

Avvertenza

Le pagine che seguono contengono “appunti” su alcuni degli argomenti trattati durante il corso di topografia e cartografia. Data la loro forma attuale questi appunti sono ben lontani dal potersi considerare delle dispense del corso. Infatti la loro forma e la loro correttezza grammaticale sono tipiche degli appunti scritti “tutto di un fiato”. Inoltre, durante le lezioni si sono più volte riscontrati delle inesattezze sul formalismo e sui contenuti tecnici e scientifici, che sono stati corretti “a penna” dagli studenti stessi sulle copie cartacee a loro distribuite. L’unica ragione per la quale questi file sono resi disponibili nel sito di Facoltà è quella di fornire copia del materiale cartaceo distribuito durante il corso agli studenti che non hanno potuto partecipare alle lezioni. Si prega pertanto di limitare l’uso di questo materiale limitatamente a questo fine.

Introduzione

Fin dall'antichità l'esigenza della rappresentazione del territorio in formati consultabili con facilità (mappe) è sempre stata molto forte. Da essa nasce la cartografia che inizia con forme rudimentali di disegno, poi evolve in rappresentazioni metriche sempre più raffinate su supporti cartacei ed infine nelle varie forme di cartografia numerica e di sistemi informativi geografici e territoriali utilizzati ai nostri giorni.

Le caratteristiche fondamentali delle carte sono:

Il **contenuto**: cioè "cosa" è rappresentato sulla carta e dipende in gran parte dalla scala di rappresentazione.

L'attualità: ovvero la data del rilevamento e dall'aggiornamento della carta.

La **precisione**: cioè quanto bene sono georeferenziati i particolari in un predefinito sistema di riferimento.

Proprio in questo contesto è stato coniato il neologismo **Georeferenziazione**:

Per georeferenziazione delle informazioni territoriali si intende quel complesso di attività che consentono di stabilire una serie di corrispondenze biunivoche tra:

un'informazione territoriale, intesa come categoria informativa, inserita o da inserire in un sistema informativo di definita risoluzione (ad es. impianti industriali a rischio di incidente rilevante);

il fenomeno territoriale attraverso cui si manifesta e/o materializza l'informazione (impianti produttivi, depositi, condotti);

l'epoca del rilevamento del fenomeno;

la stima della **posizione spaziale** che compete al fenomeno, definita da una sequenza di coordinate di affidabilità nota, in un assegnato sistema di riferimento.

Negli argomenti trattati dai corsi di Sistemi Informativi e Sistemi Informativi GIS sono fornite le conoscenze necessarie per potere lavorare con tutti e quattro gli aspetti citati nel loro insieme.

Nell'ambito di questo corso verranno date le conoscenze di base per poter affrontare l'ultimo punto, che fra tutti quelli elencati è senz'altro quello che comporta le maggiori difficoltà sotto molti punti di vista.

Nonostante il nome molto sintetico del corso, **Topografia e Cartografia**, una trattazione completa del problema implica il coinvolgimento di varie discipline come:

la **Geodesia**, che è la scienza che ha lo scopo di determinare la forma della terra e delle superfici di riferimento da utilizzare per i rilievi numerici. La Geodesia, per raggiungere i suoi scopi, si avvale della

Gravimetria, che è quella disciplina che si occupa della misura del campo di gravità terrestre.

La **Topografia** vera e propria ha il compito di effettuare il rilievo numerico dei particolari della superficie fisica della terra (limite tra l'atmosfera e la superficie liquida o solida della terra).

Infine la **Cartografia**, che è quella scienza che si propone di trasformare i dati del rilievo numerico in una mappa, cioè li proietta in un sistema di riferimento

bidimensionale cercando di rendere minime le inevitabili distorsioni.

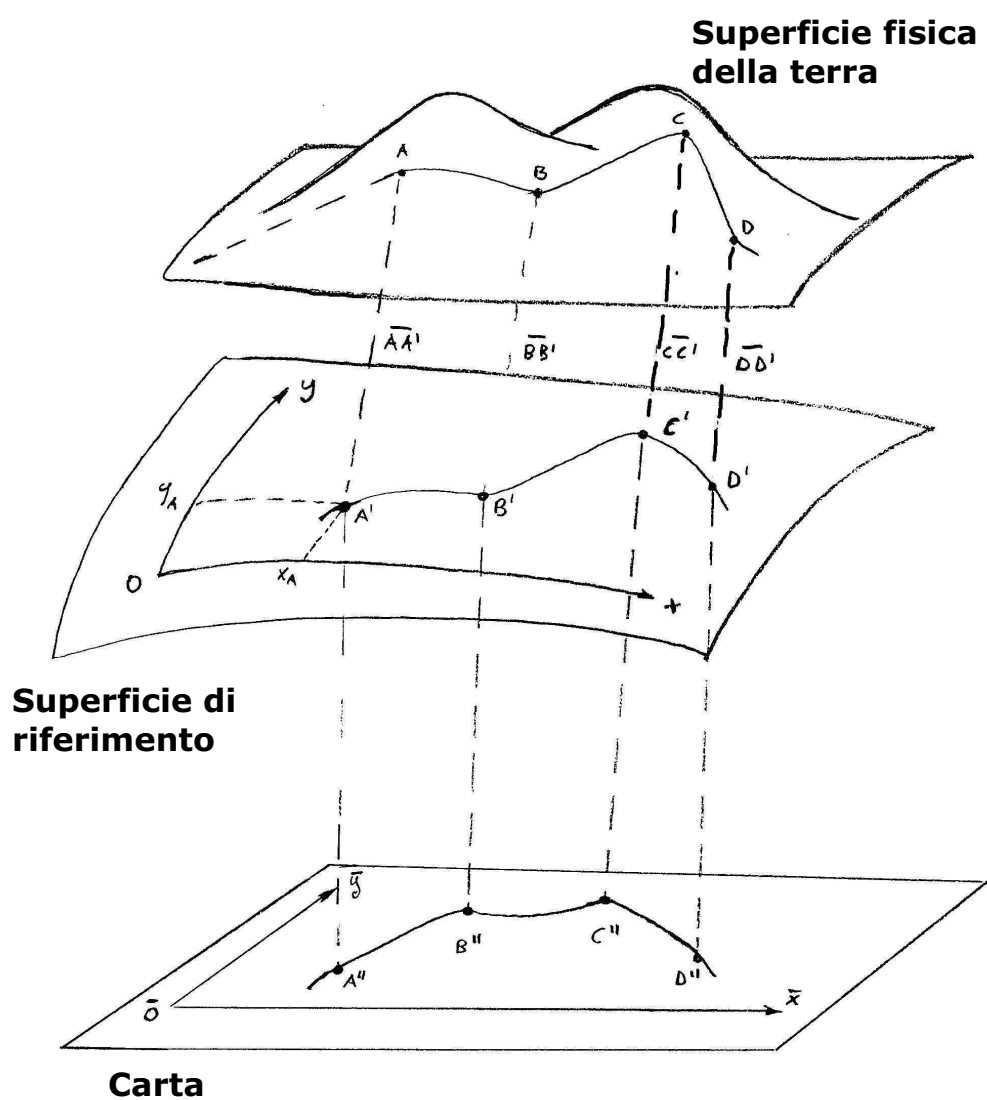
Una trattazione esauriente degli aspetti introdotti richiede un numero di ore decisamente superiore a quello a disposizione per il presente corso: è quindi necessario fare una sintesi, cercando comunque di presentare i concetti fondamentali.

Nella prima parte del corso verrà affrontato il problema della superficie di riferimento a cui riferire le posizioni dei punti della superficie fisica della terra (Figura 1). In particolare verranno mostrati i criteri fisici secondo i quali la superficie di riferimento è definita, di sue forme approssimate, dei sistemi di riferimento, e quindi di coordinate, che vengono definiti su di essa, del suo uso in pratica.

Nella seconda parte si vedrà come la superficie di riferimento viene proiettata su un piano cartesiano, cioè come viene prodotta la carta. In questo ambito verranno mostrati i problemi generali che sorgono nelle trasformazioni fra superfici non affini, i metodi di trasformazione più utilizzati, la definizione delle carte, gli standard Nazionali ed Internazionali.

Infine, nell'ultima parte, si farà un po' di pratica sull'uso e sull'interpretazione di base della cartografia in uso.

Figura 1



Forma della terra

Ai fini topografici (rilievo) e cartografici (rappresentazione) la scelta di una **superficie di riferimento**, su cui fissare un sistema di riferimento, è uno dei problemi principali.

Sul sistema di riferimento così definito, ogni punto appartenente alla superficie fisica della terra è univocamente individuato da una terna di valori (coordinate) che verranno meglio specificati più avanti. (**Figura 1**)

La terra ha una forma rotondeggiante abbastanza regolare. Infatti, le montagne più alte e le fosse oceaniche più profonde superano di poco il millesimo del raggio terrestre. Ciononostante, la scelta di una superficie di riferimento non è un compito facile.

Infatti, la superficie di riferimento deve soddisfare certi requisiti come:

- deve essere molto **simile** alla forma reale della superficie fisica terrestre;
- deve essere **individuabile** al momento del rilievo topografico;
- deve essere **esprimibile analiticamente**.

In questa sezione verranno considerati i primi due requisiti.

La prima condizione è abbastanza semplice da capire ed è basata sul buon senso: la forma della superficie usata per rappresentare un oggetto non deve essere molto diversa dall'oggetto stesso.

La seconda condizione in pratica dice che la superficie in oggetto deve essere anche una superficie fisica. Infatti se la superficie di riferimento fosse solo una superficie matematica, senza alcuna proprietà fisica, allora non sarebbe possibile effettuare la messa in stazione degli strumenti di misura. Cioè, non sarebbe possibile conoscere la posizione dello strumento rispetto al sistema di riferimento usato, e, conseguentemente, non sarebbe possibile riportare le misure effettuate nel sistema di riferimento scelto.

Facciamo un esempio pratico (**Figura 2**). Supponiamo di avere un punto della superficie fisica della terra, di avere scelto la superficie di Riferimento, S , di avervi fissato una terna di assi cartesiani e di volerne misurare l'angolo rispetto all'asse Z , diretto secondo la normale ad S in O , con un teodolite. La misura corretta di questo angolo richiede che l'asse verticale del teodolite sia disposto parallelamente alla normale a S in quel punto. Se la normale non è individuabile fisicamente questa operazione è impossibile.

E' da notare che il problema è principalmente quello citato nell'esempio: il **posizionamento dello strumento lungo la normale della superficie di riferimento** al fine di:

valutare la distanza lungo la normale dalla superficie di riferimento (quota) di un generico punto P ;

proiettare un qualsiasi punto P sulla superficie di riferimento.

E' ragionevole pensare quindi che la superficie di riferimento più idonea sarà quella che ha in ogni suo punto la normale coincidente con la direzione del **filo a piombo**, che è e la direzione fisica più facilmente individuabile.

Il filo a piombo, o altra strumentazione equivalente, si dispone verticalmente lungo il **vettore accelerazione di gravità**: pertanto il passo successivo è quello di studiare il campo di **gravità terrestre**.

Figura 1

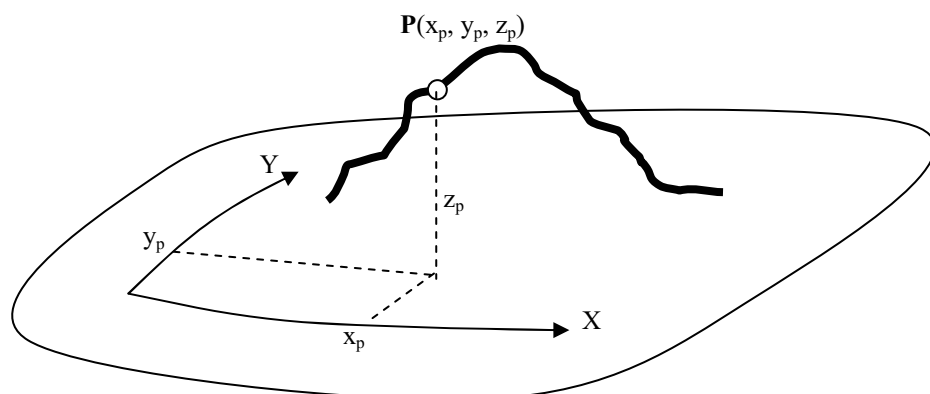
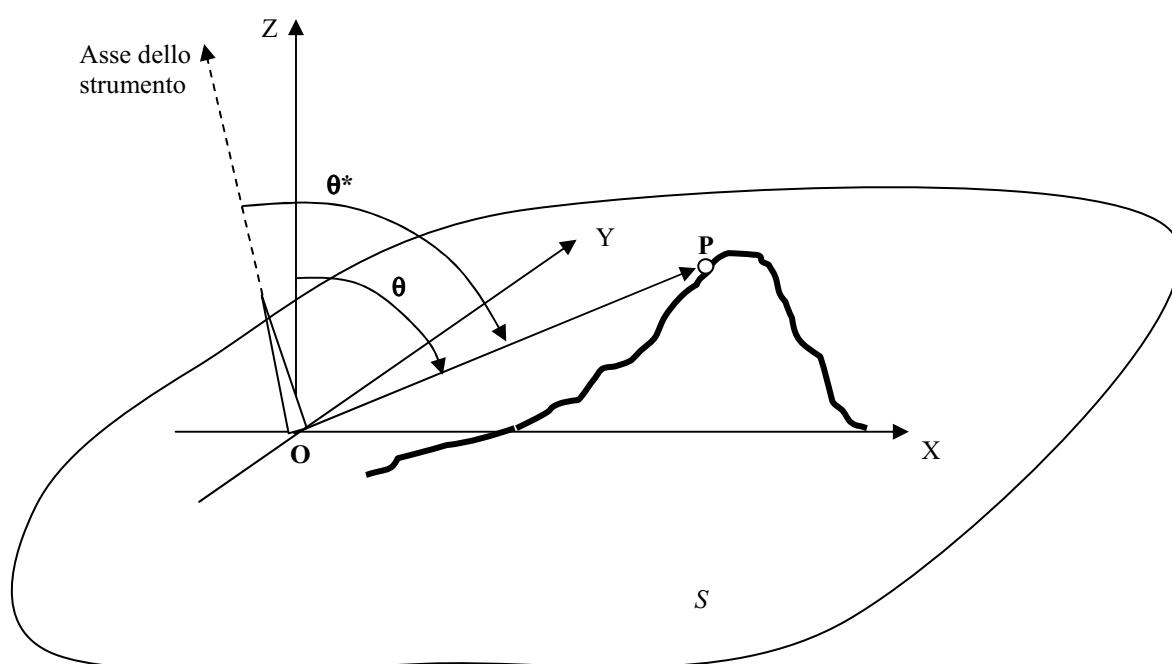


Figura 2



Gravità

Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano con origine nel centro della terra e consideriamo una particella di massa m posta nel punto $P(x, y, z)$ sulla superficie fisica della terra o al di sopra di essa.

Questa particella è soggetta a due forze principali: **l'attrazione gravitazionale** e la **forza centrifuga** (forza apparente) dovuta alla rotazione del pianeta.

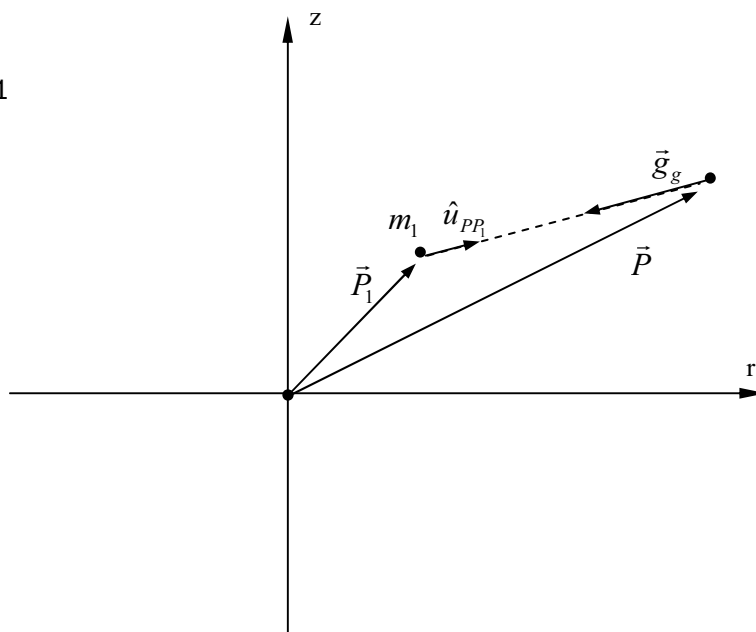
Attrazione gravitazionale

Dalla legge di gravitazione di Newton è noto che una massa m_1 posta in punto \vec{P}_1 (Figura 1) dello spazio genera in un qualsiasi punto dello spazio, \vec{P} , un campo gravitazionale, che è solitamente indicato in termini di accelerazione gravitazionale, \vec{g}_g , dato dalla:

$$\vec{g}_g = -\gamma \frac{m_1}{|\vec{P} - \vec{P}_1|^2} \hat{u}_{P, P_1} \quad [ms^{-2}]$$

dove $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$ è la costante di gravitazione universale.

Figura1



Sempre sulla base di questa legge, si ha che una massa, m , posta in \vec{P} è soggetta ad una forza dovuta alla presenza di m_1 pari a:

$$\vec{F} = m\vec{g}_g$$

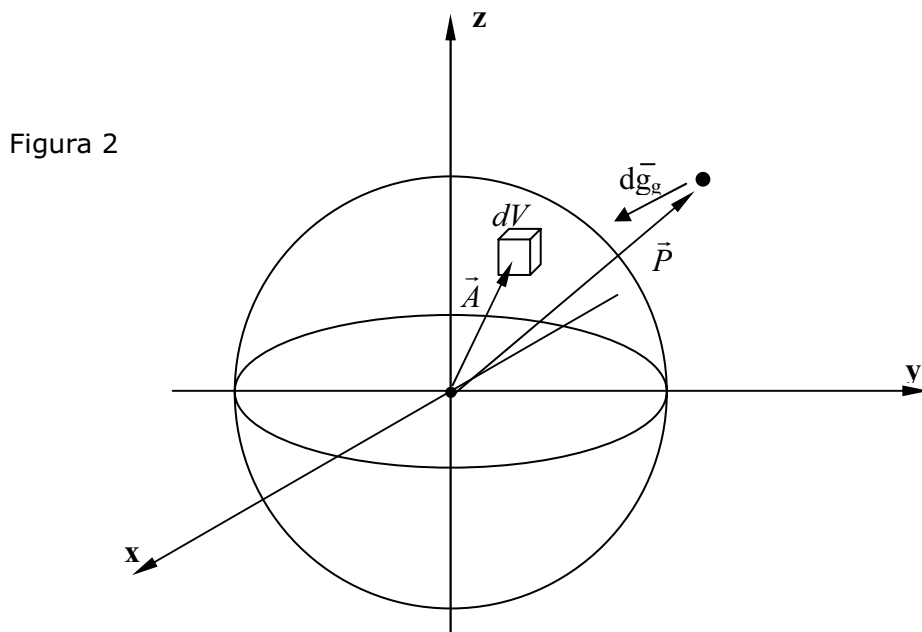
Si cercherà ora di calcolare il campo gravitazionale, o l'accelerazione gravitazionale, totale generato dalla terra nel punto \vec{P} .

Considerato un volume dV di terra posto in \vec{A} (Figura 2) esso contiene una massa:

$$dm = \rho(\vec{A})dV = \rho(\vec{A})dx_A dy_A dz_A$$

dove $\rho(\vec{A})$ è la densità della terra nel punto \vec{A} .

Questa massa genera un campo gravitazionale infinitesimo in \vec{P} dato da:



$$d\vec{g}_g = -\gamma \frac{dm}{|\vec{P} - \vec{A}|^2} \hat{u}_{PA} = -\gamma \frac{\rho(\vec{A})dV}{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 + (z_P - z_A)^2} \hat{u}_{PA}$$

Per semplificare la notazione è preferibile ragionare con le componenti del vettore $d\vec{g}_g$. I coseni direttori di $d\vec{g}_g$ sono dati da (veder appendice):

$$\begin{aligned} \cos(\theta_x) &= \frac{x_P - x_A}{\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 + (z_P - z_A)^2}} \\ \cos(\theta_y) &= \frac{y_P - y_A}{\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 + (z_P - z_A)^2}} \\ \cos(\theta_z) &= \frac{z_P - z_A}{\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 + (z_P - z_A)^2}} \end{aligned}$$

da cui:

$$dg_{gx} = -\gamma \frac{\rho(\vec{A})(x_P - x_A)dx_A dy_A dz_A}{[(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 + (z_P - z_A)^2]^{3/2}}$$

$$dg_{gy} = -\gamma \frac{\rho(\vec{A})(y_P - y_A)dx_A dy_A dz_A}{[(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 + (z_P - z_A)^2]^{3/2}}$$

$$dg_{gz} = -\gamma \frac{\rho(\vec{A})(z_P - z_A)dx_A dy_A dz_A}{[(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 + (z_P - z_A)^2]^{3/2}}$$

Prima di passare alla valutazione del campo gravitazionale totale nel punto \vec{P} facciamo un ulteriore passo e introduciamo la funzione **potenziale gravitazionale**. Inizialmente ragioniamo solo sulla componente x :

La forza gravitazionale è una forza conservativa, pertanto esiste una funzione potenziale $U_g(x, y, z)$, detta **potenziale gravitazionale**, tale che:

$$\vec{g}_g = -\text{grad } U_g = -\vec{\nabla} U_g = -\frac{\partial U_g}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial U_g}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial U_g}{\partial z} \vec{k}$$

da cui:

$$g_g = \sqrt{\left(\frac{\partial U_g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_g}{\partial z}\right)^2}$$

E' importante notare che in questo caso le coordinate (x, y, z) in cui è espressa U_g sono le coordinate del punto \vec{P} , pertanto per definire la funzione U_g si dovrà ottenere una primitiva delle componenti dg_g rispetto alle variabili (x_P, y_P, z_P) .

Per la ricerca di una primitiva dg_{gx} si deve risolvere un integrale del tipo:

$$\int \frac{x}{(x^2 + a)^{3/2}} dx$$

dove si sono omessi o raggruppati tutti i termini costanti. Agendo per sostituzione di variabili:

$$u = (x^2 + a), \quad x = (u - a)^{1/2}, \quad dx = \frac{1}{2}(u - a)^{-1/2}$$

si ottiene:

$$\int \frac{1}{2} u^{-3/2} du = -u^{-1/2}$$

da cui:

$$\int \frac{x}{(x^2 + a)^{3/2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$$

Facendo riferimento all'equazione completa si ottiene:

$$dU_g(x_P, y_P, z_P) = -\gamma \frac{\rho(\vec{A}) dx_A dy_A dz_A}{[(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 + (z_P - z_A)^2]^{3/2}}$$

Se anziché utilizzare la componente x se ne fosse usata un'altra si sarebbe ottenuta la stessa funzione potenziale in quanto essa è unica a meno di una costante. Questo lo si può verificare facilmente derivando l'espressione ottenuta rispetto ad y o a z : si ottengono rispettivamente g_{gy} e g_{gz} .

L'espressione ottenuta fornisce un infinitesimo di U_g , dU_g , in quanto il campo considerato è generato da una massa infinitesima dm posta in A . Se si vuole il **potenziale gravitazionale totale**, e conseguentemente il **campo gravitazionale totale**, si deve integrare su tutto il volume della terra cioè:

$$U_g(x_P, y_P, z_P) = -\gamma \int_0^{R_x} \int_0^{R_y} \int_0^{R_z} \frac{\rho(\vec{A})}{[(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 + (z_P - z_A)^2]^{3/2}} dx_A dy_A dz_A$$

dove gli estremi di integrazione vanno dal centro di massa della terra fino a distanze abbastanza grandi da poter contenere tutta la massa della terra.

E' evidente quindi che per riuscire a calcolare il potenziale gravitazionale, e conseguentemente, l'accelerazione gravitazionale, in modo completo dobbiamo conoscere con esattezza la distribuzione della densità all'interno della terra. Questa informazione è ben lontana dall'essere disponibile. Grazie alle prospezione sismiche e alle misure gravimetriche si possono ottenere alcune informazioni di massima ma non sufficienti per il calcolo dell'integrale triplo.

Comunque, anche se non può essere fornita una funzione analitica completa per esso il potenziale gravitazionale, e quindi l'accelerazione gravitazionale, può essere misurato in ogni punto della superficie fisica della terra.

Accelerazione centrifuga

Rispetto alle stesse fisse (sistema di riferimento inerziale) la terra compie una rivoluzione attorno al proprio asse (**giorno sidereo**) ogni:

$$T = 86164.091 s$$

Nota: il giorno sidereo è diverso dal giorno solare in quanto in quest'ultimo caso la rivoluzione della terra viene riferita al sole e pertanto non si tiene conto del moto orbitale terrestre intorno al sole.

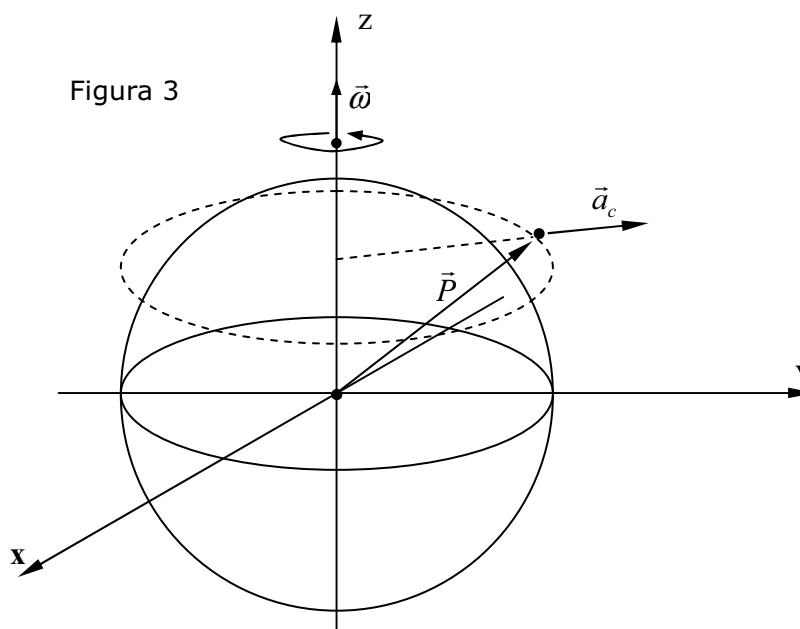
Noto il periodo di rivoluzione è possibile calcolare la **velocità angolare** terrestre:

$$\vec{\omega} = \frac{2\pi}{T} \hat{k} = (7.29 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}) \hat{k}$$

Un corpo posto nel punto \vec{P} (Figura 3) quindi ad una distanza P dal centro della terra è soggetto ad una **accelerazione centrifuga** (accelerazione apparente) data da:

$$\vec{a}_c = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{P})$$

E' facile vedere che il vettore \vec{a}_c **giace sul piano** (x,y) e pertanto non ha componenti lungo l'asse z .



Detta ϕ_P la latitudine del punto \vec{P} il modulo dell'accelerazione centrifuga diventa:

$$a_c = \omega^2 P \cos(\phi_P)$$

Come già visto nel caso precedente, le componenti lungo gli assi del vettore \vec{a}_c si ottengono tramite i coseni direttori:

$$a_{cx} = a_c \cos(\theta_x) = \omega^2 \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \frac{x_P}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}} = \omega^2 x_P$$

$$a_{cy} = a_c \cos(\theta_y) = \omega^2 \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \frac{y_P}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}} = \omega^2 y_P$$

$$a_{cz} = 0$$

Nel sistema di assi (r,z) \vec{a}_c assume una forma semplificata:

$$a_{cr} = a_c = \omega^2 r_P$$

$$a_{cz} = 0$$

Anche in questo caso si può dimostrare che la forza centrifuga è conservativa, quindi possiamo ricercare una funzione **potenziale centrifugo** U_c tale che:

$$\vec{a}_c = -\frac{\partial U_c}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial U_c}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial U_c}{\partial z} \hat{k} = -\text{grad } U_c = -\vec{\nabla} U_c$$

In questo caso la ricerca della primitiva è molto semplice e si ottiene:

$$U_c(x_P, y_P) = -\omega^2 \frac{x_P^2}{2} - \omega^2 \frac{y_P^2}{2}$$

Accelerazione di gravità

Definiti i termini di accelerazione gravitazionale e centrifuga e i relativi potenziali si può definire l'accelerazione totale a cui è soggetta una massa posta nel punto \vec{P} e il potenziale totale in quel punto. Si definisce cioè il vettore **accelerazione di gravità**:

$$\vec{g}(\vec{P}) = \vec{g}_g(\vec{P}) + \vec{a}_c(\vec{P})$$

e il **potenziale di gravità**:

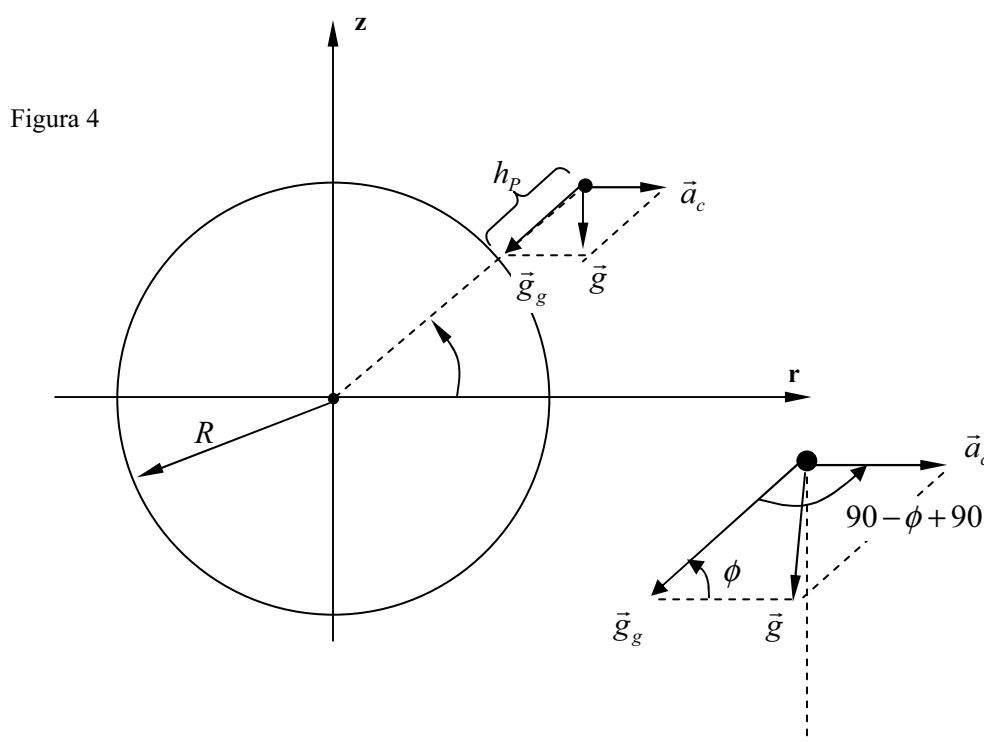
$$U(\vec{P}) = U_g(\vec{P}) + U_c(\vec{P})$$

che sono legati dalla solita relazione:

$$\vec{g} = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} = -\text{grad } U = -\vec{\nabla} U$$

Come già detto, a causa dell'indeterminazione della distribuzione della densità terrestre, non è possibile fornire una relazione fisica che permetta il calcolo diretto ed esatto di \vec{g} e/o di U .

Per vedere quale è l'effetto della composizione dei due vettori \vec{g}_g e \vec{a}_c ci si può mettere in una situazione approssimata ma comunque abbastanza vicina alla realtà (Figura 4).



Ipotesi:

- Terra sferica, di raggio $R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$
- Densità costante oppure uniformemente distribuita con simmetria radiale.

In questo caso si dimostra, facendo ricorso al teorema di Gauss ad esempio, che il campo gravitazionale è uguale a quello di una massa uguale a quella terrestre, $M = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, ma tutta concentrata (massa puntiforme) al centro della sfera.

Considerando l'angolo di latitudine del punto considerato, ϕ_p , e definendo il modulo del vettore \vec{P} come somma del raggio terrestre e della quota del punto, h_p , rispetto alla superficie terrestre: $P = R + h_p$ è facile verificare che si ottiene:

$$g_g = \gamma \frac{M}{(R+h_p)^2}$$

$$a_c = \omega^2 (R+h_p) \cos(\phi_p)$$

$$g = \sqrt{g_g^2 + a_c^2 + 2 \cos(180 - \phi_p) g_g a_c} = \sqrt{g_g^2 + a_c^2 - 2 \cos(\phi_p) g_g a_c}$$

Nota: poiché anche in questo caso g_g denota il modulo dell'accelerazione gravitazionale è stato ommesso il segno -.

Per avere un'idea degli **ordini di grandezza** per \vec{g}_g si hanno valori di $10^{-1} m s^{-2}$ mentre per \vec{a}_c si hanno valori di $10^{-2} m s^{-2}$.

E' inoltre interessante calcolare la differenza angolare fra la direzione "indisturbata" di \vec{g}_g e il vettore \vec{g} . Utilizzando il teorema dei seni si ottiene:

$$\sin(\alpha_p) = \sin(\phi_p) \frac{a_c}{g}$$

Nei grafici in Figura 5 in figura sono riportate:

- Variazione di g al variare della latitudine a livello del mare
- Variazione di α_p al variare della latitudine a livello del mare
- Variazione di g al variare della quota alle medie latitudini

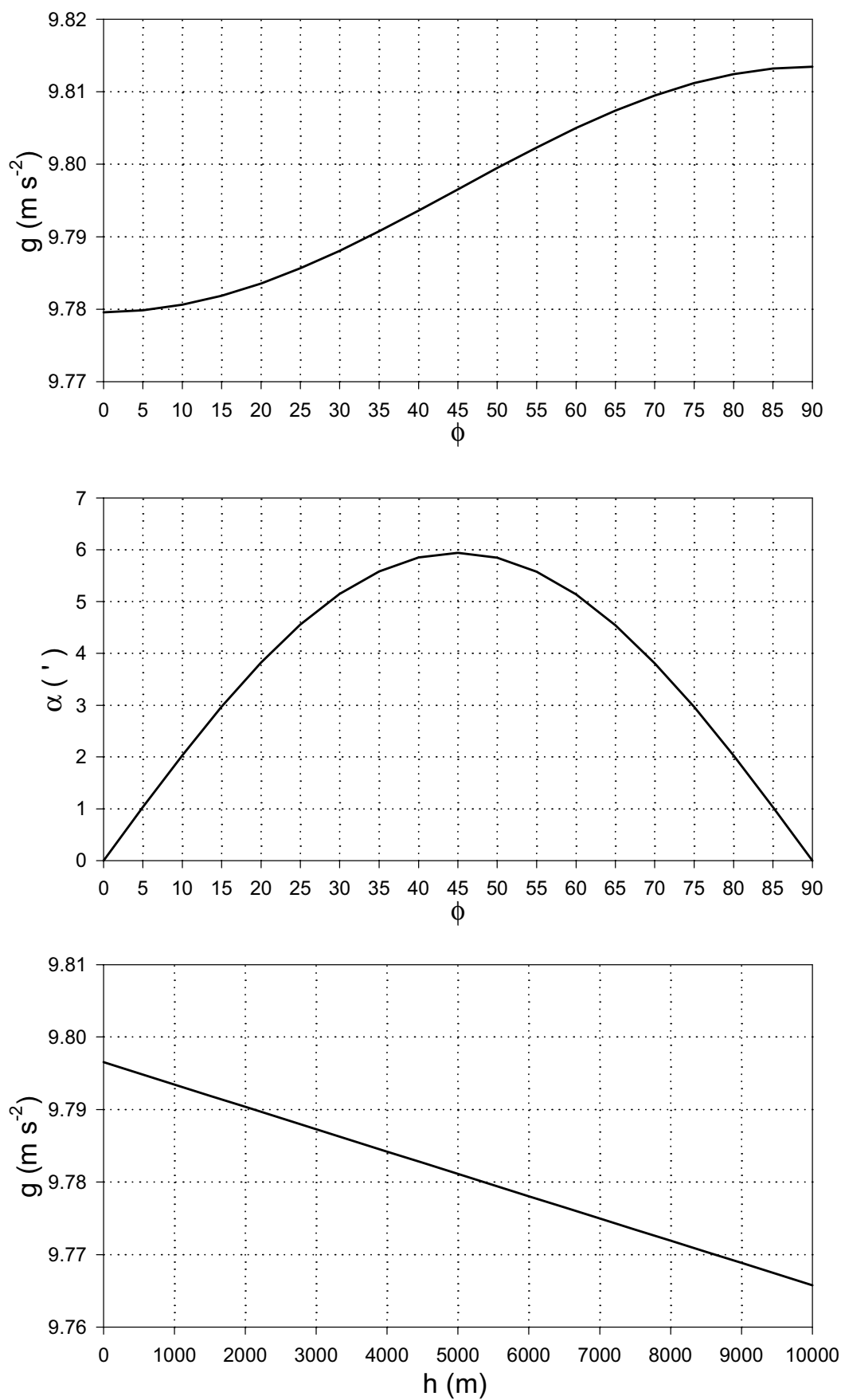
Alcune considerazioni utili per capire l'importanza dei valori della deviazione angolare α_p sono le seguenti:

Prima di essere utilizzato un teodolite, strumento fondamentale per il rilievo topografico, è messo in verticale con l'ausilio di una bolla torica che generalmente ha una precisione di $10''$, volendo fare l'operazione con minor precisione si può ricorrere ad una bolla sferica che comunque ha una precisione sui $2' - 10'$.

Un teodolite di media precisione fornisce la lettura diretta dei $0.5'$, con un teodolite di alta precisione si leggono direttamente i $0''.5 - 0''.2$.

Per valori di α_p attorno ai $5'$ e per altezze di circa $10 m$ si ottengono delle deviazioni al suolo superiori al centimetro.

Figura 5



Superfici equipotenziali

Dal punto di vista geometrico la condizione:

$$U(x, y, z) = k = \text{cost}$$

definisce una superficie, U_k , su cui il potenziale gravitazionale è costante, cioè una **superficie equipotenziale**.

Queste superfici, data la natura del potenziale di gravità, sono superfici estremamente **regolari**, di forma molto prossima a quella **sferica**, **concentriche** alla terra, e quindi **chiuse**, per distanze dal centro della terra fino a 5-6 volte il raggio terrestre.

Data una qualsiasi superficie S si dimostra che in ogni suo punto (x, y, z) la direzione della sua **normale**, \hat{n} , ha la stessa direzione (rimane una arbitrarietà sul verso) del vettore $\text{grad } S$.

Quindi, ricordando le espressioni precedenti, la normale ad U_k nel punto (x, y, z) avrà la stessa direzione di del vettore \vec{g} in quel punto. La normale di una superficie equipotenziale è quindi fisicamente individuata in ogni suo punto dalla direzione del filo a piombo: è la superficie ricercata, che soddisfa i primi due requisiti elencati all'inizio.

E' importante citare alcune particolarità delle superfici equipotenziali:

- 1) Per definizione, su una superficie equipotenziale U è costante: questo non significa che l'accelerazione di gravità è costante, ne in direzione ne in modulo.
- 2) Le diverse superfici equipotenziali, al variare di k , non sono parallele fra di loro.

Dimostrazione: (figura) prendiamo due superfici equipotenziali infinitamente vicine, U_k e U_{k+dk} e due punti A e B su di esse. Spostiamo una massa m da una superficie all'altra partendo da A o da B lungo le rispettive normali, il lavoro compiuto deve essere uguale in quanto corrisponde alla variazione di potenziale:

$$\vec{g}(A) \times d\vec{s}_A = \vec{g}(B) \times d\vec{s}_B$$

poichè i vettori $\vec{g}(A)$ e $\vec{g}(B)$ non sono necessariamente uguali allora anche le distanze fra le due superfici non lo saranno: non sono parallele.

Geoide

Se si considera un corpo soggetto alla sola forza di gravità e lo si pone su una superficie equipotenziale, esso **tenderà a muoversi lungo la normale** alla superficie, a meno che non vi siano reazioni vincolari (superficie solida) o forze di galleggiamento (superficie fluida) in grado di mantenerlo in equilibrio. In qualsiasi caso però non "scivolerà" trasversalmente su di essa.

Se osserviamo la superficie di un fluido all'equilibrio (indisturbato da agenti esterni), un mare o un lago tanto per fare alcuni esempi significativi, i volumi elementari di fluido alla superficie non hanno moti trasversali: questo fenomeno mette in evidenza che **la superficie di un fluido si dispone secondo una superficie equipotenziale**.

Se la terra fosse costituita unicamente da **massa fluida all'equilibrio** si può dimostrare che la sua superficie, **equipotenziale**, si disporrebbe in modo da formare un ellissoide di rotazione (figura geometrica che spiegheremo più avanti, teoricamente esistono anche altre forme di equilibrio che però vengono prese in considerazione in ambiti geodetici).

Se andiamo **indietro nel tempo**, quando la terra era ancora abbastanza da essere fluida in ogni suo punto, possiamo quindi ragionevolmente ipotizzare che essa avesse la forma molto prossima a quella di un ellissoide di rotazione.

E' altresì ragionevole pensare che anche con il successivo solidificarsi della superficie, anche ai nostri giorni limitato solo ad una sottilissima pellicola, la terra abbia comunque mantenuto una forma **molto prossima ad un ellissoide**. Ciononostante, i movimenti crostali hanno prodotto delle "piccole" asperità e disomogeneità (catene montuose, fosse oceaniche, continenti e mari, ecc) che, unite alla mancanza di conoscenza sulla distribuzione reale della densità all'interno della terra, fanno sì che la forma reale delle superficie terrestri non sia esattamente quelle di un ellissoide di rotazione.

Rimane comunque la necessità di definire in modo abbastanza rigoroso una superficie **equipotenziale da assumere come riferimento** e su cui riuscire ad operare matematicamente.

A tale fine anzitutto si è valutato il **livello medio degli oceani** rispetto ad un punto di riferimento (mediando si sono eliminati tutti gli effetti che spostano dalla condizione di equilibrio come le maree e i movimenti atmosferici); in tal modo si è individuata fisicamente una porzione di superficie equipotenziale limitata agli oceani; successivamente questa superficie è stata idealmente prolungata, in modo da mantenerne la continuità, sotto i continenti.

Il risultato di questa operazione è la definizione di una **superficie equipotenziale che passa per il livello medio dei mari**.

I primi a fare una valutazione di questo tipo furono Gauss e Bessel nel 1840: essi chiamarono questa superficie **superficie matematica della terra**; oggi invece è chiamata **geoide** ed è la superficie, o più in generale uno dei soggetti, più importanti in topografia e cartografia.

Come premesso, il geoide è approssimabile abbastanza bene da un ellissoide di rotazione, il quale, a differenza del geoide, ha una espressione matematica ben precisa e che verrà studiata più in dettaglio nel seguito. Al momento però è comunque utile dare qualche **concetto di base**.

Ellissoide di rotazione

L'ellissoide di rotazione utilizzato in questo contesto (in topografia ne vengono usati anche di altri tipi) è un **ellissoide biassiale** generato dalla rotazione di un'ellisse attorno al suo asse minore (figura).

Centrato l'ellissoide in un sistema di riferimento cartesiano, in modo tale che l'asse di rotazione coincida con l'asse z , la sua equazione è:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

dove a e b sono il **semiasse** maggiore e minore rispettivamente.

L'ellissoide così definito è univocamente determinato dai due parametri a e b , o da due grandezze ad esse collegate come lo **schacciamento** s e l'**eccentricità** e^2 :

$$s = \frac{a-b}{a}, \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Ellissoide e geoide

Definito l'ellissoide di rotazione si tratta ora di **dimensionarlo** opportunamente in modo che esso combaci il più possibile con il geoide.

Questa operazione è fatta cercando qual'è l'ellissoide che fornisce il miglior accordo fra un insieme di numerose **misure** prese sul geoide e riportate sull'ellissoide stesso. Il concetto di miglior accordo è un concetto statistico e si basa sulla teoria degli errori. Questo compito non è affatto semplice ed è uno dei principali scopi della **geodesia**.

Le **prime valutazioni** di questo tipo sono state eseguite nel **1800**, e da allora con l'affinarsi delle tecniche di calcolo e di misura sono state fatte varie valutazioni:

Ellissoide	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>s</i>	<i>e</i>²
Bessel (1841)	6377397 m	6356082 m	1/299.2	6.673 10 ⁻³
Clark (1880)	6378243 m	6356658 m	1/295.5	6.803 10 ⁻³
Helmert (1906)	6378140 m	6356758 m	1/298.3	6.693 10 ⁻³
Hayford (1909)	6378388 m	6356912 m	1/297.0	6.723 10 ⁻³
WGS84 (1984)	6378137 m	6356752 m	1/298.3	6.694 10 ⁻³

L'ellissoide di Hayford è attualmente assunto come ellissoide **internazionale**.

Confronti fra Geoide ed Ellissoide

Pur effettuando nel migliore dei modi la determinazione del miglior ellissoide che approssima il geoide rimane sempre il fatto che il primo è una forma molto regolare mentre il secondo non lo è. Per questo motivo vi saranno sempre delle **differenze fra le due forme**. (figura)

In figura sono schematizzate le due forme sopra una porzione di superficie fisica terrestre. Rispetto al centro della terra, l'ellissoide è più distante rispetto al geoide in prossimità degli oceani o delle forti depressioni, mentre giace sotto al geoide sui continenti. (figura)

Le differenze fra geoide ed ellissoide vengono messe in evidenza e quantificate attraverso due parametri: la **deviazione dalla verticale**, che è la differenza angolare fra le normali delle due forme, e la distanza fra il geoide e l'ellissoide misurato lungo la verticale detta **scostamento** dell'ellissoide dal geoide.

I **valori tipici** della deviazione della verticale sono dell'ordine di **qualche secondo** sessagesimale, mentre in condizioni particolari si possono raggiungere valori di 20" - 30"; i **massimi** valori riscontrati sono di circa 1'.

Poiché, nonostante la figura, anche il geoide ha una forma abbastanza regolare lo scostamento dal geoide assume valori lentamente variabili che si manifestano come leggere ondulazioni dette **onde geodetiche**.

I **valori medi** degli scostamenti dal geoide sono di +/- 50 m, con valori **massimi** di un centinaio di metri. In Italia si va dai 37 m in Calabria a 52 m in Val d'Aosta.

Queste osservazioni preannunciano un fatto molto importante: come vedremo, entro certi limiti, la planimetria della superficie fisica della terra può essere riferita ad un ellissoide, ma l'altimetria deve essere sempre riferita al geoide. Ciò significa che in pratica si lavora sempre con due superfici di riferimento.

EVOLUZIONE DELLA CARTOGRAFIA UFFICIALE ITALIANA: PASSI PRINCIPALI

L'Italia è uno dei paesi più ricchi di sistemi di coordinate. Esistono più di 150 datum in uso nel Mondo.

Legge 2 febbraio 1960, n. 68: "Sono organi cartografici dello Stato: l'Istituto Geografico Militare; l'Istituto Idrografico della Marina; il Centro di Informazioni Geotopografiche dell'Aeronautica; l'Amministrazione del Catasto e dei Servizi Tecnici Erariali; il Servizio Geologico"

Sebbene vi siano più organi cartografici ufficiali tutti questi, per la produzione della cartografia ufficiale, debbono fare riferimento all'IGM.

E' bene ricordare che per specificare correttamente un sistema geodetico-cartografico è necessario precisare quali siano:

- il sistema geodetico di riferimento (ellissoide orientato)
- la rete di punti che lo realizza, o materializza (rete geodetica)
- la rappresentazione cartografica utilizzata

Unificazione d'Italia (1860)

In Italia la possibilità di istituire un sistema di riferimento unico fu presa in considerazione, per la prima volta, dopo l'unificazione del Regno, quando l'allora "Ufficio Tecnico del Corpo di Stato Maggiore" ebbe l'incarico del rifacimento totale rete trigonometrica nazionale tramite l'unificazione delle reti trigonometriche sviluppate in precedenza dagli stati preunitari che erano state sviluppate su sistema di riferimento diversi l'uno dall'altro.

I lavori furono ultimati alla fine del 1800

Venne adottato l'ellissoide di Bessel con orientamenti diversi su tre diversi punti di emanazione:

- Genova, pilastrino dell'Osservatorio dell'Istituto Idrografico della Marina (Nord)
- Monte Mario (Roma, Centro)
- Castanea delle Furie (Messina, Sud)

La rappresentazione cartografica utilizzata fu la proiezione policentrica naturale (Flamsteed modificata) riferita al centro di ciascun elemento cartografico alla scala 1:100000

Questo sistema di riferimento cartografico venne subito abbandonato

1875-1940

Si decide di ricalcolare la rete trigonometrica (rete IGM) suddividendola in 8 sotto-reti definite sull'ellissoide di Bessel orientato a Genova (pilastrino IIM) e con azimut sul Monte del Telegrafo

La rappresentazione cartografica rimane la precedente: proiezione policentrica naturale (Flamsteed modificata) riferita al centro di ciascun elemento cartografico alla scala 1:100000

Basandosi su questo sistema di riferimento fu costruita, ad opera dell'IGM, la Carta topografica d'Italia o *Nuova Carta d'Italia*.

Si iniziò con la costruzione della carta 1:100.000 con rilievo alla scala 1:25.000

Gli elementi di base della carta sono i Fogli che in totale sono 277.

Foglio: quadrilatero ellissoidico limitato da due archi di parallelo e da due di meridiano distanti 20' in latitudine e 30' in longitudine.

Origine della proiezione: punto centrale in longitudine e latitudine del Foglio.

L'altezza dei fogli è pressoché costante e vale circa 37 km.

La larghezza è molto più variabile: per i fogli al Sud si hanno valori sui 45 km, al Nord si arriva sui 38 km.

I fogli, data la convergenza dei meridiani, sono dei trapezoidi, anche se a occhio nudo non è così evidente.

La carta è costruita in modo da essere praticamente equidistante su ogni Foglio

La scala 1:100.000 è troppo piccola: si decise allora di adottare le altre scale 1:50.000 e 1:25.000, costruendo i Quadranti e le Tavole

Poiché per tutte le carte il rilievo fu fatto alla scala 1:25000 la carta 1:25.000 fu considerata la vera Carta fondamentale d'Italia.

Notare che anche le tavolette e i quadranti si possono considerare praticamente equidistanti

Per la definizione di un quadrante o di una tavoletta si deve fare riferimento al quadro d'unione

Non essendo una carta conforme è poco utilizzabile per fini geodetici, inoltre, essendo policentrica, questo fa sì che le coordinate piane di due punti vicini ma appartenenti a fogli diversi non siano omogenee.

Catasto

Nel contempo il Catasto iniziò autonomamente una propria produzione cartografica

Anche in questo caso venne adottato l'ellissoide di Bessel orientato a Genova (pilastrino IIM) e con azimut sul Monte del Telegrafo

Per la realizzazione furono adottati i punti del 1° , 2° e 3° della rete IGM con raffittimenti ad opera del Catasto

Come rappresentazione cartografica venne adottata la rappresentazione di Cassini-Soldner, con suddivisione del territorio nazionale in zone, riferite ciascuna ad un diverso centro di sviluppo. L'estensione di ogni sistema fu limitata ad un massimo di 70 km dall'origine in direzione Est-Ovest e 100 km in direzione Nord-Sud. La maggior parte delle province è compresa in sistemi di grande estensione (31 centri di sviluppo); il rimanente territorio è suddiviso in sistemi più piccoli (oltre 800 centri di sviluppo)

1940

Si adotta un nuovo sistema di riferimento: il Roma40 Gauss-Boaga. E' tuttora il sistema di riferimento ufficiale nazionale. Anche il Catasto ha adottato questo sistema di riferimento.

L'ellissoide utilizzato è l'ellissoide di Hayford (Internazionale) orientato a Monte Mario con azimut su Monte Soratte.

Per la realizzazione i punti della rete IGM vengono ricalcolati su questo ellissoide. Negli anni seguono raffittimenti e miglioramenti nella precisione del calcolo.

Viene adottata la proiezione conforme di Gauss (o traversa del Mercatore) su fusi di 6° di larghezza. L'Italia è quindi rappresentata utilizzando due fusi.

Fuso Ovest: Centrato sul meridiano 9° E, compreso fra le latitudini 6° E e $12^{\circ} 27' 8''.40$ E, l'estensione oltre i 12° E ($30'$) serve a garantire una piccola sovrapposizione col Fuso Est

Fuso Est: Centrato sul meridiano 15° E, compreso fra le latitudini $11^{\circ} 57' 08''$ E e $18^{\circ} 27' 8''.40$ E, l'estensione a ovest ($30'$) serve a garantire una piccola sovrapposizione col Fuso Ovest, l'estensione a Est serve a coprire la piccola regione della penisola Salentina che si estende oltre i 18° E.

Su queste carte le longitudini sono riportate riferite al meridiano passante per Monte Mario, che si trova a $11^{\circ} 27' 08''.40$ E da Greenwich.

L'origine delle y per questi due fusi è fissata sulla trasformata dei rispettivi meridiani centrali. Però, per non generare confusione fra le coordinate y di punti appartenenti a fusi diversi e per non avere coordinate negative alle coordinate y del fuso Ovest vengono aggiunti 1500 km, a quelle del fuso Est 2520 km. Questa operazione è ricorrente anche in altre carte e la quantità aggiunta viene detta "Falso Est". Es. se un punto ha coordinata $E = 2420000$ m sappiamo che si trova sul Fuso Est a 100 km a ovest dal meridiano centrale (15° E).

Nella trasformazione si impone un fattore di contrazione $K=0.9996$ al fine di diminuire le deformazioni lineari al limite dei fusi.

Le carte sono state generate alle stesse scale scelte in precedenza: 1:100000, 1:50000 e 1:25000 e con gli stessi "tagli" (Foglio, Quadrante e Tavole).

1950

Si decide, a livello Internazionale, di utilizzare il metodo di rappresentazione cartografica UTM (Universal Transverse Mercator)

L'UTM copre tutte le zone del globo comprese fra le latitudini $\pm 80^{\circ}$.

Nell' UTM l'ellissoide è suddiviso in 60 fusi di 6° di longitudine. I fusi sono numerati progressivamente partendo da quello relativo all'antimeridiano di Greenwich e procedendo verso Est.

All'interno di ciascun fuso l'origine della carta è posizionata all'incrocio fra meridiano centrale e equatore. Al fine di evitare coordinate y (Est) negative al meridiano centrale viene assegnata una ascissa convenzionale di 500 km.

I fusi sono poi suddivisi in 20 fasce di latitudine di ampiezza 8°, a partire dall'equatore fino a $\pm 80^\circ$. A ciascuna fascia è stata assegnata una lettera dell'alfabeto.

Un fuso e una fascia individuano una zona che viene indicata con numero fuso, lettera fascia.

E' il sistema di riferimento attualmente in uso per la cartografia nella maggior parte degli Stati.

Oltre i $\pm 80^\circ$ di latitudine (regioni polari) è stato adottato un sistema basato sulla proiezione stereografica polare e noto con la sigla U.P.S. (Universal Polar Stereographic)

UTM ED50

Fissata il metodo di rappresentazione occorre scegliere il datum (dimensionamento, orientazione e realizzazione dell'ellissoide). Si è deciso di adottare un ellissoide con valenza Europea. L'ellissoide è sempre l'Internazionale orientato a Potsdam (Germania). In questo caso però l'orientazione dell'ellissoide non è perfetta. Data l'estensione dell'area, con una orientazione perfetta si sarebbero ottenuti degli scostamenti rispetto al geoide troppo elevate per le zone più lontane. Si è quindi definita una "orientazione media" in modo da minimizzare gli scostamenti su tutta l'area. La rete geodetica è sempre quella IGM ricalcolata e ottimizzata per la nuova superficie.

Anche in questo caso si adotta un coefficiente di riduzione : 0.9996

Il territorio Italiano risulta essere interamente compreso nei fusi:

32: longitudini fra 6° e 12° , meridiano centrale 9°

33: longitudini fra 12° e 18° , meridiano centrale 15°

salvo una piccola parte del Salento, che cade nel fuso 34, e nelle fasce S e T.

Pertanto l'intero territorio Italiano è compreso nelle zone:

32 S, 32 T, 33 S, 33 T : maggior parte

34 S, 34 T : parte del Salento

E' importante notare che anche se i fusi "italiani" 32 e 33 coincidessero con il fuso Est e Ovest della rappresentazione Roma40 e pur trattandosi della stessa

rappresentazione cartografica le coordinate di uno stesso punto non sarebbero uguali in quanto si è utilizzato un differente datum.

Le zone sono divise poi in un reticolato di maglie quadrate di 100 km di lato costruito con rette parallele all'equatore e al meridiano centrale del fuso. Ogni quadrato è identificato da 2 lettere di cui la prima indica la colonna e la seconda la riga.

I quadrati di 100 km di lato sono poi divisi in quadrati minori (di 10 km sulle carte a scala 1:100000, di 1 km sulle carte a scala 1:25000 o 1:50000).

Un generico punto in questa rappresentazione viene indicato con:

32TNR217321569601

che significa: Fuso 32, fascia T (zona 32T), quadrato NR, ascissa (E) 217321m, ordinata (N) 569601m

A volte le coordinate sono riportate in approssimazione, ad esempio, in approssimazione del decametro l'indicazione sopra diventa:

32TNR21735696

In questo nuovo riferimento si sono adottati dei "tagli" per le carte diversi da quelli del Roma40:

foglio (scala 1: 50 000)

sezione (scala 1 : 10 000)

elemento (scala 1 : 5 000)

mappa (scala 1 : 1 000 o 1:2 000)