasi-periodiche*.

Torino, 30 marzo 2007

# Capitolo 1

# Spazi Vettoriali e Applicazioni Lineari

## 1.1 Definizioni e proprietà fondamentali

**Definizione 1.1** Dicesi *spazio vettoriale* sul campo $\mathcal{R}$, un insieme $E$ su cui siano definite una legge di composizione interna detta *somma* $(+)$ e una legge di composizione esterna, a valori in $\mathcal{R}$, tali che:

1) $(E, +)$ è un gruppo commutativo;
2) $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}, \forall \vec{v} \in E \quad (\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$
3) $\forall \alpha \in \mathcal{R}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in E \quad \alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$
4) $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}, \forall \vec{v} \in E \quad (\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$
5) $1\vec{v} = \vec{v}$

Salvo avviso contrario, si farà sempre riferimento a spazi vettoriali su $\mathcal{R}$ (spazi vettoriali reali). Se $\vec{0}$ è l'elemento neutro in $E$, si ha: $\lambda\vec{v} + \vec{0} = \lambda\vec{v} = (\lambda + 0)\vec{v} = \lambda\vec{v} + 0\vec{v}$ da cui segue: $0\vec{v} = \vec{0}$.

**Definizione 1.2** Un insieme $E'$ di $E$ si dice *sottospazio vettoriale* (di $E$) se la restrizione dell'operazione $+$, definita su $E$, conferisce a $E'$ la struttura di spazio vettoriale.

**Teorema 1.1** Sia $E$ uno spazio vettoriale; un insieme $F \subseteq E$ è un sottospazio vettoriale di $E$ se, e solo se, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}, \ \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in F$.

**Definizione 1.3** Sia $E$ uno spazio vettoriale; un sistema di vettori di $E$ $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_q\}$ tale che $\forall \vec{w} \in E, \ \vec{w} = \sum_{i=1}^{q} w_i \vec{v}_i$, con $w_i \in \mathcal{R}$, si dice *sistema di generatori di E.*

**Definizione 1.4** Sia $E$ uno spazio vettoriale; $n$ vettori di $E$ $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ per i quali la relazione $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0}$, implica $\alpha_i = 0 \quad (i = 1, ..., n)$, si dicono *linearmente indipendenti.*

**Definizione 1.5** Sia $E$ uno spazio vettoriale; un sistema di generatori di $E$ che siano linearmente indipendenti, si dice *base di E.*

**Teorema 1.2** Sia $E$ uno spazio vettoriale; ogni vettore $\vec{w} \in E$ si esprime in modo unico come combinazione lineare dei vettori di una sua base.

**Teorema 1.3** Se $E$ ha una base costituita da $n$ vettori, ogni base di $E$ ha $n$ vettori e ogni sistema di $n$ vettori linearmente indipendenti, di $E$, è una base di $E$.

**Definizione 1.6** Dicesi *dimensione* di $E$ il numero di vettori di una base di $E$.

**Definizione 1.7** Sia $E$ uno spazio vettoriale e siano $E_1, ..., E_p$ $p$ suoi sottospazi. Chiamiamo *somma di sottospazi* l'insieme $F = E_1 + ... + E_p$ tale che:

$$F = \left\{ \vec{y} \in E \ / \ \exists \vec{x}_i \in E_i \ : \ \vec{y} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{x}_i \, , \ \alpha_i \in \mathcal{R} \quad (i = 1, \ldots, p) \right\}$$

**Proposizione 1.4** $F$ è un sottospazio vettoriale di $E$.

**Definizione 1.8** Sia $E$ uno spazio vettoriale e siano $E_1, ..., E_p$ $p$ suoi sottospazi; la somma $F$ di cui alla proposizione 1.4 è *diretta* se $\vec{v}_1 + ... + \vec{v}_p = \vec{0}$ implica $\vec{v}_i = \vec{0}$, con $\vec{v}_i \in E_i$ e $(i = 1, ..., p)$.

In tal caso la somma si indica con $F = E_1 \oplus ... \oplus E_p$.

**Proposizione 1.5** Se $F$ è somma diretta di $p$ sottospazi $E_1, \ldots, E_p$ di $E$, ogni $\vec{w} \in F$ si decompone in modo unico nella somma di vettori appartenenti a ciascuno di essi.

**Definizione 1.9** Siano $E_1$ ed $E_2$ due sottospazi di uno spazio vettoriale $E$; chiamiamo *intersezione* dei due sottospazi l'insieme $F = E_1 \cap E_2$ tale che

$$F = \{\vec{v} \in E \ / \ \vec{v} \in E_1 \times \vec{v} \in E_2\}$$

**Teorema 1.6** L'intersezione $F$ di due sottospazi $E_1$ ed $E_2$, di uno spazio vettoriale $E$, è un sottospazio di $E$.

**Definizione 1.10** Sia $E$ uno spazio vettoriale e siano $E_1$ ed $E_2$ due suoi sottospazi; se $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$ i due sottospazi si dicono *disgiunti.*

**Proposizione 1.7** La somma $F = E_1 + E_2$ di due sottospazi vettoriali è diretta se e solo se i due sottospazi sono disgiunti.

**Teorema 1.8** Sia $E$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ ed $E_1$ un suo sottospazio di dimensione $m$; esiste in $E$ un sottospazio $E_2$, detto *supplementare* di $E_1$, tale che $dim\, E_2 = n - m$ e $E = E_1 \oplus E_2$.

**Teorema 1.9 (di Grassmann)** Siano $E_1$ ed $E_2$ due sottospazi di uno spazio vettoriale $E$; siano $F$ e $G$ rispettivamente la somma e l'intersezione di $E_1$ ed $E_2$, vale:

$$dim\, F + dim\, G = dim\, E_1 + dim\, E_2$$

## 1.2 Applicazioni lineari

**Definizione 1.11** Siano $E$ ed $F$ due spazi vettoriali di dimensione $n$ ed $m$ rispettivamente; sia $f$ un'applicazione da $E$ a $F$, $f : E \rightarrow F$. $f$ si dice *lineare* se:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R},\ \forall \vec{v}, \vec{w} \in E \qquad f(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha f(\vec{v}) + \beta f(\vec{w})$$

con $f(\vec{v}), f(\vec{w}) \in F$.

Denotiamo con $+$ la somma di applicazioni lineari, definita da $(f+g)\vec{v} = f(\vec{v}) + g(\vec{v})$; denotato con $\cdot$ il prodotto di un'applicazione lineare con uno scalare $\alpha \in \mathcal{R}$, tale che $(\alpha \cdot f)\vec{v} = \alpha[f(\vec{v})]$, abbiamo il

**Teorema 1.10** Per le operazioni di somma e prodotto per scalari, l'insieme $Hom(E, F)$ delle applicazioni lineari da $E$ a $F$ è uno spazio vettoriale.

$Hom(E, F)$ si dice insieme degli *omomorfismi*.
$Hom(E, E) = End(E)$ è l'insieme degli *endomorfismi*.
Un'applicazione lineare bijettiva è detta *isomorfismo*. L'insieme delle applicazioni lineari bijettive da $E$ in $E$, $GL(E) \subset End(E)$, si dice insieme degli *automorfismi* (o *gruppo lineare di E*).

**Definizione 1.12** Siano $f$ e $g$ due applicazioni lineari; dicesi *composizione* di $f$ e $g$ (indicata con $f \circ g$) l'operazione definita da: $(f \circ g)\vec{v} = f[g(\vec{v})], \quad \forall \vec{v} \in E$.

Se $f$ è un isomorfismo dallo spazio $E$ allo spazio $F$, esiste una relazione $g : F \rightarrow E$, che è ancora un'applicazione, tale che $\forall \vec{v} \in E,\ (g \circ f)\vec{v} = g[f(\vec{v})] = \vec{v}$. L'applicazione $g$ è detta *inversa* di $f$ ed è generalmente indicata con il simbolo $f^{-1}$. Indicata con $\iota$ la relazione *identica* su $E$ ($\forall \vec{v} \in E,\ \iota(\vec{v}) = \vec{v}$) risulta $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \iota$.

Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ due vettori di $E$; $\alpha, \beta$ due scalari e $f$ un isomorfismo da $E$ in $F$; possiamo scrivere:

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \iota(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = f^{-1} \circ f(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = f^{-1}[\alpha f(\vec{v}_1) + \beta f(\vec{v}_2)] = f^{-1}(\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2)$$

dove $\vec{w}_i = f(\vec{v}_i) \in F \ (i = 1, 2)$. Poiché $f^{-1}(\vec{w}_i) = \vec{v}_i$, segue che $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \alpha f^{-1}(\vec{w}_1) + \beta f^{-1}(\vec{w}_2)$ che, unitamente alla relazione ricavata al punto precedente, conduce a:

$$f^{-1}(\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2) = \alpha f^{-1}(\vec{w}_1) + \beta f^{-1}(\vec{w}_2)$$

vale a dire che l'applicazione inversa di un isomorfismo è lineare ed è dunque un isomorfismo.

**Teorema 1.11** L'insieme $GL(E)$ degli automorfismi di $E$, unitamente all'operazione di composizione di applicazioni è un gruppo (in generale non commutativo).

**Definizione 1.13** Due spazi vettoriali $E$ ed $F$ si dicono *isomorfi* se esiste un isomorfismo da $E$ a $F$.

**Teorema 1.12** Due spazi vettoriali della stessa dimensione sono isomorfi.

**Definizione 1.14** Dicesi *nucleo* di un'applicazione lineare $f \in Hom(E, F)$ l'insieme dei vettori $\vec{v}$ di $E$ tali che $f(\vec{v}) = \vec{0}_F$ e si indica con $Ker(f)$.

$$Ker(f) = \left\{ \vec{v} \in E / f(\vec{v}) = \vec{0}_F \right\}$$

$Ker(f)$ non è vuoto perché $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$, quindi $\vec{0}_E \in Ker(f)$.

**Teorema 1.13** $Ker(f)$, dove $f \in Hom(E, F)$, è un sottospazio vettoriale di E.

**Definizione 1.15** Se $f : \ E \to F$, con $f \in Hom(E, F)$, chiamiamo *immagine* di $f$ l'insieme

$$im(f) = \{\vec{y} \in F \ / \ \exists \vec{x} \in E : \ f(\vec{x}) = \vec{y}\}$$

**Teorema 1.14** $im(f)$ è un sottospazio vettoriale di $E$

**Teorema 1.15** $dim\, Ker(f) + dim\, im(f) = dim\, E$

**Proposizione 1.16** Siano $E$ ed $F$ due spazi vettoriali e sia $E_1$ un sottospazio di $E$; sia $f \in Hom(E, F)$; l'immagine nella $f$ del sottospazio $E_1$ $(f(E_1))$ è un sottospazio $F_1$ di $F$.

**Proposizione 1.17** Siano $E$ ed $F$ due spazi vettoriali e sia $E_1$ un sottospazio di $E$; sia $f \in Hom(E, F)$; se $Ker(f) = \{\vec{0}_E\}$, si ha:
1) l'immagine di una base di $E_1$ è una base del sottospazio $f(E_1)$;
2) i due spazi $E_1$ ed $F_1$ hanno la stessa dimensione.

**Teorema 1.18** Siano $E$ ed $F$ due spazi vettoriali della stessa dimensione e sia $f$ un isomorfismo da $E$ in $F$; si ha: $Ker(f) = \{\vec{0}_E\}$. Viceversa, se il nucleo di $f$ contiene il solo vettore nullo, allora $f$ è un isomorfismo.

Sia $F = E_1 \oplus E_2$; un qualunque vettore $\vec{w} \in F$ si può decomporre in modo unico come $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, con $\vec{v}_1 \in E_1$ e $\vec{v}_2 \in E_2$ (proposizione 1.5); è allora possibile definire due applicazioni $p_i : \ F \to E_i$ tali che $p_i(\vec{w}) = \vec{v}_i \quad (i = 1, 2)$.

**Definizione 1.16** Sia $F = E_1 \oplus E_2$; l'applicazione $p_i(\vec{w}) = \vec{v}_i$ con $\vec{w} \in F = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{v}_i \in E_i$, si dice *proiezione* da $F$ in $E_i$.

**Proposizione 1.19** Sia $F = E_1 \oplus E_2$; la proiezione da $F$ in $E_i$ è un'applicazione lineare.

*Dimostrazione*
Siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ due vettori di $F$; vale: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ e $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ con $\vec{v}_1 , \vec{w}_1 \in E_1$ e $\vec{v}_2 , \vec{w}_2 \in E_2$ . Dati $\alpha , \beta \in \mathcal{R}$, si ha:

$$\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} = \underbrace{\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{w}_1}_{\in E_1} + \underbrace{\alpha\vec{v}_2 + \beta\vec{w}_2}_{\in E_2}$$

dunque $p_i(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\vec{v}_i + \beta\vec{w}_i$ ; d'altra parte, poiché $p_i(\vec{v}) = \vec{v}_i$ e $p_i(\vec{w}) = \vec{w}_i$ , si ha pure $\alpha\vec{v}_i + \beta\vec{w}_i = \alpha p_i(\vec{v}) + \beta p_i(\vec{w})$, da cui segue il teorema.

Con le stesse notazioni, risulta che $p_1(E) = E_1 = im(p_1)$ e $Ker(p_1) = E_2$ (infatti, $\forall\vec{v} \in E_2,\ p_1(\vec{v}) = \vec{0}$). Da ciò segue il

**Teorema 1.20** Un'applicazione lineare $f \in End(E)$ è una proiezione se e solo se $f \circ f = f$.

*Dimostrazione*
Se $f$ è una proiezione, la proprietà $f \circ f = f$ è necessariamente valida; vediamo se è sufficiente: se vale $f \circ f = f$, risulta

$$\forall\vec{v} \in E \qquad f \circ f(\vec{v}) = f[f(\vec{v})] = f(\vec{v})$$

Posto $f(\vec{v}) = \vec{w} \in im(f)$, si ha che $\forall\vec{w} \in im(f),\ f(\vec{w}) = \vec{w}$ mentre, per la definizione di nucleo, $\forall\vec{x} \in Ker(f),\ f(\vec{x}) = \vec{0}$.

I due sottospazi $im(f)$ e $Ker(f)$ sono disgiunti, infatti se esistesse un vettore $\vec{x} \neq \vec{0}$ tale che $\vec{x} \in im(f) \cap Ker(f)$ si avrebbe contemporaneamente $f(\vec{x}) = \vec{x}$ e $f(\vec{x}) = \vec{0}$, il che è assurdo essendo $\vec{x}$ non nullo; la somma dei due sottospazi è dunque diretta e l'applicazione $f$ soddisfa i requisiti della def. 1.16. Il teorema è dimostrato.

## 1.3 Rappresentazione matriciale di un endomorfismo

Sia $E$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ e sia $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ una sua base; se $f \in End(E)$, risulta

$$\forall\vec{x} \in E \qquad f(\vec{x}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\vec{e}_i)$$

dove gli scalari $x_i$ sono le componenti del vettore $\vec{x}$ rispetto alla base scelta in $E$. Poiché gli $i$ vettori $f(\vec{e}_i)$ appartengono a $E$, possiamo scrivere:

$$f(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\vec{e}_j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Quindi, assegnata una base in $E$, all'endomorfismo $f$ risulta associata la *matrice* $A$ di $n$ righe ed $n$ colonne:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dove la $i$-esima colonna è costituita dalle componenti del vettore $f(\vec{e}_i)$ rispetto alla base $B$.

Si può dimostrare che la relazione $\phi : f \mapsto A$, che associa a un endomorfismo la corrispondente matrice, è un isomorfismo tra l'anello[1] $End(E)$ e l'anello delle matrici quadrate a $n$ righe e $n$ colonne ($\mathcal{M}_{n\times n}$), dove all'operazione di composizione di endomorfismi, definita su $End(E)$, corrisponde il prodotto *riga per colonna*, definito su $\mathcal{M}_{n\times n}$.

Se $f \in GL(E)$ allora esiste l'automorfismo inverso $f^{-1}$ tale che

$$\forall \vec{v} \in E,\ f^{-1} \circ f(\vec{v}) = f \circ f^{-1}(\vec{v}) = \iota(\vec{v}) = \vec{v}$$

dove $\iota$ è l'automorfismo identico in $E$. Se $\vec{e}_i \in B,\ f(\vec{e}_i) = \sum_j a_{ji}\vec{e}_j$; allora:

$$\vec{e}_i = \iota(\vec{e}_i) = f^{-1} \circ f(\vec{e}_i) = f^{-1}[f(\vec{e}_i)] = f^{-1}\{\sum_j a_{ji}\vec{e}_j\} = \sum_j a_{ji} f^{-1}(\vec{e}_j) = \sum_{j,\ell} \bar{a}_{\ell j} a_{ji} \vec{e}_\ell$$

dove gli scalari $\bar{a}_{\ell j}$ sono gli elementi di una matrice $\bar{A}$, rappresentativa dell'automorfismo $f^{-1}$ rispetto alla base $B$. Dall'indipendenza lineare dei vettori della base $B$ segue che:

$$\sum_{j,\ell\neq i} \bar{a}_{\ell j} a_{ji} \vec{e}_\ell + \{[\sum_j \bar{a}_{ij} a_{ji}] - 1\}\vec{e}_i = \vec{0} \ \rightarrow\ \sum_j \bar{a}_{\ell j} a_{ji} = \delta_{\ell i}$$

(con $\delta_{\ell i} = 0$ se $\ell \neq i$ e $\delta_{\ell i} = 1$ se $\ell = i$); vale a dire: $\bar{A}A = I$ dove $I$ è la matrice identica; risulta quindi $\bar{A} = A^{-1}$, avendo indicato con $A^{-1}$ la matrice inversa di $A$. In sintesi:

**Teorema 1.21** Se $A$ è la matrice associata a un automorfismo $f$ di $E$, rispetto a una base $B$, la matrice associata all'automorfismo inverso, $f^{-1}$, è l'inversa di $A$.

La restrizione a $GL(E)$ dell'isomorfismo $\phi : End(E) \to \mathcal{M}_{n\times n}$, individua il sottogruppo $GL_n(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}_{n\times n}$ delle matrici invertibili di ordine $n$ (a valori in $\mathcal{R}$).

Indicando con $X$ la matrice colonna ($n$ righe e 1 colonna) delle componenti $x_i$ di $\vec{x}$, si può dare una rappresentazione matriciale della scrittura $f(\vec{x})$:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\vec{e}_i) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji} x_i \vec{e}_j \equiv AX$$

[1]Un anello è una struttura algebrica data da un insieme $I$ sul quale siano definite due operazioni binarie associative ($\circ_1$ e $\circ_2$) per le quali valgano le proprietà: ($i$) $(I, \circ_1)$ è un gruppo; ($ii$) $(I, \circ_2)$ è un semigruppo; ($iii$) $\circ_2$ è distributiva rispetto a $\circ_1$. A sua volta, un semigruppo è una struttura algebrica dotata di una singola operazione binaria, associativa.

essendo $AX$ il prodotto *riga per colonna* delle due matrici $A$ e $X$. In definitiva, all'espressione $\vec{y} = f(\vec{x})$ corrisponde, in notazione matriciale, la scrittura $Y = AX$ dove $X$, $Y$ sono i vettori colonna rappresentativi di $\vec{x}, \vec{y}$ rispetto alla base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$; $A$ è la matrice rappresentativa dell'endomorfismo $f$, rispetto alla stessa base.

## 1.4 Autovalori e autovettori di un endomorfismo

**Definizione 1.17** Sia $E$ uno spazio vettoriale e sia $f$ un endomorfismo di $E$; dicesi *autovettore* di $f$, associato all'*autovalore* $\lambda$, ogni vettore non nullo $\vec{v} \in E$ tale che:

$$f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$$

Tale equazione si viene denominata *equazione agli autovalori*

**Teorema 1.22** Sia $E$ uno spazio vettoriale e sia $f \in End(E)$; l'insieme $E_{\lambda_i}$ degli autovettori associati a un medesimo autovalore $\lambda_i$, più il vettore nullo, è un sottospazio di $E$, detto *autospazio* di $f$, o anche *sottospazio invariante* relativamente a $f$.

**Teorema 1.23** Sia $f$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale $E$; gli autospazi di $f$ associati ad autovalori diversi sono disgiunti.

**Teorema 1.24** Sia $E$ uno spazio vettoriale e $f$ un endomorfismo di $E$; la somma degli autospazi di $f$ associati ad autovalori diversi è diretta.

Se $A$ è la matrice rappresentativa di un endomorfismo $f$ di $E$, rispetto ad una data base, e $V$ è la matrice colonna delle componenti di un autovettore di $f$, relativamente alla stessa base, l'equazione agli autovalori assume la forma:

$$(A - \lambda I)V = 0$$

dove $I$ è la matrice identità e 0 la matrice colonna con tutti gli elementi nulli. Poiché, per definizione di autovettore, $V$ deve essere diverso dal vettore nullo, il sistema (lineare omogeneo) corrispondente all'equazione matriciale agli autovalori deve avere soluzioni diverse da quella banale, il che implica l'annullamento del determinante dei coefficienti; segue quindi il

**Teorema 1.25** Siano $f$ un endomorfismo di $E$ e $A$ la matrice associata a $f$ rispetto a una base di $E$; lo scalare $\lambda$ è un autovalore di $f$ se e solo se vale

$$|A - \lambda I| = 0$$

**Definizione 1.18** Il polinomio $P(\lambda) = |A - \lambda I|$ si chiama *polinomio caratteristico* dell'endomorfismo $f$, mentre l'equazione $P(\lambda) = 0$ si chiama *equazione caratteristica.*

Si ha che $\lambda$ è autovalore di $f$ se e solo se è soluzione dell'equazione caratteristica.

Se il campo su cui è definito lo spazio vettoriale è algebricamente chiuso[2] l'equazione caratteristica di un endomorfismo, di uno spazio vettoriale $n$-dimensionale, ha $n$ soluzioni (distinte o no) e, conseguentemente, l'endomorfismo ha $n$ autovalori (distinti o no); Viceversa, se il campo non è algebricamente chiuso, il numero di autovalori dell'endomorfismo può essere minore di $n$.

Dato un endomorfismo $f$ di $E$, sia $n_\lambda$ la molteplicità algebrica (vedi nota 2) dell'autovalore $\lambda$; si dimostra che

**Teorema 1.26** La dimensione di un sottospazio invariante, rispetto ad un endomorfismo $f$, non supera la molteplicità algebrica dell'autovalore a cui è associato:

$$1 \leq dim\, Ker(f - \lambda I_E) \leq n_\lambda$$

Dato un endomorfismo $f$ di $E$, se esiste una base, in $E$, per la quale la matrice associata a $f$ sia diagonale, diciamo che l'endomorfismo è *diagonalizzabile*. Si ha il seguente importante

**Teorema 1.27** Un endomorfismo $f$ di $E$ è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico è interamente decomponibile (nel campo su cui lo spazio vettoriale è definito) e per ogni autovalore $\lambda$ di molteplicità $n_\lambda$ risulta $dim\, E_\lambda = n_\lambda$, essendo $E_\lambda$ l'autospazio associato a $\lambda$.

**Teorema 1.28** Sia $f$ un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale $E$; siano $A$ la matrice associata a $f$ rispetto a una base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ di $E$, $D$ la matrice diagonale degli autovalori (eventualmente non tutti distinti) e $P$ la matrice degli autovettori di $f$ rispetto alla base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$; segue che $P$ è invertibile e $A = P\, D\, P^{-1}$.

## 1.5 Spazi vettoriali duali

L'insieme $R^n$ delle $n-$uple ordinate di scalari $(x_1, ..., x_n)$ è uno spazio vettoriale su $\mathcal{R}$, avendo definito la somma con: $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$ e il prodotto per uno scalare con: $\alpha(x_1, ..., x_n) = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n)$.

In particolare $R^1 \equiv R$ è uno spazio vettoriale su $\mathcal{R}$.

[2]Un campo $\mathcal{K}$ è algebricamente chiuso se ogni polinomio $P(X)$ nell'indeterminata $X$, a valori in $\mathcal{K}$, è interamente decomponibile nel prodotto di fattori di primo grado (distini o no): $P(X) = (A_1 - X)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (A_m - X)^{n_m}$ dove $n_1 + \cdots + n_m = n$ e $n$ è il grado del polinomio; il termine $n_i$ si dice *molteplicità algebrica* della radice $i$-esima. Il campo dei numeri complessi è algebricamente chiuso, mentre non lo è quello dei numeri reali.

**Definizione 1.19** Dicesi *forma lineare* un'applicazione lineare da $E$ a $R$: $f \in Hom(E, R) \equiv E^*$. L'insieme $E^*$ si dice *spazio vettoriale duale.*

**Teorema 1.29** Sia $E$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ e $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ una sua base; per ogni sistema di $n$ vettori di $F$ $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$, esiste una e una sola applicazione lineare $f$ tale che:

$$f(\vec{e}_i) = \vec{v}_i \quad (i = 1, ..., n) \qquad [f \in Hom(E, F)]$$

Se $F \equiv R^1 \equiv R$, allora $f \in E^*$ e i vettori $\vec{v}_i$ coincidono con scalari $(\delta_i)$; potremmo allora scrivere $f(\vec{e}_i) = \delta_i$. Cambiando lo scalare $\delta_i$, cambia anche la $f$ e viceversa; possiamo quindi porre $f_j(\vec{e}_i) = \delta_{ij}$. Essendo i $\delta_{ij}$ scalari qualunque, scegliamo:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \;\; i = j \\ 0 & \text{se} \;\; i \neq j \end{cases}$$

**Teorema 1.30** Le $f_j$ definite dalle relazioni $f_j(\vec{e}_i) = \delta_{ij}$ costituiscono una base di $E^*$ detta *base duale* della $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$.

Qualunque vettore di $E^*$ può essere espresso come combinazione lineare delle $f_j$. Poiché queste ultime sono in numero di $n$, segue che $dim\, E^* = dim\, E = n$ e, in base al teorema 1.12, $E$ ed $E^*$ sono isomorfi.

Esiste quindi un isomorfismo che associa in modo unico un vettore di $E$ con un vettore di $E^*$ e viceversa:

$$\phi : E \to E^*, \quad \forall \vec{v} \in E, \; \exists \vec{v}^* \in E^* : \phi(\vec{v}) = \vec{v}^*$$

**Proposizione 1.31** Sia $f$ una forma lineare; $Ker(f)$ è un sottospazio vettoriale di $E$ tale che $dim\, Ker(f) = dim\, E - 1$.

*Dimostrazione*
$Ker(f)$ è uno spazio vettoriale (teorema 1.13); essendo $f$ una forma lineare, $im(f) \equiv R^1$ e quindi $dim\, im(f) = 1$; in base al teorema 1.15 risulta $dim\, Ker(f) = dim\, E - dim\; im(f)$, da cui segue il teorema.

**Definizione 1.20** Siano $E$ ed $F$ due spazi vettoriali, $E^*$ ed $F^*$ i loro duali, e sia $f \in Hom(E, F)$: dicesi *trasposta*, l'applicazione ${}^tf : F^* \to E^*$ tale che

$$\forall \vec{v}^* \in F^* \qquad {}^tf(\vec{v}^*) = \vec{v}^* \circ f$$

**Teorema 1.32** Per ogni $f \in Hom(E, F)$ l'applicazione trasposta ${}^tf$ è lineare e appartiene allo spazio vettoriale $Hom(F^*, E^*)$.

**Proposizione 1.33** Per le applicazioni trasposte valgono le seguenti proprietà:

Se $f, g \in Hom(E, F)$
1) ${}^t(f+g) = {}^tf + {}^tg$
2) ${}^t(\alpha f) = \alpha\, {}^tf \qquad \alpha \in \mathcal{R}$

Se $f \in Hom(E, F),\ g \in Hom(F, G)$
3) ${}^t(g \circ f) = {}^tf \circ {}^tg$

Se $f \in GL(E),\ \ {}^tf \in GL(E^*)$
4) $({}^tf)^{-1} = {}^t(f^{-1})$

**Definizione 1.21** Dicesi *trasposta* di una matrice $A$, la matrice ${}^tA$ ottenuta da $A$ scambiandone le righe con le colonne.

**Proposizione 1.34** Sia $A$ la matrice associata a un endomorfismo $f$ di $E$; la matrice associata all'endomorfismo trasposto ${}^tf$ è la trasposta ${}^tA$ della matrice $A$.

Dette $A, B$ due matrici associate agli endomorfismi $f, g$, dalla proposizione 1.33 deriva che: ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$; inoltre, se $A$ è la matrice associata all'automorfismo $f$, dallo stesso teorema si ha: ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

**Definizione 1.22** Dicesi *ortogonale* una matrice quadrata $A$ tale che: ${}^tA\, A = A\, {}^tA = I$.

**Proposizione 1.35** Il determinante di una matrice ortogonale vale $\pm 1$

*Dimostrazione*
Tenuto conto che $(i)$ il determinante del prodotto di due matrici è pari al prodotto dei determinanti delle stesse e che $(ii)$ i determinanti di una matrice e della sua trasposta sono uguali, risulta:

$$det(A)\, det({}^tA) = det({}^tA)\, det(A) = det(I) = 1 \ \rightarrow\ [det(A)]^2 = 1 \ \rightarrow\ det(A) = \pm 1$$

## 1.6 Applicazioni bilineari

**Definizione 1.23** Siano $E$, $F$ e $G$ 3 spazi vettoriali; un'applicazione da $E \times F$ in $G$ si dice bilineare se è lineare in ciascuno dei suoi argomenti.

In formule, se $\phi$ è bilineare:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R},\ \ \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in E,\ \forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in F,\ \ \begin{cases} \phi(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2, \vec{w}_1) = \alpha\phi(\vec{v}_1, \vec{w}_1) + \beta\phi(\vec{v}_2, \vec{w}_1) \\ \phi(\vec{v}_1, \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2) = \alpha\phi(\vec{v}_1, \vec{w}_1) + \beta\phi(\vec{v}_1, \vec{w}_2) \end{cases}$$

In analogia a quanto fatto per le applicazioni lineari, possiamo definire la somma di applicazioni bilineari e il prodotto per uno scalare. Ne deriva (in analogia col teorema 1.10) che l'insieme $\mathcal{B}(E \times F, G)$ delle applicazioni bilineari, di $E \times F$ in $G$, ha la struttura di spazio vettoriale, rispetto alle operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

**Definizione 1.24** Dicesi *forma bilineare* un'applicazione di $E \times F$ in $R$.

Noi ci limiteremo alle sole forme $\phi \in \mathcal{B}(E \times E, R)$, indicate brevemente con $\mathcal{B}(E)$.

**Definizione 1.25** Dicesi *simmetrica* una forma $\phi \in \mathcal{B}(E)$ tale che:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \quad \phi(\vec{x}, \vec{y}) = \phi(\vec{y}, \vec{x})$$

L'insieme delle forme bilineari simmetriche si indica con $\mathcal{B}_s(E)$.

**Teorema 1.36** L'insieme $\mathcal{B}_s(E)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{B}(E)$.

**Definizione 1.26** Sia $E$ uno spazio vettoriale e $\phi$ una forma bilineare simmetrica; si dice *forma quadratica* associata a $\phi$, l'applicazione $\Phi$ da $E$ in $R$ tale che

$$\forall \vec{x} \in E \quad \Phi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}, \vec{x})$$

**Definizione 1.27** Due vettori $\vec{x}, \vec{y} \in E$ si dicono *coniugati* rispetto alla forma bilineare simmetrica $\phi$ se $\phi(\vec{x}, \vec{y}) = 0$.

**Proposizione 1.37** Sia $E$ uno spazio vettoriale e $A$ un insieme di vettori di $E$; l'insieme dei vettori di $E$ coniugati a tutti i vettori di $A$, rispetto a una forma $\phi \in \mathcal{B}_s(E)$, è un sottospazio vettoriale di $E$.

*Dimostrazione*
Sia $A = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p\}$ e sia $E_c \subset E$ un insieme di vettori coniugati a ogni vettore di $A$; allora

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R},\ \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in E_c,\ \forall \vec{a}_i \in A, \quad \phi(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2, \vec{a}_i) = \alpha\phi(\vec{v}_1, \vec{a}_i) + \beta\phi(\vec{v}_2, \vec{a}_i) = 0$$

cioè $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \in E_c$ e, per il teorema 1.1, $E_c$ è un sottospazio di $E$.

**Definizione 1.28** Una forma quadratica $\Phi$, associata a una forma bilineare simmetrica $\phi$, si dice:
1) *definita positiva* se $\forall \vec{x} \in E \quad \Phi(\vec{x}) \geq 0$ e $\Phi(\vec{x}) = 0 \longrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
2) *definita negativa* se $\forall \vec{x} \in E \quad \Phi(\vec{x}) \leq 0$ e $\Phi(\vec{x}) = 0 \longrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
3) *semidefinita positiva (negativa)* se $\forall \vec{x} \in E \quad \Phi(\vec{x}) \geq 0$ $(\Phi(\vec{x}) \leq 0)$ ma esistono vettori non nulli tali che $\Phi(\vec{x}) = 0$.
4) *non definita* se è positiva per alcuni vettori e negativa per altri.

Tale nomenclatura si applica pure alle forme bilineari a cui le forme quadratiche sono associate.

**Teorema 1.38** Sia $\Phi$ una forma quadratica definita o semidefinita, positiva o negativa; vale la *disuguaglianza di Schwarz:*

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \quad |\phi(\vec{x}, \vec{y})| \leq \sqrt{\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{y})}$$

Dimostriamolo nel caso di una forma definita positiva:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad \forall \lambda \in \mathcal{R} \quad \Phi(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = \phi(\vec{x} + \lambda\vec{y}, \vec{x} + \lambda\vec{y}) = \Phi(\vec{x}) + \lambda^2\Phi(\vec{y}) + 2\lambda\phi(\vec{x}, \vec{y})$$

Ma $\forall \vec{x} \in E, \ \Phi(\vec{x}) \geq 0,$ e quindi $\lambda^2\Phi(\vec{y}) + 2\lambda\phi(\vec{x}, \vec{y}) + \Phi(\vec{x}) \geq 0.$ Se $\Phi(\vec{y}) > 0,$ la condizione precedente implica $\phi^2(\vec{x}, \vec{y}) - \Phi(\vec{x})\Phi(\vec{y}) \leq 0,$ da cui segue il teorema.

Se vale $\Phi(\vec{y}) = 0,$ si ha $2\lambda\phi(\vec{x}, \vec{y}) + \Phi(\vec{x}) \geq 0,$ condizione verificata $\forall \lambda \in \mathcal{R}$ se $\phi(\vec{x}, \vec{y}) = 0;$ segue allora $\phi(\vec{x}, \vec{y}) = [\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{y})]^{1/2} = 0.$

**Teorema 1.39** Se $\Phi$ è una forma quadratica definita, o semidefinita, positiva, vale la *disuguaglianza di Minkowski*:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad \sqrt{\Phi(\vec{x} + \vec{y})} \leq \sqrt{\Phi(\vec{x})} + \sqrt{\Phi(\vec{y})}$$

Infatti, dalla disuguaglianza di Schwarz si deduce che:

$$\Phi(\vec{x} + \vec{y}) = \Phi(\vec{x}) + \Phi(\vec{y}) + 2\phi(\vec{x}, \vec{y}) \leq \Phi(\vec{x}) + \Phi(\vec{y}) + 2\sqrt{\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{y})} = \left[\sqrt{\Phi(\vec{x})} + \sqrt{\Phi(\vec{y})}\right]^2$$

quindi, poiché $\Phi(\vec{x} + \vec{y}) \geq 0,$ segue il teorema.

## 1.7 Spazi vettoriali euclidei

**Definizione 1.29** Uno spazio vettoriale $E$, considerato congiuntamente ad una forma bilineare simmetrica definita positiva $\phi$, si dice *spazio vettoriale euclideo.* Tale forma viene denominata *prodotto scalare.*

Poniamo $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \quad \phi(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{y}.$ Dalle proprietà della $\phi$ seguono direttamente le relazioni:

1) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$
2) $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$
3) $(\lambda\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (\lambda\vec{y}) = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{y}).$

**Definizione 1.30** Ad ogni vettore $\vec{x}$ di $E$ si può associare il numero reale non negativo, detto *norma* e indicato con $\|\vec{x}\|$, tale che:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\Phi(\vec{x})} = \sqrt{\phi(\vec{x},\vec{x})} = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}$$

Poiché la forma $\Phi$ è definita, $\|\vec{x}\| = 0$ equivale a $\Phi(\vec{x}) = 0$ che implica $\vec{x} = \vec{0}$.
Dalla disuguaglianza di Schwarz (teorema 1.38) si ha:

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \sqrt{\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{y})} = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$$

cioè

$$-1 \leq \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|} \leq 1$$

Esiste quindi uno scalare $\theta \in [0,\pi]$ (che chiamiamo *angolo compreso tra i due vettori*) tale che $\vec{x}\cdot\vec{y} = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\cos\theta$.

**Definizione 1.31** Due vettori $\vec{x},\vec{y} \in E$ si dicono *ortogonali* se sono coniugati rispetto al prodotto scalare, cioè se $\vec{x}\cdot\vec{y} = 0$. I due vettori sono *ortonormali* se sono ortogonali e hanno norma unitaria.

Risulta che l'angolo compreso tra due vettori ortogonali è $\pi/2$.

**Teorema 1.40** Siano $E$ uno spazio vettoriale euclideo ed $E_1$ un suo sottospazio; l'insieme $E_1^{\perp}$ dei vettori ortogonali a tutti i vettori di $E_1$ è un sottospazio vettoriale di $E$:

$$E_1^{\perp} = \{\vec{v} \in E \;/\; \vec{v}\cdot\vec{w} = 0, \quad \forall\vec{w} \in E_1\}$$

*Dimostrazione*
Per la proposizione 1.37, l'insieme dei vettori coniugati a tutti i vettori di $E_1$ è un sottospazio, da cui segue il teorema.

**Teorema 1.41** Sia $E$ uno spazio vettoriale euclideo e siano $E_1$ ed $E_1^{\perp}$ due suoi sottospazi ortogonali; risulta: $E_1 \cap E_1^{\perp} = \{\vec{0}\}$ e $E = E_1 \oplus E_1^{\perp}$.

**Teorema 1.42** Sia $E$ uno spazio vettoriale euclideo e siano $E_1$ ed $E_1^{\perp}$ due suoi sottospazi ortogonali; il sottospazio $E_1^{\perp}$ coincide col sottospazio supplementare di $E_1$ (teorema 1.8).

# Capitolo 2

# Spazi Affini

## 2.1 Definizioni e proprietà fondamentali

**Definizione 2.1** Sia $\mathcal{A}$ un insieme non vuoto i cui elementi chiamiamo *punti*; sia $E$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$. L'insieme $\mathcal{A}$ si dice *spazio affine* associato allo spazio vettoriale $E$ se è data un'applicazione $a : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to E$ per la quale valgano le seguenti proprietà:

1) $\forall P, Q \in \mathcal{A}, \quad \exists \vec{x} \in E / \ a(P, Q) = \vec{x}$ e tale $\vec{x}$ è unico;
2) $\forall P, Q, R \in \mathcal{A}, \quad a(P, Q) + a(Q, R) = a(P, R)$.

Possiamo scrivere, per brevità, $a(P, Q) = Q - P \to Q - P = \vec{x} \to Q = P + \vec{x}$; si noti che il simbolo $+$ non denota una *somma*; scrivere $Q = P + \vec{x}$ è solo un modo simbolico per indicare che $a(P, Q) = \vec{x}$.

Dalla (1) della def. 2.1 segue pure che $\forall P \in \mathcal{A}, \forall \vec{x} \in E, \quad \exists$ un solo $Q \in \mathcal{A} / \ Q = P + \vec{x}$.
Seguono le proprietà:

1) $a(P, Q) = \vec{0} \to P = Q$;
2) $a(P, Q) = -a(Q, P)$.

La dimensione di $\mathcal{A}$ si pone, per definizione, uguale alla dimensione di $E$.

**Definizione 2.2** Sia $E$ uno spazio vettoriale ed $F$ un suo sottospazio; l'insieme dei punti di $\mathcal{A}$ tali che dati $P, Q \in \mathcal{A}, \ a(P, Q) = \vec{x} \in F$, definisce un insieme $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ detto *varietà lineare affine di direzione $F$*.

Dato un vettore $\vec{x} \in F$ e un punto $P \in \mathcal{A}$, esiste ed è unico il punto $Q$ tale che $Q = P + \vec{x}$ [def. 2.1(1)]; facendo variare $\vec{x}$ in $F$, l'insieme dei punti $Q$ coincide con $\mathcal{A}'$; possiamo così dire:

**Teorema 2.1** Dato un punto $P$ di $\mathcal{A}$ e uno spazio vettoriale $F$, sottospazio di $E$, esiste un'unica varietà lineare affine $\mathcal{A}'$, passante per $P$, di direzione $F$.

**Definizione 2.3** Se $dim\,\mathcal{A}' = 2$, $\mathcal{A}'$ si dice *piano* affine; se $dim\,\mathcal{A}' = 1$, $\mathcal{A}'$ si dice *retta* affine.

In generale, se $dim\,E = dim\,\mathcal{A} = n$ e $dim\,\mathcal{A}' = n-1$ diciamo che $\mathcal{A}'$ è un *iperpiano* affine.

Siano $P$ e $O$ due punti di $\mathcal{A}$; possiamo scrivere: $P - O = \vec{x}$, con $\vec{x} \in E$. Se $(x_1, ..., x_n)$ sono le componenti di $\vec{x}$ rispetto alla base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ di $E$, si ha: $P = O + x_1\vec{e}_1 + ... + x_n\vec{e}_n$.

Ogni punto di $\mathcal{A}$ si può esprimere nella forma su riportata. Diciamo allora:

**Definizione 2.4** Sia $E$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ e $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ una sua base; sia $O \in \mathcal{A}$ un punto dello spazio affine $\mathcal{A}$ associato a $E$; chiamiamo *riferimento affine* l'insieme $\{O, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$; $O$ si dice *origine* del riferimento.

Le rette affini passanti per $O$ e di direzione $E_1, \ldots, E_n$, dove gli $E_i$ sono i sottospazi 1-dimensionali generati dai vettori della base di $E$, di dicono *assi coordinati.*

L'insieme $(x_1, ..., x_n)$ è quello (ordinato) delle *coordinate* di $P$ nel riferimento $\{O, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$.

**Teorema 2.2** Sia $E$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ e $\mathcal{A}$ lo spazio affine associato; un iperpiano affine di $\mathcal{A}$ si rappresenta con un'equazione del tipo

$$A_1x_1 + ... + A_nx_n + A_{n+1} = 0 \qquad \text{con } A_1, ..., A_{n+1} \in \mathcal{R}$$

*Dimostrazione*

Un iperpiano affine di $\mathcal{A}$ è una varietà lineare affine di dimensione $n-1$, associata ad un sottospazio $F$ di $E$, con $dim\,F = n-1$. Sia $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_{n-1}\}$ una base di $F$; ogni punto dell'iperpiano $\mathcal{H}$ passante per $Q \in \mathcal{A}$, si scrive $P = Q + \lambda_1\vec{a}_1 + ... + \lambda_{n-1}\vec{a}_{n-1}$.

Siano $(x_1, ..., x_n)$ e $(x_1^\circ, ..., x_n^\circ)$ le coordinate di $P$ e $Q$ rispetto al riferimento affine $\{O, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ di $\mathcal{A}$ e $(a_{i1}, ..., a_{in})$, $(i = 1, ..., n-1)$ le componenti degli $n-1$ vettori $\vec{a}_i$ rispetto alla base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ di $E$. Si ha:

$$(x_1, ..., x_n) = (x_1^\circ, ..., x_n^\circ) + \lambda_1(a_{11}, ..., a_{1n}) + ... + \lambda_{n-1}(a_{n-1,1}, ..., a_{n-1,n})$$

dove $\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$ sono parametri scalari; equivalentemente:

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + ... + \lambda_{n-1}a_{n-1,1} & = & x_1 - x_1^\circ \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 a_{1n} + ... + \lambda_{n-1}a_{n-1,n} & = & x_n - x_n^\circ \end{cases}$$

Tale sistema ha $n$ equazioni nelle $n-1$ incognite $\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$ ed è compatibile se e solo se il suo determinante caratteristico è nullo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n-1,1} & x_1 - x_1^\circ \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{n-1,n} & x_n - x_n^\circ \end{vmatrix} = 0$$

da cui deriva: $A_1(x_1 - x_1^\circ) + \cdots + A_n(x_n - x_n^\circ) = 0$ dove $A_i$ è il minore di ordine $n-1$ estratto dalla matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n-1,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

eliminando la $i$-esima riga. Posto $A_{n+1} = -(A_1 x_1^\circ + \cdots + A_n x_n^\circ)$ si ottiene l'equazione dell'iperpiano nella forma dell'enunciato del teorema.

**Definizione 2.5** Sia $E$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ e $\mathcal{A}$ uno spazio affine associato; siano $F_1$ e $F_2$ due sottospazi di $E$; le due varietà affini $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, associate rispettivamente a $F_1$ ed $F_2$, si dicono *parallele* se la direzione di una di esse è sottospazio della direzione dell'altra ($F_1 \subseteq F_2$ o $F_2 \subseteq F_1$).

**Proposizione 2.3** Nelle ipotesi della def. 2.5, due varietà affini parallele o non hanno alcun punto in comune, o una contiene interamente l'altra.

*Dimostrazione*
Poniamo $F_1 \subseteq F_2$; sia $Q \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \rightarrow \forall P \in \mathcal{A}_1$, $Q - P = \vec{x} \in F_1 \subseteq F_2$, quindi $\vec{x} \in F_2$ e $P \in \mathcal{A}_2$, da cui segue $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$.

Veniamo al caso di uno spazio 3-D. In forza del teorema 2.2, un piano affine si rappresenta con un'equazione del tipo $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$ (avendo cambiato opportunamente i nomi dei coefficienti). I coefficienti $A$, $B$ e $C$ individuano la *giacitura* del piano rispetto al riferimento affine fissato.

Vediamo come si modifica l'equazione del piano se questo è parallelo a uno degli assi coordinati (parallelo nel senso della def. 2.5).

Siano $\mathcal{A}_3$ uno spazio affine associato allo spazio vettoriale $E_3$ e $\mathcal{A}_2$ un suo iperpiano (piano) di direzione $E_2$, parallelo alla retta affine $Z$ di direzione $E_1$ (essendo $E_1$ il sottospazio 1-dimensionale generato da $\vec{e}_3$); sia $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base di $E_3$. Poiché $E_1 \subset E_2$, possiamo scegliere il sistema di vettori $\{\vec{a}, \vec{e}_3\}$ come base di $E_2$, con $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3$

Se $\mathcal{A}_2$ passa per $Q$ $(x_1^\circ, ..., x_n^\circ)$, ogni $P \in \mathcal{A}_2$ si scrive come $P = Q + v\vec{a} + w\vec{e}_3$, con $v, w \in \mathcal{R}$; dette $(x_1, ..., x_n)$ le coordinate di $P$, vale:

$$(x_1, ..., x_n) - (x_1^\circ, ..., x_n^\circ) = v(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + w(0, 0, 1)$$

equazione equivalente al sistema:

$$\begin{cases} v\lambda_1 = x_1 - x_1^\circ \\ v\lambda_2 = x_2 - x_2^\circ \\ v\lambda_3 + w = x_3 - x_3^\circ \end{cases}$$

La condizione di compatibilità del sistema (di 3 equazioni nelle 2 incognite $v, w$) è:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & x_1 - x_1^\circ \\ \lambda_2 & 0 & x_2 - x_2^\circ \\ \lambda_3 & 1 & x_3 - x_3^\circ \end{vmatrix} = \lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2 + (\lambda_1 x_2^\circ - \lambda_2 x_1^\circ) = 0$$

Risulta che il coefficiente della variabile $x_3$ ($C$) è nullo. Possiamo quindi concludere che se uno dei coefficienti $A$, $B$ o $C$ è nullo, il piano corrispondente è parallelo all'asse $X$, $Y$ o $Z$ rispettivamente.

Se il piano passa per l'origine del riferimento, $x_1^\circ = x_2^\circ = x_3^\circ = 0$ e quindi $D = 0$.

## 2.2 Spazi affini euclidei

**Definizione 2.6** Uno spazio affine associato ad uno spazio vettoriale euclideo si dice *spazio affine euclideo.*

**Definizione 2.7** Dicesi *spazio metrico* ogni spazio su cui sia definita una *metrica*; vale a dire: dati 3 punti $A$, $B$ e $C$ dello spazio affine $\mathcal{A}$, si definisce una funzione $d:\ \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{R}$ tale che:

*1)* $d(A, B) \geq 0$
*2)* $d(A, A) = 0$
*3)* $d(A, B) = d(B, A)$
*4)* $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$

L'insieme $(\mathcal{A}, d)$ è uno spazio metrico. In uno spazio affine euclideo si può definire una metrica sfruttando il concetto di *norma* di un vettore (def. 1.30).
Sia $\mathcal{A}$ uno spazio affine associato ad uno spazio vettoriale euclideo $E$:

$$\forall A, B \in \mathcal{A}, \quad \exists \vec{x} \in E \ / \ A - B = \vec{x}$$

(si veda la def. 2.1). Poniamo $d(A, B) = \|\vec{x}\|$.
Se $A \equiv B$, $A - B = \vec{0}$ e $\|\vec{0}\| = 0$, quindi $d(A, A) = 0$ (si ricordi che il prodotto scalare è una forma bilineare *definita* positiva). Inoltre, poiché la norma di un vettore è un numero positivo,

$\forall A, B \in \mathcal{A} \;\; d(A,B) \geq 0$.
Se $A - B = \vec{x} \to B - A = -\vec{x}$, ma $\|\vec{x}\| = \|-\vec{x}\| \to d(A,B) = d(B,A)$.
Se $A, B, C \in \mathcal{A}$, poniamo $B - A = \vec{x}$ e $C - B = \vec{y}$, da cui: $B = C - \vec{y}$ e $A = B - \vec{x} = C - (\vec{x} + \vec{y}) \to C - A = \vec{x} + \vec{y}$; con Minkowski (teorema 1.39) si ha:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \to d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$$

Come si vede, la funzione $d(A,B) = \|B - A\|$ soddisfa i requisiti della def. 2.7 e quindi definisce una metrica su $\mathcal{A}$.

Sia $E$ uno spazio vettoriale euclideo con $dimE = n$ e sia $F$ un suo sottospazio con $dimF = m = n - 1$; si dimostra che se un vettore $\vec{v} \in E$ è ortogonale a tutti i vettori di una base di $F$, allora $\vec{v}$ è ortogonale a tutti i vettori di $F$.

Sia $\mathcal{A}$ lo spazio affine associato a $E$ e $\mathcal{H}$ l'iperpiano affine di direzione $F$, passante per un punto $Q \in \mathcal{A}$; $\forall P \in \mathcal{H}$, $P - Q = \vec{x} \in F$. Se $\vec{v} \in E$ è un vettore ortogonale a $F$, l'equazione di $\mathcal{H}$ può essere scritta come:

$$\forall P \in \mathcal{H}, \quad (P - Q) \cdot \vec{v} = 0$$

Un teorema dell'algebra lineare garantisce l'esistenza di almeno una base ortonormale in ogni spazio vettoriale euclideo; in $E$ esiste quindi una base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ con $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$.

Se $\{O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ è un riferimento ortonormale, in $\mathcal{A}$, $(x_1, ..., x_n)$ e $(x_1^\circ, ..., x_n^\circ)$ le coordinate di $P$ e $Q$ nel riferimento, si ottiene:

$$\left.\begin{array}{l} P = O + x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n \\ Q = O + x_1^\circ\vec{e}_1 + \cdots + x_n^\circ\vec{e}_n \end{array}\right\} \to P - Q = (x_1 - x_1^\circ)\vec{e}_1 + \cdots + (x_n - x_n^\circ)\vec{e}_n$$

Poiché la base scelta è ortonormale, l'equazione dell'iperpiano $\mathcal{H}$ si scrive:

$$x_1v_1 + \cdots + x_nv_n - (x_1^\circ v_1 + \cdots + x_n^\circ v_n) = 0$$

dove $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono le componenti di $\vec{v}$ rispetto alla stessa base. Possiamo allora interpretare i coefficienti $A_i$ dell'equazione dell'iperpiano (teorema 2.2) come le componenti di un vettore normale all'iperpiano, rispetto ad un riferimento ortonormale.

## 2.3 Base reciproca

Si è vista (def. 1.19) la definizione di spazio duale $E^*$; sappiamo che $dim\,E^* = dim\,E$ e che, data una forma $f \in E^*$, l'insieme

$$Ker(f) = \{\vec{v} \in E \;/\; f(\vec{v}) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di $E$ avente dimensione $dim\, E - 1$ (def. 1.14, teorema 1.13 e proposizione 1.31). Ne deriva:

**Teorema 2.4** Sia $\mathcal{A}$ uno spazio affine associato allo spazio vettoriale $E$ e sia $f$ una forma lineare su $E$; la varietà lineare affine $\mathcal{H}$ associata a $Ker(f)$ è un iperpiano.

Siano $P$ e $Q \in \mathcal{H} \ \rightarrow P - Q = \vec{x} \in Ker(f) \subseteq E$, quindi

$$f(\vec{x}) = 0 \ \rightarrow f[(x_1 - x_1^\circ)\vec{e}_1 + \cdots + (x_n - x_n^\circ)\vec{e}_n] = (x_1 - x_1^\circ)f(\vec{e}_1) + \cdots + (x_n - x_n^\circ)f(\vec{e}_n) = 0$$

Se $\{\vec{e}_1^{\,*}, \ldots, \vec{e}_n^{\,*}\}$ è una base di $E^*$, si ha: $f = f_1\vec{e}_1^{\,*} + \cdots + f_n\vec{e}_n^{\,*}$, con $\vec{e}_i^{\,*}(\vec{e}_j) = \delta_{ij}$ (teorema 1.30), da cui:

$$f(\vec{x}) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1f_1 + \cdots + x_nf_n - (x_1^\circ f_1 + \cdots + x_n^\circ f_n) = 0$$

Possiamo allora formulare la seguente

**Proposizione 2.5** Sia $\mathcal{A}$ uno spazio affine associato allo spazio vettoriale $E$ e sia $E^*$ lo spazio vettoriale duale di $E$; i coefficienti $A_i$ dell'equazione di un iperpiano affine $\mathcal{H}$, di $\mathcal{A}$, coincidono con le componenti di una forma $f \in E^*$, rispetto alla base in $E^*$ duale di quella in $E$, il cui nucleo è la direzione di $\mathcal{H}$.

Se $E$ è uno spazio euclideo, gli stessi $A_i$ sono pure le componenti di un vettore normale all'iperpiano (se il sistema di riferimento è ortonormale). Nel paragrafo 1.2 abbiamo visto che esiste un isomorfismo che associa ad ogni vettore di $E^*$ un vettore di $E:\ \phi(f) = \vec{v},\ f \in E^*,\ \vec{v} \in E$.

Ne deriva che $\phi$ associa ad ogni $f \in E^*$ un vettore $\vec{v} \in E$ ortogonale al sottospazio $Ker(f)$ $(Ker(f) \subseteq E)$.

Se il sistema di riferimento non è ortonormale, però, non è possibile interpretare le componenti della forma $f$ come quelle del vettore (di $E$) ortogonale all'iperpiano $\mathcal{H}$, associato al sottospazio $Ker(f)$. Si ricorre perciò alla costruzione (in $E$) della *base reciproca*, di cui al teorema seguente:

**Teorema 2.6** Sia $A = \{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ una base di $E$; esiste in $E$ un'unica base $B = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ tale che $\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Tale base è detta *base reciproca.*

*Dimostrazione*

In primo luogo, dobbiamo affrontare il problema dell'esistenza e dell'unicità, in $E$, di un sistema $B$ di vettori con la proprietà su scritta; secondariamente, si deve dimostrare che tale sistema è una base di $E$.

1) Poiché i vettori $\vec{b}_i \quad (i = 1, \dots, n)$ appartengono a $E$ e $A$ è una base, esistono $n$ scalari $\alpha^i_j \quad (j = 1, \dots, n)$ tali che $\vec{b}_i = \alpha^i_1 \vec{a}_1 + \cdots + \alpha^i_n \vec{a}_n$.

Per ogni $\vec{b}_i$, moltiplicando scalarmente per tutti i vettori di $A$, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} \vec{b}_i \cdot \vec{a}_1 = \alpha^i_1 \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 + \cdots + \alpha^i_n \vec{a}_n \cdot \vec{a}_1 = & \delta_{i1} \\ \vdots & \vdots \\ \vec{b}_i \cdot \vec{a}_n = \alpha^i_1 \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_n + \cdots + \alpha^i_n \vec{a}_n \cdot \vec{a}_n = & \delta_{in} \end{cases}$$

Questo è un sistema lineare non omogeneo (uno dei $\delta_{ij}$ è diverso da 0) di $n$ equazioni nelle $n$ incognite $(\alpha^i_1, \dots, \alpha^i_n)$; il sistema è compatibile e ha soluzione unica se e solo se il determinante della matrice $M$ dei coefficienti è non nullo

$$M = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n \cdot \vec{a}_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_n & \cdots & \vec{a}_n \cdot \vec{a}_n \end{pmatrix}$$

$M$ è anche la matrice associata alla forma bilineare simmetrica definita positiva equivalente, per definizione, al prodotto scalare:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \quad \vec{x} \cdot \vec{y} \equiv \phi(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j} \phi(\vec{a}_i, \vec{a}_j) x_i y_j = \sum_{i,j} (\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j) x_i y_j$$

dove $x_i$ e $y_i \quad (i = 1, \dots, n)$ sono le componenti di due vettori $\vec{x}$ e $\vec{y}$, rispetto alla base $A$. In forma matriciale: $\phi(\vec{x}, \vec{y}) = {}^tXMY$ dove ${}^tX$ è la matrice riga delle componenti di $\vec{x}$ e $Y$ è la matrice colonna delle componenti di $\vec{y}$.

Alla $\phi$ è associata una forma quadratica $\Phi$:

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{i,j} \phi(\vec{a}_i, \vec{a}_j) x_i x_j = {}^tXMX$$

$M$ è una matrice reale e simmetrica e un teorema dell'algebra lineare assicura l'esistenza, in $E$, di una base $A'$ diagonalizzante di $M$. Sia $D$ la matrice diagonale corrispondente a $\Phi$ rispetto alla base $A'$ e sia $X'$ la matrice colonna di $\vec{x}$ rispetto alla stessa base:

$$\Phi(\vec{x}) = {}^tX'DX'$$

Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di $M$ (e di $D$), poiché il determinante è invariante rispetto al cambiamento di base, risulta $\det(M) = \det(D) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

Allora, $\Phi(\vec{x}) = \lambda_1 (x'_1)^2 + \cdots + \lambda_n (x'_n)^2$, (dove gli $x'_i$ sono gli elementi del matrice colonna $X'$). Poiché $\Phi$ è definita, $\Phi(\vec{x}) = 0$ implica $\vec{x} = \vec{0}$, cioè:

$$\Phi(\vec{x}) = 0 \quad \to \quad \lambda_1 (x'_1)^2 + \cdots + \lambda_n (x'_n)^2 = 0 \quad \to \; \lambda_i \neq 0 \;\; (i = 1, \dots, n)$$

infatti se anche un solo $\lambda_j$ fosse nullo, esisterebbe un vettore $\vec{x}$ non nullo tale che $\Phi(\vec{x}) = 0$ (un qualunque vettore $x_j\vec{a}_j$, con $x_j \neq 0$), il che è impossibile perché $\Phi$ è definita.

Si conclude che essendo tutti i $\lambda_i$ non nulli, il determinante di $M$ è diverso da 0 e il sistema nelle incognite $\alpha^i_j$ è compatibile.

2) Per dimostrare l'indipendenza lineare del sistema di vettori $B$, di cui al punto (1), premettiamo una proprietà del prodotto scalare:

$$\forall \vec{y} \in E \quad \vec{0} \cdot \vec{y} = \phi(\vec{0}, \vec{y}) = \phi(0\vec{x}, \vec{y}) = 0\phi(\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

dove $\vec{x}$ è un qualunque vettore di $E$. Consideriamo ora la relazione

$$\alpha_1\vec{b}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{b}_n = \vec{0}$$

Moltiplicando scalarmente tale equazione per ciascun $\vec{a_j}$, si ottiene:

$$\alpha_1\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_j + \cdots + \alpha_n\vec{b}_n \cdot \vec{a}_j = \vec{0} \cdot \vec{a}_j = 0$$

da cui, tenuto conto della relazione $\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = \delta_{ij}$ , deriva:

$$\alpha_1\delta_{1j} + \cdots + \alpha_n\delta_{nj} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

quindi $\alpha_1\vec{b}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{b}_n = \vec{0}$ implica $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ e i vettori $\vec{b}_i$ sono linearmente indipendenti (def. 1.4). Il teorema è dimostrato.

Siano $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ e $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ due basi di $E$, con la proprietà $\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$; siano $\mathcal{A}$ lo spazio affine associato a $E$, con riferimento $\{O, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$, e $\mathcal{H}$ un iperpiano di $\mathcal{A}$, associato al sottospazio $E'$ di $E$; sia $\vec{v}$ un vettore di $E$ ortogonale a ogni vettore di $E'$.

Esprimiamo $\vec{v}$ nella base $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$: $\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + \cdots + v_n\vec{b}_n$.

Se $Q \in \mathcal{H} \subset \mathcal{A}$, l'insieme dei punti $P$ tali che $(P - Q) \cdot \vec{v} = 0$ descrive l'iperpiano $\mathcal{H}$ ortogonale a $\vec{v}$, passante per $Q$, con $P - Q = \vec{x} \in E'$.

Decomponendo $\vec{x}$ nella base $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$, l'equazione $(P - Q) \cdot \vec{v} = 0$ diventa:

$$v_1x_1 + \cdots + v_nx_n - (v_1x^\circ_1 + \cdots + v_nx^\circ_n) = 0$$

dove le $x_i$ e $x^\circ_i$ sono le coordinate dei punti $P$ e $Q$, rispettivamente. In sintesi:

**Proposizione 2.7** I coefficienti dell'equazione di un iperpiano $\mathcal{H}$ nel riferimento affine $\{O, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ sono le componenti di un vettore $\vec{v}$, ortogonale ad $\mathcal{H}$, rispetto ad una base $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ reciproca di $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$.

Attraverso le proposizioni 2.5 e 2.7, possiamo definire in modo naturale l'isomorfismo tra gli spazi vettoriali $E$ ed $E^*$ e formulare il

**Teorema 2.8** Sia $E$ uno spazio vettoriale euclideo; siano $A = \{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ e $B = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ due sue basi tali che $\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \dots, n)$; sia $E^*$ lo spazio vettoriale duale di $E$ e $B^* = \{\vec{b}_1^*, \dots, \vec{b}_n^*\}$ la base duale di $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$: i parametri di giacitura di un iperpiano $\mathcal{H}$, rispetto al riferimento affine $\{O, A\}$, coincidono con le componenti di una forma lineare $\vec{v}^* \in E^*$, il cui nucleo è la direzione di $\mathcal{H}$, che è in corrispondenza bijettiva con un vettore $\vec{v} \in E$, ortogonale ad $\mathcal{H}$, attraverso l'isomorfismo $\phi : E^* \to E$ definito dalle relazioni $\phi(\vec{b}_i^*) = \vec{b}_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

Utilizzando le forme lineari diviene immediatamente evidente quanto già è stato dimostrato a proposito dei coefficienti dell'equazione di un iperpiano $\mathcal{H}$ parallelo a uno o più assi coordinati. Sia infatti data la forma $f$ il cui nucleo sia il sottospazio associato a $\mathcal{H}$; se $\mathcal{H}$ è parallelo a un asse $\mathcal{A}_i$ del riferimento affine associato al sottospazio $E_i$, essendo quest'ultimo generato dal vettore $\vec{a}_i$ della base $A$, allora $E_i \subset Ker(f)$ e $\forall \vec{v} \in E_i, f(\vec{v}) = 0$. In particolare vale $f(\vec{a}_i) = 0$ e quindi, esprimendo $f$ nella base duale $B^*$, si ha:

$$\left( \sum_j^n f_j \vec{b}_j^* \right) \vec{a}_i = \sum_j^n f_j \delta_{ij} = f_i = 0$$

ma $f_i$ è anche il coefficiente di giacitura dell'iperpiano corrispondente all'asse $\mathcal{A}_i$, che risulta quindi essere nullo.

## 2.4 Applicazioni affini

Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ due spazi affini associati rispettivamente agli spazi vettoriali $E$ ed $F$. Consideriamo un'applicazione $f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}' \times \mathcal{A}'$ che trasforma coppie di punti $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ in coppie $(f(A), f(B)) \in \mathcal{A}' \times \mathcal{A}'$.

Poiché $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ sono spazi affini, alle coppie $(A, B)$ e $(f(A), f(B))$ sono associati rispettivamente i vettori $\vec{x} \in E$ e $\vec{y} \in F$; $f$ induce allora un'applicazione $\phi$ da $E$ in $F$:

$$\vec{y} = \phi(\vec{x}) \quad \to \quad f(B) - f(A) = \phi(B - A)$$

Con riferimento a quanto sopra:

**Definizione 2.8** chiamiamo *applicazione affine* l'applicazione $f$ che induce un omomorfismo $\phi \in Hom(E, F)$. Se $\phi$ è un isomorfismo, $f$ viene chiamata *affinità*.

Se $B - A = \vec{x}$, $B = A + \vec{x}$; possiamo scrivere:

$$\forall A \in \mathcal{A}, \;\; \forall \vec{x} \in E \qquad f(A + \vec{x}) = f(A) + \phi(\vec{x})$$

**Teorema 2.9** Siano $\phi \in Hom(E, F)$, $A$ un punto di $\mathcal{A}$ e $A'$ un punto di $\mathcal{A}'$; esiste una sola applicazione affine $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ che induce l'omomorfismo $\phi$ e tale che $f(A) = A'$.

**Teorema 2.10** Se $\mathcal{A}$ è uno spazio affine associato allo spazio vettoriale $E$, l'insieme $GA(E)$ delle affinità di $\mathcal{A}$ in sé ha struttura di gruppo rispetto all'operazione di composizione di applicazioni. $GA(E)$ si dice *gruppo affine* ed è isomorfo al gruppo lineare di $E$ $(GL(E))$.

(Si veda anche, più avanti, la sezione 6.2).

**Teorema 2.11** Il sottoinsieme $GA_\circ$ delle affinità di $\mathcal{A}$ in sé, che hanno uno stesso punto fisso, è un sottogruppo di $GA(E)$, detto *gruppo centroaffine*.

**Definizione 2.9** Sia $\mathcal{A}$ uno spazio affine associato a uno spazio vettoriale $E$ e sia $\vec{a}$ un vettore di $E$. Si dice *traslazione* di vettore $\vec{a}$ l'applicazione $t_{\vec{a}}: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tale che

$$\forall P \in \mathcal{A} \qquad t_{\vec{a}}(P) = P + \vec{a}$$

**Teorema 2.12** L'insieme $\mathcal{T}$ delle traslazioni di uno spazio affine $\mathcal{A}$ è un sottogruppo di $GA(E)$.

*Dimostrazione*
Si tratta di dimostrare che (1) $t_{\vec{a}}$ è un'affinità e (2) l'insieme $\mathcal{T}$ dotato dell'operazione di *applicazione successiva di traslazioni* è un gruppo.

1) $t_{\vec{a}}(Q) = Q + \vec{a}$ e $t_{\vec{a}}(P) = P + \vec{a}$
da cui: $t_{\vec{a}}(Q) = t_{\vec{a}}(P) + (Q - P) = t_{\vec{a}}(P) + \iota(Q - P)$

dove $\iota$ è l'automorfismo *identico* in $E$ $(\forall \vec{x} \in E \;\; \iota(\vec{x}) = \vec{x})$.
Poiché $\iota$ è un isomorfismo, $t_{\vec{a}}$ è un'affinità.

2) Siano $t_{\vec{a}}$ e $t_{\vec{b}} \in \mathcal{T}$, si ha:

$$(t_{\vec{a}} \circ t_{\vec{b}})P = t_{\vec{a}}[t_{\vec{b}}(P)] = t_{\vec{a}}(P + \vec{b}) = P + (\vec{b} + \vec{a}) = t_{\vec{a}+\vec{b}}(P)$$

Dunque $t_{\vec{a}} \circ t_{\vec{b}} = t_{\vec{a}+\vec{b}} \in \mathcal{T}$ e $\mathcal{T}$ è stabile rispetto alla applicazione successiva di traslazioni.

L'elemento neutro in $\mathcal{T}$ è $t_{\vec{0}} = I_{\mathcal{A}}$ (affinità *identica* in $\mathcal{A}$), infatti

$$t_{\vec{0}}(P) = P + \vec{0} = P = I_{\mathcal{A}}(P) \quad \forall P \in \mathcal{A} \;\to\; t_{\vec{0}} = I_{\mathcal{A}}$$

$t_{-\vec{a}} \circ t_{\vec{a}} = t_{\vec{a}-\vec{a}} = t_{\vec{0}}$, dunque, data $t_{\vec{a}}$, esiste in $\mathcal{T}$ $t_{-\vec{a}}$, tale che $t_{-\vec{a}} \circ t_{\vec{a}} = t_{\vec{a}} \circ t_{-\vec{a}} = t_{\vec{0}}$; $t_{-\vec{a}}$ è l'applicazione inversa di $t_{\vec{a}}$.

$\mathcal{T}$ è quindi un gruppo (commutativo) e il teorema è dimostrato.

## 2.5 Varietà invarianti

Dato un endomorfismo $f$ di $E$, alla sezione 1.4 è stata data la definizione di autospazio di $f$, che risulta essere un sottospazio di $E$ (teorema 1.22), invariante rispetto a $f$; in uno spazio affine, a tale autospazio può evidentemente essere associata una varietà affine che assume il significato di *luogo dei punti invarianti* rispetto all'applicazione affine corrispondente all'endomorfismo $f$.

Sappiamo che la dimensione dell'autospazio associato a un dato autovalore non supera la molteplicità algebrica di questo (teorema 1.26) quindi, se l'autovalore ha molteplicità 1, il corrispondente autospazio ha dimensione 1 e la varietà associata è una retta affine; se l'autovalore ha molteplicità 2 e l'endomorfismo è diagonalizzabile, allora l'autospazio ha dimensione 2 (teorema 1.27) e la varietà associata è un piano affine.

**Esempio 2.1** Siano $E$ uno spazio vettoriale di dimensione 2 e $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una sua base; sia $f \in End(E)$ definito dalle equazioni

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases}$$

La matrice associata a $f$, rispetto alla base data, è $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; calcoliamone gli autovalori:

$$|A - \lambda I_2| = 0 \;\rightarrow\; \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; (1-\lambda)^2 = 0 \;\rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

quindi $f$ ha un unico autovalore di molteplicità 2; l'autospazio corrispondente si ottiene ponendo $\lambda = 1$ nell'equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove $x$ e $y$ sono le componenti dell'autovettore rispetto alla base scelta. Risulta l'equazione $y = 0$ e quindi l'autospazio è la retta vettoriale $E_1 = \{\vec{v} \in E \;/\; \vec{v} = \alpha(1,0), \quad \alpha \in \mathcal{R}\}$; la dimensione dell'autospazio vale 1 ed è minore della molteplicità dell'autovalore, quindi l'endomorfismo *non* è diagonalizzabile; la varietà, passante per l'origine $O$ del riferimento affine, invariante rispetto a $f$ è la retta $y = 0$.

**Esempio 2.2** Con riferimento allo stesso spazio vettoriale dell'esempio 2.1, sia $f$ definito dal sistema

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \end{cases}$$

da cui, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e

$$|A - \lambda I_2| = 0 \;\rightarrow\; (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

All'autovalore $\lambda_1$ è associato l'autospazio $E_{\lambda_1} = \{\alpha(1,-1),\ \alpha \in \mathcal{R}\}$; all'autovalore $\lambda_2$ è associato l'autospazio $E_{\lambda_2} = \{\alpha(1,1),\ \alpha \in \mathcal{R}\}$. Entrambe gli autospazi hanno dimensione pari alla molteplicità dei rispettivi autovalori, e quindi l'endomorfismo è diagonalizzabile. Le varietà (per $O$) invarianti sono le rette affini $x = -y$ e $x = y$.

Vediamo adesso un caso in cui il polinomio caratteristico non sia interamente decomponibile su $\mathcal{R}$:

**Esempio 2.3** Sia $f$ un endormorfismo di uno spazio vettoriale 3-dimensionale $E$, avente come matrice associata, rispetto a una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$,

$$\text{la matrice } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Procedendo come nei due esempi precedenti:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 + 1] = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 - i \\ \lambda_3 = 1 + i \end{cases}$$

dove il polinomio caratteristico è stato decomposto nel campo $\mathcal{C}$ dei numeri complessi. All'autovalore (reale) $\lambda_1$ corrisponde il sottospazio invariante $E_1 = \{\alpha_1(1,0,0),\ \ \alpha_1 \in \mathcal{R}\}$ e, quindi, la retta affine $x = 0$. Ai due autovalori complessi coniugati corrispondono i due sottospazi monodimensionali (complessi) $E_2 = \{\alpha_2(0,i,1),\ \ \alpha_2 \in \mathcal{R}\}$ e $E_3 = \{\alpha_3(0,-i,1),\ \ \alpha_3 \in \mathcal{R}\}$, rispettivamente. I due sottospazi $E_2$ e $E_3$ sono disgiunti perché appartengono ad autovalori diversi, infatti:

$$\text{se } \vec{x} \in E_2 \cap E_3 \;\rightarrow\; \vec{x} = \alpha_2(0,i,1) \;\times\; \vec{x} = \alpha_3(0,-i,1) \;\rightarrow\; \alpha_2(0,i,1) = \alpha_3(0,-i,1)$$

da cui

$$(0, \alpha_2\, i, \alpha_2) = (0, -\alpha_3\, i, \alpha_3) \;\rightarrow\; \begin{cases} \alpha_2 = \alpha_3 \\ i\alpha_2 = -i\alpha_3 = -i\alpha_2 \;\rightarrow\; \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

dunque, se $\vec{x}$ appartiene all'intersezione dei due sottospazi, deve essere $\vec{x} = \vec{0}$, perciò i sottospazi sono disgiunti. Segue che la somma $F$ di $E_2$ e $E_3$ è diretta $(F = E_2 \oplus E_3)$ e $F$ è un sottospazio di $E$ di dimensione 2.

I vettori $\vec{v}_2 = (0, i, 1)$ e $\vec{v}_3 = (0, -i, 1)$ possono evidentemente essere scelti come basi rispettivamente di $E_2$ ed $E_3$; ponendo

$$\begin{cases} \vec{y} = -\frac{1}{2}\, i(\vec{v}_2 - \vec{v}_3) = (0, 1, 0) \\ \vec{z} = \frac{1}{2}(\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

si ottengono due vettori reali $(\vec{y}, \vec{z})$ che, si dimostra facilmente, sono generatori di $F$ e sono linearmente indipendenti, cioè, sono una base di $F$. Si noti che $\vec{y}$ e $\vec{z}$ *non* sono autovettori di $f$, così come *non* lo è una loro qualunque combinazione lineare a coefficienti reali; quindi, qualunque vettore reale di $F$ non è un autovettore di $f$. Tuttavia ogni vettore di $F$ si può esprimere come combinazione lineare di due vettori complessi, autovettori di $f$, e risulta:

$$\forall \vec{v} \in F \quad f(\vec{v}) = f(\alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3) = \alpha_2 f(\vec{v}_2) + \alpha_3 f(\vec{v}_3) = (1 - i)\alpha_2 \vec{v}_2 + (1 + i)\alpha_3 \vec{v}_3$$

da cui, $\forall \vec{v} \in F$, $f(\vec{v}) \in F$. In conclusione, un vettore $\vec{v} \in F$ reale (cioè, combinazione lineare reale dei due vettori reali $\vec{y}$, $\vec{z}$, base di $F$) non è un autovettore di $f$, ma la sua immagine $f(\vec{v})$ appartiene ancora a $F$. Si dice pertanto che $F$ è un *sottospazio stabile* di $f$ e la corrispondente varietà è una *varietà stabile*.

Il caso discusso nell'esempio 2.3 è generale e si presenta ogni qual volta il polinomio caratteristico di un endomorfismo non è interamente decomponibile su $\mathcal{R}$: a ogni coppia di autovalori complessi coniugati, di $f$, corrisponde un sottospazio stabile 2-dimensionale.

Sia $\{O, B\}$ un riferimento affine; per quanto visto (definizione 2.4), se $P = O + \vec{x}$, le coordinate di $P$ sono l'insieme ordinato delle componenti di $\vec{x}$ rispetto alla base $B$. Sia $f$ un'applicazione affine associata all'endomorfismo $\phi$, tale che $f(O) = O$; si ha:

$$f(P) - f(O) = \phi(\vec{x}) \;\rightarrow\; f(P) = O + \phi(\vec{x})$$

Se $X$ è il vettore colonna delle componenti di $\vec{x}$ e $F$ è la matrice rappresentativa dell'endomorfismo $\phi$ rispetto alla base $B$, il punto $Q = f(P)$ ha coordinate $Q = F\,X$ ($O$ è in tal caso il vettore colonna a elementi nulli), vale a dire:

**Proposizione 2.13** La matrice $F$ rappresentativa di un'applicazione affine $f$, che lascia fissa l'origine di un riferimento $\{O, B\}$, coincide con quella rappresentativa dell'endomorfismo $\phi$ associato a $f$, rispetto alla base $B$.

In base alla proposizione 2.13, il luogo dei punti invarianti rispetto a un'applicazione affine, che lascia fissa l'origine, è calcolabile dall'equazione matriciale $F\,X = X$.

# Capitolo 3

# Reticoli

## 3.1 Definizioni e proprietà fondamentali

Sia $E$ uno spazio vettoriale e $S = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ una sua base. Costruiamo l'insieme $\Lambda$ delle combinazioni lineari a coefficienti interi degli $\vec{a}_i$:

$$\Lambda = \{\vec{v} \in E \ / \ \vec{v} = z_1\vec{a}_1 + \cdots + z_n\vec{a}_n\,, \quad \forall z_i \in \mathcal{Z}\}$$

$\Lambda$ è uno $\mathcal{Z}$-modulo. Notiamo esplicitamente che $\Lambda$ non è uno spazio vettoriale.

**Definizione 3.1** Dicesi *reticolo* l'insieme ($\Lambda^R$) dei punti di uno spazio affine $\mathcal{A}$, associato a $E$, tali che $\forall A, B \in \Lambda^R, \quad B - A \in \Lambda$. Fissato $A \in \mathcal{A}$:

$$\Lambda^R = \{B \in \mathcal{A} \ / \ B = A + \vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in \Lambda\}$$

$A \in \Lambda^R$ infatti $\vec{0} \in \Lambda$ e $B = A + \vec{0} = A$.
$\Lambda^R$ non è uno spazio affine ma è un sottoinsieme di $\mathcal{A}$.

**Definizione 3.2** Il sistema $S$ di $n$ vettori di $E$, generatori di $\Lambda$, si dice *base del reticolo* (oppure *base reticolare*). Le varietà di $\mathcal{A}$, passanti per l'origine del riferimento affine $(O, B)$, associate agli $n$ sottospazi 1-dimensionali generati dai vettori di $B$, si dicono *assi reticolari* (oppure *assi cristallografici*).

Costruiamo l'insieme $\mathcal{T}_\Lambda$ di tutte le traslazioni $t_{\vec{v}}$, con $\vec{v} \in \Lambda$. Si dimostra facilmente che $\mathcal{T}_\Lambda$ è un gruppo, sottogruppo di $\mathcal{T}$.

Definiamo una bijezione $\phi$ tra i due gruppi $\Lambda$ e $\mathcal{T}_\Lambda$ che associa a ogni $\vec{v} \in \Lambda$, uno, e un solo, elemento $t_{\vec{v}} \in \mathcal{T}_\Lambda$ e mostriamo che tale applicazione è un isomorfismo.

Poniamo, per definizione, $z_i t_{\vec{a}_i} = t_{z_i\vec{a}_i}$, dove $z_i \in \mathcal{Z}$. Questa operazione (prodotto di un numero intero per un'affinità) è una legge di composizione esterna su $\mathcal{Z} \times \mathcal{T}_\Lambda \to \mathcal{T}_\Lambda$; diamone una giustificazione *euristica*:

se $i \in \mathcal{N}^*$ $\quad (\mathcal{N}^* = \mathcal{N} - \{0\})$, $it_{\vec{a}}$ è un modo per indicare l'applicazione successiva di $i$ traslazioni $t_{\vec{a}}$:

$$it_{\vec{a}}(P) = (\underbrace{t_{\vec{a}} \circ t_{\vec{a}} \circ \cdots \circ t_{\vec{a}}}_{i \text{ volte}})P = t_{\vec{a}}\{t_{\vec{a}} \cdots [t_{\vec{a}}(P)]\} = P + \vec{a} + \cdots + \vec{a} = P + i\vec{a} = t_{i\vec{a}}$$

Quindi, se $i \in \mathcal{N}^*$, $it_{\vec{a}}$ è definita ed è uguale a $t_{i\vec{a}}$.

Poiché $\mathcal{T}_\Lambda$ è un gruppo, $\forall t_{\vec{a}} \in \mathcal{T}_\Lambda$, $\exists t_{-\vec{a}} \in \mathcal{T}_\Lambda \ / \ t_{\vec{a}} \circ t_{-\vec{a}} = t_{\vec{0}}$ e si può porre, per estensione, $zt_{\vec{a}} = t_{z\vec{a}}$, con $z \in \mathcal{Z}^*$: se $z < 0$, $zt_{\vec{a}} = |z|t_{-\vec{a}} = t_{-|z|\vec{a}}$ .

Per convenzione poniamo poi $0t_{\vec{a}} = t_{0\vec{a}} = t_{\vec{0}}$, e, con ciò, l'operazione è definita per ogni $z \in \mathcal{Z}$.

Sia $\vec{v} \in \Lambda$, $\rightarrow$ $\vec{v} = z_1\vec{a}_1 + \cdots + z_n\vec{a}_n$ $\quad z_i \in \mathcal{Z}$ $\quad (i = 1, \ldots, n)$: possiamo scrivere:

$$\phi(\vec{v}) = t_{\vec{v}} = t_{z_1\vec{a}_1 + \cdots + z_n\vec{a}_n} = t_{z_1\vec{a}_1} \circ \cdots \circ t_{z_n\vec{a}_n} = z_1 t_{\vec{a}_1} \circ \cdots \circ z_n t_{\vec{a}_n} = z_1\phi(\vec{a}_1) \circ \cdots \circ z_n\phi(\vec{a}_n)$$

vale a dire: $\phi(z_1\vec{a}_1 + \cdots + z_n\vec{a}_n) = z_1\phi(\vec{a}_1) \circ \cdots \circ z_n\phi(\vec{a}_n)$, e quindi l'applicazione $\phi$ è lineare, cioè $\phi$ un isomorfismo.

Abbiamo ora una definizione alternativa di $\Lambda^R$:

$$\Lambda^R = \{A \in \mathcal{A} \ / \ A = t_{\vec{v}}(O), \quad \forall t_{\vec{v}} \in \mathcal{T}_\Lambda\}$$

o, in modo più compatto:

$$\Lambda^R = \mathcal{T}_\Lambda(O)$$

dove $O$ è un punto di $\mathcal{A}$ (*origine* del reticolo). Si dice che $\Lambda^R$ è *l'orbita* del gruppo $\mathcal{T}_\Lambda$ delle traslazioni.

Sia $E$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ e $\mathcal{A}$ uno spazio affine associato; si fissi in $\mathcal{A}$ un punto $O$ detto origine ed $n$ punti $\{P_1, \ldots, P_n\}$ tali che $P_i - O = \vec{a}_i$ $\quad (i = 1, \ldots, n)$. Se i vettori $\vec{a}_i$ sono linearmente indipendenti costituiscono una base di $E$ (teorema 1.3).

Sia $\Lambda$ generato dai vettori $\vec{a}_i$; i punti $P \in \Lambda^R$ hanno coordinate intere nel riferimento affine $\{O, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ che coincidono con le componenti dei vettori $\vec{v} \in \Lambda$ rispetto alla base $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$.

**Definizione 3.3** Sia $\mathcal{A}$ uno spazio affine di dimensione $n$; si dice *iperpiano reticolare* ($\mathcal{H}^R$) l'intersezione di $\Lambda^R$ con una varietà lineare affine ($\mathcal{A}'$) di $\mathcal{A}$ avente dimensione $n - 1$: $\mathcal{H}^R = \Lambda^R \cap \mathcal{A}'$.

Poiché ogni punto $P \in \mathcal{H}^R$ appartiene anche ad $\mathcal{A}'$, l'equazione di un iperpiano reticolare è dello stesso tipo di quella di un iperpiano affine, vale a dire:

$$A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + A_{n+1} = 0$$

con la condizione espressa dal seguente teorema:

**Teorema 3.1** Sia $\mathcal{A}$ uno spazio affine e sia $\{O, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ un suo riferimento; costruito $\Lambda^R$ a partire dagli stessi vettori $\vec{a}_i$ del riferimento, i coefficienti $A_i$ dell'equazione di un iperpiano reticolare sono numeri interi.

*Dimostrazione*
Siano $(x_1^j, \ldots, x_n^j)$ le coordinate (intere) di $n$ punti $P_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ appartenenti ad $\mathcal{H}^R$, nel riferimento affine fissato. Il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + A_{n+1} & = & 0 \\ A_1x_1^1 + \cdots + A_nx_n^1 + A_{n+1} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1x_1^n + \cdots + A_nx_n^n + A_{n+1} & = & 0 \end{cases}$$

di $n+1$ equazioni nelle $n+1$ incognite $A_i$, ha soluzione diversa da quella banale se e solo se la matrice dei coefficienti ha rango minore di $n+1$, cioè:

$$\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n & 1 \\ x_1^1 & \cdots & x_n^1 & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^n & \cdots & x_n^n & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + A_{n+1} = 0$$

dove $A_i$ è il minore estratto dalla matrice

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & \cdots & x_n^1 & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^n & \cdots & x_n^n & 1 \end{pmatrix}$$

eliminando la $i$-esima colonna. Poiché ogni $A_i$ è il determinante di una matrice a valori in $\mathcal{Z}$, è intero. Il teorema è dimostrato.

L'inverso dell'asserto di cui al teorema 3.1, non è tuttavia necessariamente valido, nel senso che non tutte le equazioni lineari in $n$ variabili, a coefficienti interi, rappresentano iperpiani reticolari su spazi affini $n$-dimensionali; tra i coefficienti devono infatti sussistere le relazioni stabilite dai due teoremi seguenti:

**Teorema 3.2** L'equazione $A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + 1 = 0$ rappresenta un iperpiano reticolare solo se i coefficienti (interi) $A_1, \ldots, A_n$ sono primi tra loro.

*Dimostrazione*
Supponiamo che $A_1, \dots, A_n$ non siano primi tra loro; allora esiste un intero $t > 1$ tale che $B_i = A_i/t$, con $B_i \in \mathcal{Z}$, $(i = 1, \dots, n)$. Segue:

$$A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + 1 = 0 \;\rightarrow\; B_1x_1 + \cdots + B_nx_n = -1/t$$

Poiché $t > 1$, $1/t$ non può essere un numero intero, perciò l'equazione $B_1x_1 + \cdots + B_nx_n = -1/t$ non puó essere soddisfatta da $x_i$ interi e quindi non rappresenta un iperpiano reticolare.

**Teorema 3.3** L'equazione $A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + A_{n+1} = 0$ rappresenta un iperpiano reticolare solo se $A_{n+1}$ è un multiplo del *massimo comun divisore* (MCD) dei coefficienti $A_1, \dots, A_n$.

*Dimostrazione*
Sia $t$ il MCD degli $A_1, \dots, A_n$; posto $B_i = A_i/t \quad (i = 1, \dots, n)$ segue:

$$A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + A_{n+1} = 0 \;\rightarrow\; B_1x_1 + \cdots + B_nx_n = -A_{n+1}/t$$

L'ultima equazione è soddisfatta da $x_i$ interi solo se $A_{n+1}/t$ è un numero intero, cioè solo se $A_{n+1}$ è un multiplo di $t$.

L'insieme $\{A_1, \dots, A_n\}$ definisce la *giacitura* dell'iperpiano reticolare.

Sia $\mathcal{A}$ uno spazio affine associato ad uno spazio vettoriale $E$; siano $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ due iperpiani affini di $\mathcal{A}$ di direzioni $E_1$ ed $E_2$ rispettivamente. Siano $\mathcal{H}_1^R$ e $\mathcal{H}_2^R$ due iperpiani reticolari, intersezione di $\Lambda^R$ con $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, rispettivamente: diciamo che i due iperpiani sono paralleli se $E_1 = E_2$ (in analogia con la def. 2.5).

Se $\mathcal{H}_1^R$ è parallelo a $\mathcal{H}_2^R$ o coincide con quest'ultimo o non ha con esso alcun punto in comune (proposizione 2.3).

Poniamo il caso $\mathcal{H}_1^R$ parallelo ad $\mathcal{H}_2^R$ e $\mathcal{H}_1^R \cap \mathcal{H}_2^R = \emptyset$; questo significa che il sistema di due equazioni in $n$ incognite $(x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{cases} A_1x_1 + \cdots + A_nx_n = -A_{n+1} \\ A'_1x_1 + \cdots + A'_nx_n = -A'_{n+1} \end{cases}$$

(dove gli $A_i$ e $A'_i$ sono i coefficienti delle equazioni dei due iperpiani $\mathcal{H}_1^R$ e $\mathcal{H}_2^R$, rispettivamente) non ha soluzioni (è incompatibile), cioè il suo rango è minore di 2 (se fosse 2, il sistema sarebbe compatibile e indeterminato); quindi ogni determinante del secondo ordine estratto dalla matrice del sistema è nullo:

$$\begin{vmatrix} A_i & A_j \\ A'_i & A'_j \end{vmatrix} = 0 \;\;\rightarrow\;\; A_iA'_j = A_jA'_i \;\;\rightarrow\;\; \frac{A_i}{A'_i} = \frac{A_j}{A'_j} = k$$

Se $\mathcal{H}_1^R \cap \mathcal{H}_2^R \neq \emptyset$ e $\mathcal{H}_1^R \parallel \mathcal{H}_2^R$ (il simbolo $\parallel$ indica la relazione di parallelismo), allora $\mathcal{H}_1^R$ coincide con $\mathcal{H}_2^R$ e le due equazioni sono proporzionali (quindi anche $A_{n+1}/A'_{n+1} = k$).

La relazione di parallelismo è una relazione di equivalenza. Indichiamo con $\{\mathcal{H}_i^R\}_\parallel$ le classi di equivalenza generate da tale relazione.

Per quanto visto, iperpiani con parametri di giacitura proporzionali sono paralleli e quindi identificano la stessa classe di equivalenza. Dato un insieme di parametri $\{A_1, \ldots, A_n\}$ di un iperpiano $\mathcal{H}^R$, sia $t$ il loro MCD: l'insieme $\{B_1, \ldots, B_n\} = \{A_1/t, \ldots, A_n/t\}$ rappresenta ancora un iperpiano appartenente alla stessa classe di $\mathcal{H}^R$, avente parametri *primi* tra loro; tale iperpiano viene generalmente scelto come rappresentante della classe di equivalenza a cui appartiene.

Se lo spazio affine $\mathcal{A}$ ha dimensione 3, solitamente si indicano con $h$, $k$ ed $l$ i parametri di giacitura delle classi $\{\mathcal{H}^R\}_\parallel$, dette *famiglie di piani*; $h$, $k$ ed $l$ prendono il nome di *indici di Miller*.

## 3.2 Reticolo reciproco

Se $\mathcal{A}$ è uno spazio affine associato allo spazio vettoriale euclideo $E$, sappiamo che per ogni $\{\mathcal{H}^R\}_\parallel$ con parametri di giacitura $\{A_1, \ldots, A_n\}$ rispetto a un riferimento $(O, A)$ di $\mathcal{A}$, esiste un vettore normale ad $\{\mathcal{H}^R\}_\parallel$ che ha componenti $A_1, \ldots, A_n$ rispetto alla base $B$ reciproca di $A$. Tale vettore è in corrispondenza bijettiva con un vettore dello spazio vettoriale $E^*$, duale di $E$. Segue che:

$$\forall \{\mathcal{H}^R\}_\parallel \subset \Lambda^R, \quad \exists\, \vec{v}^* \in E^* \;/\; \vec{v}^* = A_1 \vec{b}_1^* + \cdots + A_n \vec{b}_n^*$$

dove $\{\vec{b}_1^*, \ldots, \vec{b}_n^*\}$ è la base duale di $A$.

In $E^*$ possiamo costruire l'insieme $\Lambda^*$ come

$$\Lambda^* = \left\{ \vec{v}^* \in E^* \;/\; \vec{v}^* = z_1 \vec{b}_1^* + \cdots + z_n \vec{b}_n^*\,, \quad \forall z_i \in \mathcal{Z}, \quad (i = 1, \ldots, n) \right\}$$

L'insieme $(\Lambda^*, +)$, dove $+$ è la restrizione a $\Lambda^*$ della *somma* definita su $E^*$, è uno $\mathcal{Z}$-modulo. Notiamo esplicitamente che $(\Lambda^*, +)$ è una sottostruttura di $E^*$. Attraverso l'isomorfismo $\phi : E^* \to E$, di cui al teorema 2.8, possiamo costruire la sottostruttura immagine

$$\phi(\Lambda^*) = \{ \vec{v} \in E \;/\; \vec{v} = \phi(\vec{v}^*), \quad \forall \vec{v}^* \in \Lambda^* \}$$

Poiché $\phi$ è un isomorfismo e $\Lambda^*$ è uno $\mathcal{Z}$-modulo, $\phi(\Lambda^*)$ è uno $\mathcal{Z}$-modulo ed è una sottostruttura di $E$. Per ogni $\vec{v} \in \phi(\Lambda^*)$, vale:

$$\vec{v} = \phi(\vec{v}^*) = \phi(z_1\vec{b}_1^* + \cdots + z_n\vec{b}_n^*) = z_1\vec{b}_1 + \cdots + z_n\vec{b}_n \quad z_i \in \mathcal{Z},\ \vec{b}_i = \phi(\vec{b}_i^*) \ \ (i = 1, \ldots, n)$$

dove i vettori $\vec{b}_i$ sono i reciproci dei vettori della base $A$.

In analogia con la def. 3.1, tramite $(\Lambda^*, +)$ arriviamo alla

**Definizione 3.4** Dicesi *reticolo reciproco*, l'insieme $\Lambda^{R*}$ definito come:

$$\Lambda^{R*} = \{P \in \mathcal{A} \ / \ P = A + \vec{v}, \quad \forall \vec{v} \in \phi(\Lambda^*)\}$$

con $A \in \mathcal{A}$. I reticoli $\Lambda^R$ e $\Lambda^{R*}$ sono due sottoinsiemi di spazi affini associati a uno *stesso* spazio vettoriale euclideo $E$. $\Lambda^R$ viene anche chiamato *reticolo diretto.*

**Definizione 3.5** Sia $\Lambda^R$ un reticolo costruito su uno spazio affine $\mathcal{A}$ associato a uno spazio vettoriale $E$; dicesi *reticolo duale* di $\Lambda^R$ il reticolo costruito su uno spazio affine associato allo spazio vettoriale $E^*$ duale di $E$.

Si veda l'esempio 3.4 per una discussione sull'uso dei reticoli reciproco e duale.

## 3.3 Metriche su reticoli

Sia $E$ uno spazio vettoriale euclideo e siano $\vec{x}$ e $\vec{y}$ due vettori di $E$; il prodotto scalare $\vec{x} \cdot \vec{y}$ (forma bilineare simmetrica che definisce lo spazio vettoriale euclideo $E$) è esprimibile attraverso la relazione $\vec{x} \cdot \vec{y} = \phi(\vec{x}, \vec{y}) = (\sum_h x_h\vec{a}_h)(\sum_k y_k\vec{a}_k) = \sum_{h,k} x_h y_k g_{hk}$, dove gli scalari $g_{hk} = \vec{a}_h \cdot \vec{a}_k = \phi(\vec{a}_h, \vec{a}_k)$ sono gli elementi della *matrice metrica* $G$ e i vettori $\vec{a}_i$ appartengono a una base $A$ di $E$. Possiamo anche scrivere, in notazione matriciale, $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{h,k} x_h g_{hk} y_k = {}^tXGY$ dove ${}^tX$ e $Y$ sono rispettivamente le matrici riga e colonna delle componenti di $\vec{x}$ e $\vec{y}$. La matrice $G$ determina in modo univoco le proprietà metriche del reticolo (o, più in generale, dello spazio vettoriale su cui si definisce il prodotto scalare); nota $G$ è immediatamente calcolabile ogni prodotto scalare e, quindi, ogni distanza tra coppie di punti di uno spazio affine (associato a $E$) su cui è costruito il reticolo.

Sia $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ la base reciproca di $A$; poiché i $\vec{b}_i$ sono vettori di $E$ e poiché $A$ è una base in $E$, vale:

$$\forall \vec{b}_i \in B, \quad \vec{b}_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\vec{a}_k$$

da cui, moltiplicando scalarmente per ciascun vettore di $A$, risulta

$$\vec{b}_i \cdot \vec{a}_j = \sum_k \alpha_{ik}\vec{a}_k \cdot \vec{a}_j = \sum_k \alpha_{ik} g_{kj} = (\alpha\, G)_{ij} = \delta_{ij} \ \rightarrow \ \alpha\, G = I$$

dove si sono indicate con $\alpha$, $G$ e $I$, rispettivamente le matrici delle componenti $\alpha_{ij}$, la matrice metrica (relativa alla base $A$) e la matrice identità. Da ciò segue $\alpha = G^{-1}$.

La matrice metrica $G^*$, ha elementi

$$g^*_{ij} = \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = \sum_k \alpha_{ik}\vec{a}_k \cdot \sum_l \alpha_{jl}\vec{a}_l = \sum_{k,l} \alpha_{ik} g_{kl} {}^t\alpha_{lj} = (\alpha\, G\, {}^t\alpha)_{ij}$$

da cui, $G^* = \alpha\, G\, {}^t\alpha = G^{-1}\, G\, {}^tG^{-1} = {}^tG^{-1} = G^{-1}$ (la matrice $G$ è simmetrica). In definitiva:

**Teorema 3.4** Sia $E$ uno spazio vettoriale euclideo e sia $G$ la matrice metrica relativa a una base $A$ di $E$; la matrice metrica $G^*$, relativa alla base $B$ reciproca della base $A$, è data dalla relazione $G^* = G^{-1}$.

### 3.3.1 Celle elementari

Sia $E_2$ uno spazio vettoriale 2-dimensionale euclideo e $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una sua base ortonormale, certo esistente; definiamo l'applicazione $f : E_2 \times E_2 \to \mathcal{R}$ tale che, dati in $E_2$ due vettori, $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, linearmente indipendenti,

$$f(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \sqrt{\|\vec{a}_1\|^2\, \|\vec{a}_2\|^2 - (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)^2} = S$$

Sia $A$ la matrice rappresentativa del sistema di vettori $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ nella base $B$; con facili passaggi si ricava che $S = \det(A)$.

Si dimostra facilmente che, nello spazio dei vettori della geometria elementare, al numero $S$ corrisponde l'area del parallelogrammo individuato dai due vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2$.

Nello spazio vettoriale euclideo 3-dimensionale $E_3$, si può definire un'applicazione analoga $f : E_3^3 \to \mathcal{R}$ tale che, dato un sistema di 3 vettori linearmente indipendenti, $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$,

$$f(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) = V$$

dove $\times$ indica l'operazione di prodotto vettoriale[1]. Se $A$ è la matrice rappresentativa del sistema di vettori $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$, rispetto ad una base ortonormale, dalle proprietà del *prodotto misto* di 3 vettori, segue facilmente che $V = \det(A)$.

In geometria, al numero $V$ corrisponde il volume del parallelepipedo individuato dai 3 vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

[1]Il prodotto vettoriale di due vettori è l'unica applicazione bilineare alternante ($f$, definita su $E_3$) tale che, comunque scelti tre vettori base di $E_3$, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, vale $f(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \vec{e}_3$, $f(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \vec{e}_1$, $f(\vec{e}_3, \vec{e}_1) = \vec{e}_2$. Vale la relazione $f(\vec{a}, \vec{b}) \equiv \vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}\|\, \|\vec{b}\| \sin\theta\, \vec{u}$, dove $\theta$ è l'angolo compreso tra i due vettori $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{u}$ è un versore normale al sottospazio da questi individuato.

**Definizione 3.6** Sia $E$ uno spazio vettoriale euclideo e $\mathcal{A}$ uno spazio affine associato; siano $\{\vec{a}_i\}_{i=1,n}$ $n$ vettori linearmente indipendenti di $E$ su cui è costruito lo $\mathcal{Z}$-modulo $\Lambda$ e $Q \in \mathcal{A}$: chiamiamo *cella elementare primitiva* l'insieme $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ dei punti $P$ tali che $P = Q + c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_n\vec{a}_n$, con $c_i \in [0,1)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

**Definizione 3.7** Chiamiamo *volume* della cella elementare $\mathcal{C}$ lo scalare $V = \det(A)$, dove $A$ è la matrice rappresentativa (rispetto a una base ortonormale) del sistema di vettori generatori dello $\mathcal{Z}$-modulo $\Lambda$ su cui è definito il reticolo $\Lambda^R$.

Detta $a_{ik}$ la $k$-esima componente del vettore $\vec{a}_i$ rispetto alla base ortonormale $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$, abbiamo:

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \sum_{k,\ell} a_{ik}a_{j\ell}\vec{e}_k\vec{e}_\ell = \sum_{k,\ell} a_{ik}a_{j\ell}\delta_{k\ell} = \sum_k a_{ik}{}^t a_{kj}$$

Vale a dire:

$$(G)_{ij} = g_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = (A\,{}^tA)_{ij} \ \rightarrow \ G = A\,{}^tA$$

dove $A$ è la matrice delle componenti $a_{ij}$. Poiché $V = \det(A)$, risulta:

$$\det(G) = det(A) \cdot \det({}^tA) = [\det(A)]^2 = V^2$$

In sintesi:

**Teorema 3.5** Con riferimento alle definizioni 3.6 e 3.7, il determinante della matrice metrica, relativa al sistema di vettori generatori di $\Lambda$, è pari al quadrato del volume della cella elementare del reticolo $\Lambda^R$ associato.

Sia $E$ uno spazio vettoriale euclideo $n$ dimensionale; scelti in $E$ un sistema $A$ di $n$ vettori linearmente indipendenti $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ (base di $E$), costruiamo lo $\mathcal{Z}$-modulo $\Lambda = \{\vec{v} \in E \ / \ \vec{v} = z_1\vec{a}_1 + \cdots + z_n\vec{a}_n, \quad z_i \in \mathcal{Z}\}$. Sia $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ un sistema di $n$ vettori linearmente indipendenti appartenenti a $\Lambda$: $\forall\vec{b}_i \in B$, $\vec{b}_i = \sum_j z_{ij}\vec{a}_j$. Se $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ è una base ortonormale di $E$, risulta $\vec{a}_j = \sum_k \alpha_{jk}\vec{e}_k$ $(j = 1, n)$, da cui:

$$\forall\vec{b}_i \in B, \quad \vec{b}_i = \sum_{j,k} z_{ij}\alpha_{jk}\vec{e}_k = \sum_k \left\{\sum_j z_{ij}\alpha_{jk}\right\}\vec{e}_k = \sum_k \beta_{ik}\vec{e}_k$$

dove la matrice $\beta = \{\beta_{ij}\}_{i,j=1,n}$ (rappresentativa del sistema $B$ nella base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$) è il prodotto delle matrici $z = \{z_{ij}\}$ e $\alpha = \{\alpha_{ij}\}$ rappresentative, rispettivamente, del sistema $B$ nella base $A$ e del sistema $A$ nella base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$. Poiché il determinante del prodotto di due matrici è pari al prodotto dei determinanti delle stesse, vale

$$V_B = \det(\beta) = \det(z \cdot \alpha) = \det(z)\ \det(\alpha) = \det(z)\, V_A$$

Essendo $z$ una matrice a valori in $\mathcal{Z}$, il suo determinante è un numero intero; segue quindi il

**Teorema 3.6** Sia $V_A$ il volume della cella elementare primitiva di un reticolo $\Lambda^R$ associato a uno $\mathcal{Z}$-modulo $\Lambda$: il volume $V_B$ di ogni altra cella, costruita a partire da un diverso insieme $B$ di vettori appartenenti a $\Lambda$, è un multiplo di $V_A$.

Una cella con volume multiplo di una cella elementare primitiva è detta *non primitiva*.

Sia $B$ un sistema di $n$ vettori linearmente indipendenti appartenenti a uno $\mathcal{Z}$-modulo $\Lambda_A$ generato dal sistema di vettori $A$; consideriamo lo $\mathcal{Z}$-modulo $\Lambda_B$ generato da $B$: è facile dimostrare che $\vec{v} \in \Lambda_B \rightarrow \vec{v} \in \Lambda_A$, cioè che $\Lambda_B \subseteq \Lambda_A$.

Un generico vettore $\vec{v} \in \Lambda_A$ appartiene pure a $\Lambda_B$ se e solo se ogni vettore di $A$ è esprimibile come combinazione lineare a coefficienti in $\mathcal{Z}$ dei vettori del sistema $B$, cioè se il sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{b}_1 & = & z_{11}\vec{a}_1 + \cdots + z_{1n}\vec{a}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{b}_n & = & z_{n1}\vec{a}_1 + \cdots + z_{nn}\vec{a}_n \end{array} \right. \qquad \rightarrow \quad b = z\,a$$

(con $a$ e $b$ si sono indicati i vettori colonna le cui componenti sono i vettori dei sistemi $A$ e $B$ rispettivamente, mentre con $z$ si è indicata la matrice dei coefficienti $z_{ij}$) è invertibile in $a = z^{-1}\,b$, essendo $z^{-1}$ a valori in $\mathcal{Z}$. La matrice $z^{-1}$ ha elementi interi se e solo se $|\det(z)| = \Delta = 1$ (infatti, se fosse $\Delta > 1$, $|\det(z^{-1})| = 1/\Delta < 1$, il che è impossibile se $z^{-1}$ è a valori in $\mathcal{Z}$).

In tal caso, $\Lambda_A \subseteq \Lambda_B$ e, tenuto conto della precedente inclusione, si ha $\Lambda_A = \Lambda_B$. In definitiva:

**Teorema 3.7** Sia $\Lambda_A^R$ un reticolo costruito sullo $\mathcal{Z}$-modulo $\Lambda_A$ generato dal sistema di vettori $A$; sia $\Lambda_B^R$ un secondo reticolo costruito a partire da un sistema di vettori $B \subset \Lambda_A$: $\Lambda_A^R = \Lambda_B^R$ se e solo se le celle elementari $\mathcal{C}_A$ e $\mathcal{C}_B$, individuate sui due reticoli, hanno lo stesso volume.

### 3.3.2 Prodotti vettoriali in $E_3$

Tenuto conto della *simmetria* del prodotto scalare, per gli elementi di $G$ vale la relazione $g_{ij} = g_{ji}$; in $E_3$, con una base $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ e base reciproca $B^* = \{\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*\}$, gli elementi indipendenti di $G$ sono 6:

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & g_6 & g_5 \\ g_6 & g_2 & g_4 \\ g_5 & g_4 & g_3 \end{pmatrix}$$

dove $g_1 = a^2$, $g_2 = b^2$, $g_3 = c^2$, $g_4 = bc\cos\alpha$, $g_5 = ac\cos\beta$, $g_6 = ab\cos\gamma$ (per brevità, si sono indicati con $a$, $b$, $c$ i moduli dei corrispondenti vettori). Con questa notazione, tenuto conto del teorema 3.5, risulta per $G^*$:

$$G^* = G^{-1} = \frac{1}{V^2}\begin{pmatrix} g_2g_3 - g_4^2 & g_4g_5 - g_6g_3 & g_6g_4 - g_2g_5 \\ - & g_1g_3 - g_5^2 & g_6g_5 - g_1g_4 \\ - & - & g_1g_2 - g_6^2 \end{pmatrix}$$

Il prodotto vettoriale $\vec{a} \times \vec{b}$ è un vettore normale sia ad $\vec{a}$ sia a $\vec{b}$, allora deve essere un vettore parallelo a $\vec{c}^*$ (per definizione di base reciproca) di modulo pari a $ab \sin\gamma$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = ab \sin\gamma \, \frac{\vec{c}^*}{c^*}$$

($\vec{c}^*/c^*$ è un versore parallelo a $\vec{c}^*$), ma

$$c^* = \sqrt{g_3^*} = \left[\frac{1}{V^2}(a^2b^2 - a^2b^2\cos^2\gamma)\right]^{1/2} = \frac{ab\sin\gamma}{V} \;\rightarrow\; \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{V} = \vec{c}^*$$

Relazioni analoghe valgono ovviamente anche per gli altri prodotti vettoriali. In definitiva (tenuto conto dell'*anticommutatività* del prodotto vettoriale: $\vec{c} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{c}$):

**Teorema 3.8** Sia $E$ uno spazio vettoriale 3-dimensionale, $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ una sua base, con reciproca $B^* = \{\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*\}$, si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{V} &= \vec{c}^* \\ \dfrac{\vec{c} \times \vec{a}}{V} &= \vec{b}^* \\ \dfrac{\vec{b} \times \vec{c}}{V} &= \vec{a}^* \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\vec{a}^* \times \vec{b}^*}{V^*} &= \vec{c} \\ \dfrac{\vec{c}^* \times \vec{a}^*}{V^*} &= \vec{b} \\ \dfrac{\vec{b}^* \times \vec{c}^*}{V^*} &= \vec{a} \end{cases}$$

### 3.3.3 Piani reticolari in $\mathcal{A}_3$

Siano $E$ uno spazio vettoriale 3-dimensionale, $\mathcal{A}$ uno spazio affine a esso associato e $\Lambda^R \subset \mathcal{A}$ un reticolo; consideriamo due piani reticolari, $\mathcal{H}_1^R, \mathcal{H}_2^R$, paralleli, ma non coincidenti, di indici milleriani $h, k, l$ (nel seguito indicati con la *tripla* ordinata $(hkl)$), relativamente a un riferimento affine $\{O, B\}$, essendo l'insieme $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ una base di $E$ nonché il sistema di generatori dello $\mathcal{Z}$-modulo $\Lambda$, a cui è associato il reticolo $\Lambda^R$ di origine $O$. Sia $\mathcal{H}_1^R$ passante per $O$; la retta $r$ normale ai due piani e passante per un punto $P \in \mathcal{H}_2^R$ è una varietà affine associata al sottospazio vettoriale $E_r$ generato dal vettore $h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*$, essendo $B^* = \{\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*\}$ la base reciproca di $B$. Sia $Q = \mathcal{H}_1^R \cap r$; chiamiamo *distanza* tra i due piani $\mathcal{H}_1^R, \mathcal{H}_2^R$, il numero $d(P, Q)$, vale a dire: la distanza tra i punti $P$ e $Q$, rispettivamente di $\mathcal{H}_2^R$ e $\mathcal{H}_1^R$, giacenti sulla stessa retta normale ai piani (figura 3.1).

Sia $\vec{n} \in E_r$; è facile dimostrare che

$$d(P, Q) = \frac{|(P - O) \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Siano $(x_p, y_p, z_p)$ le coordinate di $P$ nel riferimento $\{O, B\}$; essendo $P \in \mathcal{H}_2^R$, l'equazione di tale piano deve essere soddisfatta dalle coordinate del punto:

$$hx_p + ky_p + lz_p + A_4 = 0 \;\rightarrow\; hx_p + ky_p + lz_p = -A_4$$

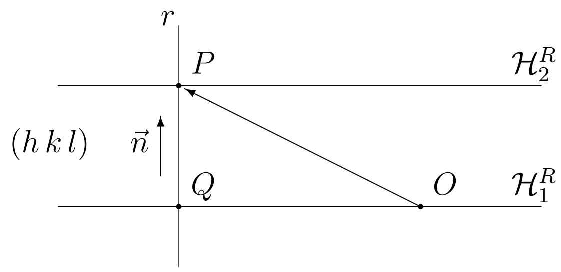



Figura 3.1: Distanza interplanare

dove $A_4$ è un intero non nullo (se fosse nullo, $\mathcal{H}_2^R$ passerebbe per l'origine e sarebbe coincidente con $\mathcal{H}_1^R$ contro l'ipotesi iniziale). Essendo $(0,0,0)$ le coordinate di $O$, $(P-O) = x_p\vec{a}+y_p\vec{b}+z_p\vec{c}$, quindi

$$(P-O)\cdot\vec{n} = (x_p\vec{a}+y_p\vec{b}+z_p\vec{c})\cdot(h\vec{a}^*+k\vec{b}^*+l\vec{c}^*) = hx_p+ky_p+lz_p \;\rightarrow\; (P-O)\cdot\vec{n} = -A_4$$

si ottiene quindi per $d(P,Q)$

$$d(P,Q) = d(\mathcal{H}_1^R,\mathcal{H}_2^R) = \frac{|A_4|}{\|\vec{n}\|} \qquad (\text{con } A_4 \neq 0)$$

Poiché $A_4$ è un intero, la distanza del piano più vicino all'origine (quella minima) si ottiene ponendo $A_4 = \pm 1$, da cui:

**Teorema 3.9** I piani più vicini all'origine (non passanti per essa), in una famiglia di piani reticolari paralleli di indici $(hkl)$, hanno equazioni $hx+ky+lz\pm 1 = 0$.

La distanza $1/\|\vec{n}\|$ è anche quella tra una qualunque coppia di piani *contigui* paralleli, vale a dire, tra due piani (siano $\sigma,\pi$) le cui equazioni differiscono nel solo termine noto, essendo $|A_4^\sigma - A_4^\pi| = 1$. Abbiamo la

**Definizione 3.8** Data una famiglia di piani $\{\mathcal{H}^R\}_\parallel$ di indici $(hkl)$, dicesi *distanza interplanare* il numero $d_{hkl} = \min\left\{d(\mathcal{H}_i^R,\mathcal{H}_j^R),\ \ \forall \mathcal{H}_i^R,\mathcal{H}_j^R \in \{\mathcal{H}^R\}_\parallel\right\}$.

In sintesi, stante le premesse poste all'inizio di questa sezione:

**Teorema 3.10** La distanza interplanare di una famiglia di piani $\{\mathcal{H}^R\}_\parallel$ di indici $(hkl)$ vale

$$d_{hkl} = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \qquad \text{con } \vec{n} = h\vec{a}^*+k\vec{b}^*+l\vec{c}^*$$

**Esempio 3.1** Sia $\Lambda^R$ un reticolo associato a uno $\mathcal{Z}$-modulo generato dal sistema di vettori ortogonali $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ aventi $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = a$ (reticolo *cubico*); la matrice metrica vale:

$G = a^2 I$ (dove $I$ è la matrice identità); $G^* = G^{-1} = (1/a^2)I$. Data una famiglia di piani $(hkl)$ Il modulo del vettore $\vec{n} = h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*$ vale:

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{\vec{n}\cdot\vec{n}} = a^{-1}\sqrt{h^2+k^2+l^2}$$

da cui:

$$d_{hkl} = \frac{a}{(h^2+k^2+l^2)^{1/2}}$$

**Esempio 3.2** Siano $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ tre vettori ortogonali, aventi moduli diversi tra loro, generatori dello $\mathcal{Z}$-modulo associato a un reticolo $\Lambda^R$ (reticolo *ortorombico*); ponendo, per brevità, $a_i = \|\vec{a}_i\|$ si ha:

$$G = \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^2 \end{pmatrix}, \quad G^* = \begin{pmatrix} a_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & a_3^{-2} \end{pmatrix}$$

Se $(h_1 h_2 h_3)$ sono gli indici di una famiglia di piani di $\Lambda^R$, si ha:

$$\vec{n} = \sum_i h_i \vec{a}_i^* \;\rightarrow\; \vec{n}\cdot\vec{n} = \sum_{i,j} h_i h_j g_{ij}^* = \sum_{i,j} h_i h_j a_i^{-2}\delta_{ij} = \sum_i h_i^2 a_i^{-2}$$

dove gli scalari $g_{ij}^*$ sono gli elementi di $G^*$. Risulta:

$$d_{h_1 h_2 h_3} = \frac{1}{\left(\sum_i h_i^2/a_i^2\right)^{1/2}}$$

Si noti che se $\vec{n} = \vec{a}^* \rightarrow \|\vec{n}\| = a^* \rightarrow d_{100} = 1/a^*$; similmente: $d_{010} = 1/b^*$, $d_{001} = 1/c^*$. Se la base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ è ortogonale, vale $1/a^* = a$, $1/b^* = b$, $1/c^* = c$, da cui: $d_{100} = a$, $d_{010} = b$, $d_{001} = c$. Nel caso di reticoli *non* ortogonali, tali relazioni non sono, in generale, valide.

**Esercizio 3.1** Calcolare l'espressione per $d_{hkl}$ nel caso di un reticolo *monoclino* avente *metrica* determinata dalla matrice

$$G = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ 0 & b^2 & 0 \\ \vec{a}\cdot\vec{c} & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & ac\cos\beta \\ 0 & b^2 & 0 \\ ac\cos\beta & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

Ricavare le espressioni per $d_{100}$, $d_{010}$ e $d_{001}$ in funzione di $a$, $b$, $c$, $\beta$.

### 3.3.4 Assi di zona in $\mathcal{A}_3$

Siano $(h_a\, k_a\, l_a)$ e $(h_b\, k_b\, l_b)$ due famiglie di piani (il riferimento al un reticolo verrà nel seguito sottointeso) associate ai sottospazi vettoriali 2-dimensionali $E_a$, $E_b$; se $\vec{n}_a$, $\vec{n}_b$ sono i due vettori ortogonali rispettivamente ai due sottospazi $E_a$ ed $E_b$, valgono le relazioni $\forall\vec{v} \in E_a,\ \vec{v}\cdot\vec{n}_a = 0$; $\forall\vec{w} \in E_b,\ \vec{w}\cdot\vec{n}_b = 0$. Sappiamo anche che, se $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ è la *base reticolare* (cioè, il sistema di generatori dello $\mathcal{Z}$-modulo associato al reticolo), allora

$n_a = h_a\vec{a}^* + k_a\vec{b}^* + l_a\vec{c}^*$ e $n_b = h_b\vec{a}^* + k_b\vec{b}^* + l_b\vec{c}^*$, dove $\{\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*\}$ sono i vettori della base $B^*$ reciproca di $B$.

Se $(h_a\, k_a\, l_a)$ e $(h_b\, k_b\, l_b)$ non sono paralleli, $E_a$ ed $E_b$ sono due sottospazi distinti la cui intersezione è un sottospazio non vuoto di $E$, infatti $F = E_a + E_b \subseteq E$ quindi $dim F \leq 3$; inoltre, dal teorema 1.9, posto $G = E_a \cap E_b$, segue che

$$dim\, G + dim\, F = dim\, E_a + dim\, E_b = 4 \;\rightarrow\; dim\, G \geq 1$$

dunque $E_a \cap E_b$ è non vuoto. D'altra parte, se $dim\, G = 2$ deve necessariamente essere $E_a = E_b$ (contro l'ipotesi iniziale), infatti se fosse $dim\, G = 2$ esisterebbero in $G$ due vettori base di $G$; gli stessi due vettori sarebbero pure vettori base di $E_a$ e $E_b$ ($G$ è un sottospazio di entrambi e $dim\, E_a = dim\, E_b = 2$). Infine, $dim\, G = 3$ è impossibile (la dimensione di $G$ non può essere maggiore di quella degli spazi in cui è incluso), per cui deve essere $dim(E_a \cap E_b) = 1$.

Al sottospazio $E_a \cap E_b$ sono associate varietà di $\mathcal{A}$ che sono rette; in altre parole, il sottospazio $E_a \cap E_b$ è la direzione delle rette individuate dalle intersezioni dei piani appartenenti alle famiglie $(h_a\, k_a\, l_a)$ e $(h_b\, k_b\, l_b)$.

Per i vettori di $G$ valgono le relazioni

$$\forall \vec{v} \in G \;\rightarrow\; \vec{v} \in E_a \wedge \vec{v} \in E_b \;\rightarrow\; \vec{v}\cdot\vec{n}_a = 0 \wedge \vec{v}\cdot\vec{n}_b = 0 \;\rightarrow\; \vec{v} = k(\vec{n}_a \times \vec{n}_b)$$

dove $k$ è uno scalare; l'ultima implicazione deriva dal fatto che $\vec{n}_a \times \vec{n}_b \in E_a \cap E_b$. Tenuto conto del teorema 3.8, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\vec{n}_a \times \vec{n}_b &= (h_a\vec{a}^* + k_a\vec{b}^* + l_a\vec{c}^*) \times (h_b\vec{a}^* + k_b\vec{b}^* + l_b\vec{c}^*) \\
&= (h_a k_b - k_a h_b)\, \vec{a}^* \times \vec{b}^* + (h_a l_b - l_a h_b)\, \vec{a}^* \times \vec{c}^* + (k_a l_b - l_a k_b)\, \vec{b}^* \times \vec{c}^* \\
&= V^* \Big[(k_a l_b - l_a k_b)\, \vec{a} + (l_a h_b - h_a l_b)\, \vec{b} + (h_a k_b - k_a h_b)\, \vec{c}\Big] \\
&= V^*(u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c})
\end{aligned}$$

avendo posto $u = k_a l_b - l_a k_b$, $v = l_a h_b - h_a l_b$, $w = h_a k_b - k_a h_b$. Abbiamo la

**Definizione 3.9** Dicesi *asse di zona* la direzione individuata dall'intersezione di due famiglie di piani reticolari $\{\mathcal{H}_a^R\}_\parallel$ e $\{\mathcal{H}_b^R\}_\parallel$; tale direzione è indicata con il simbolo $[uvw]$, dove $u$, $v$ e $w$ sono le componenti (rispetto alla base reticolare) di un vettore $\vec{v} \in E_a \cap E_b = \vec{n}_a \times \vec{n}_b$, essendo $E_a$, $E_b$ due spazi 2-dimensionali, associati rispettivamente a $\{\mathcal{H}_a^R\}_\parallel$ e $\{\mathcal{H}_b^R\}_\parallel$, e $\vec{n}_a$, $\vec{n}_b$ vettori *reciproci*, normali rispettivamente a $\{\mathcal{H}_a^R\}_\parallel$ e $\{\mathcal{H}_b^R\}_\parallel$.

Un modo mnemonico per calcolare l'asse di zona, date due famiglie di piani $(h_a\, k_a\, l_a)$ e $(h_b\, k_b\, l_b)$, consiste nello scrivere lo schema

$$\begin{array}{c|cccc|c}
h_a & k_a & l_a & h_a & k_a & l_a \\
 & \times & \times & \times & & \\
h_b & k_b & l_b & h_b & k_b & l_b \\
\hline
 & u & v & w & & 
\end{array}$$

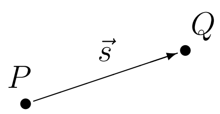
e nell'eseguire i prodotti *incrociati* nel modo indicato dalle frecce.

Le componenti $u$, $v$ e $w$ vengono normalmente scelte *prime* tra loro. L'asse di zona di un insieme di famiglie di piani è dunque normale ai vettori reciproci che individuano ogni famiglia dell'insieme.

**Esempio 3.3** Le famiglie di piani in zona con l'asse $[001]$ hanno simbolo $(hk0)$, infatti la relazione $h\,0 + k\,0 + \ell\,1 = 0$ (che esprime appunto l'ortogonalità tra i vettori $[uvw]$ e $(hkl)$) è soddisfatta da $\ell = 0$ e $h, k$ qualunque.

**Esempio 3.4** Sia $\mathcal{S}$ l'insieme dei segmenti orientati dello spazio *ordinario*; è possibile definire su $\mathcal{S}$ una relazione di equivalenza $\rho$ tale che, dati due qualunque elementi $s_1$, $s_2$ di $\mathcal{S}$, è $s_1 \rho s_2$ se e solo se $s_1$ e $s_2$ sono paralleli e hanno la stessa lunghezza (derivando dalla geometria elementare le nozioni di parallelismo e lunghezza di segmenti). Sia $E_3$ l'insieme quoziente $\mathcal{S}/\rho$: è possibile costruire su $E_3$ una struttura di spazio vettoriale reale definendo $(i)$ una *somma* tra coppie di elementi di $E_3$, con risultato in $E_3$, attraverso alla *regola del parallelogrammo* e $(ii)$ un prodotto esterno $\cdot : \mathcal{R} \times E_3 \to E_3$ in modo che, per ogni $\alpha \in \mathcal{R}$ e $s \in E_3$, $s' = \alpha \cdot s$ sia un segmento parallelo a $s$, di lunghezza pari a $\alpha$ volte la lunghezza di $s$. È facile dimostrare che le due operazioni di somma e prodotto così costruite soddisfano gli assiomi richiesti per la definizione di spazio vettoriale reale: $E_3$ si dice allora *spazio dei vettori liberi* dello spazio. Si verifica che $dim E_3 = 3$.

Siano ora $\mathcal{A}$ l'insieme dei punti dello spazio ed $E_3$ lo spazio dei vettori liberi: è possibile istituire in $\mathcal{A}$ una struttura di spazio affine attraverso l'applicazione $a : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to E_3$ che a ogni coppia di punti, $P, Q \in \mathcal{A}$, associa in modo unico il vettore $a(P, Q) = \vec{s} \in E_3$, parallelo alla congiungente i due punti e orientato da $P$ verso $Q$. Graficamente:




Le scritture $\vec{s} = Q - P$ o $Q = P + \vec{s}$ sono due modi *simbolici* con cui, di solito, si esprime la relazione $a(P, Q) = \vec{s}$ (ovviamente, in tali notazioni, i simboli + e - *non* rappresentano somme o sottrazioni). Se $t_{\vec{s}}$ è la traslazione di vettore $\vec{s}$, allora $Q = P + \vec{s} = t_{\vec{s}}(P)$.

Un *prodotto* tra due vettori $\vec{s}_1, \vec{s}_2 \in E_3$ può essere definito attraverso l'applicazione $\phi : E_3 \times E_3 \to \mathcal{R}$ tale che $\phi(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = s_1 s_2 \cos\alpha$, essendo $s_1$ e $s_2$ le lunghezze di $\vec{s}_1$ e $\vec{s}_2$, rispettivamente, e $\alpha$ l'angolo tra questi compreso. Si può dimostrare che $\phi$ è una forma bilineare simmetrica; da questa è ottenibile una forma quadratica definita positiva, $\Phi$, che associa a ogni vettore di $E_3$ il quadrato della sua lunghezza. La coppia $(E_3, \phi)$ è allora uno spazio vettoriale euclideo, essendo $\phi$ il prodotto scalare e, per ogni $\vec{s} \in E_3$, $s = \sqrt{\Phi(\vec{s})}$ la *norma* (o *modulo*) di $\vec{s}$.

Associando l'insieme dei punti dello spazio (*ordinario*) allo spazio vettoriale $E_3^*$, duale di $E_3$, si ottiene lo spazio affine $\mathcal{A}^*$; la geometria in $\mathcal{A}^*$ può essere facilmente ricondotta a quella di $\mathcal{A}$ dato l'isomorfismo $\phi$ tra gli spazi $E_3^*$ ed $E_3$; in particolare, $\phi$ associa agli elementi della base $B^*$ (in $E_3^*$), duale di una base $B$ di $E_3$, gli elementi della base reciproca di $B$ (in $E_3$) che, con abuso di notazione, indichiamo ancora con $B^*$.

Sia $\Lambda^R$ un reticolo cubico di base $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$; le famiglie di piani in zona con l'asse $[1\bar{2}0]$ hanno simbolo $(2h\,h\,\ell)$, infatti $1\,h - 2\,k + 0\,\ell = 0 \rightarrow h = 2k$. Notiamo che $(2h\,h\,\ell) = h(210) + \ell(001)$; possiamo allora scegliere i vettori $\vec{b}_1 = (210)$ e $\vec{b}_2 = (001)$ (dati in componenti rispetto alla base reciproca $B^*$) come base del sottospazio 2-dimensionale associato a un piano $\mathcal{H}^*$ del reticolo reciproco $\Lambda^{R*}$. I vettori $\vec{b}_1$ e $\vec{b}_2$ individuano rispettivamente le direzioni $[210]^*$ e $[001]^*$ a cui corrispondono due assi ortogonali di $\Lambda^{R*}$, infatti (come si verifica facilmente) nel cubico $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0$. La figura 3.2 mostra una porzione di $\mathcal{H}^*$ nello spazio affine $\mathcal{A}$.

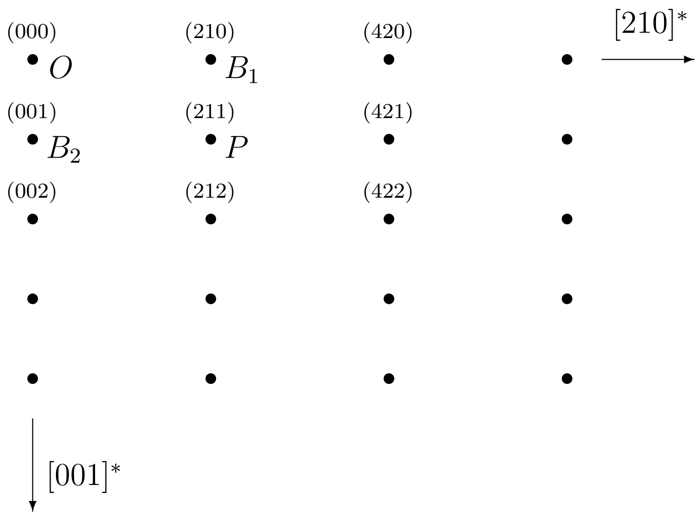



Figura 3.2: Sezione del reticolo reciproco in zona con l'asse $[1\bar{2}0]$

Per definizione, dato il riferimento affine $(O, B^*)$, le coordinate di un punto $Q \in \mathcal{A}$ tale che $a(O,Q) = \vec{x}$, sono le componenti di $\vec{x}$ rispetto a $B^*$; in particolare (figura 3.2): $\vec{b}_1 = a(O, B_1)$, quindi $B_1$ ha coordinate (210); similmente, le coordinate di $B_2$ sono (001). Il vettore $\vec{v}$ che individua il punto $P$ è la somma dei vettori $\vec{b}_1$ e $\vec{b}_2$: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \rightarrow (v_1,\, v_2,\, v_3) = (210) + (001) = (211)$; $P$ ha dunque coordinate (211). In modo analogo si ricavano le coordinate di tutti gli altri punti di $\mathcal{H}^*$.

I punti di $\Lambda^{R*}$ che hanno coordinate *prime* tra loro rappresentano famiglie di piani di $\Lambda^R$; nel caso specifico, i punti di $\mathcal{H}^*$ di coordinate $(hkl)$ individuano vettori di $E_3$ normali alle famiglie di piani di indici milleriani $(hkl)$, a loro volta parallele all'asse di zona $[1\bar{2}0]$.

La distanza di un punto $Q \in \mathcal{H}^*$ dall'origine $O$ è proporzionale al modulo del vettore $a(O,Q)$, cioè al reciproco della distanza interplanare della famiglia di piani rappresentata da $Q$. Se $a$ è il modulo comune ai tre vettori della base $B$ (la cella è cubica), vale: $\overline{B_1O} = 1/d_{210} = \sqrt{5}/a$, $\overline{B_2O} = 1/d_{001} = 1/a$; nel disegnare *in scala* la porzione di piano in figura, si è tenuto conto del rapporto $\overline{B_1O}/\overline{B_2O} = \sqrt{5}$.

Al reticolo reciproco $\Lambda^{R*}$, in $\mathcal{A}$, corrisponde un reticolo equivalente in $\mathcal{A}^*$: il reticolo duale (def. 3.5), indicato ancora con il simbolo $\Lambda^{R*}$. Tale reticolo è di particolare importanza in cristallografia, poiché i suoi punti individuano vettori corrispondenti alle possibili direzioni di diffrazione, in un cristallo di data metrica. Anche i punti di $\Lambda^{R*}$ con coordinate *non* prime tra loro assumono un significato fisico, in quanto rappresentativi di diffrazioni di ordine superiore al primo.

# Capitolo 4

# Reticoli Incommensurati

## 4.1 Definizioni

**Definizione 4.1** Sia $E$ uno spazio vettoriale; $p$ vettori di $E$ $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p\}$ si dicono *razionalmente indipendenti* se $z_1\vec{a}_1 + \cdots + z_p\vec{a}_p = \vec{0}$ implica $z_1 = \cdots = z_p = 0, \quad z_i \in \mathcal{Z}$.

Si noti che i $p$ vettori possono essere linearmente dipendenti ma razionalmente indipendenti. Siano, ad esempio, $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ 2 vettori linearmente indipendenti di uno spazio $E$: definendo $\vec{a}_3$ come $\vec{a}_3 = \sqrt{2}\vec{a}_1 + \vec{a}_2$, il sistema $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ è linearmente dipendente ma razionalmente indipendente.

**Definizione 4.2** Dicesi *rango* di un sistema di vettori, il massimo numero di vettori linearmente indipendenti che esso contiene.

Sia $E$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ e sia $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ una sua base; scegliendo opportunamente $d$ vettori $\vec{a}_{n+1}, \ldots, \vec{a}_{n+d} \in E$ si può costruire un sistema di $n + d$ vettori linearmente dipendenti e razionalmente indipendenti, di rango $n$. Attraverso lo $\mathcal{Z}$-modulo $\Lambda$

$$\Lambda = \{\vec{v} \in E \ / \ \vec{v} = z_1\vec{a}_1 + \cdots + z_{n+d}\vec{a}_{n+d}, \qquad z_i \in \mathcal{Z}, \quad (i = 1, \ldots, n + d)\}$$

è possibile definire su uno spazio affine $\mathcal{A}$, associato allo spazio vettoriale $E$, un reticolo $\Lambda^R$, in analogia a quanto giá visto con la def. 1.4:

$$\Lambda^R = \{P \in \mathcal{A} \ / \ P = O + \vec{v}, \quad \forall\vec{v} \in \Lambda\}$$

dove $O$ è l'origine del reticolo.

**Definizione 4.3** Dicesi *rango* del reticolo il massimo numero $(n)$ di vettori linearmente indipendenti in $\Lambda$; chiamiamo *dimensione* del reticolo il massimo numero di vettori razionalmente indipendenti in $\Lambda$.

**Definizione 4.4** Dicesi *incommensurato* un reticolo di rango strettamente minore della sua dimensione; viceversa, dicesi *commensurato* un reticolo di rango pari alla propria dimensione.

Si noti che il rango di $\Lambda^R$ è pari alla dimensione dello spazio vettoriale $E$.

Le precedenti definizioni si estendono anche ai reticoli duali e/o reciproci.

## 4.2 Reticoli incommensurati e proiezioni

Siano $E_1$ ed $E_2$ due sottospazi disgiunti di uno spazio vettoriale $E$, aventi rispettivamente dimensioni 3 e $d$, con $E = E_1 \oplus E_2$ (poiché i sottospazi sono disgiunti, la loro somma è diretta). Dal teorema 1.9 risulta che $dim\, E = 3 + d$ (la dimensione del sottospazio $G = E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$ è, per definizione, 0). Siano $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ e $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_d\}$ due basi di $E_1$ ed $E_2$ rispettivamente.

Costruiamo l'insieme $\Omega$ delle coppie ordinate di vettori $(\vec{a}, \vec{b})$ con $\vec{a} \in E_1$ e $\vec{b} \in E_2$; $(\Omega, +)$ è evidentemente uno spazio vettoriale che ha la coppia $(\vec{0}, \vec{0})$ come elemento neutro. Consideriamo i vettori $\vec{\omega}_i \in \Omega$ definiti come:

$$\begin{cases} \vec{\omega}_i = (\vec{a}_i, -\vec{b}_{d+i}) & (i = 1, 2, 3) \\ \vec{\omega}_{3+j} = (\vec{0}, \vec{b}_j) & (j = 1, \dots, d) \end{cases}$$

dove i $\vec{b}_{d+i}$ sono vettori di $E_2$ non appartenenti alla base scelta in tale spazio.

**Teorema 4.1** L'insieme $A = \{\vec{\omega}_1, \dots, \vec{\omega}_{3+d}\}$ è una base di $\Omega$.

*Dimostrazione*
Proviamo che l'insieme $A$ è linearmente indipendente:

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \vec{\omega}_i + \sum_{i=1}^{d} \lambda'_i \vec{\omega}_{3+i} = \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i \vec{a}_i, -\lambda_i \vec{b}_{d+i}) + \sum_{i=1}^{d} (\lambda'_i \vec{0}, \lambda'_i \vec{b}_i) = (\vec{0}, \vec{0})$$

Da ciò segue:

$$\begin{cases} \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0} & (1) \\ -\lambda_1 \vec{b}_{d+1} - \lambda_2 \vec{b}_{d+2} - \lambda_3 \vec{b}_{d+3} + \lambda'_1 \vec{b}_1 + \dots + \lambda'_d \vec{b}_d = \vec{0} & (2) \end{cases}$$

Poiché $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ è linearmente indipendente (in $E_1$), dalla (1) segue che $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, che sostituiti nella (2) danno $\lambda'_1 = \dots = \lambda'_d = 0$, tenuto conto che il sistema $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_d\}$ è linearmente indipendente (in $E_2$).

Complessivamente, quindi, tutti i $\lambda_i$ e $\lambda'_i$ sono nulli, da cui il sistema $A$ é linearmente indipendente.

Proviamo che ogni vettore di $\Omega$ può essere espresso come combinazione lineare dei vettori $\vec{\omega}_i$. Sia $(\vec{a},\vec{b})$ un qualunque vettore di $\Omega$; poiché $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono rispettivamente vettori di $E_1$ ed $E_2$, possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \vec{a} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \vec{a}_i \\ \vec{b} = \sum_{j=1}^{d} \beta_j \vec{b}_j \end{cases}$$

Si ha:

$$(\vec{a},\vec{b}) = \left( \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \vec{a}_i,\ \sum_{j=1}^{d} \beta_j \vec{b}_j \right) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i (\vec{a}_i, -\vec{b}_{d+i}) + \sum_{j=1}^{d} \beta_j (\vec{0}, \vec{b}_j) + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i (\vec{0}, \vec{b}_{d+i})$$

Essendo i $\vec{b}_{d+i}$ vettori di $E_2$, possono essere espressi come combinazione lineare dei vettori della base $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_d\}$:

$$\vec{b}_{d+i} = \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} \vec{b}_j$$

che sostituita nell'ultima sommatoria dell'espressione per $(\vec{a},\vec{b})$ dà:

$$(\vec{a},\vec{b}) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i (\vec{a}_i, -\vec{b}_{d+i}) + \sum_{j=1}^{d} \left( \beta_j + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \sigma_{ij} \right) (\vec{0}, \vec{b}_j) = \sum_{j=1}^{3+d} \lambda_j \vec{\omega}_j$$

dove si è posto

$$\lambda_j = \begin{cases} \alpha_j & (j = 1, 3) \\ \beta_j + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \sigma_{ij} & (j = 4, \ldots, 3+d) \end{cases}$$

Dunque, ogni vettore di $\Omega$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori dell'insieme $A$; quindi quest'ultimo costituisce un sistema di generatori di $\Omega$ che, essendo linearmente indipendente è una base di $\Omega$ (def. 1.5). Il teorema è dimostrato.

Essendo $3+d$ il numero di vettori della base $A$, risulta che la dimensione dello spazio vettoriale $\Omega$ è $3+d$; poiché pure la dimensione di $E = E_1 \oplus E_2$ è $3+d$, per il teorema 1.12 si ha:

**Teorema 4.2** Siano $E_1$ ed $E_2$ due sottospazi di uno spazio vettoriale $E$ tali che $E = E_1 \oplus E_2$; sia $\Omega$ lo spazio vettoriale avente per elementi coppie ordinate di vettori $(\vec{a},\vec{b})$ tali che $\vec{a} \in E_1$ e $\vec{b} \in E_2$, segue: $E$ e $\Omega$ sono isomorfi.

L'isomorfismo tra i due spazi può essere espresso dall'applicazione $\phi:\ E \to \Omega$ tale che

$$\phi(\vec{v}) = \vec{\omega} = \phi(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

con $\vec{v} \in E = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ($\vec{v}_1 \in E_1$ e $\vec{v}_2 \in E_2$ unicamente determinati) e $\vec{\omega} \in \Omega$. Essendo $\phi$ un isomorfismo, esiste certamente l'applicazione inversa $\phi^{-1}$ che è pure un isomorfismo: con le stesse notazioni,

$$\phi^{-1}(\vec{\omega}) = \vec{v} = \phi^{-1}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Sia $p_1$ la proiezione da $E$ al sottospazio $E_1$ (def. 1.16): $p_1 : E \to E_1$; tramite la $\phi$, al sottospazio $E_1$ corrisponde il sottospazio $\Omega_1 \subset \Omega$ (proposizione 1.16) costituito da tutti i vettori della forma $(\vec{v}_1, \vec{0})$. Essendo $\phi$ un isomorfismo ed essendo $E$ e $\Omega$ equidimensionali, per il teorema 1.18, $Ker(\phi) = \{\vec{0}_E\}$ e, per la proposizione 1.17, i due sottospazi $E_1$ e $\Omega_1$ hanno la stessa dimensione.

Essendo $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ una base di $E_1$, in base alla proposizione 1.17, il sistema di vettori $A_{\Omega_1} = \{\phi(\vec{a}_1), \phi(\vec{a}_2), \phi(\vec{a}_3)\} = \{(\vec{a}_1, \vec{0}), (\vec{a}_2, \vec{0}), (\vec{a}_3, \vec{0})\}$ è una base di $\Omega_1$.

Si dimostra che, attraverso la $\phi$, la proiezione $p_1$, definita su $E$, induce su $\Omega$ un'applicazione $p'_1$ che è pure una proiezione (infatti, l'applicazione $p'_1(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{0})$ è idempotente e, per il teorema 1.20, è una proiezione). Complessivamente, si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p_1} & E_1 \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \Omega & \xrightarrow[p'_1]{} & \Omega_1 \end{array}$$

Sia $\vec{\zeta}$ un generico vettore di $\Omega_1$ avente componenti $\zeta_i$ rispetto alla base $A_{\Omega_1}$; calcoliamone le componenti rispetto alla base $A$ di $\Omega$:

$$\vec{\zeta} = \sum_{i=1}^{3} \zeta_i(\vec{a}_i, \vec{0}) = \sum_{i=1}^{3} \zeta_i(\vec{a}_i, -\vec{b}_{d+i}) + \sum_{i=1}^{3} \zeta_i(\vec{0}, \vec{b}_{d+i}) = \sum_{i=1}^{3} \zeta_i \vec{\omega}_i + \sum_{j=1}^{d} \left\{ \sum_{i=1}^{3} \zeta_i \sigma_{ij} \right\} \vec{\omega}_{3+j}$$

Risulta che il generico $\vec{\zeta} \in \Omega_1$ è esprimibile come combinazione lineare dei $(3+d)$ vettori $\vec{\omega}_i$ della base $A$ di $\Omega$; essendo $dim\, \Omega_1 = dim\, E_1 = 3$, tali vettori (linearmente indipendenti in $\Omega$) devono essere necessariamente linearmente dipendenti in $\Omega_1$.

Su $\Omega_1$ è definibile uno $\mathcal{Z}$-modulo $\Lambda_\zeta$ i cui elementi sono tutti i vettori $\vec{\zeta}$ a componenti intere rispetto alla base $A_{\Omega_1}$; rispetto alla base $A$ di $\Omega$, se gli scalari $\sigma_{ij}$ sono irrazionali, tale $\mathcal{Z}$-modulo dà origine ad un reticolo di dimensione $(3+d)$ e rango 3 che è, dunque, incommensurato.

D'altra parte, in $\Omega$ è pure definibile uno $\mathcal{Z}$-modulo a cui è associabile un reticolo commensurato, da cui:

**Teorema 4.3** Un reticolo incommensurato di rango 3 e dimensione $(3+d)$ può essere considerato come la proiezione, in uno spazio 3-dimensionale, di un reticolo commensurato costruito su uno spazio $(3+d)$-dimensionale.

## 4.3 Duale di un reticolo incommensurato

Costruiamo lo spazio vettoriale duale di $\Omega$. Detta $\vec{f} = (\vec{a}^*, \vec{b}^*)$, con $\vec{a}^* \in E_1^*$ e $\vec{b}^* \in E_2^*$, essendo $E_1^*$ ed $E_2^*$ gli spazi duali di $E_1$ ed $E_2$ rispettivamente, possiamo definire l'applicazione $\vec{f}(\vec{\omega})$, con $\vec{\omega} = (\vec{a}, \vec{b})$ e $\vec{a} \in E_1$, $\vec{b} \in E_2$, come:

$$\vec{f}(\vec{\omega}) = (\vec{a}^*, \vec{b}^*)(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}^*(\vec{a}) + \vec{b}^*(\vec{b}) \in \mathcal{R}$$

Si dimostra che l'applicazione $\vec{f}$ così definita è lineare: posto $\vec{\omega} = (\vec{a}, \vec{b})$ e $\vec{\omega}\,' = (\vec{a}\,', \vec{b}')$, segue:

$$\begin{aligned}\vec{f}(\lambda\vec{\omega} + \lambda'\vec{\omega}\,') = (\vec{a}^*, \vec{b}^*)(\lambda\vec{a} + \lambda'\vec{a}\,',\ \lambda\vec{b} + \lambda'\vec{b}') = \vec{a}^*(\lambda\vec{a} + \lambda'\vec{a}\,') + \vec{b}^*(\lambda\vec{b} + \lambda'\vec{b}') = \\ \lambda[\vec{a}^*(\vec{a}) + \vec{b}^*(\vec{b})] + \lambda'[\vec{a}^*(\vec{a}\,') + \vec{b}^*(\vec{b}')] = \lambda\vec{f}(\vec{\omega}) + \lambda'\vec{f}(\vec{\omega}\,')\end{aligned}$$

L'applicazione $f$ è quindi una forma lineare appartenente allo spazio vettoriale $\Omega^*$, duale di $\Omega$, avente come base il sistema di vettori $\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_{3+d}\}$ tali che $\vec{f}_i(\vec{\omega}_j) = \delta_{ij}$, essendo gli $\vec{\omega}_j$ i vettori della base $A$ di $\Omega$.

Analogamente a quanto ricavato nella sezione precedente, lo spazio $\Omega^*$ è associato allo spazio $E^* = E_1^* \oplus E_2^*$, attraverso l'isomorfismo $\phi^*$ definito dalla relazione $\phi^*(\vec{a}^* + \vec{b}^*) = (\vec{a}^*, \vec{b}^*)$.

Siano $\{\vec{a}_1^*, \vec{a}_2^*, \vec{a}_3^*\}$ e $\{\vec{b}_1^*, \ldots, \vec{b}_d^*\}$ le basi duali di quelle scelte in $E_1$ ed $E_2$ rispettivamente, poniamo $\vec{f}_i = (\vec{a}_i^*, \vec{0})$ $(i = 1, 2, 3)$, verifichiamo che vale $\vec{f}_i(\vec{\omega}_j) = \delta_{ij}$ $(j = 1, \ldots, 3+d)$:

$$\begin{cases} \vec{f}_i(\vec{\omega}_j) = (\vec{a}_i^*, \vec{0})(\vec{a}_j, \vec{b}_{d+i}) = \vec{a}_i^*(\vec{a}_j) - \vec{0}(\vec{b}_{d+i}) = \delta_{ij} & (j = 1, 2, 3) \\ \vec{f}_i(\vec{\omega}_{3+j}) = (\vec{a}_i^*, \vec{0})(\vec{0}, \vec{b}_j) = \vec{a}_i^*(\vec{0}) + \vec{0}(\vec{b}_j) = 0 & (j = 1, \ldots, d) \end{cases}$$

Poniamo ora $\vec{f}_{3+i} = (\vec{a}_{3+i}^*, \vec{b}_i^*)$ $(i = 1, \ldots, d)$, essendo gli $\vec{a}_{3+i}^*$ $d$ vettori di $E_1^*$ non appartenenti alla base scelta in tale spazio. Per $(j = 1, 2, 3)$, si ottiene:

$$\vec{f}_{3+i}(\vec{\omega}_j) = (\vec{a}_{3+i}^*, \vec{b}_i^*)(\vec{a}_j, -\vec{b}_{d+j}) = \vec{a}_{3+i}^*(\vec{a}_j) - \sum_{\ell=1}^{d} \sigma_{\ell j} \underbrace{\vec{b}_i^*(\vec{b}_\ell)}_{\delta_{i\ell}} = \vec{a}_{3+i}^*(\vec{a}_j) - \sigma_{ij}$$

Perché si abbia $\vec{f}_{3+i}(\vec{\omega}_j) = 0$ $(j = 1, 2, 3)$ deve perciò essere $\vec{a}_{3+i}^*(\vec{a}_j) = \sigma_{ij}$ $(j = 1, 2, 3)$.

Infine, si verifica facilmente che $\vec{f}_{3+i}(\vec{\omega}_{3+j}) = \delta_{ij}$ $(j = 1, \ldots, d)$.

Poiché $\vec{a}_{3+i}^* \in E_1^*$ possiamo scrivere $\vec{a}_{3+i}^* = \sum_j a_{ij}\vec{a}_j^*$, da cui

$$\vec{a}_{3+i}^*(\vec{a}_k) = \sigma_{ik} = \sum_j a_{ij} \underbrace{\vec{a}_j^*(\vec{a}_k)}_{\delta_{jk}} = a_{ik}$$

In sintesi, l'insieme $\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_{3+d}\}$ dove

$$\begin{cases} \vec{f}_j = (\vec{a}^*_j, \vec{0}) & & (j = 1, 2, 3) \\ \vec{f}_{3+j} = (\vec{a}^*_{3+j}, \vec{b}^*_j) & \vec{a}^*_{3+j} = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ij} \vec{a}^*_i & (j = 1, \ldots, d) \end{cases}$$

è una base dello spazio vettoriale $\Omega^*$ duale di $\Omega$.

Sia $\vec{\omega}^* \in \Omega^*$; risulta:

$$\vec{\omega}^* = \sum_{i=1}^{3+d} \lambda_i \vec{f}_i = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i (\vec{a}_i^*, \vec{0}) + \sum_{j=1}^{d} \lambda_{3+j} (\vec{a}^*_{3+j}, \vec{b}^*_j)$$

Sia $\Omega^*_1$ il sottospazio di $\Omega^*$ isomorfo a $E^*_1$; definiamo l'applicazione $p_1^{\prime *} : \Omega^* \rightarrow \Omega^*_1$ tale che $p_1'^*(\vec{a}^*, \vec{b}^*) = (\vec{a}^*, \vec{0})$; si dimostra che tale applicazione è una proiezione (si veda la sezione precedente).

Proiettando $\vec{\omega}^*$ da $\Omega$ in $\Omega^*$ si ottiene:

$$p_1'^{\,*}(\vec{\omega}^*) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i (\vec{a}_i^*, \vec{0}) + \sum_{j=1}^{d} \lambda_{3+j} (\vec{a}^*_{3+j}, \vec{0})$$

L'insieme dei vettori linearmente dipendenti $(\vec{a}_i^*, \vec{0})$, $(i = 1, \ldots, 3 + d)$ associati mediante isomorfismo ad un numero equivalente di vettori in $E^*_1$, può essere usato per costruire uno $\mathcal{Z}$-modulo a cui corrisponde un reticolo duale incommensurato di rango 3 e dimensione $(3+d)$, proiezione di un reticolo duale commensurato definito su uno spazio $(3 + d)$-dimensionale.

# Capitolo 5

# Isometrie

## 5.1 Definizioni e proprietà fondamentali

**Definizione 5.1** Sia $E$ uno spazio vettoriale euclideo; dicesi *isometria* un automorfismo $f$ di $E$ tale che

$$\forall \vec{x} \in E \qquad \|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$$

**Teorema 5.1** Sia $E$ uno spazio vettoriale euclideo; un automorfismo $f \in GL(E)$ è un'isometria se e solo se

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \qquad f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$$

*Dimostrazione*
Se vale la tesi del teorema, ponendo $\vec{x} = \vec{y}$ si ha

$$f(\vec{x}) \cdot f(\vec{x}) = \|f(\vec{x})\|^2 = \|\vec{x}\|^2$$

e, poiché la norma di un vettore è un numero positivo, $f$ è un'isometria. Viceversa, se $f$ è un'isometria,

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \qquad \|f(\vec{x}+\vec{y})\| = \|\vec{x}+\vec{y}\| \ \rightarrow \ \|f(\vec{x}+\vec{y})\|^2 = \|\vec{x}+\vec{y}\|^2$$

da cui:

$$\begin{aligned} \|f(\vec{x}+\vec{y})\|^2 &= [f(\vec{x}) + f(\vec{y})] \cdot [f(\vec{x}) + f(\vec{y})] = \\ &= f(\vec{x}) \cdot f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \cdot f(\vec{y}) + 2f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) \end{aligned}$$

D'altra parte, $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\vec{x} \cdot \vec{y}$, da cui segue il teorema.

Un'isometria *conserva* quindi la norma dei vettori e gli angoli compresi tra di essi.

**Teorema 5.2** Sia $E$ uno spazio vettoriale euclideo e sia $f$ un endomorfismo di $E$; se $\forall \vec{x} \in E$, $\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$, allora $f$ è un'isometria.

*Dimostrazione*
Se $\vec{x} \in Ker(f)$ allora $f(\vec{x}) = \vec{0}$, da cui $\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\| = \|\vec{0}\| = 0 \rightarrow \vec{x} = \vec{0}$; Segue che $Ker(f) = \{\vec{0}\}$ e per il teorema 1.18 $f$ è un automorfismo e quindi un'isometria.

**Teorema 5.3** L'insieme $\mathcal{O}(E)$ delle isometrie di $E$ è un sottogruppo dell'insieme $GL(E)$ degli automorfismi di $E$. $\mathcal{O}(E)$ si chiama *gruppo ortogonale di E.*

*Dimostrazione*
Se $f$ e $g$ sono due isometrie, $f \circ g$ è un automorfismo tale che

$$\forall \vec{x} \in E, \qquad \|(f \circ g)\vec{x}\| = \|f[g(\vec{x})]\| = \|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$$

dunque, la composizione di due isometrie è un'isometria.
L'automorfismo *identico* $\iota$, tale che $\iota(\vec{x}) = \vec{x}$ è evidentemente un'isometria ed è l'elemento neutro rispetto all'operazione $\circ$ : $f \circ \iota = \iota \circ f = f$.
Sia $f$ un'isometria; esiste in $GL(E)$ l'automorfismo $f^{-1}$ tale che $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \iota$; da cui:

$$\forall \vec{x} \in E \qquad \|\vec{x}\| = \|\iota(\vec{x})\| = \|f[f^{-1}(\vec{x})]\| = \|f^{-1}(\vec{x})\|$$

perciò $f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.
Tutte le proprietà richieste per la definizione di *gruppo* sono soddisfatte e, dunque, il teorema è dimostrato.

**Teorema 5.4** Sia $f$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale euclideo $E$ di dimensione $n$; sia $A$ la matrice associata a $f$, rispetto a una base ortonormale di $E$: $f$ è un'isometria se e solo se la matrice $A$ è ortogonale.

*Dimostrazione*
Sia $\vec{x}$ un vettore di $E$; dette, rispettivamente, $X$ e $X'$ le matrici colonna delle componenti dei vettori $\vec{x}$ e $f(\vec{x})$, rispetto alla base ortonormale scelta, e ${}^tX$, ${}^tX'$ le corrispondenti trasposte (matrici riga) si ha: $X' = A\,X$ e

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = {}^tX\,X, \qquad f(\vec{x}) \cdot f(\vec{x}) = {}^tX'\,X'$$

Se $f$ è un'isometria, deriva:

$$f(\vec{x}) \cdot f(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{x} \;\rightarrow\; {}^t(A\,X)(A\,X) = {}^tX\,X \;\rightarrow\; {}^tX({}^tA\,A)X = {}^tX\,X \;\rightarrow\; {}^tA\,A = I$$

e quindi $A$ è ortogonale. Per converso, se $A$ è ortogonale si ottiene la relazione $\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$ e, per il teorema 5.2, $f$ è un'isometria. Il teorema è dimostrato.

**Definizione 5.2** Dicesi *positiva* (*negativa*) un'isometria associata a una matrice ortogonale con determinante pari a $+1(-1)$

La restrizione al gruppo $\mathcal{O}(E)$ dell'isomorfismo $\phi: \ GL(E) \to GL_n(\mathcal{R})$, tra automorfismi e matrici invertibili (di cui alla sezione 1.3), individua il sottogruppo $\mathcal{O}_n(\mathcal{R}) \subset GL_n(\mathcal{R})$ delle matrici ortogonali di ordine $n$. Si dimostra facilmente che l'insieme $\mathcal{SO}(E)$ delle isometrie positive è un sottogruppo di $\mathcal{O}(E)$, detto *gruppo ortogonale speciale*. L'insieme delle isometrie negative non è invece un gruppo.

## 5.2 Isometrie in spazi bidimensionali

Sia $E$ uno spazio vettoriale euclideo 2-dimensionale e sia $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una sua base ortonormale; dato un automorfismo $f \in \mathcal{O}(E)$, sia $A$ la matrice ortogonale di ordine 2 a esso associata, risulta:

$$^tA\,A = I \;\to\; \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eseguendo il prodotto matriciale si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 & = & 1 \\ \gamma^2 + \delta^2 & = & 1 \\ \alpha\gamma + \beta\delta & = & 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione del sistema deriva che $\alpha^2, \beta^2 \leq 1 \to -1 \leq \alpha, \beta \leq 1$; esiste allora un *angolo* $\theta$ tale che $\alpha = \cos\theta$ e $\beta = \sqrt{1-\alpha^2} = \sin\theta$. Sostituendo nella terza equazione, si ha

$$\gamma\cos\theta + \delta\sin\theta = 0 \;\to\; \begin{cases} \gamma = \lambda\sin\theta \\ \delta = -\lambda\cos\theta \end{cases}$$

Infine, dalla seconda equazione si ottiene $\lambda^2\cos^2\theta + \lambda^2\sin^2\theta = 1$ da cui $\lambda = \pm 1$.
In definitiva, possiamo formulare il

**Teorema 5.5** Relativamente ad una base ortonormale, un'isometria in uno spazio vettoriale euclideo è rappresentata da una matrice ortogonale che assume solo due possibili forme:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

con $\theta \in [0, \pi]$.

$A_1$ è un'isometria positiva, mentre $A_2$ è negativa.

Sia $\vec{v}$ un vettore di $E$ e sia $f$ un'isometria positiva; se facciamo *agire* $f$ sul vettore $\vec{v}$, sappiamo che otteniamo un vettore $\vec{w} = f(\vec{v})$ che ha la stessa norma di $\vec{v}$ e forma, con quest'ultimo, un angolo $\alpha$ calcolabile dall'equazione $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \cos\alpha$; passando a una rappresentazione matriciale, siano $(v_1, v_2)$ le componenti di $\vec{v}$, le componenti di $\vec{w}$ risultano essere $(v_1 \cos\theta - v_2 \sin\theta,\ v_1 \sin\theta + v_2 \cos\theta)$, da cui, moltiplicando scalarmente i due vettori e calcolandone la norma (si ricordi che la base è ortonormale) deriva $\cos\theta = \cos\alpha$. Il vettore $\vec{w}$ può essere considerato come ottenuto da una *rotazione* del vettore $\vec{v}$ secondo l'angolo $\theta$ che caratterizza l'isometria; per questo motivo si identificano le matrici delle isometrie positive come *matrici di rotazione* .

Il polinomio caratteristico di un'isometria positiva $f$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow \ \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0$$

è decomponibile in $\mathcal{R}$ solo se $\cos\theta = 1$ $(\sin\theta = 0)$, cioè, solo se $f$ è l'endomorfismo identico $\iota$; in tal caso i due autovalori $\lambda_1$ e $\lambda_2$ sono uguali (valgono entrambi 1) e definiscono un sottospazio (improprio) invariante che coincide con lo stesso spazio $E$ (il che traduce la circostanza per cui ogni vettore di $E$ è autovettore di $\iota$, con autovalore unitario).

Se $\cos\theta \neq 0$, ai due autovalori complessi coniugati corrisponde un sottospazio (improprio) stabile (si veda l'esempio 2.3 e le considerazioni che seguono) che coincide ancora con $E$: ogni *rotazione* di un vettore $\vec{v}$ in $E$ genera un vettore $\vec{w}$, ancora in $E$, ma non coincidente con $\vec{v}$.

Sia $f$ un'isometria negativa; l'equazione caratteristica della matrice rappresentativa di $f$, rispetto ad una base ortonormale è:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow \ \lambda^2 - 1 = 0 \ \rightarrow \ \lambda_1 = 1, \ \ \lambda_2 = -1$$

$f$ ha quindi due autovalori reali distinti a cui corrispondono due sottospazi invarianti 1-dimensionali; determiniamo l'autospazio $E_1$ associato all'autovalore $\lambda_1$:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ x(\cos\theta - 1) + y\sin\theta = 0 \ \rightarrow \ y = \frac{x(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$$

da cui $E_1 = \{x(1, [1-\cos\theta]/\sin\theta),\ x \in \mathcal{R}\}$.

**Esempio 5.1** Se $\cos\theta = 0$, $E_1 = \{x(1,1),\ x \in \mathcal{R}\}$. Siano $\vec{v} = 1/\sqrt{2}\,(1,1)$ e $\vec{x} = (x_1, x_2)$ due vettori di norma unitaria appartenenti rispettivamente a $E_1$ e $E$; sia $\phi$ l'angolo compreso tra i due vettori (si veda la figura 5.1); tenuto conto che $x_1^2 + x_2^2 = 1$, si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)(x_1, x_2) = \cos\phi \ \rightarrow \ \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) = \cos^2\phi \ \rightarrow \ x_1x_2 = \cos^2\phi - \frac{1}{2}$$

Sia $\vec{y} = f(\vec{x})$; sostituendo $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = 1$ nell'espressione matriciale di $f$, si ottengono le componenti $(x_2, x_1)$ per il vettore $\vec{y}$. L'angolo $(\alpha)$ compreso tra $\vec{x}$ e $\vec{y}$ è dato dall'equazione

$$(x_1, x_2)(x_2, x_1) = 2x_1x_2 = \cos\alpha \;\rightarrow\; \cos\alpha = 2\cos^2\phi - 1$$

Posto $\alpha = 2\beta$, risulta $\cos(2\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\beta = 2\cos^2\beta - 1$ da cui, $\cos\beta = \pm\cos\phi$ e $\beta = \phi + n\pi$, e quindi $\alpha = 2\phi$. In definitiva, il vettore $\vec{v}$ *biseca* l'angolo tra i vettori $\vec{x}$ e $f(\vec{x})$.

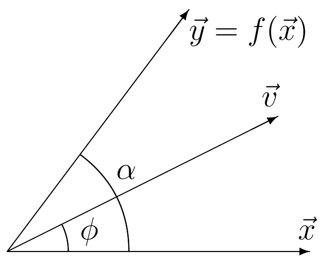



Figura 5.1: Isometria di riflessione

In uno spazio affine, la varietà passante per l'origine $O$ di un riferimento, associata al sottospazio $E_1$, è la retta $(r)$ $x = y$; tutti i punti di $r$ sono invarianti rispetto a $f$ o, in altre parole, $r$ è il luogo dei punti invarianti per *effetto* dell'endomorfismo $f$; l'angolo tra le rette affini associate ai sottospazi generati dai vettori $\vec{x}$ e $f(\vec{x})$ è bisecato dalla retta $r$. Si dice, in tal caso, che $f$ *riflette* i punti di uno spazio affine 2-dimensionale, rispetto alla retta $r$, la quale assume il nome di *linea di riflessione.*

Il risultato, ottenuto qui nel caso specifico di $\cos\theta = 0$, è generalizzabile, per cui ogni isometria $f$ (in uno spazio 2-dimensionale) rappresenta, in uno spazio affine, una riflessione rispetto a rette associate agli autospazi di $f$.

---

**Esercizio 5.1** Con riferimento all'esempio 5.1, ripetere la procedura relativamente al caso $\lambda_2 = -1$.

**Esercizio 5.2** Sia $f$ un'isometria negativa, determinare le rette affini invarianti nei casi $\cos\theta = 1$ e $\cos\theta = 0.5$.

## 5.3 Isometrie in spazi tridimensionali

Sia $E$ uno spazio vettoriale euclideo 3-dimensionale e $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una sua base ortonormale; sia $f$ un'isometria di $E$: sappiamo che la matrice $A$ rappresentativa di $f$ rispetto alla base $B$ è ortogonale (teorema 5.4). Sia $P(\lambda) = 0$ l'equazione caratteristica di $f$, si hanno i due casi: $(i)$ $P(\lambda)$ è interamente decomponibile su $\mathcal{R}$ e quindi ha 3 radici reali, $(ii)$ $P(\lambda)$ non è interamente decomponibile e quindi ha una radice reale e 2 complesse coniugate. Esaminiamo i due casi separatamente

$(i)$ la matrice $A$ ha 3 autovalori reali $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$; poiché $A$ è ortogonale

$$^tA\,A = I \ \rightarrow\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui $\lambda_i = \pm 1$ $(i = 1, 2, 3)$.

$(ii)$ La matrice $A$ ha un autovalore reale $(\lambda_1)$ e 2 complessi coniugati $(\lambda_2,\ \lambda_3)$. Siano $E_{\lambda_1}$ l'autospazio 1-dimensionale associato all'autovalore $\lambda_1$ e $E_2 = E_{\lambda_2} \oplus E_{\lambda_3}$ il sottospazio stabile 2-dimensionale, somma diretta dei due autospazi associati agli autovalori $\lambda_2$ e $\lambda_3$. Poiché autospazi corrispondenti ad autovalori diversi sono disgiunti (teorema 1.23), $E_{\lambda_1} \cap E_2 = \{\vec{0}\}$ da cui, la somma di $E_{\lambda_1}$ e $E_2$ è diretta e determina uno spazio vettoriale di dimensione 3 che coincide con $E$: $E = E_{\lambda_1} \oplus E_2$. $E_2$ risulta essere il sottospazio supplementare di $E_{\lambda_1}$ (teorema 1.8) e, per il teorema 1.42, coincide con il sottospazio 2-dimensionale $E_{\lambda_1}^{\perp}$ ortogonale a $E_{\lambda_1}$. Scegliamo in $E_2$ una base ortonormale $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e costruiamo una nuova base $B'$ di $E$ come $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, dove $\vec{v}_1$ è un autovettore di norma unitaria associato a $\lambda_1$; $B'$ è certamente ortonormale perché ogni vettore di $E_2$ è ortogonale a ogni vettore di $E_{\lambda_1}$. Determiniamo la matrice $A'$ rappresentativa dell'isometria $f$ rispetto alla base $B'$, tenuto conto della stabilità di $E_2$:

$$\begin{cases} f(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1 \\ f(\vec{v}_2) = a_{22}\vec{v}_2 + a_{32}\vec{v}_3 \\ f(\vec{v}_3) = a_{23}\vec{v}_2 + a_{33}\vec{v}_3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Essendo $B'$ ortonormale, $A'$ deve essere ortogonale e quindi, posto $A'' = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, risulta:

$$^tA'\,A' = I_3 \ \rightarrow\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0_{1\times 2} \\ 0_{2\times 1} & ^tA'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0_{1\times 2} \\ 0_{2\times 1} & A'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0_{1\times 2} \\ 0_{2\times 1} & ^tA''\,A'' \end{pmatrix} = I_3 \ \rightarrow\ \begin{cases} \lambda_1 = \pm 1 \\ ^tA''\,A'' = I_2 \end{cases}$$

perciò la matrice $A''$ è pure ortogonale e rappresenta la restrizione dell'isometria $f$ al sottospazio $E_2$ (cioè, rappresenta un'isometria in uno spazio 2-dimensionale).

I due autovalori complessi coniugati $\lambda_2, \lambda_3$ sono del tipo $a \pm ib$ con $a, b \in \mathcal{R}$, perciò

$$det\, A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \lambda_1(a+ib)(a-ib) = \lambda_1(a^2+b^2)$$

Il segno del determinante è dunque definito dal segno dell'unico autovalore reale (poiché $a^2+b^2$ è sempre positivo). Dal teorema 5.5, sappiamo che la matrice $A''$ ha la forma:

$$A'' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\epsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \epsilon\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{con } \epsilon = \pm 1$$

e $det\, A'' = \epsilon$; d'altra parte, $det\, A = \lambda_1\, det\, A'' = \lambda_1 \epsilon$; segue che, se $f$ è un'isometria positiva, $\lambda_1 = 1 \;\rightarrow\; \epsilon = 1$, se $f$ è negativa $\lambda_1 = -1 \;\rightarrow\; \epsilon = 1$.

In definitiva, possiamo formulare il seguente teorema:

**Teorema 5.6** Sia $E$ uno spazio vettoriale euclideo 3-dimensionale e sia $f \in \mathcal{O}(E)$; la matrice rappresentativa dell'isometria $f$, rispetto a una qualunque base ortonormale di $E$, assume una delle due possibili forme

$$A_1 = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Dalla forma di $A_2$, notiamo che se $f$ è un'isometria positiva, la traccia[1] della matrice $A$ associata a $f$ vale $1 + 2\cos\theta$ (se l'equazione caratteristica ha 3 radici reali, tale proprietà è ancora valida, ponendo $\cos\theta = \pm 1$).

### 5.3.1 Isometrie positive

La matrice $A$ rappresentativa di un'isometria positiva $f$ di uno spazio vettoriale $E$, rispetto a una base ortonormale, ha determinante pari a $+1$; se il polinomio caratteristico è interamente decomponibile su $\mathcal{R}$, l'equazione caratteristica può avere soltanto le soluzioni $(1,1,1)$ o $(1,-1,-1)$, infatti gli autovalori di $A$ possono assumere i soli valori $\pm 1$ e il determinante di $A$ è pari al prodotto dei 3 autovalori. Alla soluzione $(1,1,1)$ corrisponde la matrice identica; la seconda soluzione ha una coppia di autovalori coincidenti ($\lambda_2 = \lambda_3 = -1$) a cui corrisponde il sottospazio 2-dimensionale $E_2 = \{\vec{v} \in E \;/\; \vec{v} = (0, y, z);\;\; x, y \in \mathcal{R}\}$ ortogonale al sottospazio $E_1$, 1-dimensionale, associato all'autovalore $\lambda_1 = 1$.

$E_1$ è invariante rispetto a $f$ nel senso che qualunque suo vettore rimane *immutato* per effetto dell'isometria; un vettore $\vec{v}$ di $E_2$ viene invece trasformato da $f$ in un diverso vettore

[1] La traccia di una matrice $A$ $[Tr(A)]$ è la somma degli elementi appartenenti alla diagonale principale di $A$ ed è invariante rispetto a cambiamenti di base.

$\vec{w} = f(\vec{v})$ che, però appartiene ancora a $E_2$; per questo motivo $E_2$ è stabile, ma non invariante, rispetto a $f$. Si verifica facilmente che l'angolo compreso tra i due vettori $\vec{v}$ e $f(\vec{v}) \in E_2$ è pari a $\pi$.

In uno spazio affine $\mathcal{A}$, associato allo spazio vettoriale $E$, ai sottospazi $E_1$ ed $E_2$ possono farsi corrispondere rispettivamente la retta $r$ di equazione $y = z = 0$ e il piano $\sigma$ di equazione $x = 0$, entrambi passanti per l'origine $O$, con $r$ perpendicolare a $\sigma$.

Un punto $P \in \sigma$ (cioè, tale che $P - O = \vec{v} \in E_2$) viene *trasportato* nel punto $Q \in \sigma$, con $Q - O = \vec{w} = f(\vec{v}) = f(P - O) = \phi(P) - \phi(O)$, dove $\phi$ è l'affinità associata a $f$. Se poniamo $\phi(O) = O$, cioè se $\phi \in GA_\circ(E)$, risulta $Q - O = \phi(P) - O \rightarrow Q - \phi(P) = O - O = \vec{0} \rightarrow Q = \phi(P)$. Poiché i vettori $\phi(P) - O$ e $P - O$ formano un angolo pari a $\pi$, diciamo che l'affinità $\phi$ corrisponde a una *rotazione* di $\pi$ radianti nel piano $\sigma$, attorno all'*asse* $r$ passante per l'origine.

Se il polinomio caratteristico di $f$ non è interamente decomponibile su $\mathcal{R}$ la matrice $A$ è del tipo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(teorema 5.6). Analogamente al caso precedente, detti rispettivamente $E_1$ ed $E_2$ i sottospazi corrispondenti agli autovalori $\lambda_1$ e $(\lambda_2, \lambda_3)$, $r$ e $\sigma$ le varietà associate ai due sottospazi e passanti per l'origine di uno spazio affine $\mathcal{A}$, all'isometria $f$ può farsi corrispondere una centro-affinità $\phi$ che rappresenta una rotazione di $\theta$ radianti nel piano $\sigma$ ortogonale alla retta $r$.

### 5.3.2 Isometrie negative

Se l'equazione caratteristica dell'isometria $f$ ha 3 radici $\lambda_i$ reali (con $\lambda_i = \pm 1$, $i = 1, 2, 3$), si hanno due possibilità: $(i)$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$; $(ii)$ $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Nel caso $(i)$ alla radice -1 di molteplicità 3 corrisponde un sottospazio (improprio) 3-dimensionale che concide con $E$. Tale isometria trasforma ogni vettore nel suo opposto: $f : \vec{v} \mapsto -\vec{v}$; per questo $f$ viene denominata *inversione*. In uno spazio affine $\mathcal{A}$ associato a $E$, l'unico punto invariante per effetto della centro-affinità associata a $f$ è, per definizione, l'origine $O$ del riferimento affine; per tale motivo $O$ è detto *centro di inversione* .

Nel caso $(ii)$, all'unico autovalore $\lambda_1 = -1$ corrisponde un sottospazio $E_1$ 1-dimensionale stabile (ogni vettore $\vec{v} \in E_1$ viene trasformato in $-\vec{v} \in E_1$, quindi il sottospazio è stabile ma non invariante); alla coppia $(\lambda_1, \lambda_2) \equiv (1, 1)$ corrisponde il sottospazio 2-dimensionale invariante $E_2 = \{\vec{v} \in E \;/\; \vec{v} = (0, y, z);\;\; y, z \in \mathcal{R}\}$.

Nello spazio affine $\mathcal{A}$, al sottospazio $E_1$ può farsi corrispondere una retta $r$ passante per $O$, ortogonale al piano $\sigma$ (per $O$) associato al sottospazio $E_2$. Un punto $P \notin \sigma$ di $\mathcal{A}$, di coordinate $(x, y, z)$, rispetto al riferimento affine, viene trasportato dalla centro-affinità $\phi$, associata a $f$, nel punto $Q = (-x, y, z)$; si verifica facilmente che la distanza tra i due punti $P$ e $Q$ [$d(P, Q)$, def. 2.7] è metà della distanza tra gli stessi due punti e il piano $\sigma$; si dice, in tal caso che il piano $\sigma$ *riflette* il punto $P$ nel punto $Q$: $\sigma$ è un piano di *riflessione*. Un punto $P \in \sigma$ rimane evidentemente immutato per effetto della $\phi$.

Situazione analoga a quella illustrata si ha nel caso di un'isometria negativa avente polinomio caratteristico non interamente decomponibile su $\mathcal{R}$; in tal caso però, il sottospazio 2-dimensionale $E_2$, associato alla coppia di autovalori complessi coniugati, non è invariante ma è stabile. L'isometria $f$ può vedersi come prodotto (applicazione successiva) di due isometrie $f_1$ e $f_2$, rispettivamente negativa e positiva, tali che:

$$f = f_1 \circ f_2 \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Nello spazio affine $\mathcal{A}$, all'isometria $f$ corrisponde quindi una centro-affinità risultante dalla rotazione di un angolo $\theta$ attorno alla retta $r$, in un piano $\sigma$ a essa ortogonale, seguita dalla riflessione rispetto a $\sigma$, essendo $r$ e $\sigma$ le varietà associate ai sottospazi $E_1$ ed $E_2$, rispettivamente. La retta $r$ viene in tal caso chiamata *asse di rotoriflessione*.

## 5.4 Isometrie in spazi $n$-dimensionali

Nel caso di uno spazio 3-dimensionale abbiamo visto che, scegliendo opportunamente una base ortonormale, la matrice $A$ rappresentativa di un'isometria $f$ assume una struttura *a blocchi*:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{1\times 2} \\ 0_{2\times 1} & A_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \;\; A_1 = \pm 1 \;\; \text{e} \;\; A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(il caso con $A$ diagonale si ottiene per $\cos\theta = \pm 1$). Generalizzando al caso di uno spazio $n$-dimensionale, abbiamo il

**Teorema 5.7** Sia $E$ uno spazio vettoriale euclideo $n$-dimensionale; la matrice $A$, rappresentativa di un'isometria $f$ rispetto a una base ortonormale di $E$, assume la struttura a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix} \quad \text{con} \;\; A_i = \pm 1 \;\; \text{o} \;\; A_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

essendo la somma delle dimensioni dei blocchi $A_1, \ldots, A_n$ pari a $n$.

*Dimostrazione*
Dimostriamo il teorema per induzione: sappiamo che vale per $n = 3$ e dimostriamo che se vale per uno spazio $(n-1)$-dimensionale è valido pure per uno spazio $n$-dimensionale.

Se $n$ è un numero dispari, l'equazione caratteristica $P(\lambda) = 0$, associata alla matrice $A$, ha almeno una radice $(\lambda_1)$ reale; sia $E_{\lambda_1}$ l'autospazio (1-dimensionale) associato all'autovalore $\lambda_1$, si ha: $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{n-1}$. $E_{n-1}$ è il sottospazio $(n-1)$-dimensionale supplementare di $E_{\lambda_1}$ che coincide col sottospazio ortogonale a quest'ultimo; allora, data in $E_{n-1}$ una base $B$ ortonormale, ogni vettore $\vec{v}_i \in B$ è ortogonale a ogni vettore di $E_{\lambda_1}$; scelto in $E_{\lambda_1}$ un vettore $\vec{v}_1$ di norma unitaria, il sistema di $n$ vettori $\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n\}$ è una base ortonormale di $E$, rispetto alla quale la matrice $A$ rappresentativa di $f$ è ortogonale. Segue:

$$\begin{cases} f(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1 \\ f(\vec{v}_2) = a_{22}\vec{v}_2 + \quad \cdots \quad + a_{n2}\vec{v}_n \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ f(\vec{v}_n) = a_{2n}\vec{v}_2 + \quad \cdots \quad + a_{nn}\vec{v}_n \end{cases} \quad \rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Da ciò si ottiene:

$$ {}^tA\,A = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & {}^tA'\,A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1^2 = 1 \ \rightarrow \ \lambda_1 = \pm 1 \\ {}^tA'\,A' = I_{n-1} \end{cases}$$

quindi la matrice $A'$ è ortogonale e rappresenta la restrizione allo spazio $E_{n-1}$ dell'isometria $f$, cioè $A'$ rappresenta un'isometria in uno spazio $(n-1)$-dimensionale. Per ipotesi, l'enunciato del teorema è vero per uno spazio $(n-1)$-dimensionale e il teorema è in questo caso dimostrato.

La dimostrazione del teorema nel caso di $n$ pari è del tutto simile a quella discussa e viene lasciata come esercizio.

In analogia a quanto visto nelle due sezioni precedenti, chiamiamo *rotazione* un'isometria $f$ la cui matrice rappresentativa ha determinante pari a 1; in uno spazio affine $\mathcal{A}$, gli assi di rotazione (invarianti) e i piani (stabili) della centro-affinità $\phi$, associata a $f$, sono determinati dallo studio delle varietà passanti per l'origine corrispondenti agli autospazi di $f$. Una procedura del tutto analoga si può seguire per le isometrie negative dette, genericamente, *riflessioni*.

# Capitolo 6

# Gruppi

## 6.1 Definizioni e proprietà fondamentali

Nonostante il concetto di gruppo sia già stato utilizzato nel corso del testo, in questo capitolo si riassumono alcuni dei punti salienti della teoria dei gruppi, non trattati esplicitamente nei capitoli precedenti.

**Definizione 6.1** Dicesi *gruppo* un insieme $G$ dotato di un'operazione binaria, $(\circ)$ per la quale valgano le seguenti proprietà:

1) $\forall a, b \in G \times G \quad a \circ b \in G$ (proprietà di chiusura)
2) $\forall a, b, c \in G^3 \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (associatività)
3) $\exists u \in G \;/\; \forall a \in G \quad a \circ u = u \circ a = a$ (esistenza dell'elemento neutro)
4) $\forall a \in G,\ \exists b \in G \;/\; a \circ b = b \circ a = u$ (esistenza dell'inverso).

L'inverso di un elemento $a \in G$ si indica generalmente con il simbolo $a^{-1}$.
$G$ si dice *insieme supporto* (o anche solo *supporto*) del gruppo $(G, \circ)$. solitamente indicheremo con la stessa notazione sia il gruppo, sia il suo supporto.

Esempi comuni di gruppi sono le *strutture* $(Z, +)$, $(R, +)$, $(R^*, \cdot)$; non sono invece gruppi $(\mathcal{N}, +)$, $(Z, \cdot)$.

**Teorema 6.1** In un gruppo $G$, sono unici l'elemento neutro $u$ e l'inverso di ogni elemento.

La dimostrazione è lasciata come esercizio.

**Definizione 6.2** Dato un gruppo $G$, un sottoinsieme $S$ di $G$ ($S \subseteq G$) è il supporto di un *sottogruppo* di $G$ se la restrizione dell'operazione $\circ$ definita su $G$ conferisce a $S$ la struttura di gruppo.

**Proposizione 6.2** Siano $G$ un gruppo e $S$ un sottoinsieme di $G$: $S$ è un sottogruppo di $G$ se, comunque scelti $a, b \in S$, si ha $a \circ b^{-1} \in S$.

*Dimostrazione*
Poniamo $a = b$; segue: $b \circ b^{-1} \in S \rightarrow u \in S$; dunque $S$ è dotato di elemento neutro. Posto $a = u \rightarrow \forall b \in S,\ u \circ b^{-1} = b^{-1} \in S$; dunque, ogni elemento di $S$ ha l'inverso ancora in $S$. Poiché, dato $b \in S$, $b^{-1} \in S$, scegliendo la coppia $(a, b^{-1}) \in S \times S$ si ha $a \circ b \in S$; dunque $S$ è chiuso rispetto all'operazione $\circ$. Il teorema è dimostrato.

**Teorema 6.3** Siano $G$ un gruppo e $S_1$, $S_2$ due suoi sottogruppi; l'insieme $S = S_1 \cap S_2$ è un gruppo, sottogruppo di $G$, $S_1$ e $S_2$.

*Dimostrazione*
Se $s_1, s_2 \in S \rightarrow s_1, s_2 \in S_1 \wedge s_1, s_2 \in S_2 \rightarrow s_1 s_2 \in S_1 \wedge s_1 s_2 \in S_2 \rightarrow s_1 s_2 \in S$, cioè: $S$ è chiuso rispetto al prodotto in $S$ (restrizione in $S$ del prodotto definito in $G$). Essendo $S_1$ e $S_2$ due sottogruppi di $G$, l'elemento neutro (in $G$) appartiene a entrambi e quindi anche alla loro intersezione. Se $s \in S \rightarrow s \in S_1 \wedge s \in S_2 \rightarrow s^{-1} \in S_1 \wedge s^{-1} \in S_2 \rightarrow s^{-1} \in S$, il che esprime l'esistenza dell'inverso, in $S$, per ogni $s \in S$. Infine, $S$ è necessariamente sottogruppo di $G$, $S_1$ e $S_2$, infatti ogni suo elemento appartiene pure a questi. Il teorema è dimostrato.

Dato un insieme $X \subseteq G$ e un elemento $a \in G$, consideriamo la relazione $\sigma_a : X \rightarrow G$, definita come $\sigma_a(b) = a \circ b$, $b \in X$. Tale relazione è una bijezione tra l'insieme $X$ e l'insieme $aX$ (ove con $aX$ si intende l'insieme dei prodotti del tipo $a \circ b$, $\forall b \in X$; la verifica della proprietà è lasciata come esercizio). Ne segue che $aX$ ha la stessa *cardinalità* di $X$ (i due insiemi hanno lo stesso numero di elementi). L'applicazione $\sigma_a$ si chiama *traslazione sinistra*; esiste pure una traslazione destra con le stesse proprietà. In sintesi, posto $X = G$:

**Proposizione 6.4** Dato un gruppo $G$, per ogni $a \in G$ è possibile definire una bijezione $\sigma_a : G \rightarrow G$, detta *traslazione*, che agisce su ogni $b \in G$ secondo la prescrizione $\sigma_a(b) = a \circ b$.

**Definizione 6.3** Siano $G$ un gruppo, $S$ un suo sottogruppo e $a \in G$; dicesi *laterale sinistro* (risp. *destro*), di $S$ in $G$, l'insieme $aS$ (risp. $Sa$).

Si noti che $a$ appartiene sia a $aS$ che a $Sa$ infatti, essendo $S$ un gruppo, esiste in esso l'elemento neutro $u$, per cui $a \circ u = u \circ a = a$. Al variare di $a$ in $G$ si ottengono due famiglie di laterali (quelli sinistri e quelli destri) che indichiamo con $\{aS\}_{a \in G}$ e $\{Sa\}_{a \in G}$. Poiché $aS \equiv \sigma_a(S)$, dove $\sigma_a$ è la traslazione sopra definita, $aS$ ha la stessa cardinalità di $S$ (analogamente per $Sa$). Si dimostra la

**Proposizione 6.5** Siano $G$ un gruppo e $S$ un suo sottogruppo; la famiglia dei laterali sinistri di $S$ in $G$ è una partizione di $G$.

La dimostrazione è lasciata come esercizio (*suggerimento*: si dimostri che la relazione $\rho$, $\forall a, b \in G,\ a \rho b \leftrightarrow a^{-1} \circ b \in S$, è di equivalenza e che le classi generate da tale relazione coincidono con i laterali $aS$). Un teorema del tutto equivalente vale anche per i laterali destri.

Sia $n$ l'*ordine* del gruppo $G$ (cardinalità di $G$) e sia $m$ l'ordine di un suo sottogruppo $S$; poiché l'unione di tutti i laterali di $S$ in $G$ genera $G$ e poiché laterali diversi sono disgiunti (per la stessa definizione di partizione), risulta $n = z \cdot m$, dove $z$ è un numero naturale ($z$ è la cardinalità dell'insieme $\{aS\}_{a \in G}$), da cui:

**Teorema 6.6** (**di Lagrange**) L'ordine di un sottogruppo $S$ di un gruppo $G$ è un sottomultiplo dell'ordine del gruppo.

**Definizione 6.4** Sia $G$ un gruppo e sia $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ un insieme di $m$ elementi di $G$; $B$ è un *sistema di generatori* del gruppo se:

$$\forall g \in G, \quad g = b_{j_1} \circ \cdots \circ b_{j_p}$$

per un'opportuna scelta degli indici $j_1, \dots, j_p \in \{1, \dots, m\}$.

**Definizione 6.5** Sia $G$ un gruppo generato da un unico elemento $g$; $G$ si dice *gruppo ciclico* se esiste un naturale $k$ tale che $g^k = u$, essendo $u$ l'elemento neutro in $G$. Se $G$ è ciclico, dicesi *ordine* del gruppo, il minimo naturale $n$ per cui $g^n = u$.

## 6.2 Morfismi tra gruppi

**Definizione 6.6** Siano $(G, \circ_1)$ e $(F, \circ_2)$ due gruppi e sia $f$ un'applicazione da $G$ a $F$; $f$ si dice *omomorfismo* se $\forall a, b \in G,\ f(a \circ_1 b) = f(a) \circ_2 f(b)$.

Si noti che la definizione di omomorfismo data al capitolo 1 non è che un caso particolare della definizione data ora, infatti la struttura $(E, +)$ è un gruppo, essendo $E$ uno spazio vettoriale.

Se l'applicazione $f$ è suriettiva, iniettiva o bijettiva si parlerà rispettivamente di *epimorfismo*, *monomorfismo* e *isomorfismo*.

**Definizione 6.7** Consideriamo un gruppo $(G, \circ)$ e una relazione di equivalenza $\sigma$ definita sugli elementi di $G$. Diciamo che $\sigma$ è *compatibile* con $G$ se $x_1 \sigma x_2 \wedge y_1 \sigma y_2 \rightarrow (x_1 \circ y_1) \sigma (x_2 \circ y_2)$, $\forall x_i, y_i \in G$.

Equivalentemente, dette $\{x\}_\sigma$ le classi di equivalenza individuate da $\sigma$ su $G$, possiamo scrivere $\{x_1\}_\sigma = \{x_2\}_\sigma \wedge \{y_1\}_\sigma = \{y_2\}_\sigma \rightarrow \{x_1 \circ y_1\}_\sigma = \{x_2 \circ y_2\}_\sigma$, se $\sigma$ è compatibile con $G$.

**Teorema 6.7** Siano $(G, \circ_1)$ un gruppo e $\sigma$ una relazione di equivalenza, sugli elementi del suo supporto, compatibile con $G$; la struttura $(G/\sigma, \circ_2)$, dove $G/\sigma$ è l'insieme delle classi di equivalenza e $\circ_2$ è l'operazione definita da $\{x\}_\sigma \circ_2 \{y\}_\sigma = \{x \circ_1 y\}_\sigma$, $\forall \{x\}_\sigma, \{y\}_\sigma \in G/\sigma$, è un gruppo, detto *gruppo quoziente* di $G$ rispetto a $\sigma$.

*Dimostrazione*
La *proiezione canonica* $\pi : G \to G/\sigma$ è un epimorfismo, infatti $\pi(x) = \{x\}_\sigma$ è ovunque definita, funzionale (ogni elemento di $G$ appartiene a una e una sola classe di equivalenza) e suriettiva (da ogni $\{x\}_\sigma$, possiamo *estrarre* il rappresentante $x \in G$, che è la controimmagine di $\{x\}_\sigma$ nella $\pi$). Inoltre $\pi(x \circ_1 y) = \{x \circ_1 y\}_\sigma = \{x\}_\sigma \circ_2 \{y\}_\sigma = \pi(x) \circ_2 \pi(y)$, vale a dire che $\pi$ è un omomorfismo suriettivo (cioè, un epimorfismo) tra le due strutture $G$ e $G/\sigma$.

$G/\sigma$ è detta *immagine omomorfa* di $G$ ($G/\sigma = \pi(G)$). Poiché $G$ è un gruppo e poiché gli epimorfismi *trasportano* le proprietà di una struttura sulle immagini omomorfe della stessa, $G/\sigma$ è pure un gruppo. Il teorema è dimostrato.

Siano $(G_1, \circ_1)$ un gruppo e $(G_2, \circ_2)$ una sua immagine omomorfa; questo implica l'esistenza di un epimorfismo $f : G_1 \to G_2$ con $G_2 = f(G_1)$. Definiamo una relazione $\sigma$ tramite l'espressione $x\sigma y \leftrightarrow f(x) = f(y)$; si dimostra che $\sigma$ è una relazione di equivalenza. Vale il

**Teorema 6.8** Con riferimento a quanto sopra, $\sigma$ è compatibile con $G_1$ e l'applicazione $\phi : G_1/\sigma \to f(G_1) = G_2$, definita da $\phi(\{x\}_\sigma) = f(x)$, è un isomorfismo.

*Dimostrazione*
Se $x_1\sigma x_2,\ y_1\sigma y_2 \to f(x_1) = f(x_2),\ f(y_1) = f(y_2) \to f(x_1) \circ_2 f(y_1) = f(x_2) \circ_2 f(y_2) \to f(x_1 \circ_1 y_1) = f(x_2 \circ_1 y_2) \to (x_1 \circ_1 y_1)\sigma(x_2 \circ_1 y_2)$ e $\sigma$ è compatibile con $G_1$.

Sia $\circ_3$ l'operazione definita sul gruppo $G/\sigma$; l'applicazione $\phi$ è bijettiva (verificare, per esercizio) e si tratta di dimostrare che è un omomorfismo: $\phi(\{x\}_\sigma \circ_3 \{y\}_\sigma) = \phi(\{x \circ_1 y\}_\sigma) = f(x \circ_1 y) = f(x) \circ_2 f(y) = \phi(\{x\}_\sigma) \circ_2 \phi(\{y\}_\sigma)$. Il teorema è dimostrato.

Identificando le immagini omomorfe di un gruppo $G$ con i gruppi quoziente a esse isomorfi, segue immediatamente l'importante

**Teorema 6.9** Le immagini omomorfe di un gruppo $G$ sono tutte e soltanto le strutture quoziente di $G$.

Dimostriamo alcune utili proprietà degli omomorfismi. Sia $f$ un omomorfismo tra due gruppi $(G_1, \circ_1)$ e $(G_2, \circ_2)$; siano $u_1,\ u_2$ le unità in $G_1$ e $G_2$, rispettivamente; si ha:

1) $\forall a \in G_1,\ f(a \circ_1 u_1) = f(a) = f(a) \circ_2 f(u_1)$; poiché $G_2$ è un gruppo, esiste in esso l'inverso di ogni elemento, in particolare di $f(a)$, allora $[f(a)]^{-1} \circ_2 f(a) = [f(a)]^{-1} \circ_2 f(a) \circ_2 f(u_1) \to u_2 = u_2 \circ_2 f(u_1) \to f(u_1) = u_2$.
2) $\forall a \in G_1,\ f(a \circ_1 a^{-1}) = f(u_1) = u_2 = f(a) \circ_2 f(a^{-1})$; da cui: $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$.

**Esempio 6.1** Dato uno spazio vettoriale $E$ di dimensione $n$, consideriamo i due gruppi isomorfi $GL(E)$ e $GL_n(\mathcal{R})$, rispettivamente degli automorfismi su $E$ e delle matrici di ordine

$n$, invertibili e a valori in $\mathcal{R}$. Sia $A \in GL_n(\mathcal{R})$ la matrice associata a un automorfismo $f \in GL(E)$ (rispetto a una data base di $E$); se $\phi$ è l'isomorfismo tra i due gruppi, $\phi(f) = A$, allora dalla proprietà precedente risulta: $\phi(f^{-1}) = [\phi(f)]^{-1} = A^{-1}$; quindi, la matrice associata all'automorfismo inverso è l'inversa della matrice A.

Definiamo l'insieme $Ker(f) = \{g \in G_1 \ / \ f(g) = u_2\}$; vale il

**Teorema 6.10** Se $Ker(f) = u_1$, $f$ è un monomorfismo.

La dimostrazione è lasciata al lettore.

L'insieme $Ker(f)$ è detto *nucleo* di $f$ (si noti l'analogia con la definizione 1.14).

**Teorema 6.11** Siano $(G_1, \circ_1)$ e $(G_2, \circ_2)$ due gruppi e sia $f : G_1 \to G_2$ un omomorfismo: l'immagine nella $f$ di un sottogruppo di $G_1$ è un sottogruppo di $G_2$.

*Dimostrazione*
Sia $H$ un sottogruppo di $G_1$, dobbiamo dimostrare che $f(H)$ è un sottogruppo di $G_2$; siano $k_1$, $k_2$ due elementi di $f(H) \ \to \ \exists h_1, h_2 \in H \ / \ k_1 = f(h_1), k_2 = f(h_2) \ \to k_1 \circ_2 k_2^{-1} = f(h_1) \circ_2 f(h_2^{-1}) = f(h_1 \circ_1 h_2^{-1}) \in f(H)$, cioè, $k_1 \circ_2 k_2^{-1} \in f(H)$; per la proposizione 6.2, $f(H)$ è dunque un sottogruppo di $G_2$. Il teorema è dimostrato.

Data la sua importanza nella dimostrazione dei teoremi nelle sezioni seguenti, riprendiamo il teorema 2.10 relativo all'omomorfismo tra il gruppo lineare di $E$ ($GL(E)$) e il gruppo delle affinità ($GA(E)$). Siano $E$ uno spazio vettoriale e $\mathcal{A}$ uno spazio affine a esso associato; abbiamo definito *affinità* un'applicazione $f \in GA(E)$ che associa a coppie di punti $(P, Q) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ le coppie $(f(P), f(Q))$, attraverso la relazione $f(P) - f(Q) = \phi(\vec{x})$, con $P - Q = \vec{x}$ e $\phi \in GL(E)$. Si dice che l'affinità $f$ induce l'automorfismo $\phi$. Sappiamo già che $GA(E)$ e $GL(E)$ sono due gruppi.

Consideriamo l'applicazione $\rho : GL(E) \to GA(E)$; $\rho$ associa ad ogni automorfismo di $GL(E)$ un'affinità di $GA(E)$ (il teorema 2.9 assicura che $\rho$ è una relazione *ovunque definita* e *funzionale*, cioè un'applicazione). Siano $\phi, \psi \in GL(E) \ \to \ \exists f, g \in GA(E) \ / \ f = \rho(\phi), g = \rho(\psi)$; allora $\forall P \in \mathcal{A}$, $\forall \vec{x} \in E$,

$$(fg)(P + \vec{x}) = f[g(P + \vec{x})] = f[g(P) + \psi(\vec{x})] = f[g(P)] + \phi[\psi(\vec{x})] = (fg)(P) + (\phi\psi)(\vec{x})$$

Ponendo $h = fg \in GA(E)$ e $\delta = \phi\psi \in GL(E)$, risulta quindi: $h(P) + \delta(\vec{x}) = h(P + \vec{x})$, cioè, $h$ induce l'automorfimo $\delta$, vale a dire: $h = \rho(\delta)$. Ma $h = fg = \rho(\phi)\rho(\psi) = \rho(\delta) = \rho(\phi\psi)$. $\rho$ è perciò un omomorfismo.

Sia $I \in GA(E)$ *l'identità* in $GA(E)$ (vale a dire, l'elemento neutro): $\forall P \in \mathcal{A}$, $I(P) = P$. Il nucleo di $\rho$ è l'insieme $Ker(\rho) = \{\phi \in GL(E) \ / \ \rho(\phi) = I\}$. Ma, $\forall P \in A, \forall \vec{x} \in$

$E$, $I(P+\vec{x}) = P+\vec{x} = I(P)+\phi(\vec{x}) = P+\phi(\vec{x}) \rightarrow \phi(\vec{x}) = \vec{x}$. $\phi$ è dunque l'isometria identica ($\iota$) (elemento neutro in $GL(E)$) e $Ker(\rho) = \{\iota\}$; per il teorema 6.10, $\rho$ è perciò un monomorfismo.

Per ogni affinità $f \in GA(E)$ esiste, per definizione, un automorfismo $\phi \in GL(E)$, dunque l'applicazione $\rho$ è suriettiva ed è quindi anche un isomorfismo (un monomorfismo suriettivo è un isomorfismo).

Notiamo esplicitamente che la relazione di isomorfismo ammette certamente una relazione inversa che è ancora un isomorfismo: $\rho^{-1} : GA(E) \rightarrow GL(E)$.

## 6.3 Sottogruppi normali

**Definizione 6.8** Sia $G$ un gruppo; un sottogruppo $H \subseteq G$ dicesi *normale* in $G$ se, per ogni $a \in G$, $aH = Ha$.

La scrittura $aH = Ha$ non implica la commutabilità di $a$ con ogni elemento di $H$, ma esprime la proprietà $(\forall a \in G)(\forall x \in H)(\exists y \in H \ / \ a \circ x = y \circ a)$. $H$ è anche detto *sottogruppo invariante*. Evidentemente, in un gruppo abeliano (commutativo) ogni sottogruppo è normale. Per ogni gruppo esistono almeno due sottogruppi (impropri) invarianti: il gruppo stesso e il gruppo dato dal solo elemento neutro ($\{u\}$).

**Teorema 6.12** Sia $G$ un gruppo e $H$ un suo sottogruppo; $H$ è normale in $G$ se, e solo se, $\forall g \in G,\ g\,H\,g^{-1} \subseteq H$.

A partire dal teorema 6.12 si dimostra facilmente il

**Teorema 6.13** Se $H$ è un sottogruppo normale di un gruppo $G$, $\forall g \in G,\ g\,H\,g^{-1} = H$.

Se $H$ è un sottogruppo normale di $G$, la famiglia $(G/H)$ dei laterali sinistri, di $H$ in $G$, coincide con quella dei laterali destri (per definizione stessa di sottogruppo normale) e costituisce una partizione di $G$, infatti ogni $a \in G$ appartiene ad almeno un laterale ($a \in aH$, perché $H$ è un gruppo e contiene quindi l'elemento neutro); inoltre, se $x \in aH \cap bH \rightarrow x \in aH \wedge x \in bH \rightarrow \exists h_1, h_2 \in H \ / \ x = a \circ h_1 \wedge x = b \circ h_2 \rightarrow a \circ (h_1 \circ h_2^{-1}) = a \circ h_3 = b \in aH$, vale a dire $aH = bH$: se l'intersezione di due laterali non è vuota, i due laterali coincidono; alternativamente, due laterali diversi sono disgiunti. In sintesi: l'unione di tutti i laterali genera $G$ e la loro intersezione è vuota, cioè l'insieme dei laterali è una partizione di $G$.

Data una qualunque partizione di un insieme è sempre possibile determinare una relazione di equivalenza $\sigma$ che induce quella partizione; nel caso dei laterali di un gruppo, si dimostra facilmente che la relazione $a\sigma b \leftrightarrow a, b \in aH$ è di equivalenza e che le classi $\{a\}_\sigma \in G/\sigma$ coincidono con i laterali $aH \in G/H$.

Poiché il generico elemento $x \in G$ appartiene al solo laterale $xH$, può essere scelto come rappresentante della classe di equivalenza a cui appartiene.

Vale il seguente importante

**Teorema 6.14** Se $H$ è un sottogruppo normale di $G$, $\forall x, y \in G, (xH) \circ (yH) = (x \circ y)H$.

*Dimostrazione*
Nel teorema, con la scrittura $(xH) \circ (yH)$ si intende l'insieme formato da tutti i possibili prodotti $a \circ b,\ a \in xH,\ b \in yH$. Si noti che si è usato lo stesso simbolo per indicare sia il prodotto di elementi di $G$, sia il *prodotto* di laterali (il che è evidentemente un *abuso* di notazione).

Se $u$ è l'elemento neutro in $H$ (e $G$) e $h \in H$, possiamo scrivere $a \circ h \circ a^{-1} = (a \circ h) \circ (a^{-1} \circ u) \in (aH) \circ (a^{-1}H) = (a \circ a^{-1})H = H$ e, per il teorema 6.12, $H$ è normale, infatti $\forall h \in H,\ a \circ h \circ a^{-1} \in H \to aHa^{-1} \subseteq H$.

Viceversa, supponendo la normalità di $H$, se $x \in xH,\ y \in yH \to \exists h_1, h_2 \in H \ / \ (x \circ h_1) \circ (y \circ h_2) = x \circ (h_1 \circ y) \circ h_2$ ma, essendo $H$ normale, esiste un $h_3 \in H \ / \ h_1 \circ y = y \circ h_3$, da cui: $x \circ (h_1 \circ y) \circ h_2 = (x \circ y) \circ (h_3 \circ h_2) \in (x \circ y)H$; quindi $(x \circ h_1) \circ (y \circ h_2) \in (xH) \circ (yH) \to (x \circ y)(h_3 \circ h_2) \in (x \circ y)H \to (xH) \circ (yH) \subseteq (x \circ y)H$. D'altra parte, se $h \in H,\ (x \circ y)h = (x \circ u) \circ (y \circ h) \in (xH) \circ (yH) \to (x \circ y)H \subseteq (xH) \circ (yH)$. Dalle due inclusioni segue l'uguaglianza. Il teorema è dimostrato.

**Teorema 6.15** Siano $(G_1, \circ_1)$ e $(G_2, \circ_2)$ due gruppi e sia $f$ un omomorfismo, $f : G_1 \to G_2$; $Ker(f)$ è un sottogruppo normale di $G_1$.

*Dimostrazione*
Dimostriamo in primo luogo che $Ker(f)$ è un sottogruppo di $G_1$: se $h, k \in Ker(f) \to f(h) = f(k) = u_2$ allora, $f(h \circ_1 k) = f(h) \circ_2 f(k) = u_2 \circ_2 u_2 = u_2 \to h \circ_1 k \in Ker(f)$ (chiusura); $u_1 \in Ker(f)$, infatti $f(u_1) = u_2$ (esistenza dell'elemento neutro); se $h \in Ker(f) \to f(h \circ_1 h^{-1}) = f(u_1) = u_2 = f(h) \circ_2 f(h^{-1}) = u_2 \circ_2 f(h^{-1}) \to f(h^{-1}) = u_2 \to h^{-1} \in Ker(f)$.

Per il teorema 6.12, $Ker(f)$ è normale se $\forall h \in G_1,\ h\, Ker(f)\, h^{-1} \subseteq Ker(f) \to \forall h \in G_1, \forall x \in Ker(f),\ h \circ_1 x \circ_1 h^{-1} \in Ker(f)$. Si ha: $f(a \circ_1 x \circ_1 a^{-1}) = f(a) \circ_2 f(x) \circ_2 f(a^{-1}) = f(a) \circ_2 [f(a)]^{-1} = u_2 \to a \circ_1 x \circ_1 a^{-1} \in Ker(f)$. Il teorema è dimostrato.

**Definizione 6.9** Sia $H$ un sottogruppo normale di un gruppo $G$; dicesi *proiezione canonica* l'applicazione $\pi : G \to G/H$, tale che $\pi(x) = xH$.

La proiezione canonica è suriettiva, infatti per ogni elemento $xH \in G/H$ esiste la controimmagine nella $\pi$ (che è evidentemente $x$). Inoltre $\pi$ è un omomorfismo, infatti, tenuto conto del teorema (6.14), $\forall x, y \in G,\ \pi(x \circ y) = (x \circ y)H = (xH) \circ (yH) = \pi(x) \circ \pi(y)$. $\pi$ è dunque un epimorfismo.

**Teorema 6.16** Siano $G$ un gruppo e $H$ un suo sottogruppo normale; la struttura $(G/H, \circ)$ è un gruppo.

*Dimostrazione*
Esiste infatti un epimorfismo che associa ogni elemento del gruppo $H$ a un elemento di $G/H$ (si tratta della proiezione canonica) e, poiché gli epimorfismi *trasportano* tutte le proprietà del dominio nella struttura immagine, $G/H$ deve essere un gruppo.

**Definizione 6.10** Il gruppo $G/H$ dove $H$ è un sottogruppo normale di $G$ è detto *gruppo quoziente* di $G$ rispetto ad $H$.

Abbiamo visto due definizioni di gruppo quoziente: quella data nella definizione 6.10 e quella del teorema 6.7; le due definizioni sono, in effetti, equivalenti infatti, dato un gruppo $G$ e un suo sottogruppo normale $H$, una relazione di equivalenza definita su $G$ è compatibile se, e solo se, le classi di equivalenza generate da tale relazione coincidono con la partizione di $G$ nei laterali di $H$.

Siano $(G_1, \circ_1)$, $(G_2, \circ_2)$ due gruppi e $f$ un epimorfismo tra di essi; $G_2$ è immagine omomorfa di $G_1 : \; G_2 = f(G_1)$; sappiamo che $Ker(f)$ è un sottogruppo normale di $G_1$ (teorema 6.15); allora, la struttura quoziente $(G_1/Ker(f), \circ_3)$ è un gruppo, isomorfo al gruppo $G_2$, essendo ogni classe di equivalenza data da $\pi(x) = x\,Ker(f)$ e essendo $\circ_3$ definita dalle relazioni $(x\,Ker(f)) \circ_3 (y\,Ker(f)) = (x \circ_1 y)Ker(f), \; \forall x, y \in G_1$. L'isomorfismo tra i due gruppi è espresso dalla relazione $\phi(x\,Ker(f)) = f(x), \; \forall x \in G_1$.

# Capitolo 7

# Simmetria

## 7.1 Gruppi di simmetria

**Definizione 7.1** Sia $\mathcal{P}$ un insieme di punti di uno spazio affine $\mathcal{A}$ associato a uno spazio vettoriale euclideo $E$; chiamiamo *simmetria* un'affinità $S$, associata a un'isometria di $E$, che soddisfa la relazione $S(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

Diciamo in tal caso che l'insieme di punti $\mathcal{P}$ è *invariante* per azione della simmetria $S$, altrimenti detta *operazione di simmetria*. Ancora, diciamo che un insieme di punti $\mathcal{P}$ è *simmetrico* rispetto a S o *presenta la simmetria S* se, per $S$, è soddisfatta la relazione di cui alla precedente definizione. Il termine *simmetria* verrà in generale esteso anche alle isometrie di $E$ associate alle affinità che sono simmetrie.

Si noti che la relazione $S(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ non implica di necessità che $\forall P \in \mathcal{P},\ S(P) = P$, ma significa che $\forall P \in \mathcal{P}, \exists Q \in \mathcal{P}\ /\ S(P) = Q$; la scrittura $S(P) = Q$ è un modo simbolico per indicare che $S(P) - Q = \vec{0}$, cioè che il punto $S(P)$ coincide con il punto $Q$ (sezione 2.1).

**Teorema 7.1** L'insieme $\mathcal{G}_S$ delle simmetrie di un insieme di punti $\mathcal{P}$ è un gruppo.

*Dimostrazione*
Se $S_1, S_2 \in \mathcal{G}_S \ \rightarrow\ (S_2S_1)\mathcal{P} = S_2[S_1(\mathcal{P})] = S_2(\mathcal{P}) = \mathcal{P} \ \rightarrow\ S_2S_1 \in \mathcal{G}_S$ e la proprietà di chiusura è rispettata. La simmetria identica ($I$) appartiene evidentemente a $\mathcal{G}_S$. Poiché le simmetrie sono affinità e l'insieme di queste ultime è un gruppo (teorema 2.10), per ogni simmetria $S$ esiste certamente l'affinità inversa $S^{-1}$; segue: $S(\mathcal{P}) = \mathcal{P} \ \rightarrow\ S^{-1}S(\mathcal{P}) = I(\mathcal{P}) = \mathcal{P} = S^{-1}(\mathcal{P})$, vale a dire $S^{-1} \in \mathcal{G}_S$ (esistenza dell'inverso). Il teorema è dimostrato.

Notiamo esplicitamente che $\mathcal{G}_S$ è un sottogruppo di $GA(E)$, il gruppo delle affinità di $\mathcal{A}$ in sé, di cui al teorema 2.10. Anche l'insieme $GA_\circ(E)$ delle centroaffinità è un sottogruppo di $GA(E)$ (teorema 2.11); allora, tenuto conto del teorema 6.3, possiamo formulare il

**Teorema 7.2** L'insieme $\mathcal{G}_P = \mathcal{G}_S \cap GA_\circ(E)$ è un gruppo, detto *gruppo di simmetria puntuale* di $\mathcal{P}$, sottogruppo di $GA_\circ(E)$ (e, ovviamente, di $GA(E)$ e $\mathcal{G}_S$).

Si osserva che, se $\mathcal{G}_P$ è un gruppo di simmetria puntuale di un insieme $\mathcal{P}$ di punti di uno spazio affine $\mathcal{A}$, esiste in $\mathcal{A}$ un punto $O$ tale che $\forall S \in \mathcal{G}_P,\ S(O) = O$; le varietà di $\mathcal{A}$, *invarianti per simmetria* passano tutte per $O$ e vengono chiamate *elementi di simmetria puntuale.* In formula un elemento di simmetria $\mathcal{Q}_S \subseteq \mathcal{A}$, relativo a una simmetria $S$, è l'insieme

$$\mathcal{Q}_S = \{P \in \mathcal{A} \ / \ S(P) = P\}$$

Dimostriamo che $\mathcal{Q}_S$ è effettivamente un varietà di $\mathcal{A}$: detta $\phi$ l'isometria associata alla simmetria puntuale $S$, per definizione di applicazione affine (sezione 2.4), si ha $S(P) - S(O) = \phi(\vec{x})$, dove $\vec{x} \in E = P - O$, essendo $E$ lo spazio vettoriale associato ad $\mathcal{A}$; poiché $S(O) = O,\ S(P) = P$, si ha $\phi(\vec{x}) = \vec{x}$. Sia $E_S$ l'insieme di tutti i vettori $\vec{x}$ di $E$ tali che $\phi(\vec{x}) = \vec{x}$: $E_S$ è un sottospazio di $E$, infatti $\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E_S,\ \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R},\ \phi(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = \alpha\phi(\vec{x}_1) + \beta\phi(\vec{x}_2) = \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 \rightarrow \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 \in E_S$ e, per il teorema 1.1, $E_S$ è un sottospazio di $E$. Per la definizione 2.2, $\mathcal{Q}_S$ è la varietà di $\mathcal{A}$ associata al sottospazio $E_S$: $\mathcal{Q}_S = \{P \in \mathcal{A} \ / \ P - O = \vec{x},\ \forall \vec{x} \in E_S\}$. $O$ è chiaramente in $\mathcal{Q}_S$, in quanto $O - O = \vec{0} \in E_S$ e, quindi, tutte le varietà invarianti di $S$ passano per $O$.

Dalla relazione $\phi(\vec{x}) = \vec{x}$ risulta evidente che il sottospazio $E_S$ è un autospazio di $\phi$. Si noti che la corrispondenza tra simmetrie ed elementi di simmetria non è univoca, possono esistere infatti più simmetrie associate a uno stesso elemento.

In uno spazio affine di dimensione 3, le sole varietà di $\mathcal{A}$ sono punti, rette e piani; da ciò segue che i soli possibili elementi di simmetria puntuale, di un insieme di punti $\mathcal{P}$, sono punti rette e piani.

## 7.2 Simmetrie e reticoli

I risultati ottenuti nella sezione precedente sono applicabili a qualunque insieme di punti $\mathcal{P}$ di uno spazio affine; imponendo delle condizioni nella scelta di $\mathcal{P}$, si ricavano specifici vincoli a cui devono sottostare le possibili simmetrie. Esaminiamo in questo paragrafo il caso dei reticoli. Nel seguito, verrà indicato con il simbolo $\mathcal{G}_R$ il gruppo delle simmetrie di $\Lambda^R$; il simbolo del gruppo delle simmetrie puntuali del reticolo sarà invece $\mathcal{G}_{\circ R} = \mathcal{G}_R \cap GA_\circ(E)$.

Sia $E$ uno spazio vettoriale e $\mathcal{A}$ uno spazio affine a esso associato; consideriamo un reticolo $\Lambda^R$, su $\mathcal{A}$, corrispondente a uno $\mathcal{Z}$-modulo $\Lambda$ generato dal sistema $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\} \in E$; sappiamo che (si veda la sezione 3.1) $\Lambda^R = \{P \in \mathcal{A} \ / \ P = t_{\vec{v}}(O),\ \forall t_{\vec{v}} \in \mathcal{T}_\Lambda\}$, dove $O$ è un punto di $\mathcal{A}$ (origine del reticolo) e $\mathcal{T}_\Lambda$ è il gruppo delle traslazioni costruito sui vettori $\vec{v} \in \Lambda$. In modo sintetico, possiamo scrivere $\Lambda^R = \mathcal{T}_\Lambda(O)$.

**Teorema 7.3** Con riferimento a quanto sopra, ogni traslazione $t_{\vec{w}} \in \mathcal{T}_\Lambda$ è una simmetria di $\Lambda^R$.

*Dimostrazione*
Se $t_{\vec{w}} \in \mathcal{T}_\Lambda$, $t_{\vec{w}}(\Lambda^R) = \{t_{\vec{w}}(P) \ / \ P \in \Lambda^R\}$, da cui: $t_{\vec{w}}(P) = P + \vec{w} = O + (\vec{v} + \vec{w})$, per un qualche $\vec{v} \in \mathcal{T}_\Lambda$; poiché $\vec{v} + \vec{w} \in \mathcal{T}_\Lambda \ \rightarrow \ t_{\vec{w}}(P) \in \Lambda^R$, e quindi $t_{\vec{w}}(\Lambda^R) \subseteq \Lambda^R$.
D'altra parte, se $P \in \Lambda^R$, $\exists \, Q \in \Lambda^R \ / \ P = Q + \vec{w} = t_{\vec{w}}(Q)$, infatti, se $P = O + \vec{v}$, basta scegliere il punto $Q = O + (\vec{v} - \vec{w})$; quindi $P \in t_{\vec{w}}(\Lambda^R)$ e $\Lambda^R \subseteq t_{\vec{w}}(\Lambda^R)$.
Dalle due inclusioni segue il teorema (si noti che $t_{\vec{w}}$ non è una simmetria puntuale, a meno che non sia $\vec{w} = \vec{0}$).

Un modo alternativo per dimostrare il teorema parte dalla constatazione che, essendo $\mathcal{T}_\Lambda$ un gruppo e ricordando la proposizione 6.4:

$$\forall t_{\vec{w}} \in \mathcal{T}_\Lambda, \quad t_{\vec{w}} \circ \mathcal{T}_\Lambda = \mathcal{T}_\Lambda$$

da cui:

$$t_{\vec{w}}(\Lambda^R) = t_{\vec{w}}[\mathcal{T}_\Lambda(O)] = (t_{\vec{w}} \circ \mathcal{T}_\Lambda)O = \mathcal{T}_\Lambda(O) = \Lambda^R$$

Una centroaffinità $S$ è una simmetria di $\Lambda^R$ se e solo se è associata a un'isometria $f$ di $E$ e se $S(\Lambda^R) = \Lambda^R$ (per la definizione 7.1), allora $S[\mathcal{T}_\Lambda(O)] = (S\mathcal{T}_\Lambda)O = \mathcal{T}_\Lambda(O)$ e, per l'arbitrarietà di $O$, $S\mathcal{T}_\Lambda = \mathcal{T}_\Lambda$. In altri termini, il prodotto di una simmetria per una traslazione deve ancora essere una traslazione. Si noti che la scrittura $S\mathcal{T}_\Lambda = \mathcal{T}_\Lambda$ non implica che $\forall t_{\vec{v}} \in \mathcal{T}_\Lambda$, $St_{\vec{v}} = t_{\vec{v}}$, bensì che: $\forall t_{\vec{v}} \in \mathcal{T}_\Lambda$, $\exists t_{\vec{w}} \in \mathcal{T}_\Lambda \ / \ St_{\vec{v}} = t_{\vec{w}}$. Se poniamo l'origine $O$ del reticolo nel punto invariante di $S$ ($S$ è una centroaffinità) risulta

$$St_{\vec{v}}(O) = S(O + \vec{v}) = S(O) + f(\vec{v}) = O + f(\vec{v}) = t_{\vec{w}}(O) = O + \vec{w} \ \rightarrow \ f(\vec{v}) = \vec{w}$$

Ma $\vec{v}, \vec{w} \in \Lambda$ da cui:

$$f(\vec{v}) = \sum_i v_i f(\vec{a}_i) = \sum_j w_j \vec{a}_j \ \rightarrow \ \sum_j \left( \sum_i v_i f_{ji} \right) \vec{a}_j = \sum_j w_j \vec{a}_j \ \rightarrow \ \sum_i v_i f_{ji} = w_j$$

dove $f_{ji}$ sono le componenti dell'isometria $f$ rispetto alla base $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ e dove le componenti $v_i$ e $w_i$ sono numeri interi. Dovendo valere per ogni $\vec{v} \in \Lambda$, tale relazione comporta il

**Teorema 7.4** Gli elementi della matrice rappresentativa di un'isometria associata a una simmetria puntuale di $\Lambda^R$, rispetto a una base $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ che genera $\Lambda$, sono numeri interi.

Indichiamo con il simbolo $\mathcal{O}_R(\mathcal{Z})$ l'insieme delle isometrie associate a simmetrie puntuali di $\Lambda^R$. La lettera $R$ nel simbolo $\mathcal{O}_R(\mathcal{Z})$ sottolinea il fatto che tale insieme è subordinato alla scelta di uno specifico reticolo $\Lambda^R$.

**Teorema 7.5** $\mathcal{O}_R(\mathcal{Z})$ è un gruppo, sottogruppo di $\mathcal{O}(E)$.

*Dimostrazione*
Per il teorema 2.10, esiste un isomorfismo $\phi$ tra i gruppi $GA(E)$ e $\mathcal{O}(E)$. L'insieme $\mathcal{G}_{\circ R}$ è un sottogruppo di $GA_{\circ}(E)$ e, quindi, di $GA(E)$. Si ha: $\mathcal{O}_R(\mathcal{Z}) = \phi(\mathcal{G}_{\circ R})$ e per il teorema 6.11, $\mathcal{O}_R(\mathcal{Z})$ è un sottogruppo di $\mathcal{O}(E)$. Il teorema è dimostrato

Nella sezione 5.3.1 si è visto che la traccia di una matrice rappresentativa di un'isometria positiva in $E_3$, rispetto a una base ortonormale, assume il valore $1 + 2\cos\theta$; a tale isometria corrisponde una centroaffinità che rappresenta una rotazione, intorno a un dato asse, secondo l'angolo $\theta$.

**Definizione 7.2** Chiamiamo *rotazione di ordine n* una centroaffinità rappresentativa di una rotazione secondo un angolo $\theta = 2\pi/n$.

Sia $\{f_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$ la matrice rappresentativa di un'isometria positiva associata a una simmetria $S$ di $\Lambda^R$, rispetto al sistema di generatori di $\Lambda$; essendo la traccia della matrice $f$ invariante rispetto a trasformazioni di base ed essendo le singole $f_{ij} \in \mathcal{Z}$, ne consegue che la traccia di $f$ deve essere un numero intero, da cui:

$$1 + 2\cos\theta = n \;\rightarrow\; \cos\theta = \frac{n-1}{2} = \frac{m}{2}, \quad m \in \mathcal{Z}$$

Poiché $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ i soli valori permessi per $m$ sono 0, $\pm 1$, $\pm 2$ e, quindi, i soli valori permessi per $\theta$ sono 0, $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$, $\pi$. In definitiva:

**Teorema 7.6** In un reticolo 3-dimensionale, non sono ammesse simmetrie puntuali di rotazione di ordine superiore al sesto, e quelle di ordine 5.

Una simmetria puntuale di $\Lambda^R$, associata a un'isometria negativa, corrisponde a una riflessione rispetto a un piano o a una riflessione seguita da una rotazione di un ordine permesso nei reticoli 3-D (rotoriflessione) o, ancora, da una rotazione seguita da un'inversione (rotoinversione).

Le rotazioni si indicano con un numero coincidente con l'ordine della rotazione, le riflessioni si indicano con la lettera $m$, l'inversione con $i$ e le rotoinversioni con $\bar{n}$ dove $n$ è l'ordine della rotazione. Gli stessi simboli si usano pure per indicare gli elementi di simmetria associati alle varie operazioni.

**Esempio 7.1** Il simbolo 4 indica, a seconda del contesto, una rotazione di ordine 4 (rotazione di $\pi/2$) oppure il luogo dei punti invarianti per rotazione, cioé *l'asse* di rotazione (di ordine 4) che, in tal caso, viene chiamato *tetragira*. Se in un gruppo di simmetria esiste un elemento 4, deve esistere anche un elemento 2, infatti il prodotto di due rotazioni di ordine 4 è una rotazione di ordine 2 (secondo la notazione descritta, $4 \circ 4 = 4^2 = 2$); l'asse 2 coincide con l'asse 4, ma le due rotazioni corrispondenti sono distinte.

In reticoli $n$ dimensionali, con $n > 3$, sono possibili anche rotazioni di ordine 5 e superiori a 6; questa eventualità si manifesta, ad esempio, nei reticoli incommensurati 3-D, visti come proiezione nello spazio tridimensionale di reticoli commensurati $(3 + d)$-dimensionali.

## 7.3 Gruppi spaziali

Sia $E$ uno spazio vettoriale euclideo e sia $\mathcal{A}$ uno spazio affine a esso associato; definiamo su $\mathcal{A}$ il gruppo $\mathcal{T}$ di *tutte* le traslazioni: $\mathcal{T} = \{t_{\vec{v}},\ \forall \vec{v} \in E\}$. Sia $\mathcal{G}_p$ un insieme di simmetrie puntuali; formiamo l'insieme $G_B \subseteq \mathcal{G}_p \times \mathcal{T}$ di *alcune* coppie $(S, t_{\vec{v}})$, con $S \in \mathcal{G}_p$ e $t_{\vec{v}} \in \mathcal{T}$. L'elemento $\alpha = (S, t_{\vec{v}})$ *agisce* su un qualunque punto $P \in \mathcal{A}$ nel seguente modo:

$$\alpha(P) = (S, t_{\vec{v}})\, P = S(P) + \vec{v}$$

Siano $\alpha_1, \alpha_2 \in G_B$, con $\alpha_1 = (S_1, t_{\vec{a}})$, $\alpha_2 = (S_2, t_{\vec{b}})$; definiamo il *prodotto*, in $G_B$, di $\alpha_1$ e $\alpha_2$, attraverso la relazione: $\alpha_2\alpha_1(P) = \alpha_2[\alpha_1(P)]$, essendo $P$ un punto generico di $\mathcal{A}$. Risulta:

$$\alpha_2\alpha_1(P) = \alpha_2[S_1(P) + \vec{a}] = S_2[S_1(P) + \vec{a}] + \vec{b} = S_2S_1(P) + \phi_2(\vec{a}) + \vec{b} = (S_2S_1, t_{\phi_2(\vec{a})} \circ t_{\vec{b}})P$$

dove si è indicata con $\phi_2$ l'isometria associata alla simmetria $S_2$. Essendo $P$ generico, vale

$$(S_2, t_{\vec{b}})(S_1, t_{\vec{a}}) = (S_2S_1, t_{\phi_2(\vec{a})} \circ t_{\vec{b}})$$

L'elemento $I_B = (I_{\mathcal{A}}, t_{\vec{0}})$ ha la funzione di elemento neutro in $G_B$ ($I_{\mathcal{A}}$ è la simmetria *identica* in $\mathcal{A}$, quella associata all'isometria identica $\iota$ in $E$), infatti è facile verificare che $\forall \alpha \in G_B,\ \alpha I_B = I_B\alpha = \alpha$. Si verifica pure che, dato un elemento $\alpha = (S, t_{\vec{a}})$, l'elemento *inverso*, $\alpha^{-1} = (\bar{S}, t_{\vec{b}})$, cioè tale che $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = I_B$, vale: $(S^{-1}, t_{-\phi_S^{-1}(\vec{a})})$ (per dimostrarlo si tenga conto che $\phi_{S^{-1}} = \phi_S^{-1}$).

**Teorema 7.7** Sia $T \subseteq G_B$ l'insieme di tutti e soli gli elementi del tipo $(I_{\mathcal{A}}, t_{\vec{v}})$: $T = \{(I_{\mathcal{A}}, t_{\vec{v}}) \in G_B\}$: se $G_B$ è un gruppo, allora $T$ è un gruppo, sottogruppo di $G_B$.

*Dimostrazione*
Siano $\alpha_1, \alpha_2 \in G_B$, con $\alpha_1 = (I_{\mathcal{A}}, t_{\vec{v}})$, $\alpha_2 = (I_{\mathcal{A}}, t_{\vec{w}})$ $\rightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2 \in T$; poiché $G_B$ è un gruppo, $\alpha_2\alpha_1 \in G_B$, ma $\alpha_2\alpha_1 = \alpha_1\alpha_2 = (I_{\mathcal{A}}, t_{\vec{v}+\vec{w}})$ e quindi $\alpha_2\alpha_1 \in T$ (proprietà di chiusura). L'elemento neutro $I_B \in G_B$ appartiene evidentemente pure a $T$ (esistenza dell'elemento neutro). Infine, se $\alpha = (I_{\mathcal{A}}, t_{\vec{v}}) \in T$, $\exists \alpha^{-1} \in G_B \;/\; \alpha\alpha^{-1} = I_B$ $\rightarrow$ $\alpha^{-1} = (I_{\mathcal{A}}, t_{-\vec{v}}) \in T$ (esistenza in $T$ dell'inverso di ogni elemento di $T$). Il teorema è dimostrato.

**Definizione 7.3** Se $T$ è associato a uno $\mathcal{Z}$-modulo

$$\Lambda = \{(\iota, \vec{v}) \in \{\iota\} \times E \;/\; \vec{v} = z_1\vec{e}_1 + \cdots + z_n\vec{e}_n,\ z_i \in \mathcal{Z}\}$$

dove $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ è una base di $E$, allora diciamo che $T$ è un *gruppo cristallografico di traslazioni* e $G_B$ è un *gruppo spaziale cristallografico*. In tal caso denotiamo $T$ con $T_\Lambda$.

Essendo $G_B$ un gruppo, $\forall \alpha \in G_B$, $\exists \alpha^{-1} \in G_B$, da cui, $\forall (I_{\mathcal{A}}, t_{\vec{v}}) \in T_\Lambda$:

$$\alpha\,(I_{\mathcal{A}}, t_{\vec{v}})\,\alpha^{-1} = (S, t_{\vec{a}})(I_{\mathcal{A}}, t_{\vec{v}})(S^{-1}, t_{-\phi_S^{-1}(\vec{a})}) = (SS^{-1}, t_{\phi_S(\vec{v})} \circ t_{\vec{a}} \circ t_{-\phi_S[\phi_S^{-1}(\vec{a})]}) = (I_{\mathcal{A}}, t_{\phi_S(\vec{v})}) \in G_B$$

Per definizione di $T_\Lambda$, tale elemento deve pure appartenere a $T_\Lambda$, vale a dire: $\forall \alpha \in G_B$, $\alpha\, T_\Lambda\, \alpha^{-1} \subseteq T_\Lambda$. In base al teorema 6.12, segue allora

**Teorema 7.8** *$T_\Lambda$ è un sottogruppo invariante di $G_B$.*

Ricordando che $G_B \subseteq \mathcal{G}_p \times \mathcal{T}$, possiamo isolare i più piccoli sottoinsiemi $\mathcal{G}_B \subseteq \mathcal{G}_p$ e $\mathcal{T}_B \subseteq \mathcal{T}$ tali che $G_B \subseteq \mathcal{G}_B \times \mathcal{T}_B$. Definiamo ora l'insieme $G_{0B} = \{(S, t_{\vec{0}}),\ \forall S \in \mathcal{G}_B\}$ (si noti che, in generale, $G_{0B}$ non è un sottoinsieme di $G_B$): è facile dimostrare che $G_{0B}$ è un gruppo. Ogni elemento $\alpha = (S, t_{\vec{a}}) \in G_B$ si può esprimere come prodotto di un elemento $(I_{\mathcal{A}}, t_{\vec{a}})$ (che, in generale, *non* appartiene a $T_\Lambda$) per un elemento $\alpha_0 = (S, t_{\vec{0}}) \in G_{0B}$, vale infatti: $(S, t_{\vec{a}}) = (I_{\mathcal{A}}, t_{\vec{a}})\,(S, t_{\vec{0}})$. Segue che $\alpha^{-1} = (S^{-1}, t_{\vec{0}})\,(I_{\mathcal{A}}, t_{-\vec{a}})$. In base ai teoremi 7.8 e 6.13, tenuto conto della commutatività in $\mathcal{T}$, risulta $\forall \alpha \in G_B$:

$$\alpha T_\Lambda \alpha^{-1} = T_\Lambda \;\rightarrow\; \alpha^{-1} T_\Lambda \alpha = T_\Lambda = (S^{-1}, t_{\vec{0}})(I_{\mathcal{A}}, t_{-\vec{a}}) T_\Lambda (I_{\mathcal{A}}, t_{\vec{a}})(S, t_{\vec{0}}) = (S^{-1}, t_{\vec{0}}) T_\Lambda (S, t_{\vec{0}})$$

In definitiva, $(S^{-1}, t_{\vec{0}}) T_\Lambda (S, t_{\vec{0}}) = T_\Lambda \;\rightarrow\; T_\Lambda (S, t_{\vec{0}}) = (S, t_{\vec{0}}) T_\Lambda$. Essendo $\alpha$ generico in $G_B$, anche $\alpha_0$ è generico in $G_{0B}$, da cui abbiamo il

**Teorema 7.9** *I gruppi $G_{0B}$ e $T_\Lambda$ commutano tra loro: $G_{0B}\, T_\Lambda = T_\Lambda\, G_{0B}$.*

Sia $\Lambda^R$ il reticolo in $\mathcal{A}$ associato a $T_\Lambda$: $\Lambda^R = T_\Lambda(O)$, dove $O$ è l'origine del reticolo:

$$\forall \alpha_0 \in G_{0B},\ \alpha_0(\Lambda^R) = \alpha_0 T_\Lambda(O) = (\alpha_0 T_\Lambda) O = (T_\Lambda \alpha_0) O = T_\Lambda \alpha_0(O)$$

Se facciamo coincidere l'origine $O$ del reticolo con il punto invariante di $\mathcal{G}_B$, allora $\forall \alpha_0 \in G_{0B}$, $\alpha_0(O) = (S, t_{\vec{0}}) O = S(O) + \vec{0} = S(O) = O$ e, quindi, $\alpha_0(\Lambda^R) = T_\Lambda \alpha_0(O) = T_\Lambda(O) = \Lambda^R$. In altri termini:

**Teorema 7.10** *Il reticolo $\Lambda^R$ associato al gruppo cristallografico delle traslazioni, $T_\Lambda$, è invariante sotto l'azione del gruppo $G_{0B}$. $G_{0B}$ è omomorfo al gruppo delle simmetrie puntuali del reticolo $\Lambda^R$ $(\mathcal{G}_{0R})$. $G_{0B}$ è isomorfo a un sottogruppo (proprio o improprio) di $\mathcal{G}_{0R}$.*

In generale, possono esistere in $G_B$ delle operazioni $\alpha = (S, t_{\vec{a}})$ con $(I_{\mathcal{A}}, t_{\vec{a}}) \notin T_\Lambda$. Essendo $\mathcal{G}_{0R}$ un gruppo finito, $\forall S \in \mathcal{G}_{0R}$, $\exists n \in \mathcal{N}\ /\ S^n = I_{\mathcal{A}}$, da cui: $(S, t_{\vec{a}})^n = (S^n, t_{\vec{b}}) = (I_{\mathcal{A}}, t_{\vec{b}})$, con $\vec{b} = (\iota + \phi_S + \cdots + \phi_S^{n-1})\vec{a}$ (dove $\phi_S$ è l'isometria associata a $S$); poiché $\alpha^n \in G_B$ e poiché $(I_{\mathcal{A}}, t_{\vec{b}})$, se è in $G_B$, deve essere in $T_\Lambda$, segue che $\vec{b} \in \Lambda$ e quindi $(\iota + \phi_S + \cdots + \phi_S^{n-1})\vec{a} \in \Lambda$. Ogni simmetria $(S, t_{\vec{a}})$, con $\vec{a}$ che soddisfa la relazione su scritta è *compatibile* col reticolo.

**Esempio 7.2** Sia $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base di uno spazio vettoriale euclideo 2-dimensionale; consideriamo una simmetria $S$ di un reticolo $\Lambda^R$ associato allo $\mathcal{Z}$-modulo $\Lambda$ generato da $B$; sia $\phi_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice rappresentativa dell'isometria associata a $S$, rispetto alla base $B$: si verifica facilmente che $\phi_S^2 = \iota \;\rightarrow\; S^2 = I_{\mathcal{A}}$. Allora, $(S, t_{\vec{a}})$ è compatibile col reticolo se $(\iota + \phi_S)\vec{a} = \vec{b} \in \Lambda$; dette $a_1, a_2$ e $b_1, b_2$ le componenti di $\vec{a}$ e $\vec{b}$, rispettivamente, rispetto alla base $B$, risulta:

$$(\iota + \phi_S)\vec{a} = \vec{b} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{cases} b_1 = 2a_1 \\ b_2 = 0 \end{cases}$$

Ponendo $b_1 = 1$ si ricava che la simmetria $(S, t_{\frac{1}{2}\vec{e}_1})$ è compatibile col reticolo. Si tratta in tal caso della *riflessione con traslazione* rispetto alla linea $g$ parallela all'asse individuato dal vettore $\vec{e}_1$.

Essendo $T_\Lambda$ un sottogruppo invariante di $G_B$, l'insieme dei laterali $G_B/T_\Lambda$ è insieme supporto del gruppo quoziente di $G_B$ rispetto a $T_\Lambda$. Data la simmetria $(S, t_{\vec{v}}) \in G_B$, per ogni $t_{\vec{b}} \in T_\Lambda$:

$$(S, t_{\vec{v}})(I_{\mathcal{A}}, t_{\vec{b}}) = (S, t_{\vec{v}} \circ t_{\phi_S(\vec{b})}) = (S, t_{\vec{v}+\vec{c}})$$

dove $\phi_S$ è l'isometria associata a $S$ e $\vec{c} = \phi_S(\vec{b}) \in T_\Lambda$. Dunque, ogni elemento del gruppo quoziente è un insieme costituito da tutte le simmetrie che differiscono tra loro per una traslazione reticolare. Essendo i gruppi puntuali cristallografici a supporto finito, anche i gruppi quoziente sono finiti; le singole classi di equivalenza hanno invece la potenza del numerabile (perchè tale è la potenza di $T_\Lambda$). Nelle applicazioni si *identifica* solitamente il gruppo spaziale con il suo gruppo quoziente.

## 7.4 Simmetrie su metriche particolari

Data un'isometria $f$ sappiamo che $f(\vec{x}) \cdot f(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{x}$. La matrice $\alpha$ rappresentativa di $f$ rispetto alla base $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ è definita dalle relazioni $f(\vec{a}_k) = \sum_h \alpha_{hk}\vec{a}_h$ $(k = 1, \ldots, n)$ (si veda la sezione 1.3). Da cui:

$$f(\vec{x}) = f\left(\sum_k x_k \vec{a}_k\right) = \sum_k x_k f(\vec{a}_k) = \sum_{h,k} x_k \alpha_{hk} \vec{a}_h$$

Segue che

$$f(\vec{x}) \cdot f(\vec{x}) = \left(\sum_{i,h} x_i \alpha_{hi} \vec{a}_h\right) \left(\sum_{j,k} x_j \alpha_{kj} \vec{a}_k\right) = \sum_{i,j} x_i \left(\sum_{h,k} {}^t\alpha_{ih} g_{hk} \alpha_{kj}\right) x_j = {}^tX {}^t\alpha G \alpha X$$

dove $G$ è la matrice metrica (si veda la sezione 3.3). In definitiva: ${}^tX {}^t\alpha G \alpha X = {}^tXGX$ e, data l'arbitrarietà di $X$, possiamo formulare il

**Teorema 7.11** Sia $E$ uno spazio vettoriale euclideo e $A = \{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ una sua base; se $G$ è la matrice metrica definita con riferimento alla base $A$, la matrice $\alpha$ rappresentativa di una qualunque isometria $f$, rispetto ad $A$, soddisfa la relazione

$$^t\alpha G\alpha = G$$

**Teorema 7.12** L'insieme $\mathcal{O}_G(E)$ delle isometrie che soddisfano la relazione di cui al teorema 7.11 è un gruppo.

*Dimostrazione*
Se $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{O}_G \rightarrow {}^t(\alpha_1\alpha_2)G(\alpha_1\alpha_2) = {}^t\alpha_2{}^t\alpha_1 G\alpha_1\alpha_2 = {}^t\alpha_2 G\alpha_2 = G$, cioè $\alpha_1\alpha_2 \in \mathcal{O}_G$ (analogamente, si dimostra che pure $\alpha_2\alpha_1 \in \mathcal{O}_G$); la proprietà di chiusura è quindi soddisfatta. L'isometria identica appartiene evidentemente a $\mathcal{O}_G$. Infine, se $\alpha \in \mathcal{O}_G \rightarrow {}^t\alpha G\alpha = G \rightarrow G = {}^t\alpha^{-1}G\alpha^{-1}$ cioè, pure $\alpha^{-1} \in \mathcal{O}_G$ (esistenza dell'inverso). Il teorema è dimostrato.

Definiamo l'insieme $\mathcal{O}_G(\mathcal{Z}) = \mathcal{O}_G(E) \cap \mathcal{O}_R(\mathcal{Z})$; essendo intersezione di sottogruppi di $\mathcal{O}(E)$, tale insieme deve essere pure sottogruppo di $\mathcal{O}(E)$. Attraverso l'isomorfismo $\phi$ tra i gruppi $GA(E)$ e $GL(E)$ (teorema 2.10) si perviene alla costruzione dell'insieme $\mathcal{G}_{\circ G} = \phi(\mathcal{O}_G(\mathcal{Z}))$ che è un sottogruppo di $\mathcal{G}_{\circ R}$.

$\mathcal{G}_{\circ G}$ è il gruppo di di simmetria puntuale di un reticolo associato a uno $\mathcal{Z}$-modulo costruito su uno spazio vettoriale euclideo avente metrica $G$.

Attraverso il teorema 7.12 è possibile proporre una classificazione dei reticoli in base al gruppo di simmetria a essi associato; infatti, fissata la dimensione $n$ dello spazio affine su cui i reticoli sono costruiti, si possono enumerare tutti i sottogruppi di $GA_\circ(E)$ *compatibili* con reticoli e, successivamente, attraverso la relazione di cui al teorema 7.11, determinare la matrice $G$ compatibile con ogni sottogruppo, vale a dire: la metrica del reticolo di data simmetria.

### 7.4.1 Classificazione dei reticoli in $\mathcal{A}_2$

Consideriamo in primo luogo i sottogruppi di $GA_\circ(E)$, compatibili con reticoli ($\mathcal{G}_{oR}$) aventi un solo elemento generatore; abbiamo i gruppi di rotazione 1, 2, 3, 4 e 6 (ciclici di ordine 1, 2, 3, 4 e 6, rispettivamente) e il gruppo $m$ ($m \equiv \{1, m; \circ\}$). Si noti che $m$ è un gruppo ciclico di ordine 2, infatti $m \circ m = m^2 = 1$; da ciò deriva pure $m = m^{-1}$.

Si ricorda che il simbolo assegnato al gruppo corrisponde al solo elemento generatore (o, ai soli generatori se questi sono più d'uno); ad esempio, 4 è il simbolo del gruppo $\{1, 2, 4, 4^{-1}; \circ\}$, essendo $2 = 4^2,\ 4^{-1} = 4^3$.

Siano ora $g_1$ e $g_2$ due generatori di un gruppo $\mathcal{G}_{oR}$; se $g_1,\ g_2$ sono due rotazioni, il loro prodotto deve essere ancora una rotazione $g_3$ (infatti, in tal caso, $g_1$ e $g_2$ sono due simmetrie associate a isometrie positive il cui prodotto è ancora un'isometria positiva alla quale si associa una rotazione $g_3$). Tenuto conto che $g_3$ deve essere una rotazione di un ordine permesso in $\mathcal{G}_{oR}$, sono esclusi i gruppi generati da $\{3, 4\}$ e da $\{4, 6\}$; inoltre i gruppi generati da $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}, \{2, 6\}$ e $\{3, 6\}$ corrispondono rispettivamente ai gruppi 6, 4, 6 e 6 che si ottengono con un unico generatore. Gli unici gruppi di rotazione, in $\mathcal{A}_2$, sono dunque quelli ottenibili con un solo generatore.

Nel caso in cui si abbiano, per generatori, una rotazione $g$ e una riflessione $m$, abbiamo i gruppi $2m,\ 3m,\ 4m$ e $6m$.

Il gruppo $2m$ ha elementi $\{1, 2, m, m'\}$ con $m' = 2m$ ($m'$ è una riflessione in quanto prodotto tra due affinità associate rispettivamente a un'isometria positiva e una negativa); tutti i possibili prodotti tra elementi del gruppo ricadono tra gli elementi già elencati, infatti: posto $m'' = m2$, risulta $m'm'' = 2mm2 = 1 \rightarrow m' = m''$ ($2m = m2$; per brevità, si è indicata con $ab$ l'operazione $a \circ b$ tra elementi del gruppo). Parimenti, $2m' = 22m = m$, $m'2 = 2m2 = m22 = m$ e $mm' = m2m = 2mm = 2$. I vari prodotti possono essere raccolti nella *tavola di moltiplicazione*:

| $\circ$ | 1 | 2 | $m$ | $m'$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | $m$ | $m'$ |
| 2 | 2 | 1 | $m'$ | $m$ |
| $m$ | $m$ | $m'$ | 1 | 2 |
| $m'$ | $m'$ | $m$ | 2 | 1 |

In base alle proprietà generali cui soddisfano i gruppi, è facile dimostrare che ogni elemento del gruppo deve comparire una e una sola volta in ogni riga e ogni colonna della tabella di moltiplicazione.

Il gruppo $3m$ ha elementi $\{1, 3, 3^{-1}, m, m', m''\}$ avendo posto $3^{-1} = 3^2$, $m' = 3m$, $m'' = 3^2m$. La tavola di moltiplicazione

| $\circ$ | 1 | 3 | $3^{-1}$ | $m$ | $m'$ | $m''$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | $3^{-1}$ | $m$ | $m'$ | $m''$ |
| 3 | 3 | $3^{-1}$ | 1 | $m'$ | $m''$ | $m$ |
| $3^{-1}$ | $3^{-1}$ | 1 | 3 | $m''$ | $m$ | $m'$ |
| $m$ | $m$ | $m''$ | $m'$ | 1 | $3^{-1}$ | 3 |
| $m'$ | $m'$ | $m$ | $m''$ | 3 | 1 | $3^{-1}$ |
| $m''$ | $m''$ | $m'$ | $m$ | $3^{-1}$ | 3 | 1 |

è calcolabile dalle relazioni

$$
\begin{array}{lll}
3m' = 3^2m = m'' & 3m'' = 33^2m = m & 3^2m' = m \\
3^2m'' = 3m = m' & m3 = (3m'')^{-1}3 = m'' & m'3 = 3m3 = 3m'' = m \\
m''3 = m3^2 = m'3^23 = m' & m3^2 = m' & m'3^2 = m''33^2 = m'' \\
m''3^2 = m33^2 = m & m'm = 3mm = 3 & mm' = mm3^2 = 3^2 \\
m''m = 3^2mm = 3^2 & mm'' = mm3 = 3 & m'm'' = m'm'3^2 = 3^2 \\
m''m' = 3m'm' = 3 & &
\end{array}
$$

Analogamente si ricavano i gruppi $4m \equiv \{1, 2, 4, 4^{-1}, m_1, m_2, m_3, m_4; \circ\}$, di ordine 8, generato da 4 e $m_1$ (avendo posto $m_2 = 2m_1$, $m_3 = 4m_1$, $m_4 = 4^{-1}m_1$) e $6m \equiv \{1, 2, 3, 3^{-1}, 6, 6^{-1}, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6; \circ\}$, di ordine 12, generato da 6 e $m_1$.

Se un gruppo $G$ è generato da 2 riflessioni $m$ e $m'$, l'elemento $mm' \in G$ è una rotazione $g$ il cui ordine deve essere uno di quelli permessi sui reticoli; allora, $mm' = g \to m' = mg$, vale a dire: $\{m, g\}$ è un sistema di generatori equivalente a $\{m, m'\}$ e $G$ ricade tra i gruppi già ricavati.

È facile dimostrare che, in $\mathcal{A}_2$, non possono esistere gruppi $\mathcal{G}_{oR}$ che richiedano almeno 3 generatori. Vediamo un esempio: sia il gruppo $G = 2m \equiv \{1, 2, m, m'; \circ\}$; se *aggiungiamo* a $G$ una riflessione $m''$, otteniamo un gruppo $G'$ contenente i prodotti di $m''$ con tutti gli elementi di $G$ e, in particolare, l'elemento $m''m$ che è una rotazione $g$; se $g = 2$, $m'' = 2m \equiv m'$ e $G' \equiv G$; se $g = 3$, $m'' = 3m$, allora $G'$ può anche essere generato da $\{2, 3, m\}$, ricadendo però nel gruppo $6m$ ottenuto dalla coppia $\{6, m\}$; analogamente se $g = 4$, $m'' = 4m$ e $G' \equiv 4m$, mentre se $g = 6$, $m'' = 6m$ e si ritrova ancora il gruppo $6m$.

In definitiva:

**Teorema 7.13** *In $\mathcal{A}_2$, i possibili sottogruppi di $GA_\circ(E)$ compatibili con reticoli sono: 1, 2, 3, 4, 6, $m$, $2m$, $3m$, $4m$ e $6m$.*

Attraverso la relazione ${}^t\alpha G\alpha = G$, per ogni gruppo $\mathcal{G}_{oR}$, è possibile ricavare i vincoli imposti dalla simmetria sulla matrice metrica $G$ e, quindi, sulla base di $E_2$ scelta per costruire il reticolo.

### Gruppi *1* e *2*

È evidente che se il gruppo $\mathcal{G}_{oR}$ coincide con il gruppo $1 \equiv \{1; \circ\}$ (costituito dalla sola simmetria *identica*), non viene imposto alcun vincolo sulla $G$; la base $B$ del reticolo è allora costituita da 2 vettori qualunque di $E_2$, $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, che siano linearmente indipendenti. Il reticolo viene in tal caso denominato *obliquo*. L'assenza di relazioni *metriche* tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si esprime spesso con la notazione $a \neq b$, $\alpha \neq \pi/2$, dove con $a$, $b$ e $\alpha$ si sono indicati, rispettivamente, i moduli dei vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ e l'angolo compreso tra di essi.

Vediamo ora il caso $\mathcal{G}_{oR} = 2 \equiv \{1, 2; \circ\}$. Una matrice $\alpha$, rappresentativa dell'affinità corrispondente a una rotazione di ordine 2, deve avere determinante 1 e traccia -2; la matrice $-I$ (dove $I$ è la matrice identità) è dunque una matrice di rotazione di ordine 2, rispetto a una *qualche* base in $E_2$. I vincoli imposti sulla metrica reticolare da $-I$ sono ricavabili dall'equazione

$$^t(-I)G(-I) = G \quad \rightarrow \quad G = G$$

dunque, in $\mathcal{A}_2$, la rotazione di ordine 2 è compatibile con un reticolo di metrica *qualunque*, cioè con un reticolo obliquo.

### Gruppi *m* e *2m*

Se $\mathcal{G}_{oR} = m \equiv \{1, m; \circ\}$, una possibile matrice $(M)$ per $m$ è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad det(M) = -1$$

da cui:

$$^tMGM = G \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & g_3 \\ g_3 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & g_3 \\ g_3 & g_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} g_1 = g_1 \\ g_2 = g_2 \\ g_3 = -g_3 = 0 \ \leftarrow \text{vincolo} \end{cases}$$

Poiché $g_3$ deve essere nullo, una base $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ per un reticolo di simmetria $m$ (con $m$ rappresentata dalla matrice $M$) deve avere $\vec{a} \cdot \vec{b} = g_3 = 0$, vale a dire: $\vec{a}$ e $\vec{b}$ devono essere ortogonali. Un tale reticolo viene detto *rettangolare*. L'aggiunta di una rotazione di ordine 2 al gruppo $m$ non impone nuovi vincoli alla metrica (perché la rotazione 2 non ne impone), quindi è rettangolare anche un reticolo con simmetria $2m$. Notiamo esplicitamente che, usando la simmetria come criterio classificativo, un reticolo è rettangolare non perché ha una base ortogonale, ma perché ha simmetria $m$ (o $2m$).

Dato il riferimento affine $(O, B)$, sia $\mathcal{M}$ l'elemento di simmetria corrispondente alla riflessione $m$, rappresentata dalla matrice $M$: $\mathcal{M}$ è il luogo dei punti di $\mathcal{A}_2$ invarianti per azione della simmetria $m$; in base alla proposizione 2.13, la sua equazione può essere ottenuta dalla relazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{da cui} \quad y = 0$$

essendo $x$ e $y$ le coordinate di un generico punto $P \in \mathcal{M}$ nel riferimento $(O, B)$. L'equazione $y = 0$ è quella dell'asse $X$, individuato dal vettore $\vec{a}$ della base $B$: $\mathcal{M}$ coincide allora con l'asse $X$.

Nel 2-dimensionale, un'altra possibile matrice rappresentativa di una riflessione $m$ è:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Applicando ancora l'equazione ${}^tMGM = G$, si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 & g_3 \\ g_3 & g_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_2 & g_3 \\ g_3 & g_1 \end{pmatrix} \rightarrow g_1 = g_2$$

Una base $B$ del reticolo può essere allora costituita da due vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ aventi moduli *uguali* ma senza alcuna restrizione sull'angolo tra essi compreso. Tale reticolo (che potrebbe denominarsi *rombico*) ha comunque simmetria $m$ e, *per definizione*, deve essere di tipo rettangolare. Nel riferimento $(O, B)$, l'elemento di simmetria $\mathcal{M}$, passante per l'origine e corrispondente alla simmetria $m$, è derivabile dall'equazione

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{da cui} \quad x = y$$

L'equazione $x = y$ rappresenta la retta bisettrice dell'angolo tra le due rette $X$ e $Y$, rispettivamente individuate dai due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ che sono base del riferimento nonché generatori del reticolo.

È possibile passare da un reticolo rombico, di base $B = (\vec{a}, \vec{b})$, a un reticolo rettangolare, di base $B' = (\vec{a}', \vec{b}')$, ponendo

$$\begin{cases} \vec{a}' = \vec{a} + \vec{b} \\ \vec{b}' = \vec{a} - \vec{b} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{a}' + \vec{b}') \\ \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}' - \vec{b}') \end{cases}$$

infatti $\vec{a}' \cdot \vec{b}' = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = g_1 - g_2 = 0$ (poiché $g_1 = g_2$); i due *nuovi* vettori $\vec{a}'$ e $\vec{b}'$ sono perciò ortogonali e di modulo, in generale, diverso. Si noti che, nella base $B'$, la linea di riflessione $\mathcal{M}$ risulta essere parallela all'asse $X'$ individuato dal vettore $\vec{a}'$.

Detti $\Lambda$ e $\Lambda'$ gli $\mathcal{Z}$-moduli generati rispettivamente da $B$ e $B'$, si vede che ogni vettore di $\Lambda'$ è pure un vettore di $\Lambda$, infatti:

$$\forall \vec{v} \in \Lambda', \quad \vec{v} = z_a\vec{a}' + z_b\vec{b}' = z_a(\vec{a} + \vec{b}) + z_b(\vec{a} - \vec{b}) = (z_a + z_b)\vec{a} + (z_a - z_b)\vec{b} \in \Lambda, \quad z_a,\, z_b \in \mathcal{Z}$$

e quindi $\Lambda' \subseteq \Lambda$; tuttavia, *non* tutti i vettori di $\Lambda$ appartengono pure a $\Lambda'$, per esempio il vettore $\vec{a} \in \Lambda$, essendo una combinazione lineare *semiintera* di vettori di $\Lambda'$, non può essere in $\Lambda'$. Per riottenere la coincidenza tra i due $\mathcal{Z}$-moduli $\Lambda$ e $\Lambda'$ (e quindi la coincidenza dei rispettivi reticoli) è necessario *ridefinire* $\Lambda'$ come:

$$\Lambda' = \{\vec{v} \in E_2 \;/\; \vec{v} = n_1\vec{a}' + n_2\vec{b}\,' + n_3\vec{c}\,', \quad n_i \in \mathcal{Z}\}$$

essendo $\vec{c}\,' = 1/2(\vec{a} + \vec{b})$ il vettore *centrante* della cella rettangolare. Abbiamo la

**Definizione 7.4** Con riferimento a quanto sopra, dicesi *centrato* il reticolo $\Lambda^{R'}$ associato allo $\mathcal{Z}$-modulo $\Lambda'$.

La nuova base reticolare $B' = \{\vec{a}', \vec{b}\,', \vec{c}\,'\}$ è dunque costituita da 3 vettori che generano tutto il reticolo, ma che non sono più, ovviamente, linearmente indipendenti nello spazio vettoriale bidimensionale $E$, associato allo spazio affine di cui il reticolo è sottoinsieme.

**Esempio 7.3** Siano $\mathcal{A}$ ed $E_2$, rispettivamente, l'insieme dei punti e lo spazio dei vettori liberi del piano; si istituisca su $\mathcal{A}$ una struttura di spazio affine come nell'esempio 3.4, a cui si rimanda. Sia $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ una coppia di vettori liberi del piano aventi norma uguale; siano $\Lambda = \{\vec{v} \in E_2 \;/\; \vec{v} = z_1\vec{a} + z_2\vec{b}, \quad z_1, z_2 \in \mathcal{Z}\}$ e $\mathcal{T}_\Lambda$ il corrispondente gruppo di traslazioni; in figura 7.1 è mostrata una porzione del reticolo, $\Lambda^R = \mathcal{T}_\Lambda(O)$, di origine $O$.

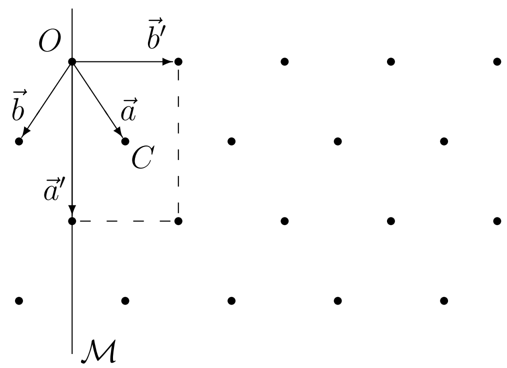



Figura 7.1: Reticolo centrato

Il passaggio alla base $B'$ comporta di necessità la centratura della cella elementare (punto $C = O + \vec{a}$) individuata dai vettori $\vec{a}', \vec{b}'$ e dalle linee tratteggiate. Notiamo esplicitamente che, nella nuova base, la linea di riflessione $\mathcal{M}$ è parallela a uno degli assi coordinati.

Per quanto visto alla sezione 3.3.1, l'area della cella elementare primitiva (individuata dai vettori della base $B$), è il numero $A = (g_1 g_2 - g_3^2)^{1/2}$, quindi $A^2 = g_1^2 - g_3^2$; nella base $B'$, la cella centrata ha $A'^{\,2} = g_1' g_2' = 4(g_1^2 - g_3^2)$, da cui $A' = 2A$: la cella centrata ha area doppia di quella primitiva.

Il ricorso a celle centrate (o, come anche si dice, a *basi centrate*) è utile quando si vogliano orientare gli elementi di simmetria secondo direzioni parallele o ortogonali agli assi del reticolo.

### Gruppi *3, 3m, 6* e *6m*

Sia ora il caso di un reticolo avente gruppo di simmetria 3: $\mathcal{G}_{oR} = 3 \equiv \{1, 3, 3^{-1}; \circ\}$. Qualunque sia la base reticolare $B$ scelta, la matrice $M$ rappresentativa della simmetria 3 deve avere

$det(M) = 1$ e $Tr(M) = 2\cos(2\pi/3) = -1$; una possibile forma per $M$ è dunque:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, dall'equazione ${}^tMGM = G$ si ottiene per $G$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & g_3 \\ g_3 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 + 2g_3 + g_2 & -g_1 - g_3 \\ -g_1 - g_3 & g_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} g_1 = g_2 \\ g_1 + g_3 = -g_3 \\ g_1 + 2g_3 + g_2 = g_1 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione del sistema si ricava che $g_3 = -g_1/2$ (la terza equazione è un'identità). Se $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ è la base reticolare, si ha:

a) $g_1 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = g_2 = b^2 \;\rightarrow\; a = b$

b) $g_3 = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\alpha = a^2\cos\alpha = -g_1/2 = -a^2/2 \;\rightarrow\; \alpha = 2\pi/3$

I due vettori della base reticolare devono dunque avere lo stesso modulo e formare un angolo di 120°. Un reticolo di questo tipo viene denominato *trigonale*.

Determinata $G$, è possibile derivare tutte le simmetrie $S$ compatibili con il reticolo trigonale, usando ancora l'equazione ${}^tSGS = G$, in cui $S$ riveste il ruolo di *incognita*. Sia

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

si ha:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a^2 - ac + c^2 = 1 & (i) \\ b^2 - bd + d^2 = 1 & (ii) \\ ab - 1/2(ad + bc) + cd = -1/2 & (iii) \end{cases}$$

La $(i)$, letta come equazione di 2° grado in $a$, ha radici reali se e solo se il suo *discriminante* non è negativo:

$$\Delta = c^2 - 4(c^2 - 1) = -3c^2 + 4 \geq 0 \;\rightarrow\; |c| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \;\rightarrow\; c = -1,\, 0,\, 1$$

dove l'ultima implicazione deriva dal fatto che $c$ deve essere un numero intero (come, del resto, gli tutti gli altri elementi di $S$). Parimenti, dalla $(ii)$ deriva $d = -1, 0, 1$.

Considerando in primo luogo le isometrie positive, $det(S) = ad - bc = 1 \rightarrow bc = ad - 1$; dalla $(iii)$ deriva allora la relazione $ab + cd - ad = -1$ $(iv)$ e quindi, tenuto conto delle equazioni $(i)$, $(ii)$, $(iv)$ e $det(S) = 1$, si ha:

$$c = 1 \quad \xrightarrow{(i)} \quad a = 0,\, 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \xrightarrow{(iv)} d = -1 \xrightarrow{(ii)} b = -1 & (S_1) \\ a = 1 \longrightarrow b = -1 \longrightarrow d = 0 & (S_2) \end{cases}$$

$$c = 0 \quad \longrightarrow \quad a = 1,\, -1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \longrightarrow b = 0 \longrightarrow d = 1 & (S_3) \\ a = -1 \longrightarrow b = 0 \longrightarrow d = -1 & (S_4) \end{cases}$$

$$c = -1 \quad \longrightarrow \quad a = 0,\, -1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \longrightarrow d = 1 \longrightarrow b = 1 & (S_5) \\ a = -1 \longrightarrow b = 1 \longrightarrow d = 0 & (S_6) \end{cases}$$

In sintesi:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{1} \\ 1 & \bar{1} \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & \bar{1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} \bar{1} & 0 \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix} \quad S_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \bar{1} & 1 \end{pmatrix} \quad S_6 = \begin{pmatrix} \bar{1} & 1 \\ \bar{1} & 0 \end{pmatrix}$$

ove si è posto $\bar{1}$ in luogo di $-1$.

Poiché $Tr(S_1) = -1$, $S_1$ corrisponde a una matrice di rotazione di ordine 3; essendo $S_6$ la matrice rappresentativa della simmetria 3, usata per imporre i vincoli su $G$, ed essendo $S_1 S_6 = S_6 S_1 = I$, risulta $S_1 \equiv 3^{-1} = 3^2$. La matrice $S_2$ rappresenta una rotazione di ordine 6, infatti $Tr(S_2) = 1$; poiché $S_2^2 = S_1 = 3^{-1}$, poniamo $S_2 = 6^{-1}$. $S_3$ corrisponde alla matrice identica, quindi rappresenta la simmetria 1. Analogamente si ricavano le corrispondenze $S_4 \rightarrow 2$ e $S_5 \rightarrow 6$.

Una procedura simile può essere applicata per la derivazione delle matrici rappresentative delle simmetrie di riflessione, ottenendo:

$$S_7 = \begin{pmatrix} 1 & \bar{1} \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix} \quad S_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \bar{1} \end{pmatrix} \quad S_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{10} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{1} \\ \bar{1} & 0 \end{pmatrix} \quad S_{11} = \begin{pmatrix} \bar{1} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_{12} = \begin{pmatrix} \bar{1} & 0 \\ \bar{1} & 1 \end{pmatrix}$$

Gli elementi di simmetria $\mathcal{M}$, relativi alle riflessioni $S_7 - S_{12}$, sono ricavabili dalle equazioni $S_i X = X$, essendo $X$ il vettore colonna delle coordinate di un generico punto $P \in \mathcal{M}$. In particolare:

$$\mathcal{M}_1 \rightarrow S_7 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \bar{1} \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = x \\ y = -y = 0 \end{cases}$$

la linea di riflessione $\mathcal{M}_1$ coincide allora con l'asse $X$ individuato dal vettore $\vec{a}$ della base reticolare. La linea $\mathcal{M}_2$ relativa alla simmetria $S_8$ ha equazione $x = 2y$, si tratta cioè della varietà, passante per l'origine, di direzione $\vec{v} = 2\vec{a} + \vec{b}$; poiché $\vec{v} \cdot \vec{b} = 0$ (si tenga conto della *non* ortogonalità della base), $\mathcal{M}_2$ è normale all'asse $Y$ (individuato dal vettore $\vec{b}$). Analogamente: $\mathcal{M}_3$ ($S_9$) è la bisettrice degli assi $X$ e $Y$; $\mathcal{M}_4$ ($S_{10}$) è normale a $\mathcal{M}_3$; $\mathcal{M}_5$ ($S_{11}$) è normale all'asse $X$; infine $\mathcal{M}_6$ ($S_{12}$) coincide con l'asse $Y$.

Osserviamo che, essendo il reticolo trigonale compatibile anche con rotazioni di ordine 6, il reticolo avente simmetria 6 (reticolo *esagonale*) deve avere la stessa metrica del trigonale. La figura 7.2 illustra graficamente la situazione, con un costrutto analogo a quello dell'esempio 7.3.

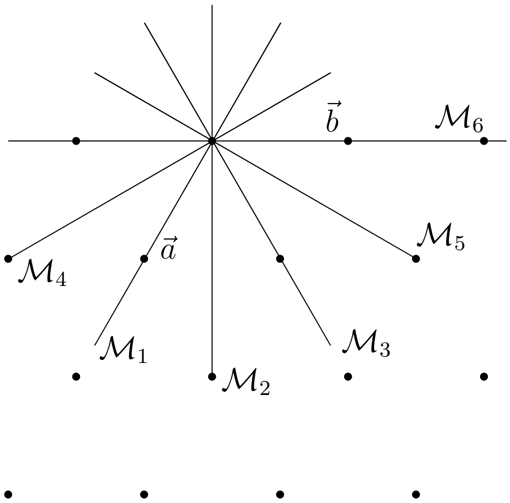



Figura 7.2: Reticolo esagonale

In sintesi, la *massima* simmetria compatibile con la metrica individuata è la $6m$, a questa si fa corrispondere il reticolo esagonale; sottogruppi del $6m$ aventi almeno una rotazione 3 (quindi ancora con la stessa $G$) sono il 6, il $3m$ e il 3. Si noti che esistono due possibili gruppi di tipo $3m$, tra loro isomorfi, ottenuti dal $6m$ *eliminando* da quest'ultimo la rotazione 2 e, alternativamente, la riflessione $S_7$ oppure la riflessione $S_8$; il primo gruppo, a cui si attribuisce simbolo $3m1$, ha elementi $\{1, 3, 3^{-1}, S_8, S_{10}, S_{11}\}$; il secondo gruppo, di simbolo $31m$, ha elementi $\{1, 3, 3^{-1}, S_7, S_9, S_{12}\}$. I due gruppi $3m1$ e $31m$ differiscono per la posizione delle linee di riflessione: $3m1$ ha le linee $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_4$ e $\mathcal{M}_5$, mentre $31m$ ha quelle $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_3$ e $\mathcal{M}_6$.

### Gruppi *4* e *4m*

Una matrice $S$ rappresentativa di una rotazione di ordine 4 deve avere traccia nulla (infatti, $Tr(S) = 2\cos\pi/2 = 0$); una possibile forma per $S$ è dunque:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \bar{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Dall'equazione ${}^tSGS = G$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & g_3 \\ g_3 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \bar{1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_2 & -g_3 \\ -g_3 & g_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} g_1 = g_2 \\ g_3 = -g_3 = 0 \end{cases}$$

I due vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ della base reticolare $B$ devono allora avere la stessa norma ed essere ortogonali. Il reticolo corrispondente viene denominato *quadrato.* Si sottolinea il fatto che la forma specifica della $G$ dipende dalla scelta della base $B$ rispetto alla quale si è rappresentata la simmetria 4; passando a una diversa base $B'$, cambia la forma della $S$ (pur restando invariata la traccia) e la $G$ assume un aspetto differente; il reticolo, tuttavia, continuerà a essere di tipo quadrato, perchè ha simmetria 4, e sarà sempre possibile individuare un opportuno automorfismo che trasformi la base $B'$ nella base *canonica* $B$.

**Esempio 7.4** Sia $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$ una matrice rappresentativa di una simmetria 4

$(Tr(S) = 0,\ det(S) = 1)$; la forma della $G$ è calcolabile dalla:

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{1} \\ 2 & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & g_3 \\ g_3 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 + g_2 - 2g_3 & 2g_1 + g_2 - 3g_3 \\ - & 4g_1 + g_2 - 4g_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} g_1 + g_2 - 2g_3 &= g_1 \\ 4g_1 + g_2 - 4g_3 &= g_2 \\ 2g_1 + g_2 - 3g_3 &= g_3 \end{cases}$$

da cui si ricava: $g_3 = g_1,\ g_2 = 2g_1,$ vale a dire:

$$G = g_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La base $B' = \{\vec{a}', \vec{b}'\}$ del reticolo ha dunque $a' = \sqrt{g_1},\ b' = \sqrt{2}\,a'$ e $g_1 = (a')^2 = \vec{a}' \cdot \vec{b}' = \sqrt{2}(a')^2 \cos\alpha \rightarrow \alpha = \pi/4$.

È possibile passare dalla base $B'$ a una base *canonica* $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ del reticolo di simmetria 4 (che, per definizione, è un reticolo quadrato), ponendo:

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{a}' \\ \vec{b} = \vec{b}' - \vec{a}' \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} b^2 = \vec{b} \cdot \vec{b} = (\vec{b}' - \vec{a}') \cdot (\vec{b}' - \vec{a}') = (a')^2 = a^2 \rightarrow b = a \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}' \cdot (\vec{b}' - \vec{a}') = 0 \end{array}$$

I due reticoli di base $B$ e $B'$ sono identici in quanto le aree delle rispettive celle elementari sono uguali, come si verifica calcolando i determinanti delle due matrici metriche associate.

Rispetto alla base *canonica*, le simmetrie compatibili con un reticolo quadrato sono rappresentate da matrici $S$ che soddisfano l'equazione ${}^tSGS = G \rightarrow g_1{}^tSIS = g_1I \rightarrow {}^tSS = I$; la matrice $S$ deve dunque essere ortogonale. Si ha:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a^2+c^2 & = & 1 & (i) \\ b^2+d^2 & = & 1 & (ii) \\ ab+cd & = & 0 & (iii) \end{cases}$$

Essendo gli elementi di $S$ dei numeri interi, dalla $(i)$ si ottengono solo due possibili soluzioni: $a^2 = 1,\ c = 0\ (iv)$; oppure $a = 0,\ c^2 = 1\ (v)$; se vale la soluzione $(iv)$:

$$a^2 = 1 \ \rightarrow \ a = \pm 1,\ c = 0 \ \xrightarrow{(iii)} \ b = 0 \ \xrightarrow{(ii)} \ d = \pm 1$$

a cui corrispondono le 4 simmetrie:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ S_2 = \begin{pmatrix} \bar{1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix},\ S_4 = \begin{pmatrix} \bar{1} & 0 \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix}$$

Se vale la soluzione $(v)$:

$$a = 0,\ c^2 = 1 \ \rightarrow \ c = \pm 1 \ \xrightarrow{(iii)} \ d = 0 \ \xrightarrow{(ii)} \ b = \pm 1$$

da cui:

$$S_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ S_6 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ S_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \bar{1} & 0 \end{pmatrix},\ S_8 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{1} \\ \bar{1} & 0 \end{pmatrix}$$

$S_1$ è la matrice identità (simmetria 1). $S_2$ rappresenta un'isometria negativa ($det(S_2) = -1$); il luogo dei punti di $\mathcal{A}_2$ invarianti per simmetria è dato dall'equazione $x = 0$ (equazione dell'asse $Y$), cioè è la retta individuata dal vettore $\vec{b}$ della base reticolare; $S_2$ è dunque una riflessione $(m)$ rispetto all'asse $Y$.

In modo analogo si caratterizzano le altre simmetrie: $S_3$ è una riflessione rispetto all'asse $X$, individuato dal vettore $\vec{a}$ della base reticolare $(m')$; $S_4$ è una rotazione di ordine 2 (simmetria 2); $S_5$ è una riflessione rispetto alla bisettrice degli assi $X$ e $Y$ (bisettrice del 1° e 3° quadrante; simmetria $m''$); $S_6$ è una rotazione di ordine 4 (simmetria $4^{-1}$, inversa rispetto a quella da cui siamo partiti per la determinazione della matrice metrica); $S_7$ è la simmetria di rotazione 4; infine $S_8$ è una riflessione rispetto alla bisettrice del 2° e 4° quadrante (simmetria $m'''$).

Il reticolo quadrato è dunque compatibile con i gruppi 4 e $4m$ (di cui il 4 è un sottogruppo).

Riassumendo: in uno spazio affine 2-dimensionale, i possibili reticoli sono classificabili in base alla simmetria come illustrato nella tabella seguente

| Gruppi | Tipo di reticolo | Vincoli metrici |
|---|---|---|
| ***1, 2*** | Obliquo | - |
| ***m, 2m*** | Rettangolare | $\alpha = \pi/2$ |
| ***4, 4m*** | Quadrato | $a = b,\ \alpha = \pi/2$ |
| ***3, 3m1, 31m*** | Trigonale | $a = b,\ \alpha = 2\pi/3$ |
| ***6, 6m*** | Esagonale | $a = b,\ \alpha = 2\pi/3$ |

dove $a$ e $b$ sono i moduli dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ della base reticolare e $\alpha$ l'angolo compreso tra di essi.

Il reticolo rettangolare può anche avere $a = b$ (e $\alpha$ non vincolato) nel qual caso si ottiene un reticolo centrato. I reticoli trigonale ed esagonale hanno la stessa metrica e talvolta non vengono distinti.

### 7.4.2 Gruppi spaziali in $\mathcal{A}_2$

La simmetria di un insieme di oggetti (*punti*), corrispondente a un dato reticolo, è descritta dal *gruppo spaziale*. Questo si ottiene associando *alcune operazioni* di simmetria puntuale del reticolo con il gruppo delle traslazioni compatibili col reticolo, secondo quanto discusso nella sezione 7.3.

Nella figura 7.3 è rappresentata una porzione finita di un insieme di coppie di oggetti dei quali un sottoinsieme (quello degli oggetti ○ ) è l'immagine speculare dell'altro ( ⊙ ). In figura è tracciata la cella elementare che contiene i due oggetti, di cui l'uno l'immagine speculare dell'altro, il reticolo corrispondente alla struttura e la linea di riflessione $\mathcal{M}$ passante per l'origine $O$ del reticolo (elemento di simmetria corrispondente a un'operazione di simmetria $m$ della struttura e del reticolo). Rispetto alla base reticolare $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$, l'oggetto ○ , contenuto nella cella (di riferimento) indicata in figura, ha coordinate *frazionarie* $x, y$ (sia $P$ tale oggetto) essendo queste comprese nell'intervallo [0,1[; per riflessione rispetto alla linea $\mathcal{M}$ si ottiene l'oggetto avente coordinate frazionarie $\overline{x}, y$, fuori dalla cella di riferimento. Da questi due oggetti, per tutte le traslazioni $t_{\vec{v}} \in \mathcal{T}_\Lambda$ si ottengono tutti gli altri oggetti della struttura. È evidente che l'oggetto, entro la cella, avente coordinate $1 + \overline{x}, y$ (sia $Q$) potrebbe pure essere ottenuto per riflessione di $P$, rispetto a una linea $\mathcal{M}_1$ di equazione $x = 1/2$; d'altra parte $Q$ si potrebbe ottenere a partire da $P$ per riflessione di quest'ultimo rispetto alla linea $\mathcal{M}$, seguita

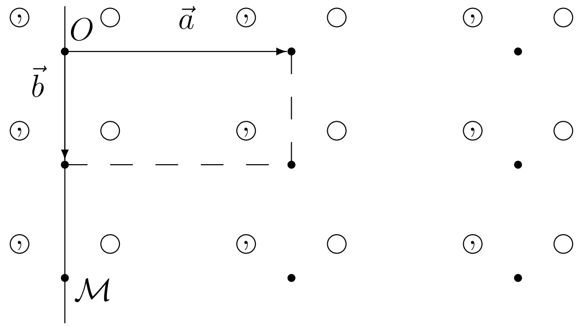



Figura 7.3: *Struttura* avente gruppo spaziale $pm$

dalla traslazione $t_{\vec{a}}$:

$$(I, t_{\vec{a}})(m, t_{\vec{0}})P = (m, t_{\vec{a}})P = Q$$

L'operazione $S = (m, t_{\vec{a}})$ è in effetti un'operazione di simmetria spaziale della struttura. Il luogo dei punti invarianti di $S$ ($\mathcal{M}_1$) è l'insieme di tutti i punti $P$ che soddisfano l'equazione $S(P) = P$; rappresentando $m$ nella base reticolare $B$, si ottiene:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1-x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

dove $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è il vettore colonna delle coordinate di $P$; l'equazione $x = 1/2$ è proprio quella dalla linea $\mathcal{M}_1$ che risulta essere l'elemento di simmetria (non passante per $O$) associato alla simmetria spaziale $S$. Riferendoci al gruppo quoziente $G_B/T_\Lambda$, è evidente che le due simmetrie $(m, t_{\vec{0}})$ e $(m, t_{\vec{a}})$ sono nella stessa classe di equivalenza e identificano quindi lo stesso elemento di $G_B/T_\Lambda$.

Essendo presente una riflessione $m$, il reticolo soggiacente alla struttura è senz'altro di tipo rettangolare; la simmetria del reticolo è $2m$ (ogni reticolo bidimensionale è simmetrico rispetto a rotazioni di ordine 2) e presenta in più una invarianza $m'$ per riflessioni rispetto a una seconda linea di direzione $\vec{a}$ ($m' = 2m$). La struttura descritta in figura 7.3 ha invece una simmetria puntuale inferiore (mancano infatti le simmetrie 2 e $m'$), ed è sottogruppo di $2m$. Riassumendo: la struttura è *rettangolare* (appartiene al *sistema rettangolare*); il gruppo spaziale $G_B$ è indicato con il simbolo $pm$, dove $p$ indica il tipo di cella (primitiva); il gruppo punto associato ($G_{0B}$) è $m$, e il gruppo del reticolo è $2m$.

Tenuto conto dell'esistenza in $\mathcal{A}_2$ di simmetrie di riflessione $g$ (si veda l'esempio 7.2), un elenco dei possibili gruppi spaziali nel bidimensionale è:

| Sistema | Gruppi spaziali |
|---|---|
| Obliquo | $p1$, $p2$ |
| Rettangolare | $pm$, $pg$, $pmm$, $pmg$, $pgg$, $cm$, $cg$, $cmm$, $cmg$, $cgg$ |
| Quadrato | $p4$, $p4m$, $p4g$ |
| Trigonale | $p3$, $p31m$, $p3m1$, $p31g$, $p3g1$ |
| Esagonale | $p6$, $p6m$, $p6g$ |

Tuttavia alcuni dei gruppi su indicati, ottenuti con generatori diversi, sono in realtà equivalenti. Consideriamo per esempio il gruppo $cg$ essendo $g$ una riflessione rispetto a una linea di direzione $\vec{b}$, con scorrimento di $1/2\vec{b}$: $g \equiv (m, t_{\vec{b}/2})$. Se il reticolo è $c$, esiste in $G_B$ la simmetria $(I_{\mathcal{A}}, t_{1/2(\vec{a}+\vec{b})})$, e dunque anche

$$(I_{\mathcal{A}}, t_{1/2(\vec{a}+\vec{b})})(m, t_{\vec{b}/2}) = (m, t_{1/2\vec{a}} \circ t_{\vec{b}}) \equiv (m, t_{\vec{a}/2})$$

deve essere in $G_B$; ma è facile verificare che l'operazione $(m, t_{\vec{a}/2})$ corrisponde a una riflessione $m$ (senza scorrimento) rispetto a una linea di direzione $\vec{b}$ di equazione $x = 1/4$. Il gruppo $cg$ contiene quindi anche riflessioni $m$ ed è in effetti è lo stesso gruppo $cm$. In modo del tutto analogo si ottiene l'equivalenza $cmm \equiv cmg \equiv cgg$.

Nel gruppo $p31m$ esiste una simmetria di riflessione rispetto alla linea $\mathcal{M}_1$ (si veda la figura 7.2). La matrice rappresentativa di quella simmetria rispetto alla base reticolare è la $S_7$. In $p31m$ deve dunque esistere anche una simmetria $\alpha = (S_7, t_{\vec{b}}) = (I_{\mathcal{A}}, t_{\vec{b}})(S_7, t_{\vec{0}})$. Cercando il luogo dei punti invarianti di $\alpha$ ($\alpha(P) = P$) si scopre:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 1-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x - y = x & \rightarrow \quad y = 0 \\ 1 - y = y & \rightarrow \quad y = 1/2 \end{cases}$$

Il sistema è dunque incompatibile (nessun punto è invariante per azione di $\alpha$). Tuttavia ogni punto di coordinate $(x, 1/2)$, e che giace quindi sulla retta di equazione $y = 1/2$, viene trasportato nella posizione (x-1/2,1/2) sulla medesima retta. La simmetria $(S_7, t_{\vec{b}})$ è dunque una riflessione $g$ rispetto a una linea, di direzione $\vec{a}$, non passante per l'origine. Il gruppo $p31m$ contiene anche riflessioni $g$ ed è identico al $p31g$; lo stesso dicasi per il $p3g1$ (identico al $p3m1$) e per il $p6g$ (identico al $p6m$).

In definitiva, i gruppi spaziali bidimesionali sono 17 e, precisamente:

| Sistema | Gruppi spaziali |
|---|---|
| Obliquo | $p1$, $p2$ |
| Rettangolare | $pm$, $pg$, $pmm$, $pmg$, $pgg$, $cm$, $cmm$ |
| Quadrato | $p4$, $p4m$, $p4g$ |
| Trigonale | $p3$, $p31m$, $p3m1$ |
| Esagonale | $p6$, $p6m$ |

### 7.4.3 Classificazione dei reticoli in $\mathcal{A}_3$

**Reticoli cubici in $R^3$**

**Definizione 7.5** Dicesi *cubico* un reticolo $\Lambda^R$ associato a uno $\mathcal{Z}$-modulo $\Lambda$, di uno spazio vettoriale euclideo 3-D, generato da 3 vettori ortogonali aventi identico modulo.

In tal caso, la matrice metrica $G$ assume la forma $aI$, dove $I$ è la matrice identica di ordine 3 e $a$ è il modulo quadro dei 3 vettori generatori di $\Lambda$; un'operazione di simmetria su $\Lambda^R$ deve soddisfare la relazione $a({}^t\alpha I\alpha) = a\,I \;\rightarrow\; {}^t\alpha\alpha = I$, vale a dire: $\alpha$ deve essere una matrice ortogonale. Segue:

$$\sum_k {}^t\alpha_{ik}\alpha_{kj} = \sum_k \alpha_{ki}\alpha_{kj} = \delta_{ij}$$

Se $i = j$ si ha $\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2 = 1$ $(i = 1, 2, 3)$; poiché gli elementi $\alpha_{ij}$ devono essere numeri interi, per ogni colonna della matrice $\alpha$ solo una componente può essere diversa da 0 e, precisamente, uguale a $\pm 1$. Essendo la matrice $\alpha$ ortogonale, vale pure la relazione $\alpha\,{}^t\alpha = I$ da cui, ripetendo lo stesso procedimento, si ottiene il medesimo vincolo anche per le righe della matrice.

Si dimostra facilmente che il numero di matrici ortogonali aventi le caratteristiche richieste per i reticoli cubici è 48 (per un reticolo $n$-dimensionale, tale numero è $2^n n!$).

Al gruppo $\mathcal{G}_c$ delle isometrie compatibili con un reticolo cubico può farsi corrispondere, in uno spazio affine $\mathcal{A}$, un gruppo di simmetria puntuale, che indicheremo con lo stesso simbolo.

**Esempio 7.5** Consideriamo l'affinità rappresentata dalla matrice ortogonale $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\alpha$ appartiene evidentemente a $\mathcal{G}_c$. Gli invarianti $\det(\alpha)$ e $\mathrm{tr}(\alpha)$ valgono rispettivamente $+1$ e 0, quindi $\alpha$ rappresenta una rotazione di 120° intorno a un asse determinabile dalla condizione

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\rightarrow\; x = y = z$$

dove $x, y$ e $z$ sono le coordinate di un punto (dello spazio affine $\mathcal{A}$) nel sistema di riferimento $\{O, A\}$, essendo $A$ la base scelta in $\Lambda$. La relazione ottenuta per le coordinate rappresenta il luogo dei punti di $\mathcal{A}$ invariante per effetto della rotazione e coincide con una delle diagonali principali del cubo.

**Reticoli 3-D non cubici**

Siano $g_1$, $g_2$ e $g_3$ i quadrati dei moduli di 3 vettori ortogonali, generatori di uno $\mathcal{Z}$-modulo $\Lambda$, con $g_1 \neq g_2 \neq g_3$; chiamiamo *ortorombico* il reticolo $\Lambda^R$ associato a $\Lambda$. La matrice metrica $G$

assume la forma diagonale $g_{ij} = g_i\delta_{ij}$. La relazione ${}^t\alpha G\alpha = G$, a cui devono soddisfare le isometrie, si traduce in:

$$({}^t\alpha G\alpha)_{ij} = \sum_{h,k} \alpha_{hi}\alpha_{kj}g_h\delta_{hk} = \sum_k \alpha_{ki}\alpha_{kj}g_k = g_i\delta_{ij}$$

Osserviamo esplicitamente che, essendo la forma quadratica associata al prodotto scalare *definita positiva*, ogni $g_i > 0$. Risulta:

$$\begin{cases} \alpha_{11}^2 g_1 + \alpha_{21}^2 g_2 + \alpha_{31}^2 g_3 = g_1 \\ \alpha_{12}^2 g_1 + \alpha_{22}^2 g_2 + \alpha_{32}^2 g_3 = g_2 \\ \alpha_{13}^2 g_1 + \alpha_{23}^2 g_2 + \alpha_{33}^2 g_3 = g_3 \end{cases}$$

Sommando le 3 equazioni si ottiene $g_1 + g_2 + g_3 = g_1S_1 + g_2S_2 + g_3S_3$, avendo posto $S_i = \alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 + \alpha_{i3}^2$ $(i = 1, 2, 3)$. Se un $S_i$ fosse nullo, una riga (la $i$-esima) della matrice $\alpha$ avrebbe tutti gli elementi nulli e $\det(\alpha) = 0$, il che è impossibile se $\alpha$ è un'isometria; dunque, tutti gli $S_i$ sono strettamente maggiori di 0. È pure evidente che gli $S_i$ (che sono numeri interi) non possono essere maggiori di 1 (altrimenti si avrebbe l'assurdo $\sum_i g_i < \sum_i g_i$; si ricordi che i $g_i$ sono strettamente maggiori di 0). Deve quindi essere $S_i = 1$ $(i = 1, 2, 3)$, vale a dire $\alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 + \alpha_{i3}^2 = 1$ $(i = 1, 2, 3)$; segue che, in ogni colonna della matrice $\alpha$, solo un elemento è non nullo e vale $\pm 1$.

Supponiamo ora che sia $\alpha_{11} = 0$: risulta $\alpha_{21}^2 g_2 + \alpha_{31}^2 g_3 = g_1$; i due elementi $\alpha_{21}$ e $\alpha_{31}$ devono essere non nulli, infatti in caso contrario risulterebbe $g_2 = g_1$ o $g_3 = g_1$ (se non è nullo, $\alpha_{ij}^2 = 1$) contro l'ipotesi originaria (i $g_i$ sono tutti distinti), ma allora dalle relazioni $S_2 = S_3 = 1$ risulta $\alpha_{22} = \alpha_{23} = \alpha_{32} = \alpha_{33} = 0$, mentre da $S_1 = 0$ si hanno i due casi (1) $\alpha_{12} = 0 \ \rightarrow\ \alpha_{13} = \pm 1$; (2) $\alpha_{12} = \pm 1 \ \rightarrow\ \alpha_{13} = 0$. In entrambi i casi, tuttavia, si avrebbe una colonna della matrice $\alpha$ con tutti elementi nulli (la seconda e la terza colonna, rispettivamente) portando all'annullamento del determinante, il che è impossibile. Segue che $\alpha_{11} = \pm 1$. Un ragionamento identico sugli altri due elementi diagonali porta alla conclusione:

**Teorema 7.14** Le sole simmetrie compatibili con un reticolo ortorombico sono rappresentate da matrici della forma

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla *base naturale* del reticolo.

L'insieme delle $\mathcal{G}_o$ delle centroaffinità compatibili con un reticolo ortorombico è un gruppo di ordine 8, evidentemente sottogruppo di $\mathcal{G}_c$.

Si verifica facilmente che ogni affinità appartenente a $\mathcal{G}_o$ rappresenta una rotazione di 180° intorno agli assi $X$, $Y$ o $Z$, paralleli alle varietà associate ai sottospazi 1-dimensionali generati dai vettori della base di $\Lambda$, oppure riflessioni rispetto ai piani individuati dagli stessi assi coordinati o rotoinversioni (rotazioni si 180° seguite da inversione rispetto all'origine).

L'approccio che abbiamo seguito consiste essenzialmente nel fissare una metrica su un reticolo, attraverso una matrice $G$ di data forma, e ricavare tutte le possibili operazioni di simmetria compatibili con $G$.

Un metodo opposto consiste nello stabilire quali vincoli una data operazione di simmetria impone alla matrice metrica: a partire dai gruppi più semplici, si ottengono tutti i possibili reticoli, in tal modo classificati in base all'appartenza a uno specifico gruppo di simmetria.

**Esercizio 7.1** Si dice *triclino* un reticolo caratterizzato da una matrice metrica della forma

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & g_6 & g_5 \\ g_6 & g_2 & g_4 \\ g_5 & g_4 & g_3 \end{pmatrix}$$

trovare le possibili isometrie compatibili.

**Esercizio 7.2** Ripetere l'esercizio precedente nel caso di un reticolo *monoclino*, di matrice

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & g_4 \\ 0 & g_2 & 0 \\ g_4 & 0 & g_3 \end{pmatrix}$$

Nel caso del triclino (esercizio 7.1) le sole simmetrie possibili sono l'identità e l'inversione; l'azzeramento di una sola coppia di termini extradiagonali della matrice $G$ (la matrice è simmetrica) non produce nessun cambiamento di simmetria e non c'è quindi ragione per distinguere detto reticolo da quello triclino. Viceversa, l'azzeramento di due coppie di elementi extradiagonali produce un cambiamento nel gruppo di simmetria (esercizio 7.2) e il reticolo viene classificato monoclino.

## 7.5 Simmetrie reciproche

Sia $S$ una simmetria di $\Lambda^R$, associata a un'isometria $f_S$ rappresentata da una matrice $s$ rispetto alla base $A = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$. Sappiamo che (teorema 7.11) ${}^t sGs = G$, dove $G$ è la matrice metrica calcolata con riferimento alla base $A$. Gli elementi $s_{ij}$ della matrice $s$ sono definiti in base alle relazioni:

$$f_S(\vec{a}_i) = \sum_{j=1}^{n} s_{ji}\vec{a}_j , \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

dove $n$ è la dimensione dello spazio vettoriale su cui è costruito lo $\mathcal{Z}$-modulo $\Lambda$ associato al reticolo. Sia $A^* = \{\vec{a}_1^*, \ldots, \vec{a}_n^*\}$ la base reciproca di $A$; sappiamo che, se $G^*$ è la matrice metrica definita con riferimento alla base $A^*$, $G^* = G^{-1}$ (teorema 3.4); inoltre (si veda la sezione 3.3)

$$\forall \vec{a}_i^* \in A^* , \quad \vec{a}_i^* = \sum_j \alpha_{ij}\vec{a}_j , \quad \text{con } \alpha = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n} = G^{-1}$$

Sia $s^* = \{s_{ij}^*\}_{i,j=1,\dots,n}$ la matrice rappresentativa dell'isometria $f_S$ rispetto alla base $A^*$; si ha:

$$f_S(\vec{a}_i^*) = \sum_j s_{ji}^*\vec{a}_j^* = \sum_j s_{ji}^* \sum_k \alpha_{jk}\vec{a}_k = \sum_k \left( \sum_j {}^t\alpha_{kj} s_{ji}^* \right) \vec{a}_k = \sum_k ({}^t\alpha s^*)_{ki}\vec{a}_k$$

d'altra parte:

$$f_S(\vec{a}_i^*) = f_S\left( \sum_j \alpha_{ij}\vec{a}_j \right) = \sum_j \alpha_{ij} f_S(\vec{a}_j) = \sum_j \alpha_{ij} \sum_k s_{kj}\vec{a}_k = \sum_k \left( \sum_j s_{kj}{}^t\alpha_{ji} \right) \vec{a}_k = \sum_k (s{}^t\alpha)_{ki}\vec{a}_k$$

Dal confronto delle due equazioni segue che ${}^t\alpha s^* = s{}^t\alpha \to G^{-1}s^* = sG^{-1} \to s^* = GsG^{-1}$; moltiplicando a sinistra per ${}^ts$, si ottiene:

$${}^tss^* = \underbrace{{}^tsGs}_{G} G^{-1} = GG^{-1} = I \;\to\; {}^tss^* = I \;\to\; s^* = ({}^ts)^{-1}$$

In definitiva:

**Teorema 7.15** La matrice rappresentativa di un'isometria $f_S$ rispetto alla base $A^*$, reciproca di $A$, è la trasposta dell'inversa (o l'inversa della trasposta) della matrice rappresentativa di $f_S$ rispetto alla base $A$.

Sappiamo che l'insieme $\mathcal{G}_{\circ G}$ delle simmetrie puntuali di $\Lambda^R$ è un gruppo. Se $S \in \mathcal{G}_{\circ G}$ , $s$ è una matrice a valori in $\mathcal{Z}$ tale che ${}^tsGs = G$ ; poiché $\mathcal{G}_{\circ G}$ è un gruppo, $\exists S^{-1} \in \mathcal{G}_{\circ G} \;/\; SS^{-1} = S^{-1}S = I_{\mathcal{A}}$ (dove $I_{\mathcal{A}}$ è l'affinità identica), da cui segue che la matrice $s^{-1}$, rappresentativa (rispetto ad $A$) dell'isometria $f_{S^{-1}} = f_S^{-1}$ associata alla simmetria $S^{-1}$, ha componenti intere; allora, $s^* = {}^t(s^{-1})$ è una matrice a valori in $\mathcal{Z}$.

Si noti che anche la matrice $(s^*)^{-1} = {}^ts$ ha componenti intere e rappresenta, nella base $A^*$, l'isometria $f_S^{-1}$ associata alla simmetria $S^{-1}$.

Sia $\Lambda^*$ lo $\mathcal{Z}$-modulo generato da $A^*$ e sia $\Lambda^{R*}$ il corrispondente reticolo (reciproco) di origine $O^* \in \mathcal{A}$; detta $S$ l'affinità in $\mathcal{A}$ associata all'isometria $f_S$ di $E$, costruiamo l'insieme

$$S(\Lambda^{R*}) = \left\{ Q^* \in \mathcal{A} \;/\; Q^* = S(P^*),\ \forall P^* \in \Lambda^{R*} \right\}$$

Se $P^* \in \Lambda^{R*}$, $\exists \vec{v}^* \in \Lambda^* \;/\; P^* = O^* + \vec{v}^*$ ; facendo coincidere l'origine $O^*$ del reticolo $\Lambda^{R*}$ con il punto invariante della simmetria puntuale $S$, risulta:

$$S(P^*) = S(O^* + \vec{v}^*) = S(O^*) + f_S(\vec{v}^*) = O^* + \vec{w}^* \qquad \text{con}$$

$$\vec{w}^* = f_S(\vec{v}^*) = \textstyle\sum_i v_i^* f_S(\vec{a}_i^*) = \sum_j (s^*v^*)_j \vec{a}_j^*$$

dove $v^*$ è il vettore colonna delle componenti (intere) di $\vec{v}^*$. Le componenti $w_j^* = (s^* v^*)_j$ di $\vec{w}^*$ sono quindi intere e $\vec{w}^* \in \Lambda^*$; in definitiva, $S(P^*) \in \Lambda^{R*}$, $\forall P^* \in \Lambda^{R*} \to S(\Lambda^{R*}) \subseteq \Lambda^{R*}$.

All'isometria $f_S^{-1}$ corrisponde l'affinità inversa $S^{-1}$ rappresentata, rispetto a $A^*$, dalla matrice $(s^*)^{-1} = {}^t\!s$ a valori in $\mathcal{Z}$. Se $Q^* \in \Lambda^{R*}$, $S^{-1}(Q^*) = P^* \in \Lambda^{R*}$, da cui

$$\underbrace{S\,S^{-1}}_{I_{\mathcal{A}}}(Q^*) = S(P^*) \;\to\; Q^* = S(P^*) \in S(\Lambda^{R*}) \;\to\; \Lambda^{R*} \subseteq S(\Lambda^{R*})$$

Dalle due inclusioni segue che $S(\Lambda^{R*}) = \Lambda^{R*}$, vale a dire:

**Teorema 7.16** Se $S$ è una simmetria di $\Lambda^R$ allora è anche una simmetria di $\Lambda^{R*}$.

Due piani $\mathcal{H}_P$ e $\mathcal{H}_Q$ di $\Lambda^R$, rappresentati (in $\Lambda^{R*}$) dai punti $P^*$ e $Q^*$, sono *equivalenti per simmetria* se esiste in $\mathcal{G}_{\circ G}$ una simmetria $S$ tale che $Q^* = S(P^*)$.

Nello affine $\mathcal{A}^*$ costruito sullo spazio vettoriale duale $E^*$, l'insieme $\mathcal{G}_{\circ G}^*$ delle simmetrie $S^*$ di $\Lambda^{R*}$ (questa volta considerato come sottoinsieme dello spazio affine $\mathcal{A}^*$) è un gruppo isomorfo al gruppo $\mathcal{G}_{\circ G}$ delle simmetrie di $\Lambda^R$.

**Esempio 7.6** Sia $\Lambda^R$ un reticolo 2-dimensionale avente gruppo di simmetria 4 (reticolo quadrato); rispetto alla base *canonica* $A = \{\vec{a}, \vec{b}\}$, con $a = b$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, le matrici rappresentative delle simmetrie del gruppo $(4 \equiv \{1,\, 4,\, 2,\, 4^{-1}; \cdot\})$ sono:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad s_4 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad s_2 = \begin{pmatrix} \bar{1} & 0 \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix} \quad s_{4^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \bar{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Si noti che, in virtù dell'isomorfismo tra gruppi di isometrie e gruppi di matrici (o, il che è lo stesso, all'isomorfismo tra gruppi di centroaffinità e gruppi di matrici), alla scrittura $4\,4^{-1} = 1$ (vera, per definizione di isometria inversa) corrisponde il prodotto matriciale $s_4\, s_{4^{-1}} = s_1$, da cui $s_{4^{-1}} = s_4^{-1}$.

Con riferimento alla base $A^*$, reciproca di $A$, alle simmetrie del gruppo corrispondono delle matrici $s^*$ ottenibili nel modo di cui al teorema 7.15; in particolare:

$$s_1^* = {}^t\!(s_1^{-1}) = s_1; \quad s_2^* = {}^t\!(s_2^{-1}) = s_2; \quad s_4^* = {}^t\!(s_4^{-1}) = {}^t\!(s_{4^{-1}}) = s_4; \quad s_{4^{-1}}^* = {}^t\!(s_{4^{-1}}^{-1}) = s_{4^{-1}}$$

In questo caso specifico, le matrici $s^*$ sono identiche alle matrici $s$ (questo fatto si verifica a causa dell'ortogonalità della base reticolare). Se $H_1$ è il vettore colonna delle coordinate di un punto $P_1^*$ del reticolo reciproco (rispetto alla base $A^*$), le coordinate $H_i$ dei punti $P_i^*$, equivalenti per simmetria, sono calcolabili dalle equazioni matriciali $s_i^*\, H_1 = H_i$, al variare di $s_i^*$ tra le simmetrie di $\Lambda^{R*}$:

$$H_1 = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}; \quad H_4 = \begin{pmatrix} \bar{k} \\ h \end{pmatrix}; \quad H_2 = \begin{pmatrix} \bar{h} \\ \bar{k} \end{pmatrix}; \quad H_{4^{-1}} = \begin{pmatrix} k \\ \bar{h} \end{pmatrix}$$

così, ad esempio, il punto $(1\,2)$ è equivalente per simmetria ai punti $(\bar{2}\,1)$, $(\bar{1}\,\bar{2})$ e $(2\,\bar{1})$. Alle equivalenze tra punti del reticolo reciproco, corrispondono equivalenze tra le famiglie di piani (di *linee*, nel caso 2-D) del reticolo diretto che, da quei punti, sono rappresentate.

# Indice analitico