UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

-

F A C O L T A ' D I I N G E G N E R I A

A u r e l i o A m o d e o

Elementi didattici di matematica finanziaria

Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale – Trieste, gennaio 2007

La finalità di questi *Elementi*, dedicati ai Corsi di Estimo ed economia per le lauree in Ingegneria Civile ed in Architettura, è quella di fornire il necessario e tradizionale aiuto matematico per affrontare i problemi estimativi in fase di stima analitica, nonché di dare gli elementi per la formulazione di piani per il finanziamento di opere pubbliche e private attraverso prestiti rimborsabili a quote e con il coinvolgimento di Istituti di Credito o con l'emissione di titoli di credito. A tale scopo sarà sufficiente l'esposizione delle leggi finanziarie e delle operazioni finanziarie più ricorrenti in condizioni di certezza, salvo esaminare poi gli spazi di probabilità in valutazioni non deterministiche. Il ricorso ad esempi caratterizzanti e la proposta di esercizi e quesiti consentirà agli studenti la rapida assimilazione della materia ed il suo collegamento con le realtà operative più ricorrenti.

Trieste, gennaio 2007

Aurelio Amodeo

INDICE

Cap. 3 LE ANNUALITA'

Capitolo 1°

IL CAPITALE E L'INTERESSE

1.1 Il Capitale

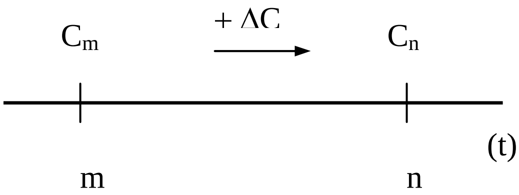
Nei fattori storici della produzione, *Natura-Lavoro-Capitale-Organizzazione*, viene definito il *Capitale*, dal punto di vista economico-estimativo, come qualunque bene impiegato o prodotto nella produzione, purché utile e disponibile, ma in quantità limitata. Il suo *valore*, cioè l'importanza in termini monetari che quel bene acquista in un mercato di scambio, dipende quindi dalla sua limitatezza e dalla sua utilità, valutata sempre in sede di mercato e non intesa come importanza assegnata singolarmente o affettivamente da un solo soggetto.

In sede di stima analitica viene poi indicato come *valore capitale* di un bene il valore attuale della accumulazione finanziaria dei suoi redditi futuri.

Il valore di un capitale C va quindi comunque espresso in unità monetarie precisate (euro, franco, dollaro, ecc.) che ne definiscono l'importo, ma ciò non basta. In una operazione finanziaria va precisato il momento temporale della sua disponibilità, quello che in termine bancario ha il nome di *valuta*. Il valore è quindi funzione dell'importo e del tempo intercorrente fra il momento dell'operazione ed il momento della valuta; il rapporto del valore con l'importo è ovviamente diretto, ma inverso è il suo rapporto con il tempo, nel senso che a parità di importo il valore è maggiore per tempi di valuta più brevi.

La considerazione che il muoversi di un capitale C di determinato importo, sulla retta del tempo, ne produce una variazione, porta a definire questa variazione come *interesse*.

Diremo quindi che un capitale C_m, disponibile al momento m ed impiegato in una operazione per un tempo $t = n - m$, subisce una variazione positiva di valore ΔC che lo fa salire o montare al valore C_n. Chiameremo *montante M* di C_m al tempo n il capitale C_n .



$M = C_n$ = Montante al tempo n del capitale C_m disponibile al tempo m.

Chiameremo *interesse* la variazione positiva del valore del capitale C_m.

$$\Delta C = I = C_n - C_m$$

nonché *saggio (o tasso) di interesse* questa variazione, se riferita all'unità di capitale ed all'unità di tempo

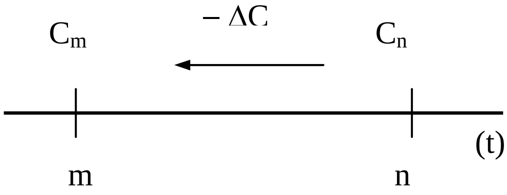
$$r = i = \frac{I}{C_m \cdot t}$$

e chiameremo *legge di formazione del montante*, oppure *legge di capitalizzazione* (oppure ancora *legge di posticipazione*) una funzione atta a fornire il valore di un capitale in un momento successivo, o comunque non antecedente a quello della sua disponibilità. Se il momento m è all'origine di una operazione finanziaria, e quindi è il momento 0, allora $C_m = C_o$ sarà il capitale iniziale disponibile.

In merito all' adozione della simbologia per il saggio d'interesse, va detto che la lettera i è generalmente impiegata nelle operazioni finanziarie, mentre la r (ratio) è tradizionalmente usata nella letteratura estimativa. L'ambito di questi appunti ci porta quindi all'adozione del simbolo r. Analoga osservazione va fatta per il termine finanziario *tasso d'interesse* o per il suo equivalente *saggio*; useremo ambedue questi termini, nel modo che riterremo di volta in volta più appropriato.

La definizione che abbiamo dato dell'interesse non contrasta matematicamente con quella tradizionale e legata alla stessa sua esistenza, di prezzo che si deve pagare per l'uso di un capitale. Quella più attuale interpretazione ci consentirà però di porre in maggior evidenza l'andamento della formazione del montante secondo vari regimi.

Il movimento opposto di un capitale sulla retta del tempo, cioé la ricerca del valore C_m in un momento m di un capitale C_n disponibile in n, porta ad una variazione negativa del valore del capitale di riferimento C_n, che viene *scontato* o *anticipato* al tempo m.



$V = C_m$ = valore scontato al tempo *m* del capitale C_n disponibile al tempo *n* .

Chiameremo *differenza* o *sconto* la variazione negativa del capitale C_n

$$\Delta C = D = C_m - C_n$$

nonché *tasso (o saggio) di sconto* questa variazione, se riferita all'unità di capitale ed all'unità di tempo

$$d = \frac{D}{C_n \cdot t}$$

e chiameremo *legge di anticipazione o di sconto* una funzione atta a fornire il valore di un capitale in un momento antecedente, o comunque non successivo a quello della sua disponibilità. Se il momento *m* è all'origine di una operazione finanziaria, e quindi è il momento *0*, allora $C_m = C_o$ sarà il valore attuale del capitale C_n e la legge di sconto sarà chiamata *di attualizzazione*.

Le due leggi citate, quella di capitalizzazione e quella di anticipazione, sono funzioni generalmente ad una sola variabile (purchè il tasso rimanga costante per tutta l'operazione), nelle quali il capitale montato o scontato è funzione solo del tempo di impiego o di anticipazione. Si tratta di leggi non sempre reciproche, nel senso che è un caso solamente teorico che in un definito intervallo di tempo un capitale in movimento nei due sensi rimanga invariato al suo ritorno all'origine. Si tratta in effetti di due leggi usate finanziariamente per operazioni differenti, essendo legata quella di capitalizzazione soprattutto all'impiego ed al prestito di capitali, mentre quella di sconto ha il suo significato comune nella necessità dell'anticipazione monetaria per capitali con valuta successiva.

Va detto ancora che per le due leggi, da considerarsi come leggi generali e solo indicatorie, troveremo diverse funzioni che ne soddisfino i requisiti richiesti, e che chiameremo *regimi*. Si tratterà sempre di funzioni continue, atte cioè a dare il valore del capitale in qualunque momento temporale, anche se negli usi bancari gli interessi (o le differenze) diventano disponibili in modo discreto (ogni anno, ogni semestre, ogni giorno, ecc.) e si aggiungono al (o si tolgono dal) capitale all'inizio oppure al termine di questi periodi di tempo (interesse anticipato o posticipato). L'andamento continuo delle funzioni si trasforma in questo caso in andamento a "scaletta" (fonction crochet op. fonction en escalier).

Osserviamo inoltre fin d'ora che mentre i montanti *M*, i valori scontati *V*, l'accumulazione degli interessi *I* e degli sconti *D*, hanno le dimensioni dei Capitali, i tassi di interesse e di sconto vanno assunti come numeri puri, senza dimensioni, anche se, correttamente, dovrebbero intendersi come il reciproco di un tempo, cioè come una intensità.

1.2 Il saggio di interesse ed il tasso di sconto

Al di là della definizione matematico-finanziaria, sulla giustificazione dell'esistenza dell'interesse, cioé di un compenso per l'uso del capitale, va suggerita la lettura del capitolo "Il saggio d'interesse" del testo del Medici "Principi di estimo" [*]. In sostanza, rileva il Medici, l'esigenza di un corrispettivo per l'abbandono di un capitale per un certo tempo nasce dalla diversa importanza ed utilità che il genere umano attribuisce ai beni presenti rispetto quelli futuri, della fruizione dei quali non si è certi.

Va per contro detto che la custodia di un capitale è un servizio che richiede un compenso; l'affidamento a Istituti di Credito di capitali con garanzia di disporre in qualsiasi momento di parte o di tutto l'importo, vincola la possibilità del reinvestimento del capitale stesso e quindi del maturarsi di un suo frutto. Per questa ragione i tassi dei conti correnti sono bassi, o addirittura nulli o negativi.

Per quanto riguarda l'entità del saggio di interesse, vanno considerati i seguenti fattori:

- la quantità del risparmio esistente in un certo periodo in un Paese o in un'area dello stesso. L'abbondanza di capitali in offerta abbassa ovviamente il tasso d'uso degli stessi; la carenza lo fa aumentare;
- la quantità degli investimenti produttivi in un certo periodo in un Paese o in un area dello stesso. L'aumento della domanda di capitali per la produzione aumenta ovviamente il tasso d'uso degli stessi; la carenza lo fa diminuire;
- il rischio dell'operazione per la quale si propone il finanziamento. Il rischio è pressocché nullo nella collocazione dei capitali negli Istituti di Credito, ma non così negli investimenti e reinvestimenti di questi capitali. Il premio per l'assicurazione di

[*] Giuseppe Medici "Principi di Estimo" ediz. Grafiche Calderini, Bologna 1955.

questi capitali comporta un aumento del saggio, tanto maggiore quanto è maggiore il rischio;

- la durata dell’operazione per la quale si richiede il finanziamento. In periodi di abbondanza di capitali in offerta, l’Istituto offerente è portato ad abbassare il tasso pur di collocare il capitale per tempi più lunghi. Inversamente in periodi di carenza di capitali, quando sarà invece l’imprenditore portato a pagare di più per la certezza della disponibilità di un capitale.

Altri fattori, quali il livello dei prezzi delle materie prime ed, in generale, il costo di produzione dei beni economici, possono agire in un senso o nell’altro sull’entità del saggio di interesse, che risulterà pertanto determinato dall’equilibrio di tutte queste forze, di volta in volta diverse.

Per quanto riguarda il tasso di sconto, cioè il prezzo per l’anticipazione di capitali di valuta differita, il suo significato finanziario non va confuso con il tasso debitorio che le Banche fissano nei rapporti contrattuali con i Clienti, di due - tre volte maggiore di quello creditorio, e che è sostanzialmente ancora un tasso d’interesse.

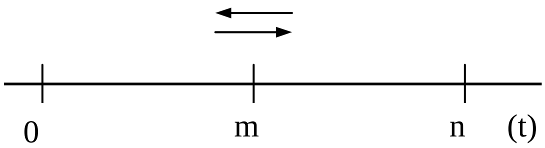
Il Medici, nell’opera citata, precisa che se il saggio d’interesse rappresenta il prezzo di uso del risparmio, il saggio di sconto rappresenta invece il prezzo d’uso della moneta, nel senso che mentre il saggio di interesse dipende, oltre che da altri fattori, dalla quantità di risparmio esistente, il saggio di sconto dipende dalla quantità di mezzi di pagamento offerti dal mercato. L’asserzione va intesa nel senso che lo stock del risparmio esistente in un certo momento in un Paese, pur se valutato in moneta, non implica necessariamente l’impiego di essa; per contro l’operazione di sconto nasce dalla necessità di denaro per impegni da soddisfare subito, e quindi dalla anticipazione in termini monetari di capitali disponibili in tempi successivi.

Capitolo 2°

I REGIMI FINANZIARI USUALI

2.1 La scindibilità in un regime finanziario

Di precisa importanza per le applicazioni operative è la verifica se un regime finanziario gode della proprietà della scindibilità. Questa proprietà è verificata quando



il montante al tempo *m* di un capitale investito al tempo $0 < m$, impiegato successivamente fino al tempo $n > m$ e nelle medesime condizioni finanziarie, è uguale al montante al tempo *n* dello stesso capitale iniziale, cioé quando

$$M\ (0,m) \times M\ (m,n) = M\ (0,n)$$

Il moltiplicatore fra i due montanti al primo termine non và ovviamente inteso in senso matematico, bensì come indicatore di ripresa, nello stesso regime, di un capitale maturato al tempo *m*.

Ciò vale anche in un regime di sconto, che è scindibile solo quando il valore scontato al tempo *m* di un capitale disponibile al tempo $n>m$, scontato successivamente fino al tempo *0* e nelle medesime condizioni finanziarie, è uguale al valore scontato al tempo *0* dello stesso capitale iniziale, cioé quando

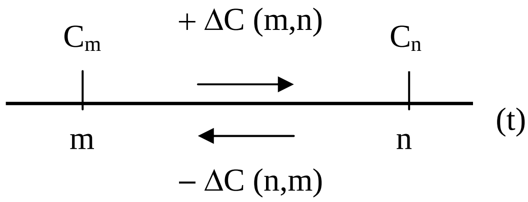
$$V\ (n,m) \times V\ (m,0) = V\ (n,0)$$

In sostanza la proprietà della scindibilità consiste (come la definiscono il Daboni e De Ferra in “Elementi di matematica finanziaria[†]”) nel poter interrompere e riprendere istantaneamente una operazione senza mutare il valore finale della medesima. Questa proprietà, come vedremo, è riservata ai soli regimi regolati da leggi esponenziali, sia per montare che per scontare.

[†] Luciano Daboni e Claudio De Ferra – Elementi di matematica finanziaria - Ed. Lint Trieste 1977-1985

2.2 La reciprocità fra movimenti di posticipazione e di anticipazione

Dati un movimento di posticipazione ed uno di anticipazione a tasso uguale, considereremo i due regimi reciproci o corrispondenti quando, per lo stesso capitale iniziale e lo stesso intervallo di tempo, le variazioni algebriche che subisce il capitale muovendosi nei due sensi si annullano, quando cioé



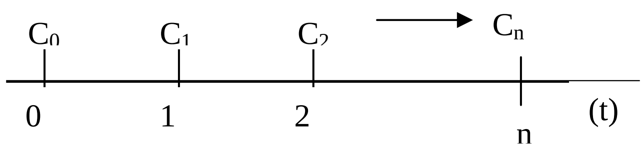
$$+\Delta C - \Delta C = 0$$

In questo caso i due regimi sono uno il reciproco dell'altro, con la notazione

$$M\ (m,n) = [V\ (n,m)]^{-1}$$

2.3 La formazione del montante in regime di interesse semplice

Fissato il valore del saggio di interesse *r*, riferito all'unità temporale *t*, in questo regime la variazione del capitale in funzione del tempo d'impiego è lineare. Pertanto il montante di un capitale iniziale C_o dopo *n* frazioni di tempo diventa



$$M = C_n = C_o + C_0\ rn = C_0\ (1 + rn) \quad (2.3.1)$$

e l'accumulazione degli interessi

$$I = C_n - C_0 = C_0\ rn \quad (2.3.2)$$

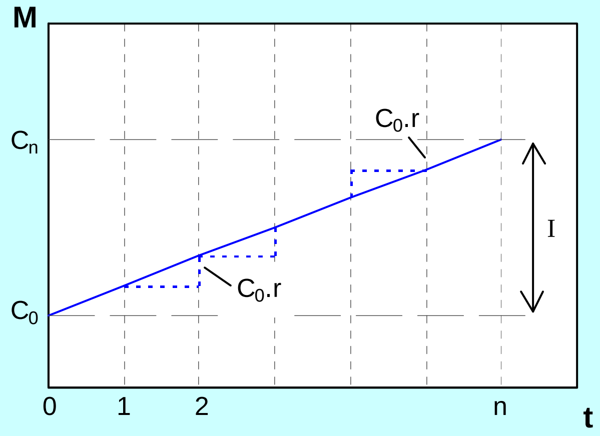


Fig. 1

M = f (t)   in regime di interesse semplice

La geometria della funzione $M = f(t)$ è una semiretta nel 1° quadrante, uscente all'ordinata C_0 e con coefficiente angolare $r > 0$ (Fig.1).

L'interesse si rende logicamente disponibile quando il capitale l'ha maturato, quindi al termine dell'unità di tempo considerata. Ciò non toglie che in determinati prodotti o servizi gli istituti finanziari possano negoziare con il cliente l'anticipazione degli interessi senza considerare questa convenzione come un'operazione di sconto. Ma ciò non ha alcuna influenza sulla formazione del montante in quanto, come usualmente vien detto, l'interesse non si capitalizza e non produce a sua volta interessi. Il capitale di riferimento è pertanto sempre il capitale iniziale.

La precisazione dell'intervallo temporale di riferimento e la maturazione degli interessi agli estremi di questo intervallo non esclude il loro calcolo anche in un momento intermedio, in caso di interruzione dell'operazione. Ad esempio, per un saggio di interesse convenuto annuale in ragione del 5%, dopo 127 giorni oppure dopo 4 anni e 127 giorni il montante diventa

$$M = C_0 \left(1 + 0.05 \times \frac{127}{365} \right) = 1.0174\, C_0 \quad (2.3.3)$$

$$M = C_0 \left[1 + 0.05 \left(4 + \frac{127}{365} \right) \right] = 1.2174\, C_0$$

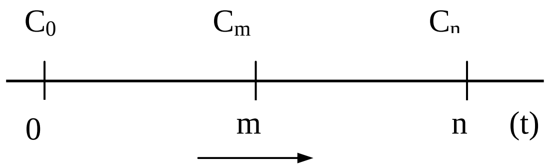
con una accumulazione di interessi, rispettivamente di

$$I = (1{,}0174 - 1{,}0) \times C_0 = 0{,}0174\, C_0 \quad (2.3.4)$$

$$I = (1{,}2174 - 1{,}0) \times C_0 = 0{,}2174\, C_0 \quad (2.3.5)$$

Se altro non vien detto, l’interesse è riferito al periodo d’impiego del capitale di 1 anno, ed espresso in percentuale sul capitale iniziale (4%, 6%, ecc.). Ciò vale anche per gli altri regimi sia d’interesse che di sconto; ci riferiremo quindi a questa unità temporale di misura per il saggio (tasso), salvo che non sia precisato di volta in volta differentemente.

Questo regime di capitalizzazione non è scindibile. Infatti, per quanto detto al par. 2.1



$$C_0\ (1+rm)\ \times\ [1+r(n-m)]\ \neq\ C_o\ (1+rn)$$

Semplici operazioni algebriche consentono di ricavare, in questo regime, le funzioni inverse, cioè il tempo o il saggio di capitalizzazione in funzione degli altri valori.

2.4 Lo sconto in regime d’interesse semplice (sconto razionale)

Formulando la reciprocità con la formazione del montante in questo regime, si ottiene dalla (2.3.1) il valore al momento *0* di un capitale disponibile in *n*.

(2.4.1) $$V = C_0 = \frac{C_n}{1+rn}$$

nonché lo sconto, cioè la differenza

(2.4.2) $$D\ =\ C_n\ -\ C_0\ =\ C_n\ \frac{rn}{1+rn}$$

e lo sconto per unità di capitale e di tempo, cioè il tasso di sconto

(2.4.3) $$d = \frac{r}{1+r}$$

da cui, pure

(2.4.4) $$D = \frac{C_n \cdot n \cdot d}{1+(n-1)\cdot d}$$

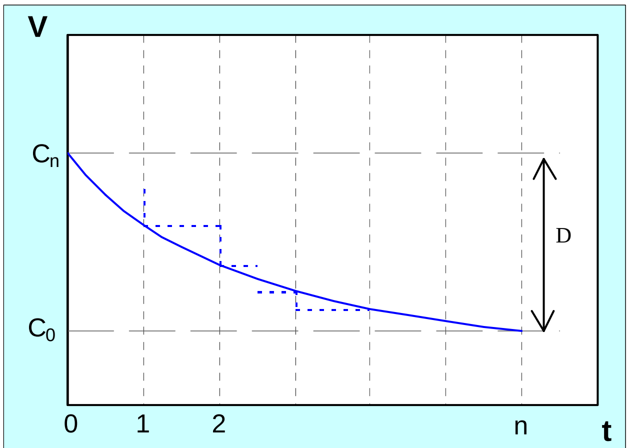


Fig. 2
V = f (t)   in regime di interesse semplice

La geometria della funzione *V = f (t)* è una curva nel 1° quadrante, uscente dall’ordinata C_n, con andamento discendente e con la concavità verso l’alto (*f’(t)<0, f’’(t)>0*) (Fig. 2).

Ripetiamo, per una giusta lettura del grafico, che la curva dà il valore di un capitale disponibile fra *n* unità di tempo (C_n), scontato di *1,2 … n* unità temporali.

Vale quanto già detto nel paragrafo precedente in merito alla disponibilità delle differenze agli estremi dell'intervallo temporale di riferimento, ma anche alla possibilità del loro calcolo in un momento intermedio.

In relazione agli esempi fatti ad. 2.3.3, per un saggio *r* del 5% (corrispondente ad un tasso d del 4,76%) e per lo stesso periodo già calcolato, il valore del capitale scontato diventa

$$(2.4.5) \qquad V = C_n \, \frac{1}{1 + 0.05 \times \frac{127}{365}} = 0.9829 \;\; C_n$$

$$V = C_n \, \frac{1}{1 + 0.05\left(4 + \frac{127}{365}\right)} = 0.8214 \;\; C_n$$

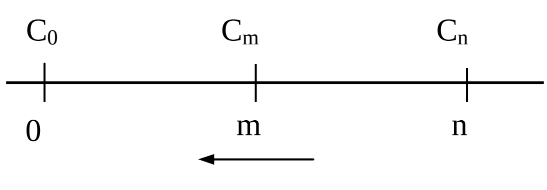
dove si nota che 0.9829 e 0.8214 sono ovviamente il reciproco di 1.0174 e di 1.2174 delle 2.3.3. e che lo sconto

$$(2.4.6) \qquad D \;=\; (1.0 - 0.09829) \;\times\; C_n \;=\; 0.0171 \;\times\; C_n \;= 0.0171 \times 1{,}0174 \times C_0 \;= 0.0174 \cdot C_0$$

$$D \;=\; (1.0 - 0.8214) \;\times\; C_n \;=\; 0.1786 \;\times C_n \;=\; 0.1786 \times 1.2174 \times C_0 \;=\; 0.2174 \cdot C_0$$

è pari all'accumulazione degli interessi nel regime reciproco.

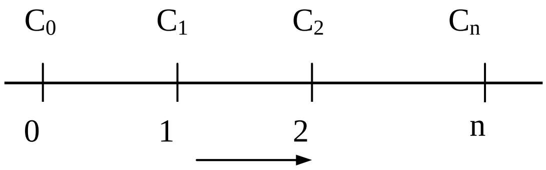
Pure questo regime di sconto ad interesse semplice, come già il suo reciproco, non è scindibile. Infatti



$$\frac{C_n}{1 + r\,(n - m)} \times \frac{1}{1 + rm} \neq \frac{C_n}{1 + rn}$$

2.5 La formazione del montante in regime di interesse composto

Fissato il valore del saggio di interesse r, riferito all'unità temporale t, in questo regime l'interesse maturato, disponibile di solito alla fine dell'intervallo di tempo, si aggiunge al capitale investito fino a quel momento e concorre assieme ad esso alla maturazione dell'interesse nel periodo successivo. Si ha pertanto



$$C_1 = C_0 + C_0 r = C_0 \,(1 + r)$$

$$C_2 = C_1 + C_1 r = C_1 \,(1 + r) = C_0 \,(1 + r)^2$$

……………………..

$$C_n = C_0 \,(1 + r)^n$$

Il termine *1 + r* viene chiamato *binomio di interesse* o *fattore di capitalizzazione* ed indicato con *q*, e sta ad indicare il montante, al termine di ogni unità temporale, di una unità del capitale disponibile all'inizio della stessa. La legge di formazione del montante è pertanto

(2.5.1) $$M = C_n = C_0 \times q^n$$

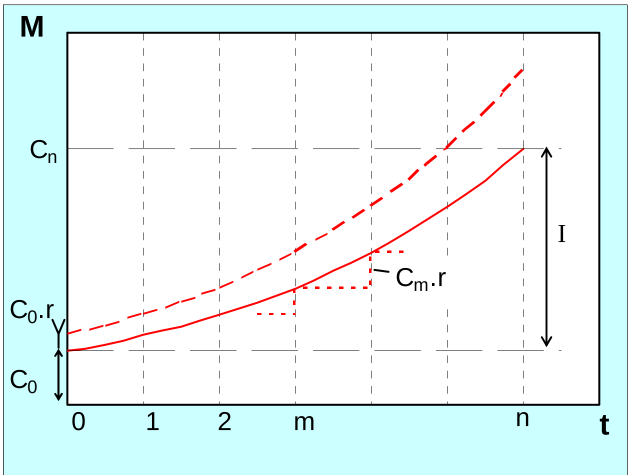


Fig. 3

M = f (t) in regime di interesse composto

ed è esponenziale crescente, con la concavità rivolta verso l'alto (base > 1) (Fig.3, a linea continua). Il caso (inconsueto) di anticipazione degli interessi trova risposta in quanto già osservato nei paragrafi precedenti. Qualora invece la negoziazione dovesse portare a convenire l'anticipazione funzionale, e non solo inerte, la nuova funzione

(2.5.2) $$M = C_n = C_0 \; q^{n+1}$$

verrebbe rappresentata da una curva superiore e non parallela alla precedente (Fig. 3, a tratteggio)

Pertanto, se altro non verrà precisato, ci riferiremo in seguito sempre e solo alla disponibilità posticipata degli interessi (funzione a scaletta con alzate variabili). Il problema non sussisterà più quando porteremo il regime finanziario dal discreto al continuo, cioè quando gli intervalli di tempo non saranno finiti bensì infinitesimi..

L'accumulazione degli interessi dall'inizio dell'operazione alla fine di ogni periodo risulta

(2.5.3) $$I = C_n - C_0 = C_0\, q^n - C_0 = C_0\,\left(q^n - 1\right)$$

Vale inoltre quanto già precisato per l'interesse semplice in merito alla possibilità del calcolo del montante in un momento intermedio dell'intervallo. Per gli esempi già fatti nel cap.2.3

(2.5.4) $$M = C_0\,\left(1 + 0{,}05\right)^{127/365} = 1{,}0171\, C_0$$

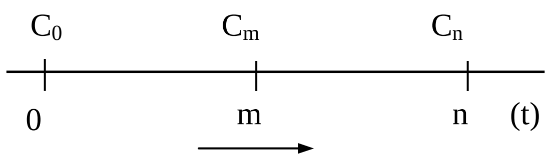
$$M = C_0\,\left(1 + 0{,}05\right)^{4 + 127/365} = 1{,}2363\, C_0$$

(2.5.5) $$I = \left(1{,}0171 - 1{,}0\right) C_0 = 0{,}0171\, C_0$$

$$I = \left(1{,}2363 - 1{,}0\right) C_0 = 0{,}2363\, C_0$$

Notiamo fin d'ora che il montante in questo regime, a parità di saggio, è inferiore al corrispondente ad interesse semplice per tempi di impiego inferiori all'unità temporale di riferimento e maggiore per tempi superiori a detta unità (2.3.3)

Questo regime di interesse, esponenziale, è scindibile. Infatti, sempre con riferimento a quanto detto al cap. 2.1



$$C_0 \times q^m \times q^{n-m} = C_0 \times q^n$$

Questa proprietà della scindibilità consentirà larghe applicazioni di questo regime.

La definizione delle funzioni inverse si appoggia, in questo regime, su espressioni logaritmiche; ad esempio

(2.5.6) $$n = \frac{\lg C_n - \lg C_0}{\lg\left(1 + r\right)}$$

2.6 Lo sconto in regime di interesse composto

In reciprocità con la formazione del montante nell'analogo regime, si ha dalla (2.5.1)

$$(2.6.1)\quad V = C_0 = \frac{C_n}{(1+r)^n} = \frac{C_n}{q^n} = C_n \times q^{-n}$$

e lo sconto, cioé la differenza

$$(2.6.2)\quad D = C_n - C_0 = C_n\left(1 - \frac{1}{q^n}\right)$$

e lo sconto per unità di capitale e di tempo,

cioè il tasso di sconto

$$(2.6.3)\qquad d = \frac{r}{1+r} = \frac{r}{q}$$

da cui pure

$$(2.6.4)\qquad D = C_n - C_n(1-d)^n$$

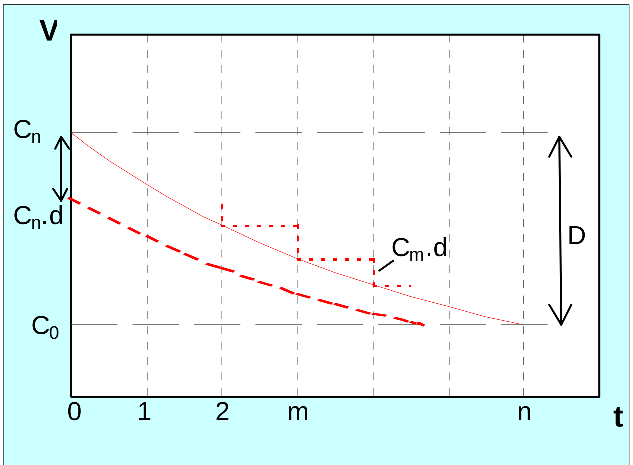


Fig. 4
V = f (t) in regime di interesse composto

Pure in analogia con la definizione di fattore di capitalizzazione, chiameremo *fattore di anticipazione* o *di sconto* il valore scontato al termine di ogni unità temporale di una unità di capitale disponibile all'inizio della stessa. Ovviamente l'unità temporale s'intende percorsa in senso opposto al regime di posticipazione. Indicheremo con $v = 1 - d = q^{-1}$ questo valore, che nasce come segue

$$C_{n-1} = C_n - C_n \cdot d = C_n\,(1-d) = C_n \cdot v$$

$$C_{n-2} = C_{n-1} - C_{n-1} \cdot d = C_{n-1}\,(1-d) = C_n \cdot v^2$$

……………………………

$$C_0 = C_1 - C_1 \cdot d = C_1\,(1-d) = C_n \cdot v^n$$

e, data la reciprocità con l'analogo regime di posticipazione

(2.6.5) $$V = C_0 = \frac{C_n}{q^n} = C_n \cdot (1-d)^n = C_n \cdot v^n$$

(2.6.6) $$q = 1 + r = v^{-1} = \frac{1}{1-d}$$

Si osserva pure dalla 2.6.3 che in una stessa operazione finanziaria il tasso di interesse è maggiore del corrispondente tasso di sconto, che risulta essere pari al tasso di interesse scontato.

La geometria della funzione $V = f(t)$ è ancora una esponenziale con la concavità verso l'alto, ma discendente asintoticamente (base < 1) (Fig. 4, a linea continua). Per il caso (inconsueto) di sconto applicato anticipatamente valgono le considerazioni fatte nei paragrafi precedenti (Fig. 4 a tratto).

Vale inoltre la precisazione già fatta al par. 2.4 per una giusta lettura del grafico.

In relazione agli esempi fatti al cap. 2.5, e con il solito intervallo di tempo e saggio r di interesse, si ha

(2.6.7) $$V = C_n \cdot \frac{1}{(1+0{,}05)^{127/365}} = 0{,}9832 \cdot C_n$$

$$V = C_n \cdot \frac{1}{(1+0{,}05)^{4+127/365}} = 0{,}8089 \cdot C_n$$

dove si nota ancora che i valori scontati sono il reciproco dei montanti 2.5.4 e che le differenze

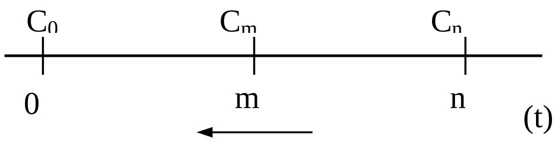
(2.6.8) $$D = (1{,}0 - 0{,}9832) \cdot C_n = 0{,}0168 \cdot C_n = 0{,}0171 \cdot C_0$$

$$D = (1{,}0 - 0{,}8089) \cdot C_n = 0{,}1911 \cdot C_n = 0{,}2363 \cdot C_0$$

sono pari all'accumulazione degli interessi nel regime reciproco.

Osserviamo pure che in questo regime il capitale scontato, a parità di saggio, è superiore al corrispondente ad interesse semplice per tempi inferiori all'unità temporale, ed inferiore per tempi superiori a detta unità (2.4.5)

Come per la formazione del montante ad interesse composto, anche questo regime è scindibile. Infatti



$$\frac{C_n}{q^{n-m}} \times \frac{1}{q^m} = \frac{C_n}{q^n}$$

Pertanto sia dal confronto fra loro delle 2.5.1 e 2.6.1, sia dall'accertamento della scindibilità in fase di posticipazione e di anticipazione, possiamo dire che il regime di interesse composto è atto a fornire il valore di un capitale in qualsiasi momento, posteriore o anteriore alla sua disponibilità a seconda che l'esponente nelle due espressioni sia positivo o negativo.

2.7 Lo sconto in regime lineare o sconto commerciale

E' commercialmente usato per tempi brevi, in quanto di semplice calcolo, valutare la variazione negativa del capitale, ossia lo sconto *D*, proporzionalmente al capitale, al tempo ed al tasso di sconto *d*. Si tratta di un regime simile (ma non reciproco) di quello della formazione del montante a interesse semplice, con la geometria della funzione $V = f(t)$ rappresentata da una semiretta nel 1° quadrante uscente dal valor del capitale al momento della sua disponibilità, con direzione discendente, con coefficiente angolare – *d*, e pertanto limitata nel numero di frazioni di tempo considerate se non si vuole che lo sconto annulli il capitale o che il calcolo non diventi finanziariamente assurdo (Fig. 5).

Pertanto, fissato un tasso di sconto *d*, riferito all'unità temporale *t* oltrecché all'unità di capitale, lo sconto risulta

(2.7.1) $D = C_n - C_0 = C_n \times d \times n$

con $n \leq \dfrac{1}{d}$

ed il valore in *0* del capitale disponibile in *n*

(2.7.2) $V = C_0 = C_n - D = C_n \left(1 - dn\right)$

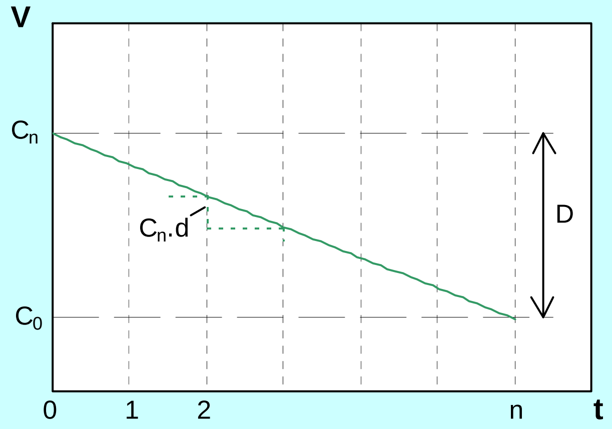


Fig. 5

V = f (t) in regime di sconto commerciale

Valgono le considerazioni già fatte per il regime lineare ad interesse semplice in merito alla anticipazione o posticipazione delle differenze.

Va ancora ricordato che la continuità della funzione *V = f(t)* consente (così come negli altri regimi) il calcolo del valore del capitale pure in un momento intermedio. Negli esempi più volte esaminati

(2.7.3) $$V = C_n \left(1 - 0{,}05 \cdot \frac{127}{365}\right) = 0{,}9826 \cdot C_n$$

$$V = C_n \left[1 - 0{,}05\left(4 + \frac{127}{365}\right)\right] = 0{,}7826 \cdot C_n$$

(2.7.4) $$D = \left(1{,}0 - 0{,}9826\right) \cdot C_n = 0{,}0174 \cdot C_n$$

$$D = \left(1{,}0 - 0{,}7826\right) \cdot C_n = 0{,}2174 \cdot C_n$$

In questi esempi si è considerato il tasso di sconto *d* pari al saggio di interesse *r* utilizzato sia per posticipare che per anticipare negli altri due regimi. Il confronto numerico fra i tre regimi sarà però possibile solo se si pone per *d* il valore del saggio d'interesse scontato *r/1+r = d* , come evidenziato ad 2.4.3 e 2.6.3, oppure per *r* il valore del tasso di sconto posticipato *r = d (1+r).* Nel primo caso, e per i precedenti esempi, si ottiene

(2.7.5) $$V = C_n \left(1 - \frac{0{,}05}{1{,}05} \cdot \frac{127}{365}\right) = 0{,}9834 \cdot C_n$$

$$V = C_n \left[1 - \frac{0{,}05}{1{,}05}\left(4 + \frac{127}{365}\right)\right] = 0{,}7930 \cdot C_n$$

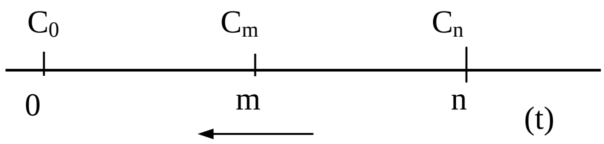
(2.7.6) $$D = (1{,}0 - 0{,}9834) \cdot C_n = 0{,}0166 \cdot C_n$$

$$D = (1{,}0 - 0{,}7930) \cdot C_n = 0{,}0207 \cdot C_n$$

dove si vede che in questo regime il capitale scontato è superiore ai corrispondenti ad interesse semplice e composto per tempi inferiori all'unità temporale, ed è inferiore ad essi per tempi superiori a detta unità (2.4.5)

Ricordiamo ancora che, se altro non vien detto, commercialmente il tasso di sconto è riferito al periodo temporale di un anno ed espresso in percentuale sul valore del capitale al momento della sua disponibilità.

Questo regime di attualizzazione non è scindibile. Infatti



$$C_n\,[1 - d\,(n - m)] \times (1 - dm) \neq C_n\,(1 - dn)$$

Pure in questo regime semplici operazioni consentono di determinare le funzioni inverse.

2.8 La formazione del montante in regime di sconto commerciale

L'analisi dello sconto in regime lineare o commerciale ci dà l'occasione per esaminare il regime finanziario reciproco, in cui la formazione del montante diventa, per un prefissato tasso *d*

(2.8.1) $$M = C_n = \frac{V}{1-dn} = \frac{C_0}{1-dn}$$

con $n \leq \frac{1}{d}$ per le ragioni già dette al capitolo precedente.

La geometria della *M = f (t)* è ancora una curva ad andamento crescente e con la concavità verso l'alto (Fig. 6), così come nell'interesse composto, ma con le differenze da esso che si diranno. Valgono le considerazioni ivi fatte nel caso di anticipazione, funzionale oppure no, degli interessi.

L'accumulazione degli interessi risulta

$$I = C_n - C_0 = C_0 \times \frac{dn}{1-dn} \qquad (2.8.2)$$

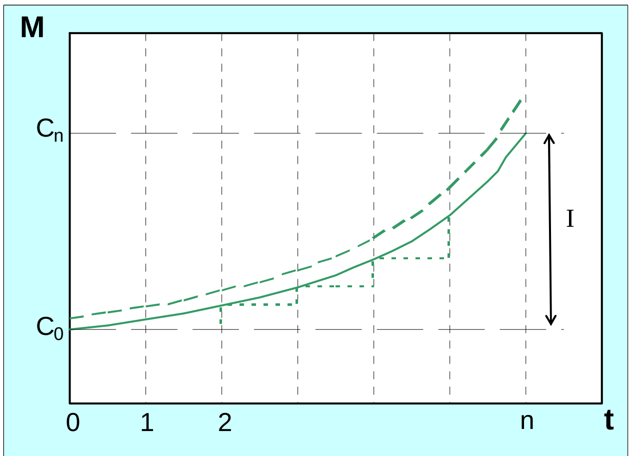


Fig. 6

M = f (t) in regime di sconto commerciale

e, per gli esempi già ripetuti di calcolo in momenti intermedi dell'unità temporale di riferimento, per *d=5%*

$$\mathrm{M} = \mathrm{C}_0 \times \frac{1}{1-0.05 \times \frac{127}{365}} = 1.0177 \times \mathrm{C}_0 \qquad (2.8.3)$$

$$\mathrm{M} = \mathrm{C}_0 \times \frac{1}{1-0.05\left(4+\frac{127}{365}\right)} = 1.2778 \times \mathrm{C}_0$$

$$I = (1.0177 - 1.0) \times C_0 = 0.0177 \times C_0 = 0.0177 \times 0.9826\, C_n = 0.0174 \times C_n \qquad (2.8.5)$$

$$I = (1.2778 - 1.0) \times C_0 = 0.2778 \times C_0 = 0.2778 \times 0.7826\, C_n = 0.2174 \times C_n$$

dove si osserva che questa volta i montanti sono il reciproco dei valori scontati (2.7.3) e che l'accumulazione degli interessi è pari alla differenza (2.7.4) nel regime reciproco.

Analogamente a quanto detto al capitolo precedente, il confronto con gli altri due regimi di capitalizzazione può venir stabilito con l'assunzione di un tasso di sconto pari al saggio d'interesse scontato, come di seguito

$$M = C_0 \frac{1}{1-\frac{0,05}{1,05}\cdot\frac{127}{365}} = 1{,}0168 \cdot C_0 \qquad (2.8.6)$$

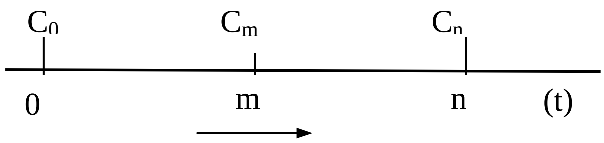
$$M = C_0 \frac{1}{1-\frac{0,05}{1,05}\left(4+\frac{127}{365}\right)} = 1{,}2611 \cdot C_0$$

(2.8.7) $$I = (1{,}0168 - 1{,}0) \cdot C_0 = 0{,}0168 \cdot C_0$$

$$I = (1{,}2611 - 1{,}0) \cdot C_0 = 0{,}2611 \cdot C_0$$

dove si osserva che in questo regime il montante è inferiore ai corrispondenti ad interesse semplice e composto per tempi inferiori all'unità, e maggiore per tempi superiori a detta (2.3.3 – 2.5.4).

Come per la formazione del capitale scontato nel regime lineare, pure nella reciproca formazione del montante non c'è scindibilità. Infatti



$$C_n = \frac{C_0}{1 - dm} \times \frac{1}{1 - d(n - m)} \neq \frac{C_n}{1 - dn}$$

2.9 Il confronto fra i regimi finanziari usuali

Come già detto, il confronto fra i tre regimi analizzati può venir esaminato a parità di saggio d'interesse per i regimi a interesse semplice e composto, e con saggio d'interesse scontato per il regime di sconto commerciale.

I grafici sovrapposti dei tre regimi, sia per la posticipazione che per la anticipazione di un capitale unitario, danno questo confronto ed evidenziano quanto già dedotto dagli esempi numerici (Fig. 7). In particolare si nota e si ricorda che:

- per un periodo pari all'unità temporale di riferimento (n=1) dei tassi, le curve passano per lo stesso valore;
- per $0<n<1$ l'interesse I in regime di interesse semplice è maggiore di quello a interesse composto e di quello a sconto commerciale; i rapporti si invertono per $n>1$;
- per $0<n<1$ lo sconto o differenza D è minore in regime di sconto commerciale rispetto quelli ad interesse composto e semplice; i rapporti si invertono per n>1

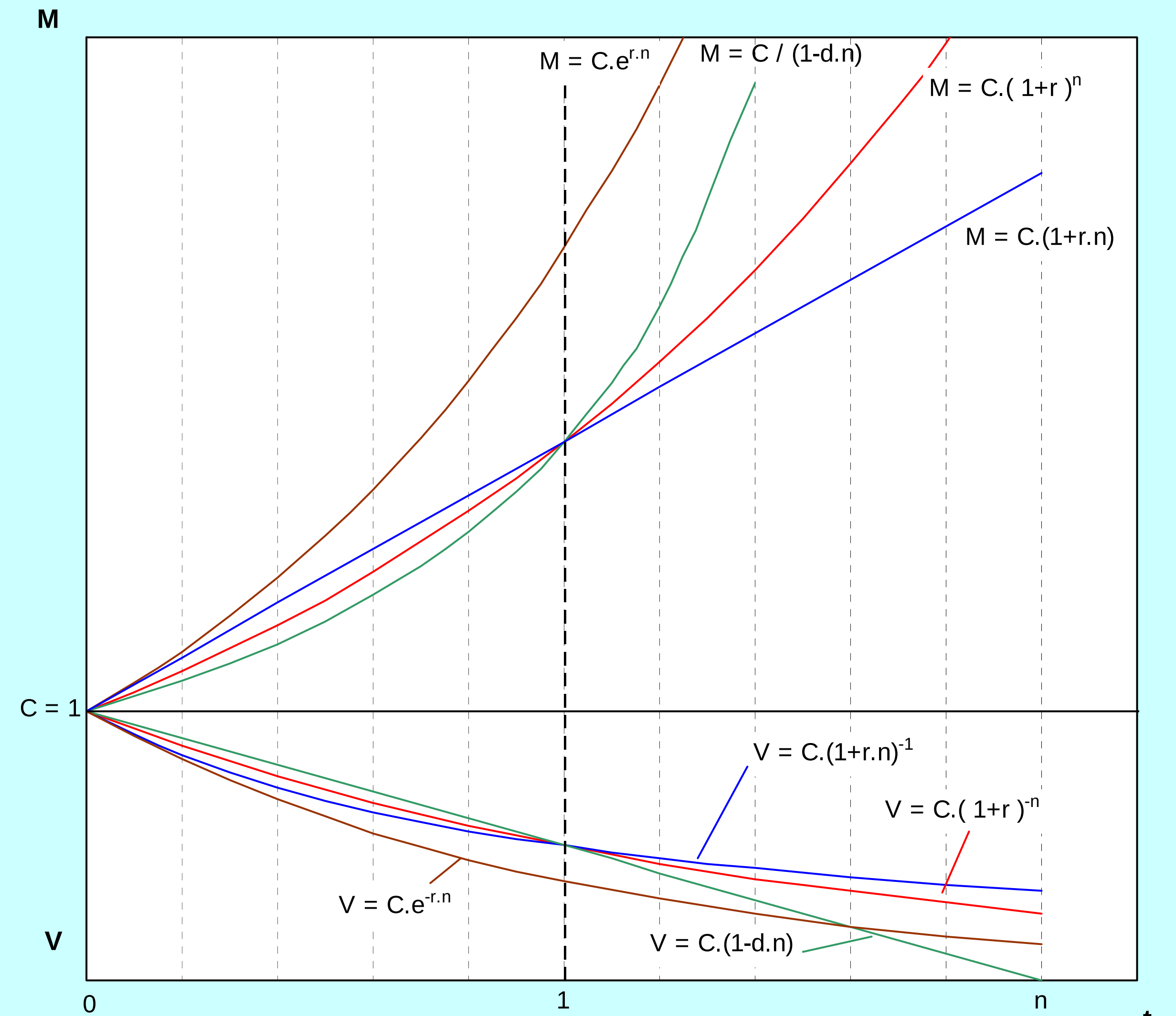


Fig. 7

confronto fra regimi di posticipazione M = f(t)
e fra regimi di anticipazione V = f(t)

Nella figura 7 è stata disegnata pure la geometria del regime finanziario istantaneo di cui ai paragrafi seguenti, sia per posticipare che per anticipare, per utile successivo confronto. Per questo regime occorre far notare che, per la formazione del montante e nell'ipotesi assunta a base del confronto di un tasso di sconto pari al saggio di interesse scontato, il regime istantaneo stà sopra quello dello sconto commerciale per tempi inferiori all'unità, ma che il rapporto si inverte fra *n = 1* e *n = 2*. Ciò non risulta invece per tassi d'interesse e di sconto uguali *(d = r)*, dove la curva del montante dello sconto commerciale supera l'altra fin dall'inizio (Fig. 8). Ovviamente la situazione si inverte nei regimi reciproci, di anticipazione.

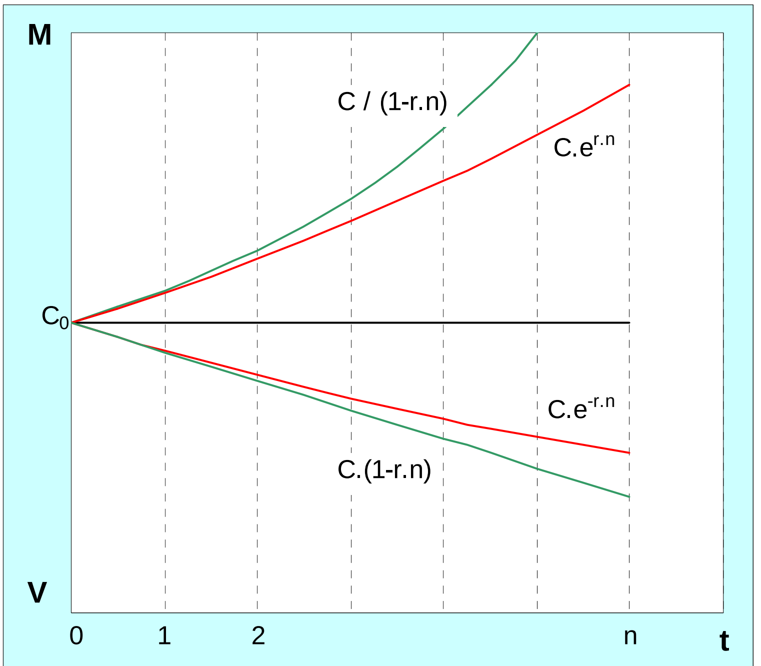


Fig. 8

Confronto fra: $M = C / (1-r.n)$ e $M = C.e^{r.n}$

Confronto fra: $V = C.(1-r.n)$ e $V = C.e^{-r.n}$

2.10 L'equivalenza dei saggi di interesse e di sconto

Dati due saggi differenti r_1 e r_2 (op. d_1 e d_2), riferiti a unità temporali τ_1 e τ_2, diremo che essi sono equivalenti quando, relativamente allo stesso capitale e ad uno stesso tempo d'impiego t (multiplo di τ_1 e τ_2) danno effetti economici uguali.

Nei due regimi lineari dell'interesse semplice e dello sconto commerciale ciò sarà quando (sia per montare che per scontare)

$$(2.10.1) \qquad \frac{r_1}{r_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \qquad \text{e} \qquad \frac{d_1}{d_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}$$

e quando, in regime di interesse composto

$$(2.10.2) \qquad (1+r_1)^{t/\tau_1} = (1+r_2)^{t/\tau_2} \qquad \text{e} \qquad (1-d_1)^{t/\tau_1} = (1-d_2)^{t/\tau_2}$$

Il problema è interessante nella formazione del montante in regime di interesse composto, quando gli interessi maturano più volte in un anno, e si aggiungono al capitale alla fine di ogni periodo. Se, ad esempio, gli interessi maturano *k* volte in un anno al tasso convenuto annuale *r*, si avrà dopo *n* anni e per un capitale unitario

$$\left(1+\frac{r}{k}\right)^{nk} \rangle \left(1+r\right)^{n}$$

in quanto, per la formula del binomio di Newton

$$\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k} = 1 + k\,\frac{r}{k} + \frac{k(k-1)}{2\,!} \times \left(\frac{r}{k}\right)^{2} + \dots$$

con gli addendi successivi al secondo tutti positivi. Sarà come aver impiegato il capitale ad un tasso effettivo annuale

(2.10.3) $$r' = \left(1+\frac{r}{k}\right)^{k} - 1 \quad \rangle \quad r$$

con un montante $C_n = C_0\,(1+r')^n > C_0\,(1+r)^n$

Ad esempio, se con una banca si è convenuto un interesse annuale del 6%, che matura però trimestralmente, si sarà ottenuto un saggio effettivo del

$$\left(1+\frac{0.06}{4}\right)^{4} - 1 \;=\; 0.0614 = 6.14\%$$

L'operazione viene detta effettuata al "<u>*tasso annuo r convertile k volte*</u>" oppure al "<u>*tasso effettivo annuale r'*</u> ", oppure ancora <u>*"al tasso annuo equivalente r' "*</u>. Ovviamente l'unità temporale di riferimento può anche non essere annuale.

Se invece si conviene, sì, la maturazione dell'interesse *k* volte all'anno, ma in modo da non superare il saggio annuale convenuto *r*, che si vuole effettivo, si dovrà applicare ad ogni frazione di tempo un saggio $\frac{r''}{k}$ tale che

$$\left(1+\frac{r''}{k}\right)^{k} = 1 + r$$

(2.10.4) con $$r'' = \left[(1+r)^{1/k} - 1\right] \times k \quad \langle \quad r$$

Nell’esempio precedente $r'' = 0.0587 = 5.87\%$, con r'' detto *tasso annuo nominale convertibile k* volte.

In questo caso il montante sarà

$$C_n = C_0 \left(1+r\right)^n = C_0 \left(1+\frac{r''}{k}\right)^{k\,n}$$

Come già detto i tassi convertibili, effettivi e nominali, possono essere riferiti a periodi anche differenti dell’anno.

Sempre in regime di interesse composto, k può diventare sempre maggiore (ad es. k = 365 se gli interessi maturano ogni giorno, oppure k = 8760 se maturano ogni ora) ed al limite può essere infinitamente grande. In tal caso, sviluppando la 2.10.3 come di seguito

$$r' = \left(1+\frac{r}{k}\right)^k - 1 = \left[\left(1+\frac{1}{k/r}\right)^{k/r}\right]^r - 1$$

e ricordando che la funzione $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ha un valore determinato per ogni valore di x tranne che per $x = 0$ e tende ad un limite finito, indicato con *e* (numero di Neper), quando *x* tende a + ∞ , sarà per $k \to +\infty$

(2.10.5) $$r'\left(\infty\right) = \lim_{k/r \to \infty} \left[\left(1+\frac{1}{k/r}\right)^{k/r}\right]^r - 1 = e^r - 1$$

(2.10.6) $$C_n = C_0 \left(1+r'\left(\infty\right)\right)^n = C_0 \cdot e^{r\,n}$$

espressione che ci dà la formazione del montante in regime di interesse composto, con tasso annuale *r* che matura da istante a istante, cioé con “*tasso annuale r convertibile continuo*”, ovvero in “*regime finanziario continuo di capitalizzazione*” con tasso annuale effettivo *r’*.

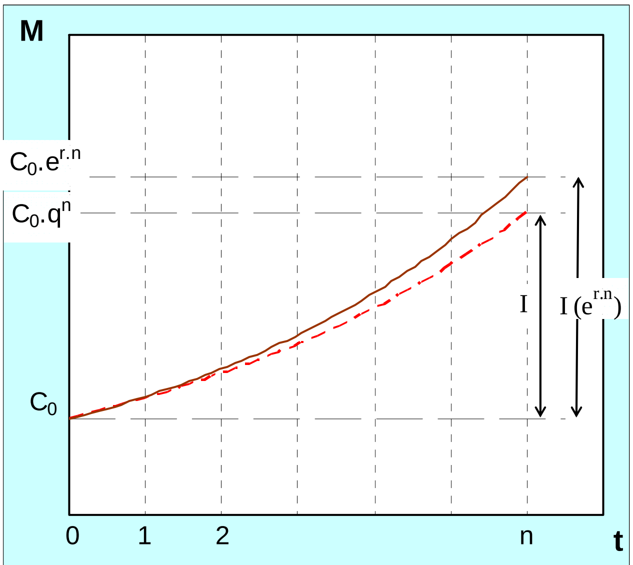


Fig. 9

M = f (t)

Confronto in regime di interesse composto

La geometria della funzione $M = f(t)$ è evidenziata in figura 9 (a linea continua) dove (a tratto) è pure disegnata la corrispondente formazione del montante a interesse composto che, a parità di r, matura in modo tempisticamente discontinuo.

Il confronto con gli esempi fatti al cap, 2.5 si legge come segue

(2.10.7) $$M = C_0 \cdot e^{0{,}05 \cdot 127/365} = 1{,}0175\, C_0 \qquad \text{contro } 1{,}0171 \cdot C_o$$

$$M = C_0 \cdot e^{0{,}05\left(4 + 127/365\right)} = 1{,}2428\, C_0 \qquad \text{contro } 1{,}2363 \cdot C_0$$

(2.10.8) $$I = (1{,}0175 - 1{,}0) \cdot C_0 = 0{,}0175\, C_0 \qquad \text{contro } 0{,}0171 \cdot C_0$$

$$I = (1{,}2428 - 1{,}0) \cdot C_0 = 0{,}2428\, C_0 \qquad \text{contro } 0{,}2363 \cdot C_0$$

Analogamente, dalla 2.10.4 e sempre per $k \to +\infty$

(2.10.9)

$$r''(\infty) = \lim_{k \to \infty} \left[(1+r)^{1/k} - 1 \right] \cdot k = \lim_{1/k \to 0} \frac{(1+r)^{1/k} - 1}{\frac{1}{k}} = \lg_e (1+r) \quad = \delta$$

espressione che ci consente di determinare il tasso nominale r'' (indicato in seguito con δ) che matura da istante a istante *(tasso istantaneo di interesse)*, equivalente però al tasso annuale convenuto r, e per la quale

(2.10.10) $$C_n = C_0 \left(1+r\right)^n = C_0 \cdot e^{\delta\, n} < C_0 \times e^{rn}$$

Per il calcolo delle espressioni precedenti si può ricorrere ai logaritmi, oppure a sviluppi in serie di Mac Laurin interrotti dopo il secondo termine, come segue

(2.10.11) $$r'(\infty) = e^r - 1 = 1 + r + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \cdots - 1 \cong r + \frac{r^2}{2} > r$$

(2.10.12) $$r''(\infty) = \delta = \lg_e \left(1+r\right) = r - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} - \cdots \cong r - \frac{r^2}{2} < r$$

Con il crescere di *k* la funzione $r' = f\left(k\right)$ è crescente e la $r'' = f\left(k\right)$ è decrescente, come del resto ovvio e confermato dai valori della tabella seguente

Interesse	*k*	*r*	*r'*	*r''*
annuale	1	0,06	0,06000	0,06000
semestrale	2	0,06	0,06090	0,05913
trimestrale	4	0,06	0,06136	0,05870
mensile	12	0,06	0,06168	0,05841
giornaliero	365	0,06	0,06183	0,05827
istantaneo	+ ∞	0,06	0,06183	δ=0,05826

$r'' \le r \le r'$ $\qquad\qquad$ $r''\left(\infty\right) = \delta < r$

Corrispondentemente a quanto considerato per la formazione del montante, e con la stessa progressione didattica, esaminiamo il problema dell'anticipazione o sconto di capitali, sempre in regime di interesse composto, quando le differenze maturano *k* volte in un anno al tasso convenuto annuale *d*. Con *n* anni di anticipazione e per un capitale unitario

$$\left(1 - \frac{d}{k}\right)^{n\,k} > \left(1 - d\right)^n$$

Sarà come aver scontato il capitale ad un tasso effettivo annuale

(2.10.13) $$d' = 1 - \left(1 - \frac{d}{k}\right)^k < d$$

con un valore scontato

$$V = C_n \cdot (1 - d')^n > C_n\ (1 - d)^n$$

Se con una banca si è convenuto un tasso di sconto annuale del 6%, che matura però trimestralmente, si sarà adottato un tasso effettivo (*tasso di sconto annuale d convertibile k volte*) del

$$1 - \left(1 - \frac{0{,}06}{4}\right)^4 = 0{,}0587 = 5{,}87\ \%$$

Se invece si conviene, sì, la maturazione dello sconto *k* volte all'anno, ma in modo tale da raggiungere il tasso annuale convenuto *d*, che si vuole effettivo, si dovrà applicare ad ogni frazione di tempo un saggio $\frac{d''}{k}$ tale che

$$\left(1 - \frac{d''}{k}\right)^k = 1 - d$$

(2.10.14) con $$d'' = \left[\ 1 - (1 - d)^{1/k}\ \right] \cdot k\ \rangle\ d$$

Nell'esempio precedente *d'' = = 0,0614 = 6,14 %*, con *d''* detto anche *tasso di sconto nominale*.

In questo caso il valore scontato sarà

$$V = C_n\ (1 - d)^n = C_n \left(1 - \frac{d''}{k}\right)^{k\,n}$$

Inoltre, dalla 2.10.13

(2.10.15) $$d'\ (\infty) = \lim_{k/r \to \infty} 1 - \left[\left(1 - \frac{1}{k/d}\right)^{k/d}\right]^d = 1 - e^{-d} \qquad \langle\ d$$

(2.10.16) $$V = C_n\ (1 - d'(\infty))^n = C_n \cdot e^{-d\,n}$$

espressione che ci dà la formazione del capitale scontato in regime di interesse composto con tasso annuale *d* che matura da istante a istante, cioè con "*tasso annuale d* *convertibile continuo*", ovvero in "*regime finanziario continuo di anticipazione*" con tasso annuale effettivo *d'*.

Per questo regime di sconto le geometrie della *V = f(t)* nella versione continua (a linea continua) e discontinua (a tratto) sono riportate nella figura 10.

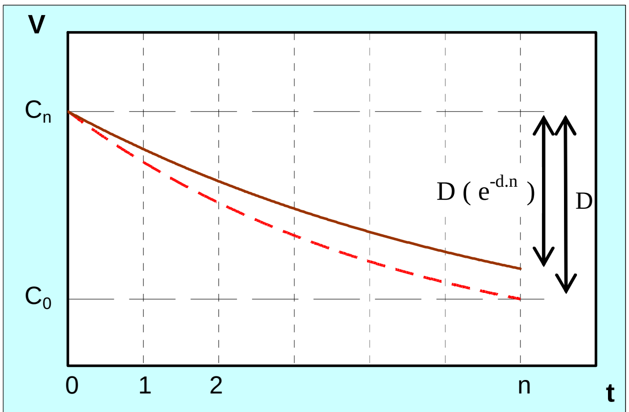


Fig. 10
V = f (t)
Confronto in regime di interesse composto

Il confronto con gli esempi del cap. 2.6 è il seguente

(2.10.17) $$V = C_n \cdot e^{-0{,}05 \cdot 127/365} = 0{,}9828 \cdot C_n \qquad \text{contro } 0{,}9826 \cdot C_n$$

$$V = C_n \cdot e^{-0{,}05\left(4+127/365\right)} = 0{,}8046 \cdot C_n \qquad \text{contro } 0{,}7826 \cdot C_n$$

(2.10.18) $$D = (1{,}0 - 0{,}9828) \cdot C_n = 0{,}0172\, C_n \qquad \text{contro } 0{,}0174 \cdot C_n$$

$$D = (1{,}0 - 0{,}8046) \cdot C_n = 0{,}1954\, C_n \qquad \text{contro } 0{,}2174 \cdot C_n$$

Inoltre, dalla 2.10.14

(2.10.19)

$$d''\,(\infty) = \lim_{k \to \infty} \left[1 - (1-d)^{1/k}\right] \cdot k = -\lim_{1/k \to 0} \frac{(1-d)^{1/k} - 1}{1/k} = -\lg_e (1-d) = \rho \quad \rangle\, d$$

espressione che ci consente di determinare il tasso nominale *d''* (in seguito indicato con ρ) che matura da istante a istante (*tasso istantaneo di sconto*), equivalente però al tasso annuale *d*, e per la quale

(2.10.20) $$V = C_n\,(1-d)^n = C_n \cdot e^{-\rho\, n} \quad \langle\, C_n \cdot e^{-dn}$$

ed ancora, approssimativamente

(2.10.21) $$d'(\infty) = 1 - e^{-d} \cong d - \frac{d^2}{2} \quad \langle \; d$$

(2.10.22) $$d''(\infty) = \rho = -\lg_e (1-d) \cong d + \frac{d^2}{2} \; \rangle \; d$$

Con il crescere di *k* la funzione *d’ = f(k)* e decrescente e la *d’’ = f(k)* è crescente, come nella seguente tabella di valori

Anticipazione	*k*	*d*	*d’*	*d’’*
annuale	1	0,06	0,06000	0,06000
semestrale	2	0,06	0,05910	0,06093
trimestrale	4	0,06	0,05866	0,06140
mensile	12	0,06	0,05838	0,06172
giornaliera	365	0,06	0,05824	0,06187
istantanea	+ ∞	0,06	0,05823	ρ =0,06188

$$d'' \geq d \geq d' \qquad\qquad d''(\infty) = \rho > d$$

A conclusione di questo paragrafo vogliamo far osservare che abbiamo esaminato l’equivalenza di saggi di interesse fra loro (riferiti a unità temporali diverse) e, separatamente, l’equivalenza di tassi di sconto fra loro (con la stessa precisazione).

L’equivalenza di saggi di interesse con tassi di sconto, ma nello stesso regime di interesse composto, è già stata determinata alla 2.6.5 e può venir estesa alle considerazioni precedenti. Diremo cioé che un saggio di interesse convertibile *k* volte ed un tasso di sconto, pure convertibile *k* volte nella stessa unità temporale, sono equivalenti quando

(2.10.23) $$\left(1 + \frac{r}{k}\right)^k = \left(1 - \frac{d}{k}\right)^{-k}$$

Ciò significa che nella stessa frazione di tempo k i due tassi maturano lo stesso interesse, positivo e negativo.

Ad esempio, sempre con *r = 6,00 %* e *k = 4*, risulta *d = 5,91 %*, e per contro occorre che sia *r = 6,09 %* e sempre *k = 4* perché risulti *d = 6,00 %*.

Al limite, per $k \to +\infty$

(2.10.24) $$\delta = \lg_e (1+r) = \lg_e \frac{1}{1-d} = -\lg_e (1-d) = \rho$$

cioè per $r = 0{,}06$ e $d = 0{,}06/1{,}06$ si ha $\delta = \rho = 0{,}05826$, e per $d = 0{,}06$ e $r = 0{,}06\,(1-0{,}06)$ si ha $\delta = \rho = 0{,}6188$ (vedi i valori al limite nelle due tabelle). Quindi in *regime di capitalizzazione continua* i due tassi equivalenti coincidono ed i fattori di capitalizzazione e di sconto valgono rispettivamente $q = e^{\delta}$ e $v = e^{-\delta}$

2.11 Il regime finanziario istantaneo

Nelle 2.10.9 e 2.10.19 abbiamo individuato in δ e ρ i tassi costanti di interesse e di sconto che, maturando da istante a istante in un regime di interesse composto, sono equivalenti a tassi annuali *r* o *d*. Si tratta di un regime finanziario istantaneo, nel quale le variazioni del capitale impiegato sono infinitesime, così come i periodi di posticipazione o anticipazione, e sono disponibili alla fine di tali periodi. Nel paragrafo 1.1 abbiamo chiamato "*interesse*" o "*differenza*" queste variazioni di capitale, che possiamo anche intendere come proporzionali al capitale impiegato in un certo momento t ed al tasso δ e ρ, che pure possiamo intendere non costanti, bensì variabili in funzione del tempo e quindi definibili come tassi istantanei.

Pertanto, esaminando la formazione del montante e considerando un intervallo infinitesimo $t \div t + \Delta t$, interno ad un intervallo più ampio $0 - n$ nel quale sia il montante che il tasso istantaneo siano funzioni continue (ma indipendenti) di *t*, potremo scrivere

$$I = \Delta M(t) = M(t+\Delta t) - M(t) = M'(t) \cdot \Delta(t) + \varepsilon\,\Delta t$$

nella quale intendiamo l'interesse nell'intervallo infinitesimo Δt come differenziale della funzione $M = f(t)$, e dalla quale possiamo escludere l'infinitesimo $\varepsilon \cdot \Delta t$ in quanto di ordine superiore a Δt e con limite $\lim \varepsilon = 0$ per $\Delta t \to 0$. E ripetiamo che l'aumento che subisce in un intervallo Δt il montante *M(t)* accumulato fino al momento *t* può essere ritenuto proporzionale sia a tale capitale accumulato, sia alla grandezza dell'intervallo temporale, sia ancora ad un coefficiente δ (t), che fra poco definiremo. Si tratta di una relazione simile a quella che definisce l'accumulazione I degli interessi nel regime di interesse semplice (2.3.2), con la differenza che questo I è proporzionale non al capitale iniziale, bensì al montante M(t) di quel capitale al tempo *t*.

Pertanto $\qquad I = \Delta M\ (t) = M(t) \cdot \delta\ (t) \cdot \Delta t$

E dividendo per Δt e passando al limite per $\Delta t \to 0$

$$M'(t) = M(t) \cdot \delta(t)$$

equazione differenziale ordinaria di primo ordine con l'incognita nella funzione *M(t)* della variabile *t*, di cui la risoluzione

$$\int \frac{M'(t)}{M(t)}\, dt = \int \delta(t) \cdot dt = \lg_e \left| M\ (t) \right| + c$$

e definendo l'integrale fra *0* e *n* e ricordando di aver sempre posto

per $\quad t = 0 \qquad M = C_0 = 1$, e di conseguenza $\lg_e M(t = 0) = 0$

segue $\qquad \lg_e M\ (0, n) = \int_0^n \delta\ (t)\, dt$

$$M\ (0, n) = e^{\int_0^n \delta\ (t) \cdot dt}$$

e più generalmente, per C_0 qualunque

(2.11.1) $\qquad M\ (n) = C_n = C_0 \cdot e^{\int_0^n \delta\ (t) \cdot dt}$

espressione che ci dà la formazione del montante in *regime di capitalizzazione istantanea*, e che per δ = *costante*

(2.11.2) $\qquad M\ (n) = C_n = C_0 \cdot e^{\delta \int_0^n dt} = C_0 \cdot e^{\delta n}$

nella quale si riconosce la 2.10.10. Si tratta di una legge generale di capitalizzazione, esponenziale crescente e con concavità volta verso l'alto, ed in quanto esponenziale anche scindibile purchè δ sia costante oppure funzione solo del tempo cioè ad una variabile. Chiameremo questo regime come *finanziario istantaneo*. La sua geometria è simile alle esponenziali (con esponente positivo) delle figure 7 e 9.

Le funzioni inverse dell'espressione precedente si ricavano facilmente attraverso i logaritmi.

Segue pure

(2.11.3) $\qquad \delta\ (t) = \dfrac{M'\ (t)}{M\ (t)} = \dfrac{d}{dt} \lg_e M\ (t)$

cioè il *tasso istantaneo di interesse è la derivata logaritmica del montante al tempo t e viene pure chiamato "intensità istantanea di interesse" o "forza di interesse".*

Nel caso dell'interesse composto, per δ = *cost.* e M (0) = 1, a riscontro della 2.10.9 e con lo sviluppo in serie logaritmica della 2.10.12

(2.11.4) $$\delta_{i,c} = \lg_e (1+r) = r - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} + \cdots \cong r - \frac{r^2}{2} \langle \; r$$

(2.11.5) $$r = e^{\delta} - 1 = \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \cdots \cong \delta + \frac{\delta^2}{2} \rangle \; \delta$$

dove, ovviamente, le approssimazioni valgono per valori ordinari, e non elevati, di δ e *r*.

Inoltre, invertendo i limiti dell'integrale nella 2.11.1, si ha

(2.11.6) $$V(n,0) = C_0 = C_n \cdot e^{\int_n^0 \delta(t)\cdot dt} = C_n \cdot e^{-\int_0^n \delta(t)\cdot dt}$$

espressione che ci dà la formazione del capitale scontato in regime finanziario istantaneo, e che per $\delta =$ *costante*

(2.11.7) $$V(n,0) = C_0 = C_n \cdot e^{-\delta n}$$

nella quale si riconosce la 2.10.20, con la successiva precisazione della 2.10.24 che al limite $\delta = \rho$. Si tratta ancora di una legge generale, esponenziale decrescente con concavità rivolta verso l'alto, asintotica alle ascisse, scindibile, di geometria simile alle esponenziali (con esponente negativo) delle figure 7 e 10.

Per analogia con quanto dedotto per δ (t), potremo definire come "*intensità istantanea di sconto*" o *"forza di sconto"*

(2.11.8) $$\rho(t) = -\frac{V'(t)}{V(t)} = -\frac{d}{dt} \lg_e V(t)$$

e per ρ = *cost.* e *V (0) = 1*, a riscontro della 2.10.22

(2.11.9) $$\rho_{i,c} = -\lg_e (1-d) = d + \frac{d^2}{2} + \frac{d^3}{3} + \frac{d^4}{4} + \cdots \cong d + \frac{d^2}{2} \rangle \; d$$

(2.11.10) $$d = 1 - e^{-\rho} = \rho - \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} - \frac{\rho^4}{4!} + \cdots \cong \rho - \frac{\rho^2}{2} \langle \; \rho$$

2.12 La forza di interesse e di sconto

Abbiamo già individuato la stretta corrispondenza fra il regime finanziario ad interesse composto ed il regime finanziario istantaneo. Ne abbiamo pure dedotto che, nel caso più generale della formazione del montante con δ costante, cioè per $\delta(t) = \delta$, questo tasso istantaneo di interesse vale (2.11.4)

(2.12.1) $$\delta_{i,c} = \lg_e(1+r) \cong r - \frac{r^2}{2}$$

e coincide con il già determinato tasso nominale *r''* (2.10.9), che matura da istante a istante e che è equivalente al tasso annuale *r*, nonché costante al variare del tempo. Il ché significa che questa intensità istantanea dell'interesse è sempre la stessa, indipendentemente dal montante del capitale in quell'istante e dal momento d'inizio dell'operazione.

Ora, dalla 2.11.1 intesa come legge generale, e dalla 2.11.3, possiamo determinare l'andamento dell'intensità istantanea di interesse (non necessariamente costante) in funzione dei tempi di operazione, una volta conosciuta l'espressione della formazione del montante, oppure viceversa.

Ad esempio, se assumiamo la legge finanziaria

$$M(t) = C_0(1+rt) \qquad \text{(espressione del regime ad interesse semplice)}$$

avremo che per $M(0) = 1$ e $t = n$

(2.12.2) $$\delta_{i,s}(t) = \frac{r}{1+rn}$$

dalla quale risulta che la forza (uguale a r per n = 0) decresce al crescere del tempo con andamento iperbolico e si estingue all'asintoto. Ciò significa che l'intensità istantanea dell'interesse si indebolisce man mano che il montante cresce; ciò che è anche intuitivo.

E se assumiamo che

$$M(t) = C_0 \frac{1}{1-dn} \qquad \text{(espressione del regime di sconto commerciale)}$$

Avremo, sempre con la 2.11.3 e con la 2.6.3

(2.12.3) $$\delta_{s,c}(t) = \frac{d}{1-dn} = \frac{r}{1-r(n-1)}$$

dalla quale risulta che la forza (uguale a *d* per $n = 0$) cresce ad crescere del tempo ed al diminuire del capitale, e diventa infinitamente grande per $n = \frac{1}{d}$, così come in fig. 11, dove sono messe a confronto le tre leggi analizzate. Questo confronto ci fa notare come la scindibilità di un regime finanziario sia assicurata dalla indipendenza di un'operazione dal momento di un suo inizio o di una sua ripresa, cioè da δ =costante.

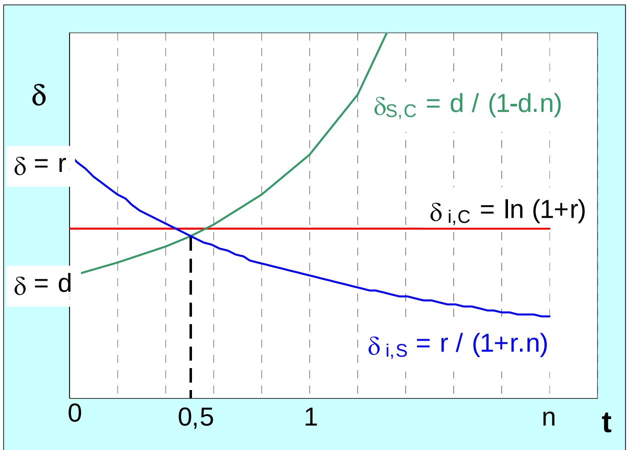


Fig. 11
Andamento della forza di interesse
nei regimi considerati

Ed ancora, se assumiamo al di fuori dei regimi usuali

$$M(t) = C_0\,(1 + kn)^r$$

avremo una intensità $\qquad \delta = \dfrac{k \cdot r}{1 + kn}$

che per $k = 1$ ha un andamento uguale alla $\delta_{i,s}$ della fi. 11, e per $k \neq 1$ se ne discosta.

Per quanto riguarda la forza di sconto nei tre regimi considerati, e ricordando dalla 2.11.8 che

$$\rho\ (t) = -\frac{1}{V(t)} \cdot \frac{d}{dt} V(t)$$

e pure, dalle 2.10.24 e 2.11.9, che in regime di interesse composto il tasso istantaneo di interesse coincide con quello di sconto ed è

$$\rho_{i,c} = -\lg_e (1 - d) = \lg_e (1 + r) = \delta_{i,c}$$

si ottengono facilmente anche le

$$\rho_{i,s}(t) = \frac{r}{1+rn} = \delta_{i,s}(t)$$

$$\rho_{s,c}(t) = \frac{d}{1-dn} = \delta_{s,c}(t)$$

nonché
$$\rho = \frac{kr}{1+kn} = \delta$$

Va inoltre ricordato quanto già fatto osservare al Cap. 1.1 in merito ai tassi di interesse e di sconto *r*, *d*, ed ora anche per i tassi istantanei δ e ρ; per ragioni di omogeneità con i valori dei capitali e degli interessi essi sono numeri puri, senza dimensioni, ma correttamente vanno intesi come il reciproco di un tempo, cioè più che mai come delle intensità.

2.13 Formulario di sintesi

Posticipazione di capitali (saggio d'interesse *r*, tasso di sconto *d*)

Regime	Montante *M=f(t)* per *t(0,n)*	Scindibilità	Tasso istantaneo di interesse δ
Interesse semplice	$C_n = C_0 (1+rn)$	no	$\frac{r}{1+rn}$
Interesse composto	$C_n = C_0 (1+r)^n$	si	$\lg_e (1+r)$
Sconto commerciale	$C_n = \frac{C_0}{1-dn}$	no	$\frac{d}{1-dn}$
Finanziario istantaneo $\delta = r = cost$	$C_n = C_0 \cdot e^{rn}$	si	$\lg_e (1+r)$
$\delta = f(t)$	$M(t) = C_0 \cdot e^{\int_0^n \delta(t) \cdot dt}$	si	$\frac{d}{dt} \lg_e M(t)$

Anticipazione di capitali (saggio di interesse r, tasso di sconto d)

Regime	Valore scontato $M=f(t)$ per $t(0,n)$	Scindibilità	Tasso istantaneo di sconto ρ
Interesse semplice	$C_0 = \frac{C_n}{1+rn}$	no	$\frac{r}{1+rn}$
Interesse composto	$C_0 = \frac{C_n}{(1+r)^n}$	si	$\lg_e (1+r)$
Sconto commerciale	$C_0 = C_n (1-dn)$	no	$\frac{d}{1-dn}$
Finanziario istantaneo $\delta=r=cost$	$C_0 = C_n \cdot e^{-dn}$	si	$-\lg_e (1-d)$
$\delta=f(t)$	$V(t) = C_n \cdot e^{-\int_0^n \rho(t) \cdot dt}$	si	$-\frac{d}{dt} \lg_e V(t)$

2.14 Leggi finanziarie non usuali

In merito alle leggi finanziarie finora esaminate, e che danno la formazione del montante di un capitale o del valore scontato dello stesso in funzione del tempo, osserviamo trattarsi di leggi regolate da funzioni algebriche ad una variabile, considerabili solo per la parte collocata nel primo quadrante di un piano cartesiano, con M op. V eguali all'unità per $t=0$ e $C_0 = 1$, monotòne non decrescenti o rispettivamente non crescenti, derivabili in ogni punto nel periodo di tempo considerato (per $t=0$-n). L'esistenza della derivata ci consente di individuare l'intensità istantanea dell'interesse o dello sconto per ogni n, intensità che potrà essere costante o variabile.

Altre funzioni che leghino fra loro capitali-tassi-tempo possono rappresentare leggi finanziarie, certamente non usuali, purchè soddisfino a quelle proprietà. Tali sono, ad esempio, per montare e per scontare, le già considerate

$$M(t) = C_0 (1+kn)^r \qquad V = C (1+kn)^{-r}$$

con $k \geq 0$, rappresentate nella Fig. 12 in confronto con il regime di interesse composto, e per le quali si verifica facilmente la non scindibilità, e pure che la forza di interesse e di sconto è inizialmente tanto maggiore quanto maggiore è il k, e poi decrescente con il progredire del tempo, con limite 0 per $n \to \infty$.

Va ancora fatto notare che nella Fig. 12 le scale di $M = f(t)$ e di $V = f(t)$ sono differenti, al fine di evidenziare meglio gli andamenti delle funzioni; precauzione già adottata nei grafici dei regimi usuali.

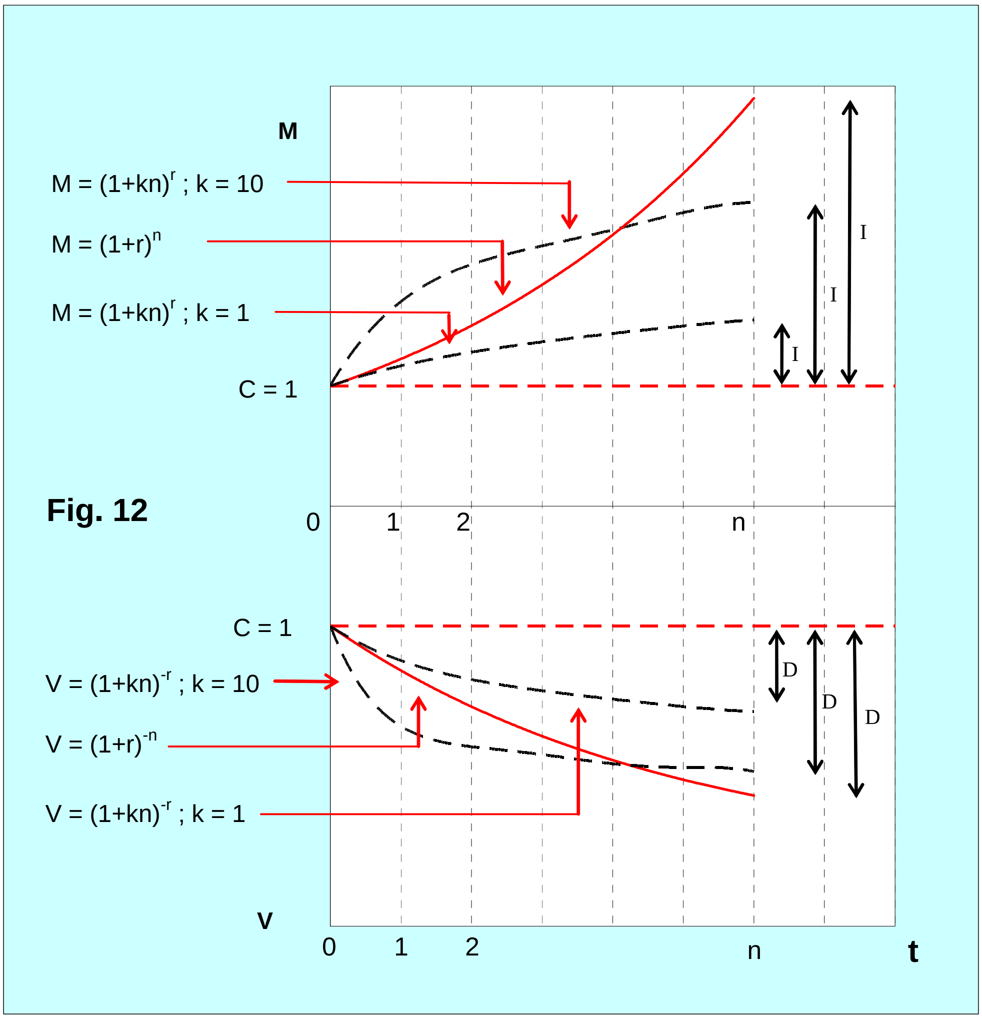


Fig. 12

2.15 L' uso bancario dei regimi usuali

Generalmente le banche utilizzano i regimi lineari per periodi brevi, inferiori all'anno; cioè l'interesse semplice per montare e lo sconto commerciale per scontare. Per periodi più lunghi si utilizza il regime ad interesse composto, sia per montare che per scontare.

Per periodi di più unità temporali n' nonché di frazioni di unità n'' vengono pure utilizzati ambedue i regimi, in modo misto, come segue (Fig. 13)

$$C_{n'+n''} = C_0\, q^{n'} + C_0 q^{n'} \times r \times n'' = C_0\, q^{n'} \left(1 + rn''\right) > C_0\, q^{n'+n''}$$

Ad esempio, al saggio del 5% e per l’esempio già portato in 2.5.4, si ha

$$M = C_0 \times 1.05^4 \left(1 + 0.05 \times \frac{127}{365}\right) = 1.2367 \times C_0 \rangle \quad 1.2363 \times C_0$$

Analogamente per scontare

$$V_{n'+n''} = \frac{C}{q^{n'}}\left(1 - dn''\right) \rangle \frac{C}{q^{n'+n''}}$$

In relazione all’esempio ad 2.6.4:

$$V = C \times \frac{1}{1.05^4}\left(1 - \frac{0.05}{1.05} \times \frac{127}{365}\right) = 0.8091 \times C \;\rangle\; 0.8089 \times C$$

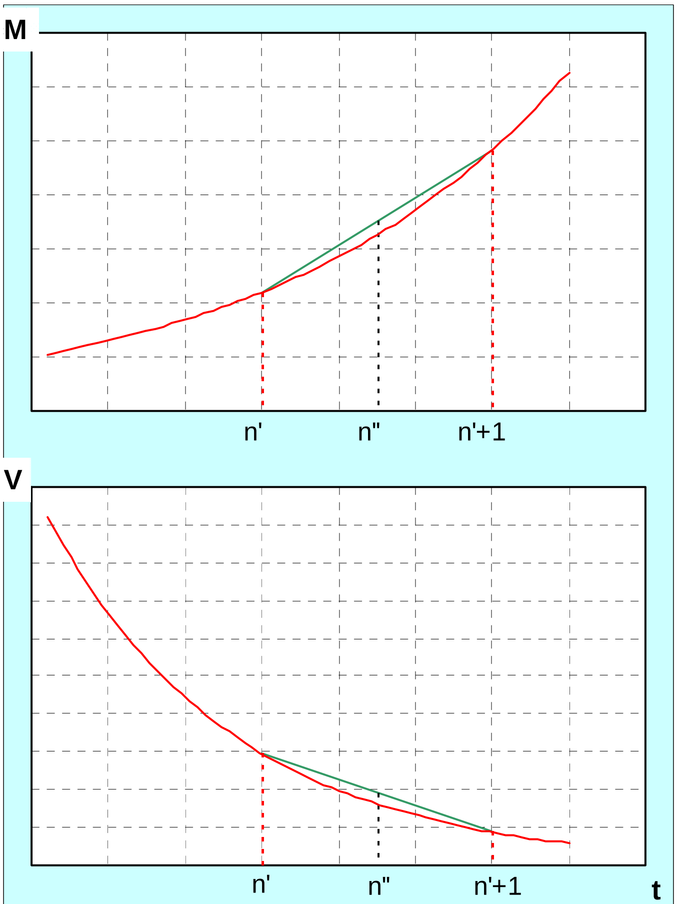


Fig. 13
capitalizzazione M = f(t) e sconto V = f(t)
in regime bancario misto

Nel caso dei conti correnti il regime misto viene generalmente adottato dalle Banche raggruppando giorno per giorno tutte le operazioni di uguale valuta e moltiplicandone il saldo per il numero dei giorni intercorrenti fino al saldo successivo. Alla sommatoria di questi numeri su un periodo prefissato (3, 4, 6, 12 mesi o altro) vengono applicati i tassi creditori e debitori convenuti per tale periodo, determinando gli interessi da portare a valor capitale alla fine dello stesso. Va ancora ricordato che le banche usano un tasso creditorio per il cliente disgiunto da quello debitorio del cliente verso la banca nei casi di sconfinamento dei conti correnti, od in genere nelle somme prestate dalla banca al cliente. Non valgono quindi, nella pratica bancaria, le relazioni 2.4.3 e 2.6.3.

Nel caso di tassi convenuti differenti, ma costanti per sottoperiodi di un periodo più lungo d'impegno, non sarà difficile trovarne i montanti oppure i valori scontati con regimi usuali. E' il caso del negozio detto "a tasso variabile", in cui il tasso potrebbe pure variare istantaneamente con legge $\delta = f(t)$, riportandoci alle espressioni 2.11.1 e 2.11.6.

Va ancora detto che per ciò che riguarda il regime finanziario istantaneo, nell'uso bancario esso non è conosciuto, e pertanto l'esposizione fattane sembra solo teorica. Ciò di fatto non è, in quanto in vari ambiti economici gli incrementi algebrici del capitale sono istantanei, e così pure i loro effetti sul reddito e quindi sulla stima dei valori dei capitali che producono reddito in quel modo. Si pensi ad esempio alle produzioni industriali a ciclo continuo ed alle produzioni culturali in genere.

Capitolo 2°

ESERCIZI E QUESITI

1 - Trovare il saldo al 15 settembre di un anno ordinario (non bisestile) di un conto corrente con tasso creditorio del 4% e debitorio del 8%, con un primo versamento di un capitale 100 al 15 febbraio di quell'anno, un prelevamento di 150 al 15 maggio ed un versamento di 100 al 15 luglio, con valuta al giorno dell'operazione. [R.: 50,65]

2 - Al saggio del 5% annuo, uguale per tutti i regimi, dopo quanto tempo (in anni e decimali di anno) un capitale unitario raddoppia in regime di interesse semplice, composto, sconto commerciale, finanziario istantaneo? A che limite tende il montante in regime di sconto commerciale quando il tempo tende al valore 20 ? [R.: 20,000; 14,207; 10,000; 13,863; ∞]

3 - Qual' è il saggio annuo di interesse al quale è stato impiegato un capitale C_0 = 100 che in 10 anni si è raddoppiato; nei quattro regimi di cui agli esercizi precedenti ? [R.: 0,100; 0,0717; 0,050; 0,0693]

4 – Al tasso di sconto del 8% annuo, uguale per tutti i regimi, di quanto tempo (in anni e decimali di anno) occorre anticipare un capitale unitario perché il suo valore si dimezzi, nei quattro regimi di cui all'esercizio precedente? A che limite tende questo valore quando il tempo *n* tende al valore 12,5 ? [R.: 12,500; 9,006; 6,250; 8,664;0.000]

5 - Qual' è il tasso annuo di sconto per un capitale C = 200 che, anticipato di 10 anni, viene dimezzato; nei quattro regimi di cui agli esercizi precedenti ? [R.: 0,0909; 0,0669; 0,050; 0,0693]

6 - Per quanto tempo (in anni e decimali di anno) due capitali C_1 = 100 e C_2 = 80 debbono essere impiegati rispettivamente al saggio annuo del 5% e del 8%, per ottenere lo stesso montante nei quattro regimi di cui all'esercizio 2 ? [R.: 14,286; 7,921; 5,000; 7,438]

7 - Qual' è il tempo (in anni e decimali di anno) di anticipazione di due capitali C_1 = 100 e C_2 = 80, scontati rispettivamente del tasso annuo del 8% e del 5%, per ottenere lo stesso valore, nei quattro regimi di cui all'esercizio 2 ? [R.: 14,286; 7,921; 5,000; 7,438]

8 - Qual'è la relazione n_1 / n_2 fra i tempi di impiego dello stesso capitale ai saggi rispettivamente r_1 e r_2 (uguali per tutti i regimi) perchè si formi lo stesso montante,nei quattro regimi di cui agli esercizi precedenti ? Cosa si osserva ? [R.: r_2 / r_1 ; $\lg q_2 / \lg q_1$; r_2 / r_1 ; r_2 / r_1]

9 - Qual'è la relazione n_1 / n_2 fra i tempi di anticipazione dello stesso capitale ai tassi rispettivamente del 3% e del 6%, perché si ottenga lo stesso valore scontato,nei quattro regimi di cui agli esercizi precedenti? Cosa si osserva ? [R.: 2,00; 1,97; 2,00; 2,00]

10 - Qual' è il saggio annuo di interesse al quale è stato impiegato un capitale C_0=100 che in 10 anni si è raddoppiato, nei quattro regimi di cui agli esercizi precedenti? [R.: 0,100; 0,0717; 0,050; 0,0693]

11 - Qual è il tasso annuo di sconto per un capitale C=200 che anticipato di 10 anni, viene dimezzato, nei quattro regimi di cui agli esercizi precedenti? [R.: 0,0909; 0,0669; 0,050; 0,0693]

12 - Un capitale *C = 100* viene impegnato in un'operazione finanziaria della durata di due anni al saggio (costante per ogni periodo) del 4% annuo per i primi 6 mesi, del 5% per i secondi 6 mesi, e del 6% per l'anno successivo. Quale sarà il montante al termine dei due anni,nei quattro regimi di cui agli esercizi precedenti ? [R.: 110,50; 110,77: 111,34; 111,07]

13 - Qual'è il saggio di interesse trimestrale equivalente ad un saggio semestrale del 3%, in regime di interesse semplice, composto, sconto commerciale ? [R.: 0,0150; 0,0149; 0,0150]

14 - Un capitale C=100 viene impiegato per 8 anni al tasso del 5% in regime a interesse semplice posticipato oppure in regime istantaneo al tasso $\partial = \dfrac{0{,}05}{170{,}05 \times t}$. Qual' è il montante? Cosa si osserva? [R.: 140,00]

15 - Un capitale C=100 viene impiegato per 4 anni, oppure per 8 anni, al tasso del 5% in regime di interesse composto. Qual è il tasso δ che in regime finanziario istantaneo dà lo stesso montante? Cosa si osserva? [r.: 0,04879]

16 - Un capitale C=100 viene impiegato per 8 anni al tasso del 5% in regime di sconto commerciale, oppure in regime di capitalizzazione istantanea al tasso $\partial = \dfrac{0{,}05}{1 - 0{,}05 \times t}$.

Qual è il montante? Cosa si osserva? [R.: 166,667]

17 - Un capitale C=1000 con valuta fra otto anni scontato all'attualità in regime di interesse semplice (sconto razionale) al tasso del 5%, oppure in regime finanziario istantaneo al tasso $\partial = \dfrac{0{,}05}{1 + 0{,}05 \times t}$. Qual è il valore del capitale scontato? Cosa si osserva? [R.: 714,286]

18 - Un capitale C=1000 con valuta fra 4 anni, oppure 8 anni, viene scontato alla attualità al tasso del 5% in regime di interesse composto. Qual' è il tasso δ che in regime finanziario istantaneo dà lo stesso valore scontato? Cosa si osserva? [R.: 0,04879]

19 - Un capitale C=1000 con valuta fra otto anni viene scontato alla attualità al tasso del 5% in regime di sconto commerciale, oppure in regime finanziario istantaneo al tasso $\partial = \dfrac{0{,}05}{1 - 0{,}05 \times t}$. Qual' è il valore del capitale scontato? Cosa si osserva? [R.: 600,00]

20 - Un capitale viene impiegato al saggio del 2% quadrimestrale. Calcolare la forza d'interesse all'inizio dell'operazione e dopo un anno dall'inizio, in regime finanziario istantaneo e con le leggi finanziarie associate alla formazione del montante in regime di interesse semplice e di sconto commerciale [R.: 5,94%; 6,00%; -5,66%; 6,00%; -6,38%]

Si calcoli anzitutti l'interesse equivalente annuo

21 - Esaminare se la funzione $M(t) = C_0 \left(1 + kn^r\right)$ con $k \geq 0$ può essere una legge finanziaria per la formazione di un montante e, in caso positivo, se è scindibile e quale ne sia l'andamento della forza di interesse [R.: si, no, decrescente]

- Si esamini in quale quadrante è collocata la funzione per $n \geq 0$;

- se per $n = 0 \;\rightarrow\; M = C_0$

- se il montante al tempo $m > 0$ impiegato successivamente fino al tempo $n > m$ è uguale al montante calcolato direttamente da 0 a n;

- quale sia $\delta = \dfrac{M'(t)}{M(t)}$ per n > 0;

- si esamini, anche graficamente, l'influenza del parametro k;

- si osservi, anche graficamente, l'andamento del fascio di curve al variare del saggio *r*.

22 - Esaminare, con le modalità del quesito precedente, se la funzione $V(t) = C\left(1 + kn^r\right)^{-1}$ con *k≥0* può essere una legge finanziaria per la formazione del valore scontato di un capitale. [R.: si, no, decrescente]

23 - Data la legge finanziaria $M(t) = C_0\,(1 + 2n)^r$ con *r = 0,05*, determinare la forza d'interesse all'inizio di una operazione e dopo un anno dall'inizio. [R.: 0,10; 0,033]

24 - Data la legge finanziaria $M(t) = C_0 \cdot e^{0{,}04 + 0{,}08t}$ determinare la forza d'interesse. [R.: 0,08]

25 - Data la legge finanziaria $M(t) = C_0 \times e^{0{,}04 + 0{,}02t + 0{,}01t^2}$ determinare la forza d'interesse all'inizio dell'operazione e dopo un anno dall'inizio. [R.: 0,02; 0,04]

26 - Scrivere la legge di capitalizzazione in regime finanziario istantaneo in cui la forza d'interesse è costante 0,06. [R.: $C_0 \times C^{0{,}06t}$]

27 - Scrivere la legge di sconto in regime finanziario istantaneo in cui la forza di sconto è costante 0,06. [R.: $C_0 \times C^{-0{,}06t}$]

28 - Scrivere la legge di capitalizzazione in regime finanziario istantaneo in cui la forza di interesse è variabile linearmente secondo la $\delta = 0{,}04 + 0{,}02t$.

[R.: $C_0 \times e^{0{,}04t\, +\, 0{,}01t^2}$]

29 - Determinare numericamente la legge finanziaria $M(t) = C_0\,(1 + rt)$ in cui dopo 18 mesi dall'inizio dell'operazione la forza di interesse è 0,06.

[R.: M(t) = C_0 (1+0,0659t)]

30 - Determinare numericamente la legge finanziaria V(t) = C(1-dt) in cui con 18 mesi di anticipazione la forza di sconto è 0,06. [R.: V=C(1-0,055t)]

Capitolo 3°

LE ANNUALITA'

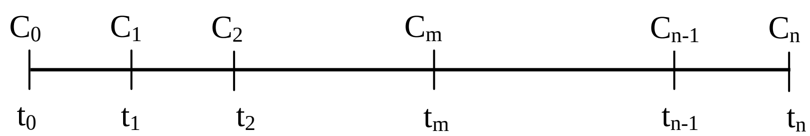
3.1 L'operazione di rendita

Vanno generalmente sotto questo nome delle operazioni finanziarie che mettono in relazione, in condizioni di certezza, un unico importo riferito ad un tempo preciso con una successione di importi esigibili o disponibili ad intervalli temporali solitamente uguali. Gli intervalli sono generalmente (ma non necessariamente) di un anno, da cui il termine tradizionale di *annualità*, mentre gli importi possono essere uguali o diversi tra loro, cioè costanti oppure variabili, e pure di scadenza posticipata o anticipata rispetto l'intervallo di riferimento, se l'operazione finanziaria si rivolge nel discreto e non nel continuo.

L'operazione finanziaria di rendita ha un valore che, in ogni preciso momento, consiste nella *accumulazione finanziaria (A)* dei vari importi (capitali), chiamati *annualità* (a_i), oppure *rate* o *termini*, trattati secondo i regimi di posticipazione e di anticipazione che abbiamo conosciuto al capitolo 2°.

Alla base concettuale dell'argomento sta il principio di equivalenza di valore fra due o più coppie di capitali, associati alla loro valuta e legati da una legge (regime finanziario) che consenta di dare questi giudizi. Diremo quindi che più capitali C_1, C_2, … C_m con valuta in t_1, t_2, … t_m sono equivalenti tra loro quando i loro montanti in un momento $t_n \geq t_m$, oppure il loro valore scontato in un inizio operativo $t_0 \leq t_1$, sono uguali fra loro e quindi scambiabili.

Ovviamente il momento temporale di riferimento può anche essere intermedio tra l'inizio ed il termine dell'operazione, ciò che comporta l'associazione di movimenti di posticipazione e di anticipazione.



Si tratta di scegliere quindi, fra quelli che abbiamo studiato al capitolo 2°, quei regimi finanziari che abbiano reciprocità fra movimenti di posticipazione e di anticipazione e che consentano l'interruzione e la ripresa dell'operazione senza mutare i risultati finali. Abbiamo rilevato che fra i regimi usuali l'unico che gode di entrambe queste caratteristiche è quello esponenziale ad interesse composto, per montare e scontare con tasso costante *r* su periodi finiti, e nel qual abbiamo chiamato con *q* il fattore di capitalizzazione e con $v = q^{-1}$ il fattore di sconto. Nel caso invece che, anziché ad *r* si faccia riferimento ad una intensità costante δ, saranno e^{δ} e rispettivamente $e^{-\delta}$ detti fattori, che abbiamo conosciuto nel regime finanziario istantaneo. Preciseremo ai paragrafi 3.9 e 3.10 le possibilità di impiego degli altri regimi e ci riferiamo pertanto e per ora solo al regime esponenziale predetto

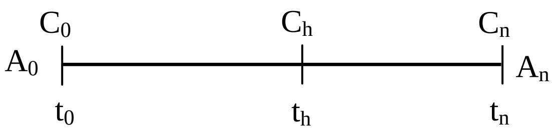
Ritornando alle due coppie di valori $C_1(t_1)$ e $C_2(t_2)$ potremo quindi dire che esse sono equivalenti, e quindi scambiabili, quando

$$C_1 \cdot q^{t_2-t_1} = C_2 \qquad \text{o rispettivamente} \qquad C_1 = C_2 \cdot \nu^{(t_2-t_1)}$$

oppure quando $C_1 \cdot e^{\delta(t_2-t_1)} = C_2$ o rispettivamente $C_1 = C_2 \cdot e^{-\delta(t_2-t_1)}$

Va da sé che alla base di ogni procedimento di stima dei valori gestiti in un'operazione, sia essa su tempi limitati o illimitati, sta l'assunzione di un saggio d'interesse *r*, con particolare attenzione ai problemi di equivalenza qualora si operi su sottoperiodi (par. 2.10), o rispettivamente di una intensità istantanea δ costante, nel caso si operi con il regime istantaneo. L'assunzione di una δ variabile comporta il dover valutare attentamente la scindibilità del regime.

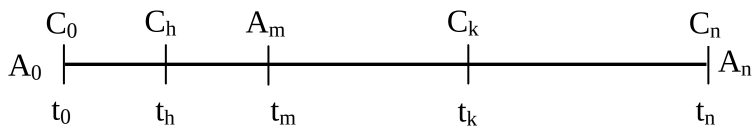
In merito a quanto enunciato all'inizio di questo paragrafo sullo scambio di un unico importo con un insieme di altri importi in successione tra loro, potremo accumulare finanziariamente, in uno dei due termini dell'uguaglianza delle due coppie esaminate, gli altri importi e scrivere:



(3.1.1) $A_n = \sum_0^n {}_h C_h \cdot q^{(t_n-t_h)}$ op $A_n = \sum_0^n {}_h C_h \cdot e^{\delta(t_n-t_h)}$

(3.1.2) $A_0 = \sum_0^n {}_h C_h \cdot \nu^{(t_h-t_0)}$ op $A_0 = \sum_0^n {}_h C_h \cdot e^{-\delta(t_h-t_0)}$

Valgono pure, in un momento t_m intermedio qualunque:



$$(3.1.3) \qquad A_m = \sum_0^m {}_h C_h \cdot q^{(t_m - t_h)} + \sum_{m+1}^n {}_k C_k \cdot \nu^{(t_k - t_m)}$$

$$A_m = \sum_0^m {}_h C_h \cdot e^{\delta(t_m - t_h)} + \sum_{m+1}^n {}_k C_k \cdot e^{-\delta(t_k - t_m)}$$

$$A_m = A_n \cdot \nu^{(t_n - t_m)} = A_0 \cdot q^{t_m}$$

Ne risulterà quindi che il bilancio generale dell'operazione, inteso come differenza tra i due termini dell'uguaglianza, se è nullo all'inizio o al termine dell'operazione sarà nullo pure in qualunque momento intermedio. Va ripetuto inoltre che i vari importi (*annualità*, *rate*, *termini*) potranno essere positivi o negativi, rappresentando così incassi o pagamenti per l'operatore finanziario. L'operazione di rendita avrà quindi un suo valore *V* che sarà la A_0 se riferito all'inizio dell'operazione, A_n se riferito alla fine, oppure ancora A_m se il riferimento viene fatto in un momento intermedio.

Del caso più generale, cioè non solo di rendite discrete che maturano su periodi pure discreti oppure con continuità, bensì di flussi continui di rendita, in particolare se costanti, si dirà al successivo par 3.7.

3.2 Rendita, reddito, valore

Come già detto fin dalla presentazione d'inizio, lo scopo di questa didattica finanziaria è quello di fornire gli elementi soprattutto matematici per affrontare i problemi estimativi in fase di stima analitica e formulare giudizi di valore su beni o investimenti che hanno determinate reddittività.

Con queste premesse va quindi ricordato che nell'estimo, sia esso civile o rurale, o industriale o speciale, il concetto di *reddito* è legato ad un flusso di ricchezza derivante da una attività economica che può avere tanti aspetti. La produttività di un bene, intesa come differenza fra prodotto lordo e spese di produzione, porta alla determinazione del suo *valore* attraverso l'accumulazione, in un certo momento, di tutte le sue annualità di reddito.

Altro significato ha invece estimativamente il concetto di *rendita*, da intendersi sempre come flusso di ricchezza, ma indipendentemente dalla produttività del bene. Sono tali ad esempio la rendita fondiaria, la rendita edilizia, ed in generale tutti i plusvalori di un bene provocati dalla sua irriproducibilità o da altri fattori, analizzati e discussi nei testi di Estimo.

Ci rendiamo conto che questi concetti estimativi contrastano con il significato che abbiamo dato all'operazione di rendita nel paragrafo precedente, ma ci è parso doveroso affrontare questo chiarimento per non lasciare incertezze su quanto esporremo in seguito. Continueremo quindi a chiamare *operazione di rendita* l'operazione finanziaria nel suo complesso, e con *annualità (o rate o termini)* la successione degli importi, disponibili alle *scadenze t.*

Cogliamo l'occasione per precisare un altro concetto che riteniamo molto importante. Ogni valutazione estimativa basata su metodo analitico e non su stima sintetica storica, guarda alla produttività futura del bene, cioè alla serie di annualità di reddito ipotizzabili in modo più certo possibile per il futuro, per un tempo da considerare limitato od anche illimitato. Fa parte della statistica, e non della matematica delle finanze, l'analisi dei valori rilevati nel passato, senza nulla togliere all'importanza di questi valori per ipotizzare quelli da lanciare nel futuro.

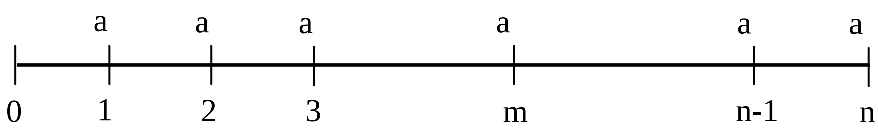
3.3 Le annualità

Per semplicità letterale ed immediatezza di comprensione chiameremo con a_1, a_2,…, a_m,…, a_{n-1}, a_n le varie *annualità (o termini, o rate)* dell'operazione, generalmente discrete e ad intervallo temporale costante di un anno (*periodo*) e chiameremo *valore V* dell'operazione l'accumulazione finanziaria delle varie annualità in un momento qualunque dell'operazione stessa. Se l'intervallo non è di un anno (minore o maggiore), ma per esigenze di bilancio od altre il riferimento debba essere quello, sappiamo ormai come trattare l'equivalenza dei tassi.

Esamineremo quindi le seguenti tipologie di annualità

$$\text{annualità}\left[\begin{array}{l}\text{limitate}\\(\text{temporanee})\\ \\ \text{illimitate}\\(\text{perpetue})\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}\text{periodiche}\left[\begin{array}{l}\text{posticipate}\\ \text{anticipate}\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}\text{costanti}\\ \\ \text{variabili}\left[\begin{array}{l}\text{con legge}\\ \text{senza legge}\\ \text{con periodicità}\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \\ \text{continue}\left[\begin{array}{l}\text{flusso costante}\\ \text{flusso variabile}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

3.4 Annualità periodiche costanti, limitate



Come già detto, si tratta di valori uguali che si presentano a intervalli di tempo costanti e generalmente di anno in anno. Se questi valori maturano alla fine di ogni intervallo (o periodo) per una serie limitata di *n* intervalli, sarà semplice trovarne l'accumulazione finanziaria in *n* oppure in *0*, oppure ancora in un qualunque *m*, montando o scontando ogni valore nell'ambito del regime esponenziale che abbiamo già giustificato, e salvo quanto si dirà ai par. 3.9 e 3.10 per gli altri regimi. Sarà quindi, in base alle 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 e ricordando l'espressione della somma dei termini in una progressione geometrica di ragione *q* oppure ν

(3.4.1) $A_n = a \cdot q^{n-1} + a \cdot q^{n-2} + ... a \cdot q + a = a\left(1 + q + q^2 + ... q^{n-2} + q^{n-1}\right) = a \cdot \frac{q^n - 1}{r}$

(3.4.2) $A_0 = a \cdot \nu + a \cdot \nu^2 + ... a \cdot \nu^{n-1} + a \cdot \nu^n = a \cdot \nu\left(1 + \nu + \nu^2 + ... \nu^{n-1}\right) =$

$$= a \cdot \nu \frac{\nu^n - 1}{\nu - 1} = a \frac{1 - \nu^n}{r} = a \frac{q^n - 1}{r \cdot q^n} = \frac{A_n}{q^n}$$

(3.4.3) $A_m = \frac{A_n}{q^{n-m}} = A_n \cdot q^{m-n} = A_0 \cdot q^m$

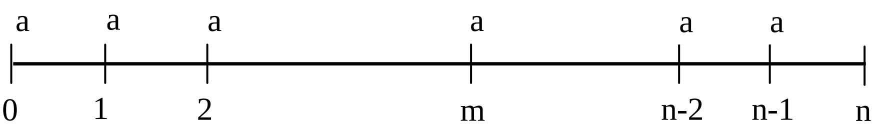
Si può calcolare la A_n (3.4.1) anche più semplicemente, considerando che gli interessi annuali $C_0 \cdot r$ di un capitale iniziale C_0, impiegato in regime d'interesse composto, si accumulano all'anno n come una serie di annualità costanti per dare il valore già ricavato nella 2.5.3

$$I = C_0\left(q^n - 1\right) = \frac{C_0 \cdot r \cdot \left(q^n - 1\right)}{r} = a\frac{q^n - 1}{r} = A_n$$

o similmente, per la 3.4.2, considerando che un capitale iniziale C_0, impiegato come detto sopra, è equivalente al valore attuale della accumulazione degli interessi oltre al valore scontato dello stesso C_0 che viene restituito al termine dell'operazione.

Risulta inoltre: $\frac{A_n}{A_0} = q^n \qquad \frac{A_0}{A_n} = \nu^n$

Qualora i valori considerati si presentino anticipatamente in ogni intervallo di tempo considerato, non sarà difficile riconoscere che i valori precedenti si riferiscono all'accumulazione dell'anno n-1, per cui:



(3.4.4) $$A_n^x = A_n \cdot q = a \cdot \frac{q^n - 1}{r} \cdot q$$

(3.4.5) $$A_0^x = A_0 \cdot q = a \cdot \frac{1 - \nu^n}{r} \cdot q = a \cdot \frac{q^n - 1}{r \cdot q^{n-1}} = \frac{A_n^x}{q^n}$$

(3.4.6) $$A_m^x = A_n^x \cdot q^{m-n} = A_0^x \cdot q^m$$

3.5 Annualità periodiche costanti, illimitate (perpetue)

Non ha significato economico parlare di accumulazione o montante all'anno n di una serie di annualità quando n tende all'infinito ($A_n = \infty$). Ha significato invece chiederci quale sia il valore attuale di quella accumulazione, cioè il valore attuale di un bene capace di fruttare un reddito costante a al termine di ogni anno (o di ogni periodo cui riferiamo il tasso d'interesse). Il caso è tipico nei beni naturali. Pertanto dalla 3.4.2

(3.5.1) $$C = A_0 = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{q^n - 1}{r \cdot q^n} = \frac{a}{r} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{q^n}\right) = \frac{a}{r}$$

Allo stesso risultato si può giungere dalla $A_0 = a \cdot \dfrac{1-\nu^n}{r}$ ricordando che per $0 < \nu < 1$ il $\lim\limits_{n\to\infty} \nu^n = 0$, o, più semplicemente, chiedendosi quale sia quel capitale che, impegnato al saggio *r*, dà annualmente un reddito *a*

$$C \cdot r = a \to C = A_0 = \frac{a}{r}$$

La semplice espressione trovata per la capitalizzazione dei redditi perpetui viene usata nell'estimo anche quando *n*, pur non potendo dirsi infinito, è molto grande, ad esempio nel reddito di fabbricati in buon stato di conservazione. La Fig. 14, elaborata per un reddito unitario, è significativa in proposito; si osserva pure che le differenze diminuiscono temporalmente più velocemente con l'aumentare del saggio d'interesse.

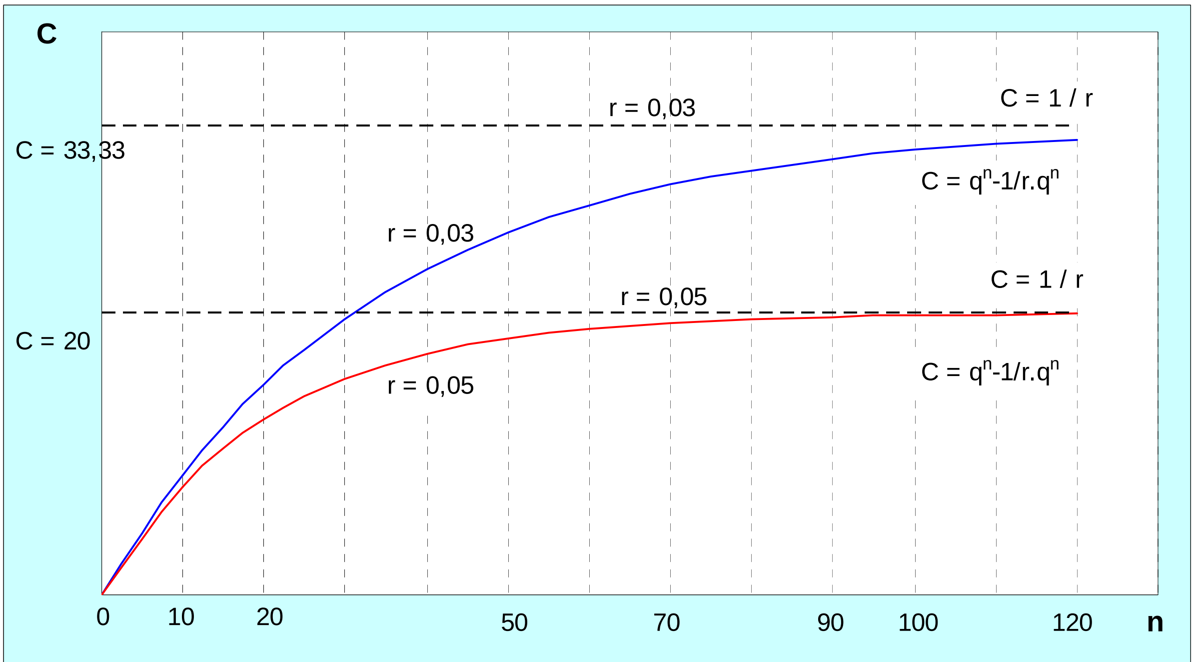


Fig. 14

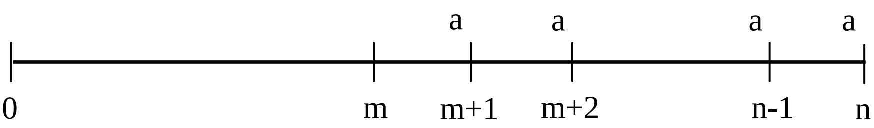
Confronto fra: $C = a / r$ e $C = a.(q^n-1)/(r.q^n)$ per $a = 1$

Nel caso delle annualità anticipate (inconsueto) l'espressione 3.5.1 va moltiplicata per il fattore di capitalizzazione *q*.

Non trattiamo, né qui né in seguito, i casi in cui r = 0 o addirittura $-1 < r < 0$ in quanto finanziariamente inconsueti.

3.6 Annualità periodiche differite

Nel caso in cui intercorra un certo tempo m dal momento della valutazione all'inizio della sequenza delle annualità, non sarà difficile riconoscere le espressioni seguenti, valide per annualità posticipate.



(3.6.1) $$A_n = a \cdot \frac{q^{n-m} - 1}{r}$$

(3.6.2) $$A_m = a \cdot \frac{1 - \nu^{n-m}}{r} = a \cdot \frac{q^{n-m} - 1}{r \cdot q^{n-m}} = \frac{A_n}{q^{n-m}}$$

(3.6.3) $$A_0 = A_n \cdot \nu^n = A_m \cdot \nu^m$$

e nel caso di annualità illimitate

(3.6.4) $$A_0 = \frac{a}{r} \cdot \nu^m$$

Nel caso di annualità anticipate vale quanto già detto al capitolo precedente.

3.7 Annualità frazionate e continue

Abbiamo già più volte chiarito che gli intervalli di tempo cui si riferiscono i valori che abbiamo chiamato annualità non sono necessariamente di un anno; il periodo può essere qualunque, minore o maggiore, purché venga associato ad un suo tasso unitario. Pertanto, anche se frazioniamo l’anno in k sottoperiodi uguali, ed associamo a ciascuno di essi un valore $\frac{a}{k}$ nonché un tasso r_k, e operiamo sempre in regime di interesse composto, potremo utilizzare le 3.4.1 e 3.4.2 riferentesi a n periodi annuali, per determinare il montante o accumulazione finale dell'operazione, oppure il suo valore iniziale.

(3.7.1) $$A_n^{'} = \frac{a}{k} \cdot \frac{(1 + r_k)^{nk} - 1}{r^k}$$

(3.7.2) $$A_0^{'} = \frac{a}{k} \cdot \frac{1 - \nu_k^{nk}}{r_k} = \frac{a}{k} \cdot \frac{(1 + r_k)^{nk} - 1}{r_k \cdot (1 + r_k)^{nk}} = \frac{A_n^{'}}{q_k^{nk}}$$

dove $\quad q_k = 1 + r_k \quad$ e $\quad \nu_k = q_k^{-1}$

Con considerazioni analoghe a quelle del paragrafo 3.5 si potrà scrivere, nel caso $n \to \infty$ che il valore capitale di un bene capace di dare k volte in un anno un reddito $\frac{a}{k}$, posticipato ed al tasso r_k, sarà

(3.7.3) $\quad C' = \frac{a}{k} \cdot \frac{1}{r_k}$

Sono di facile deduzione tutti gli altri casi, di annualità anticipate e/o differite. Abbiamo marcato con l'apostrofo le due somme economiche A_n' e A_0' per porle a confronto con le espressioni corrispondenti delle annualità intere 3.4.1 e 3.4.2 . Infatti, prefissato il tasso r_k riferito ad ogni sottoperiodo, possiamo calcolare il tasso equivalente annuale r' (o del periodo intero) dalla 2.10.3 .

$$r' = (1 + r_k)^k - 1$$

ed inoltre, notando che $r_k = \frac{r''}{k}$, essendo r'' il tasso annuale nominale convertibile k volte (par. 2.10)

(3.7.1') $$A_n' = \frac{a}{k} \cdot \frac{(1+r_k)^{nk} - 1}{r_k} = \frac{a}{k} \cdot \frac{(1+r')^n - 1}{r''/k} = a \cdot \frac{(1+r')^n}{r'} \cdot \frac{r'}{r''} = A_{n,r'} \cdot \frac{r'}{r''}$$

ed analogamente

(3.7.2') $$A_0' = a \cdot \frac{(1+r')^n - 1}{r' \cdot (1+r')^n} \cdot \frac{r'}{r''} = a \cdot \frac{1 - \nu'^n}{r'} \cdot \frac{r'}{r''} = A_{0,r'} \cdot \frac{r'}{r''}$$

(3.7.3') $$C' = \frac{a}{r'} \cdot \frac{r'}{r''}$$

Cioè le espressioni del montante e del valore attuale di una serie di annualità frazionate possono ottenersi da quelle fondamentali, calcolate con il tasso annuale equivalente

r', moltiplicate per il fattore di correzione $\frac{r'}{r''}$. Il fattore di correzione diventa $\frac{r'}{r''} \cdot r'^{1/k}$ nel caso di disponibilità anticipata di una frazione *1/k* della $\frac{a}{k}$.

Va ancora chiarito che la funzione $\frac{1}{k}$, generalmente inferiore all'unità, potrebbe essere anche superiore, anche se il caso è finanziariamente inconsueto. Non sarà difficile anche in questo caso calcolare le accumulazioni volute.

Ad esempio, per una annualità di valore *1*, corrisposta trimestralmente con il relativo interesse del *2%*, e quindi con un interesse annuale equivalente del *8,24 %*, su di un impegno di 10 anni si otterrà un valore attuale di

$$A_0^{'} = \frac{1-1{,}02^{-40}}{4 \cdot 0{,}02} = \frac{1{,}0824^{10}-1}{0{,}0824 \cdot 1{,}0824^{10}} \cdot \frac{0{,}0824}{0{,}08} = 6{,}838$$

Ed inoltre, ricordando che in regime esponenziale di capitalizzazione continua, cioè con $k \to \infty$, il tasso annuale convertibile $r''(\infty) = \delta = ln(1+r)$, il fattore di capitalizzazione è e^{δ} e quello di sconto $e^{-\delta}$, si potranno scrivere le seguenti espressioni per una serie limitata di annualità in cui il flusso del reddito $\varphi(t)$ è costante e continuo (*rendita continua*), e tale che

$$\int_0^1 \varphi(t) \cdot dt = \int_m^{m+1} \varphi(t) \cdot dt = \varphi$$

(3.7.4) $$\overline{A}'_n = A_n \cdot \frac{r'}{\delta} = \varphi \cdot \frac{e^{\delta n}-1}{\delta}$$

(3.7.5) $$\overline{A}'_0 = A_0 \cdot \frac{r'}{\delta} = \varphi \cdot \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}$$

e per le annualità illimitate

(3.7.6) $$\overline{A}'_0 = \overline{C}' = \frac{\varphi}{\delta}$$

Nell'esempio di cui sopra, ma con reddito disponibile con continuità, con valore complessivo e costante 1 ogni anno ed il tasso del 8%, si ha un valore attuale 6,975, che diventa 12,994 se anche $n \to \infty$.

Si tratta quindi di un flusso continuo di reddito, positivo o negativo nonché costante o variabile, indicato finanziariamente anche come "*rendita continua*" nel quale la funzione $\varphi(t)$ rappresenta *l'intensità* o *densità* del flusso per ogni unità di tempo (giorno, mese, anno, ecc.), per il quale si può calcolare il montante o il valore attuale (oppure il valore in un momento intermedio) con l’applicazione dei regimi finanziari che conosciamo, anche con quello finanziario istantaneo.

Nel caso di questo paragrafo, cioè dell’applicazione del regime ad interesse composto, le espressioni 3.7.4 e 3.7.5 sono ricavabili anche dalle 3.1.1 e 3.1.2 per un flusso continuo $\varphi(t)$, portando la sommatoria in integrale.

(3.7.7) $\quad \overline{A}_n = \int_0^{t_n} \varphi(t) \cdot e^{\int_t^{t_n} \delta(t) \cdot dt} \cdot dt$ e per δ = cost. e φ = cost.

$$= \varphi \cdot \int_0^{t_n} e^{\delta \cdot (t_n - t)} \cdot dt = \varphi \cdot e^{\delta \cdot t_n} \left| -\frac{1}{\delta} \cdot e^{-\delta t} \right|_0^{t_n} = \varphi \cdot \frac{e^{\delta \cdot t_n} - 1}{\delta}$$

che per n periodi di capitalizzazione diventa la 3.7.4.

(3.7.8) $\quad \overline{A}_0 = \int_0^{t_n} \varphi(t) \cdot e^{-\int_0^{t} \delta(t) \cdot dt} \cdot dt$ e come sopra

$$= \varphi \cdot \int_0^{t_n} e^{-\delta \cdot t} \cdot dt = \varphi \cdot \left| -\frac{1}{\delta} \cdot e^{-\delta \cdot t} \right|_0^{t_n} = \varphi \cdot \frac{1 - e^{-\delta \cdot t_n}}{\delta}$$

che per $t_n = n$ diventa la 3.7.5.

3.8 Le funzioni inverse

Ci riferiamo alle espressioni principali 3.4.1, 3.4.2, e 3.5.1, essendo le successive deducibili da quelle. Nessuna difficoltà per trovare il valore dell'annualità a a servizio dell'ammortamento di un debito iniziale $C = A_0$, o della costituzione di un capitale A_n, in funzione del numero n delle rate e con un tasso r.

(3.8.1) $\quad a = A_n \cdot \dfrac{r}{q^n - 1} = A_0 \dfrac{r \cdot q^n}{q^n - 1} = A_0 \cdot \dfrac{r}{1 - \nu^n}$

(3.8.2) per annualità illimitate $\quad a = A_0 \cdot r = C \cdot r$

Nessuna difficoltà neppure per il numero n in funzione degli altri termini dati.

(3.8.3) $\quad n = \dfrac{lg(a + A_n \cdot r) - lg\, a}{lg\, q} = \dfrac{lg\, a - lg(a - A_0 \cdot r)}{lg\, q}$ (ove $a > A_0 \cdot r$)

Ovviamente nel caso delle annualità illimitate $n = \infty$

Il numero *n* è però generalmente non intero, bensì decimale, per cui occorre provvedere o variando l'importo dell'annualità per difetto o per eccesso, oppure aggiungendo o togliendo all'ultima rata un importo complementare.

Ad es. per l'ammortamento di un debito iniziale *C = 1000* in rate annuali di importo *100* al tasso del *5%* si ha:

$$n = \frac{lg100 - lg(100 - 1000 \cdot 0{,}05)}{lg1{,}05} = 14{,}207$$

Con 14 annualità si porta in ammortamento un capitale attuale $C' = 100 \cdot \frac{1 - 1{,}05^{-14}}{0{,}05} = 989{,}86$; la rimanenza, di valore attuale $C - C' = 10{,}14$, portata a montante dopo *14* anni, rappresenta un importo di *20,08* da aggiungersi all'ultima rata.

La variazione della rata annuale, con *n = 14*, porterebbe invece ad una nuova rata

$$a' = 1000 \cdot \frac{0{,}05}{1{,}1 - 1{,}05^{-14}} = 101{,}02$$

Gli aggiustamenti possono venir fatti anche altrimenti, secondo usanze di vari Istituti di Credito, ma senza difficoltà. Analogamente, con le conoscenze fin qui acquisite, si tratta il problema della costituzione di un capitale dopo *n* anni.

La ricerca del saggio *r*, alla base di un'operazione finanziaria d'ammortamento a capitale iniziale $C = A_0$ a rate costanti e posticipate, su anni *n*, porta ad analizzare la 3.4.2

$$\frac{A_0}{a} = \nu + \nu^2 + ...\nu^n$$

dove , con $r = 0 \rightarrow \nu = 1 \rightarrow \frac{A_0}{a} = n$, e dove $\lim_{r \to \infty} \frac{1 - \nu^n}{r} = 0$

La grafica della $r = f\left(\frac{A_0}{a}\right)$ per un *n* prefissato è quella di figura 15 che, per quanto si dirà, viene usualmente utilizzata inversamente (figura 16), e che ci dice trattarsi di funzione monotòna decrescente e quindi con un solo valore di *r* per ogni ascissa A_0/a. Operando come segue

$$\frac{A_0}{a} = \frac{1-\nu^n}{r} = \frac{\left[1-(1+r)^{-n}\right]\cdot(1+r)^n}{r\cdot(1+r)^n} = \frac{(1+r)^n-1}{r\cdot(1+r)^n}$$

si giunge all'equazione

$$\frac{A_0}{a}\cdot r\cdot(1+r)^n-(1+r)^n+1=0$$

di grado *n+1* rispetto l'incognita *r*, che può venir ridotta a grado *n*, che dà una soluzione positiva per ogni $n>\frac{A_0}{a}$, ma che nel caso concreto di $n>3$ non riusciamo a risolvere algebricamente. Si ricorre pertanto a metodi approssimati, di tipo iterativo oppure di interpolazione, come di seguito.

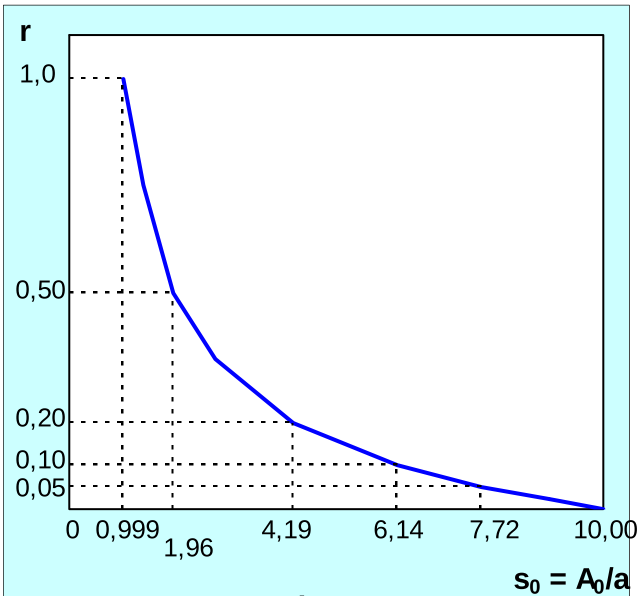


Fig. 15

r = f (A_0 / a) per n = 10

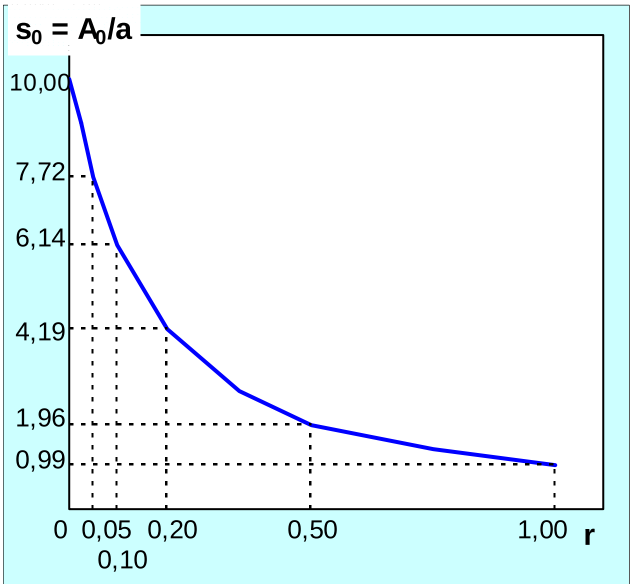


Fig. 16

A_0 / a = f (r) per n = 10

Posto per semplicità $s_0=\frac{A_0}{a}=\frac{q^n-1}{r\cdot q^n}=\frac{1-\nu^n}{r}$, cioè considerata una annualità unitaria, se non si conosce con esattezza il valore della funzione $r=f\left(s_0\right)$ in un punto, si può adottare il procedimento iterativo di progressivo bilanciamento dei due termini dell'uguaglianza

$$r = \frac{1-\nu^n}{s_0}$$

partendo dai valori approssimati forniti da espressioni, fra le quali la più conosciuta è

(3.8.4) $$r \cong h \cdot \frac{12-(n-1)\cdot h}{12-2\cdot(n-1)\cdot h} \qquad \text{con} \qquad h = \left(\frac{n}{s_0}\right)^{\frac{2}{n+1}} - 1 \qquad \text{(Baily)}$$

Ad esempio, si vuol calcolare il tasso relativo ad una serie di *10* annualità, posticipate e costanti, costituenti un capitale di valore attuale *1000*, con annualità di valore *125*, per cui $s_0 = \frac{A_0}{a} = \frac{1000}{125} = 8$

Con l'espressione di Baily si ottiene $r \cong 0{,}04277$, per cui possiamo iniziare l'iterazione con $r = 0{,}04$. Segue

$$r_1 = \frac{1-1{,}04^{-10}}{8} = 0{,}040554; \qquad r_2 = \frac{1-(1+r_1)^{-10}}{8} = 0{,}041003;$$

$$r_3 = \frac{1-(1+r_2)^{-10}}{8} = 0{,}041364$$

e così via, ad esempio fino $r_{10} = \frac{1-(1+r_9)^{-10}}{8} = 0{,}042444$

che ci consente di ottenere, in definitiva, $r = 0{,}0425$ che ci porta a

$$C = A_0 = 125 \cdot \frac{1-1{,}0425^{-10}}{8} = 1000{,}36$$

Dalle iterazioni osserviamo che $r < r_1 < r_2 < r_3 ...$ (ma potrebbe essere $r > r_1 > r_2 ...$) e che le differenze $\left|r_m - r_{m-1}\right|$ vanno ovviamente diminuendo progressivamente. L'approssimazione successiva è però lenta. Possiamo invece ricorrere ad altri metodi, quali i metodi di interpolazione, per i quali occorre però conoscere il valore della funzione in almeno un punto, non distante da quello per il quale si vuole conoscere il tasso.

Ripresa la funzione

$$s_0 = f(r) = \frac{1-\nu^n}{r} = \frac{q^n - 1}{r \cdot q^n} \qquad \text{con} \qquad f'(r) = \frac{r \cdot n \cdot q^{-n-1} - 1 + q^{-n}}{r^2}$$

se conosciamo con esattezza il valore della funzione in un punto *a*, possiamo (metodo di Newton) tracciare la tangente alla curva in quel punto (fig. 17), che avrà l'equazione

$$\frac{y - y_a}{x - x_a} = f'(a)$$

e da questa trarre il valore della *y*, data la *x*. oppure, inversamente, della *x* data la *y*.

Riprendendo l'esempio già discusso per il procedimento iterativo, e quindi con A_0 = 1000, a = 125, n = 10, ed avvalendosi di una y_a certa = 7,913 corrispondente ad un r = 0,045, nonché con f'(a) = -38,905, otteniamo per y = s_0 = 8,00 una x' = r' = 0,04276, graficamente in difetto rispetto il valore cercato

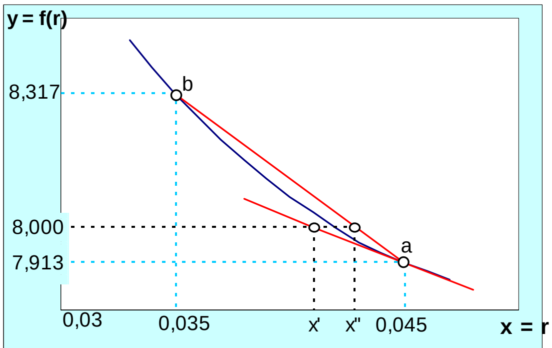


Fig. 17
y = f (r) per n = 10

Se conosciamo con esattezza il valore della funzione anche in un altro punto *b*, tale che $x_b < x < x_a$, con y_b = 8,317 corrispondente a x_b = 0,035, possiamo ricorrere all'interpolazione lineare (fig. 17)

$$\frac{y - y_a}{x - x_a} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

Dalla quale x" = h" = 0,04285, valore chiaramente in eccesso rispetto quello cercato, ma che potrebbe venir affinato mediante la valutazione dell'errore dell'approssimazione, cosa che però esula dalle finalità nostre. Osserviamo invece che la media aritmetica delle due interpolazioni, una in difetto ed una in eccesso, cioè il valore

$$r = \frac{0{,}04276 + 0{,}04285}{2} = 0{,}042805$$

ci dà un valore capitale $\qquad C_0 = 125 \cdot \frac{1 - 1{,}042805^{-10}}{0{,}042805} = 999{,}85$

che è più vicino a quello atteso C = A_0 = 1000 rispetto quello ottenuto con le *10* iterazioni.

Se si cerca invece il tasso r conoscendo il montante A_n all'anno n di una accumulazione di annualità costanti e posticipate a (caso non più complicato del precedente) si potrà analizzare questa volta la 3.4.1

$\frac{A_n}{a} = 1 + q + q^2 + ...q^{n-2} + q^{n-1}$ dove, ancora, con $r = 0 \rightarrow \frac{A_n}{n} = n$, e dove $\lim_{r \to \infty} \frac{q^n - 1}{r} = 0$

L'andamento della $r = f\left(\frac{A_n}{a}\right)$ è pure quello della fig. 15. L'equazione che se ne trae è questa volta di grado $n+1$, ma sempre di difficile soluzione algebrica per $n > 3$. Conviene ancora ricorrere ai metodi approssimati.

- o iterando progressivamente i termini dell'uguaglianza $r = \frac{q^n - 1}{s_n}$ (con $s_n = \frac{A_n}{a}$), partendo da valori forniti da espressioni quali $r \cong \frac{1}{n} - \frac{a}{A_n}$;

- oppure, se si conoscono con esattezza i valori della funzione $s_n = f(r) = \frac{q^n - 1}{r}$ in uno o due punti (comprendenti nel loro intervallo il valore r cercato), ricorrendo al metodo di Newton o all'interpolazione lineare, ed eventualmente mediando i due valori trovati.

Nel caso delle annualità costanti ed illimitate di cui alla 3.5.1 la ricerca del tasso è banale. Negli altri casi esposti delle annualità anticipate, oppure differite o frazionate, la ricerca del tasso r porta ad espressioni complicate e quindi, a maggior ragione, al ricorso ai metodi approssimati descritti in questo paragrafo.

3.9 L'impiego dei regimi a interesse semplice e dello sconto commerciale

Fin dal primo paragrafo di questo capitolo abbiamo giustificato le ragioni per le quali abbiamo impiegato il regime esponenziale dell'interesse composto per i movimenti di posticipazione e di anticipazione dei termini costituenti le serie numeriche delle espressioni fondamentali 3.4.1, 3.4.2, 3.5.1 . Purtuttavia, per operazioni di breve durata, vale anche l'uso di mercato dell'impiego degli altri due regimi descritti nel cap. 2, in particolare di quello lineare dell'interesse semplice per posticipare, e di quello lineare dello sconto commerciale per anticipare.

L'accumulazione di *n* annualità periodiche costanti e posticipate, in regime di *interesse semplice* porta alla successione

$$(3.9.1) \quad A_{n,i,s} = a + (a + a \cdot r) + (a + a \cdot 2r) + ... + [a + a \cdot (n-1) \cdot r] = a \cdot n \cdot \left[1 + \frac{r}{2} \cdot (n-1)\right]$$

Si tratta di una serie divergente, che può venir quindi impiegata solo per piccoli valori di *n*. Ad esempio, l'accumulazione di *8* rate, del valore di *125* ciascuna, trimestrali posticipate al saggio del *1,5%*, porta ad un valore di *1052,50* contro il valore vicino di *1054,10* all'interesse composto. Ma se le rate sono *40* (*10* anni) il valore di *6462,50* si discosta notevolmente dal *6783,49* calcolato con la 3.4.1.

L'impiego del regime non lineare dello *sconto commerciale* per montare, con la limitazione già precisata al par. 2.8, porta alla serie divergente.

$$(3.9.2) \quad A_{n,s,c} = \frac{a}{1-d} + \frac{a}{1-2d} + \frac{a}{1-3d} + ... + \frac{a}{1-nd} = a \cdot \left(\frac{1}{1-d} + \frac{1}{1-2d} + ... + \frac{1}{1-nd}\right)$$

Nell'esempio sopra proposto con d = 0,015 il valore dell'accumulazione è *1073,85* per le *8* rate, ma è improponibile per tempi lunghi.

Analoghe considerazioni possono venir fatte per i *regimi di sconto*. L’impiego del regime non lineare dello *sconto razionale* conduce alla

$$(3.9.3) \quad A_{0,i,s} = a \cdot \left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+2r} + ... + \frac{1}{1+nr}\right)$$

serie convergente con limite *0.*

Ad esempio, il valore attuale di un bene con prezzo di vendita 1000, che viene ceduto contro 8 cambiali da 125 l'una a scadenza posticipata ogni 3 mesi (la prima scadenza dopo 3 mesi dalla cessione e l'ultima al termine dei 2 anni) ed al tasso di sconto del 1,5% per rata, risulta di 937,74 contro il valore vicino di 935,74 all'interesse composto.

Col regime lineare dello *sconto commerciale* il valore attuale si ottiene dalla serie divergente

$$(3.9.4) \quad A_{0,s,c} = a \cdot (1-d) + a \cdot (1-2d) + ... + a \cdot (1-nd) = a \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n+1}{2} \cdot d\right)$$

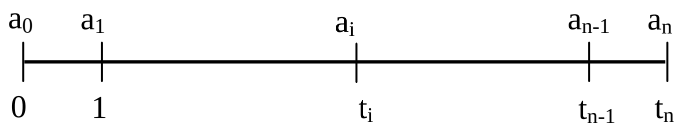
che per l’esempio di cui sopra porta ad un valore scontato di 932,50.

Nel caso di annualità anticipate, seguendo la stessa metodologia, si giunge alle seguenti espressioni per i due regimi lineari di maggior uso bancario

$$(3.9.1')\quad A^{x}_{n,i,s} = a \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n+1}{2} \cdot r\right)$$

$$(3.9.4')\quad A^{x}_{0,s,c} = a \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n-1}{2} \cdot d\right)$$

Ed ancora, nel caso di annualità ancora periodiche ma variabili, così come nel seguente schema



le espressioni precedenti si generalizzano nelle seguenti, per rate posticipate

$$(3.9.5)\quad A_{n,i,s} = \sum_{1}^{n}{}_{i}\, a_i \cdot \left[1 + r \cdot (t_n - t_i)\right]$$

$$(3.9.6)\quad A_{n,s,c} = \sum_{1}^{n}{}_{i}\, a_i \cdot \frac{1}{1 - d \cdot t_i}$$

$$(3.9.7)\quad A_{0,i,s} = \sum_{1}^{n}{}_{i}\, a_i \cdot \frac{1}{1 + r \cdot t_i}$$

$$(3.9.8)\quad A_{0,s,c} = \sum_{1}^{n}{}_{i}\, a_i \cdot (1 - d \cdot t_i)$$

Come già detto, negli usi bancari e per tempi brevi viene pure applicato un regime misto, lineare sia per montare che per scontare, con tassi annuali di interesse r e di sconto d uguali, oppure differenti, oppure ancora con tasso di sconto pari al saggio d'interesse scontato. Per tali regimi, anche nel caso di k sottoperiodi dell'anno, ma per n rate costanti e posticipate, sarà

$$(3.9.9)\quad A_{n,i,s} = a \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{r}{k}\right)$$

$$(3.9.10)\quad A_{0,s,c} = a \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n+1}{2} \cdot \frac{d}{k}\right)$$

Inoltre, in analogia con quanto dedotto al par. 3.7 per il regime esponenziale, nel caso di un flusso di reddito costante e continuo, tale che

$$\int_{0}^{1} \varphi(t) \cdot dt = \int_{m}^{m+1} \varphi(t) \cdot dt = \varphi$$

e per una serie limitata di termini (non consideriamo il caso della perpetuità per le ragioni più volte dette sui regimi lineari, e senza logicamente distinguere fra anticipazione e posticipazione) nonché avendo posto $t_n = n$, sarà per il regime a interesse semplice

$$(3.9.11)\quad \overline{A}_{n,i,s} = \int_0^{t_n} \varphi \cdot \left[1 + (t_n - t) \cdot r\right] \cdot dt = \varphi \cdot \left| t_n + t_n^2 \cdot r - \frac{t^2}{2} \cdot r \right|_0^{t_n} =$$

$$= \varphi \cdot n \cdot \left(1 + n \cdot r - \frac{n}{2} \cdot r\right) = \varphi \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n}{2} \cdot r\right)$$

Nell'esempio già proposto per la 3.9.1 degli 8 termini, nei quali però il reddito si rende disponibile con continuità, con valore complessivo e costante 125 ogni trimestre ed al tasso dello 0,015, sarà $\overline{A}_{n,i,s} = 1060{,}00$, valore ovviamente maggiore di quello determinato con la 3.9.1. Osserviamo che, essendo il regime lineare ed il flusso costante, calcolare il montante attraverso un trimestre oppure su un altro periodo (purché col tasso equivalente), non cambia il risultato.

Analogamente, per il montante in regime di sconto commerciale

$$(3.9.12)\quad \overline{A}_{n,s,c} = \int_0^{t_n} \varphi \cdot \frac{1}{1 - d \cdot (t_n - t)} \cdot dt = \int_0^{t_n} \varphi \cdot \frac{1}{1 - dn + dt} \cdot dt$$

e osservando che per $f(t) = 1 - dn + dt \rightarrow f'(t) = d$

$$= \frac{\varphi}{r} \cdot \left| ln(1 - dn + dt) \right|_0^{t_n} = -\frac{\varphi}{r} \cdot ln(1 - dn)$$

Nell'esempio considerato $\overline{A}_{n,s,c} = 1065{,}28$

Per i procedimenti di anticipazione sarà

$$(3.9.13)\quad \overline{A}_{0,i,s} = \int_0^{t_n} \varphi \cdot \frac{1}{1 + rt} \cdot dt = \frac{\varphi}{r} \int_0^{t_n} \frac{r}{1 + rt} \cdot dt = \frac{\varphi}{r} \cdot \left| ln(1 + rt) \right|_0^{t_n} =$$

$$= \frac{\varphi}{r} \cdot ln(1 + rt_n) = \frac{\varphi}{r} \cdot ln(1 + rn)$$

$$(3.9.14)\quad \overline{A}_{0,s,c} = \int_0^{t_n} \varphi \cdot (1 - dt) \cdot dt = \varphi \cdot \left| t - \frac{t}{2} \cdot d \right|_0^{t_n} = \varphi n \cdot \left(1 - \frac{n}{2} \cdot d\right)$$

Nell'esempio di cui sopra $\overline{A}_{0,i,s} = 944{,}41$ e $\overline{A}_{0,s,c} = 940{,}00$.

3.10 L’impiego del regime finanziario istantaneo

Già al paragrafo 2.11 abbiamo esaminato le variazioni, positive e negative, che subisce un capitale che si muove sulla retta del tempo per frazioni infinitesime, variazioni proporzionali al montante del capitale in ogni istante e ad un *tasso istantaneo* δ, che abbiamo chiamato anche *intensità istantanea di interesse* e che abbiamo definito come *derivata logaritmica del montante al tempo t*.

Abbiamo ricavato le espressioni per la posticipazione e l’anticipazione di un capitale singolo, espressioni che con i simboli di questo capitolo sono

(3.10.1) $C_n = C_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t_n} \delta(t)dt}$ (3.10.2) $C_0 = C_n \cdot e^{\int_{t_n}^{t_0} \delta(t)dt} = C_n \cdot e^{-\int_{t_0}^{t_n} \delta(t)dt}$

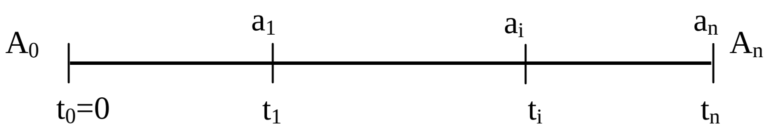
e che per δ = costante e $t_n - t_0 = n$ si riducono alle

(3.10.1’) $C_n = C_0 \cdot e^{\delta n}$ (3.10.2’) $C_0 = C_n \cdot e^{-\delta n}$

espressioni che abbiamo ricavato pure nel regime ad interesse composto, frazionando *k* volte il tasso annuo *r* e portando $k \to \infty$. Abbiamo pure dedotto che in questo caso $\delta = lg_e(1+r)$, essendo quindi δ il tasso istantaneo equivalente a quello annuo *r*. La stretta analogia fra i due regimi, già rilevata al par. 2.12, non ci deve però far pensare ad una equivalenza concettuale, in quanto nell’interesse composto il frazionamento esiste in quanto esiste un periodo da frazionare, cui riferiamo il tasso *r*, mentre nel finanziario istantaneo i periodi finiti nascono dall’accumularsi di tempi infinitesimi.

Va ancora ricordato che il finanziario istantaneo è un regime scindibile in quanto esponenziale, ma purché il tasso istantaneo sia costante oppure variabile in funzione solo del tempo, cioè purché la δ sia funzione ad una sola variabile. Inoltre, al paragrafo 2.12 abbiamo pure individuato l’equazione del tasso istantaneo, variabile in funzione del tempo, nei regimi ad interesse semplice ed a sconto commerciale, nonché indicato le modalità per la verifica dell’esistenza di altri regimi finanziari e del loro tasso istantaneo.

Non sarà quindi difficile riconoscere le seguenti espressioni per le accumulazioni, finale o iniziale, di *n* annualità discrete e posticipate, sia per $\delta = f(t)$ che per δ = cost.



$$(3.10.3)\quad A_n = \sum_{1}^{n}{}_i\, a_i \cdot e^{\int_{t_i}^{t_n} \delta(t)\cdot dt} \qquad\qquad (3.10.4)\quad A_0 = \sum_{1}^{n}{}_i\, a_i \cdot e^{-\int_{0}^{t_i} \delta(t)\cdot dt}$$

$$(3.10.3')\quad A_n = \sum_{1}^{n}{}_i\, a_i \cdot e^{\delta\cdot(t_n - t_i)} \qquad\qquad (3.10.4')\quad A_0 = \sum_{1}^{n}{}_i\, a_i \cdot e^{-\delta\cdot t_i}$$

Se, sempre per δ = cost., le annualità sono d'uguale valore ed intervallate pure in maniera costante

$$(3.10.5)\quad A_n = a \cdot \sum_{1}^{n}{}_i\, e^{\delta\cdot(t_n - t_i)} = a \cdot \left(1 + e^{\delta} + e^{2\delta} + \ldots + e^{(n-1)\cdot\delta}\right) = a \cdot \frac{e^{n\delta} - 1}{e^{\delta} - 1}$$

$$(3.10.6)\quad A_0 = a \cdot \sum_{1}^{n}{}_i\, e^{-\delta\cdot t_i} = A_n \cdot e^{-n\cdot\delta} = a \cdot \frac{1 - e^{-n\delta}}{e^{\delta} - 1}$$

espressioni che per δ = ln(1+r), e quindi per $e^{ln(1+r)} = 1 + r = q$, si ritrovano nelle 3.4.1 e 3.4.2

$$(3.10.5')\quad A_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{r} \qquad\qquad (3.10.6')\qquad A_0 = a \cdot \frac{q^n - 1}{r \cdot q^n} = a \cdot \frac{1 - \nu^n}{r}$$

Se invece assumiamo $\delta = \dfrac{r}{1 + r \cdot t} = f(t)$

$$(3.10.7)\quad A_n = \sum_{1}^{n}{}_i\, a_i \cdot e^{\int_{t_i}^{t_n} \frac{r}{1+r\cdot t}\cdot dt} = \sum_{1}^{n}{}_i\, a_i \cdot e^{\left|ln(1+rt)\right|_{t_i}^{t_n}} = \sum_{1}^{n}{}_i\, a_i \cdot \frac{1 + r \cdot t_n}{1 + r \cdot t_i}$$

$$(3.10.8)\quad A_n = \sum_{1}^{n}{}_i\, a_i \cdot e^{-\int_{0}^{t_i} \frac{r}{1+r\cdot t}\cdot dt} = A_n \cdot e^{-\int_{0}^{t_n} \frac{r}{1+r\cdot t}\cdot dt} = \sum_{1}^{n}{}_i\, a_i \cdot \frac{1}{1 + r \cdot t_i}$$

Espressioni che, per annualità periodiche e di uguale valore, diventano

$$(3.10.7')\quad A_n = a \cdot (1 + r_n) \cdot \sum_{1}^{n}{}_i \frac{1}{1 + r_i}$$

$$(3.10.8')\quad A_0 = a \cdot \sum_{1}^{n}{}_i \frac{1}{1 + r_i} = A_n \cdot \frac{1}{1 + r_n}$$

E se invece assumiamo $\delta = \dfrac{r}{1 - r \cdot t} = f(t)$

$$(3.10.9)\quad A_n = \sum_{1}^{n}{}_i\, a_i \cdot e^{\int_{t_i}^{t_n} \frac{r}{1-r\cdot t} dt} = \sum_{1}^{n}{}_i\, a_i \cdot e^{-\left|ln(1-rt)\right|_{t_i}^{t_n}} = \sum_{1}^{n}{}_i\, a_i \cdot \frac{1 - r \cdot t_i}{1 - r \cdot t_n}$$

(3.10.10) $A_0 = \sum_1^n {}_i a_i \cdot e^{-\int_0^{t_i} \frac{r}{1-r\cdot t}\cdot dt} = A_n \cdot e^{-\int_0^{t_n} \frac{r}{1-r\cdot t}\cdot dt} = \sum_1^n {}_i a_i \cdot (1 - r \cdot t_i)$

(3.10.9’) $A_n = \frac{a}{1 - r \cdot t_n} \cdot \sum_1^n {}_i (1 - r \cdot t_i)$

(3.10.10’) $A_0 = a \cdot \sum_1^n {}_i (1 - r \cdot t_i) = A_n \cdot (1 - r \cdot t_n)$

Gli altri casi, per annualità anticipate o differite, o per valori in momenti intermedi, sono ricavabili con le cognizioni finora acquisite. Va pure ricordato che le leggi finanziarie, e quindi il tasso istantaneo δ, possono avere anche altre espressioni, purché rispondenti a certi requisiti, come precisato al par. 2.14 e proposto negli esercizi relativi.

L’applicazione del regime finanziario istantaneo ai flussi di reddito continui di intensità variabile $\varphi(t)$ porta alle espressioni

(3.10.11) $$\overline{A}_n = \int_0^{t_n} \varphi(t) \cdot e^{\int_t^{t_n} \delta(t)\cdot dt} \cdot dt$$

(3.10.12) $$\overline{A}_0 = \int_0^{t_n} \varphi(t) \cdot e^{-\int_0^{t} \delta(t)\cdot dt} \cdot dt$$

che per φ = cost. e δ = cost. diventano

(3.10.11’) $$\overline{A}_n = \varphi \cdot \int_0^{t_n} e^{\delta\cdot(t_n - t)} \cdot dt = \varphi \cdot e^{\delta\cdot t_n} \left| -\frac{1}{\delta} \cdot e^{-\delta\cdot t} \right|_0^{t_n} = \varphi \cdot \frac{e^{\delta\cdot t_n} - 1}{\delta}$$

(3.10.12’) $$\overline{A}_0 = \varphi \cdot \int_0^{t_n} e^{-\delta\cdot t} \cdot dt = \varphi \left| -\frac{1}{\delta} \cdot e^{-\delta\cdot t} \right|_0^{t_n} = \varphi \cdot \frac{1 - e^{-\delta\cdot t_n}}{\delta}$$

espressione già ricavata al par. 3.7 per annualità frazionate con $k \to \infty$.

Se φ = cost. ma $\delta = f(t) = \frac{r}{1 + r \cdot t}$

(3.10.13) $$\overline{A}_n = \varphi \cdot \int_0^{t_n} e^{\int_t^{t_n} \frac{r}{1+r\cdot t}\cdot dt} \cdot dt = \varphi \cdot \int_0^{t_n} e^{\left| ln(1+r\cdot t) \right|_t^{t_n}} \cdot dt =$$

$$= \varphi \cdot \frac{1 + r \cdot t_n}{r} \cdot \int_0^{t_n} \frac{r}{1 + r \cdot t} \cdot dt = \varphi \cdot \frac{1 + r \cdot t_n}{r} \cdot ln(1 + r \cdot t_n)$$

(3.10.14) $$\overline{A}_0 = \varphi \cdot \int_0^{t_n} e^{-\int_0^{t} \frac{r}{1+r\cdot t}\cdot dt} \cdot dt = \overline{A}_n \cdot e^{-\int_0^{t_n} \frac{r}{1+r\cdot t}\cdot dt} = \frac{\varphi}{r}\cdot ln\left(1+r\cdot t_n\right)$$

e se φ = cost. ma $\delta = f\left(t\right) = \frac{r}{1-r\cdot t}$

(3.10.15) $$\overline{A}_n = \varphi \cdot \int_0^{t_n} e^{\int_t^{t_n} \frac{r}{1-r\cdot t}\cdot dt} \cdot dt = \varphi \cdot \int_0^{t_n} e^{-\left|ln\left(1-r\cdot t\right)\right|_t^{t_n}} \cdot dt =$$

$$= \frac{\varphi}{1-r\cdot t_n}\cdot \int_0^{t_n} \left(1-r\cdot t\right)\cdot dt = \varphi\cdot \frac{t_n}{1-r\cdot t_n}\cdot\left(1-r\cdot\frac{t_n}{2}\right)$$

(3.10.16) $$\overline{A}_0 = \varphi \cdot \int_0^{t_n} e^{-\int_0^{t} \frac{r}{1-r\cdot t}\cdot dt} \cdot dt = \overline{A}_n \cdot e^{-\int_0^{t_n} \frac{r}{1-r\cdot t}\cdot dt} = \varphi\cdot t_n\cdot\left(1-r\cdot\frac{t_n}{2}\right)$$

3.11 Annualità variabili in progressione aritmetica

Il caso di una serie di annualità periodiche posticipate nella quale la differenza *d* (positiva o negativa) fra un termine ed il precedente è costante, può venir rappresentata come di seguito, anche come somma di serie disaggregate

	a	a+d	a+2d		a+(n-2)d	a+(n-1)d
0	1	2	3		n-1	n
	a	a	a	……………	a	a
		d	d	……………	d	d
			d	……………	d	d
					d	d
						d

Limitando il problema al caso usuale di annualità di non breve durata, cioè impiegando solamente il regime a interesse composto sia per montare che per scontare, potremo scrivere per l'accumulazione all'anno *n*

(3.11.1) $$A_n = a\cdot\frac{q^n-1}{r} + d\cdot\frac{q^{n-1}-1}{r} + d\cdot\frac{q^{n-2}-1}{r} + ... + d\cdot\frac{q^2-1}{r} + d\cdot\frac{q^1-1}{r} =$$

$$= a\cdot\frac{q^n-1}{r} + \frac{d}{r}\cdot\left(q^{n-1}+q^{n-2}+...+q^2+q^1+q^0-n\right) =$$

$$= a\cdot\frac{q^n-1}{r} + \frac{d}{r}\cdot\frac{q^{n-1}\cdot q-1}{q-1} - \frac{n\cdot d}{r} = \left(a+\frac{d}{r}\right)\cdot\frac{q^n-1}{r} - n\cdot\frac{d}{r}$$

E per il valore della serie all'anno *0*

(3.11.2) $$A_0 = \frac{A_n}{q^n} = \left(a + \frac{d}{r} \right) \cdot \frac{q^n - 1}{r \cdot q^n} - \frac{n \cdot d}{r \cdot q^n}$$

Notiamo che per d = 0 ritroviamo ovviamente le 3.4.1 e 3.4.2, che per *d* negativo la progressione decresce fino ad annullare l'annualità per $n = \frac{a}{d} + 1$, che per le annualità anticipate basterà moltiplicare i valori trovati per il fattore di capitalizzazione *q*, e che per a =1 e d = 1 si può scrivere la 3.11.2 nella forma chiamata "Increasing Annuity"

(3.11.2') $$(I_a)_n = \frac{s_0^x - n \cdot \nu^n}{r} \qquad \text{con} \qquad s_0^x = \frac{q^n - 1}{r \cdot q^n} \cdot q$$

espressione che dà il valore attuale di una serie di annualità crescenti secondo i numeri naturali 1, 2, 3, …n, e che si presta a molte applicazioni.

Per il valore della serie all'anno intermedio *m* basterà applicare la 3.4.3. Inoltre se la serie progredisce illimitatamente, non sarà difficile riconoscere che

(3.11.3) $$C = A_0 = \lim_{n \to \infty} \left[\left(a + \frac{d}{r} \right) \cdot \frac{q^n - 1}{r \cdot q^n} - \frac{n \cdot d}{r \cdot q^n} \right] = \frac{a}{r} + \frac{d}{r^2} = \frac{1}{r} \cdot \left(a + \frac{d}{r} \right)$$

(3.11.3') $$(I_a)_\infty = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} = \frac{q}{r^2}$$

essendo in questo caso come già ricordato al par. 3.5, improponibile economicamente il valore infinito di A_n.

Ad esempio, una serie di *8* annualità posticipate, in progressione aritmetica crescente secondo la serie dei numeri naturali (prima annualità uguale all'unità) e con un saggio d'interesse del *5%* annuo, porta ai seguenti valori

$$A_n = 40{,}531 \qquad A_0 = C = (I_a)_\infty = 27{,}433 \qquad A_4 = 33{,}345$$

e se la progressione è illimitata $A_0 = C = (I_a)_\infty = 420{,}00$

Nel caso delle annualità variabili, in genere, la ricerca delle funzioni inverse porta a calcoli algebrici complessi e poco agevoli. Conviene procedere con iterazioni e interpolazioni, utilizzando eventualmente prontuari di tavole finanziarie.

L'applicazione dei due regimi lineari per montare e per scontare, di cui al paragrafo precedente, porta al calcolo della sommatoria delle *n* serie di rate in cui si articola il quadro dell'operazione, o meglio al calcolo del montante (o del valore attuale) delle annualità costanti di *n* termini e della sommatoria dei montanti delle (n-1) colonne delle differenze

$$A_{n,i,s} = a \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n-1}{2} \cdot r\right) + \sum_{1}^{n-1}{}_i\, i \cdot d \cdot \left[1 + (n-1-i) \cdot r\right] =$$

$$= a \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n-1}{2} \cdot r\right) + d \cdot \left[1 + (n-1) \cdot r\right] \cdot \sum_{1}^{n-1}{}_i\, i - r \cdot \sum_{1}^{n-1}{}_i\, i^2$$

e ricordando, dagli sviluppi del binomio, che la somma dei quadrati dei primi *n* numeri naturali è $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$, in definitiva

(3.11.4) $$A_{n,i,s} = a \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n-1}{2} \cdot r\right) + d \cdot \left\{\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \left[1 + (n-1) \cdot r\right] - r \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (2n-1)}{6}\right\}$$

che, con a = 1 e d = 1 si riduce a

(3.11.4') $$A_{n,i,s} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + r \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n-1)}{6}$$

Con analogo procedimento, per le rate anticipate e per il regime lineare di sconto sia con rate posticipate che anticipate (trascuriamo lo sconto razionale e la capitalizzazione in regime di sconto)

(3.11.5) $$A^x_{n,i,s} = a \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n+1}{2} \cdot r\right) + d \cdot \left[\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot (1 + n \cdot r) - r \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (2n-1)}{6}\right]$$

(3.11.5') $$A^x_{n,i,s} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + r \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6}$$ (per a = d = 1)

(3.11.6) $$A_{0,s,c} = a \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n+1}{2} \cdot r\right) + d \cdot \left[\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot (1 - r) - r \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (2n-1)}{6}\right]$$

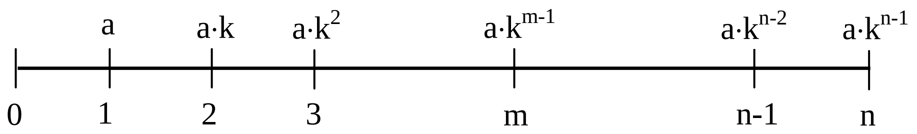
(3.11.6') $$A_{0,s,c} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} - r \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$ (per a = d = 1)

(3.11.7) $$A^x_{0,s,c} = a \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n-1}{2} \cdot r\right) + d \cdot \left[\frac{n \cdot (n-1)}{2} - r \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (2n-1)}{6}\right]$$

(3.11.7') $$A^x_{0,s,c} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} - r \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n-1)}{3}$$ (per a = d = 1) dove, nelle 3.11.4-3.11.7 abbiamo indicato il tasso di sconto ancora con *r* per evitare confusioni al lettore. Con riferimento all'esempio già proposto per l'interesse composto, questi valori sono rispettivamente $A_{n,i,s} = 40{,}2$, $A^*_{n,i,s} = 42{,}0$, $A_{0,s,c} = 25{,}8$, $A^*_{0,s,c} = 27{,}6$.

3.12 Annualità variabili in progressione geometrica

Il caso, più che altro teorico, di una serie di annualità periodiche posticipate nella quale il rapporto *k* (maggiore o minore dell'unità) fra un termine ed il suo precedente è costante, può venir così rappresentato



In regime di interesse composto potremo scrivere

$$A_n = a \cdot q^{n-1} + a \cdot k \cdot q^{n-2} + a \cdot k^2 \cdot q^{n-3} + ... + a \cdot k^{n-2} \cdot q + a \cdot k^{n-1} = a \cdot \sum_{m=1}^{n} k^{m-1} \cdot q^{n-m}$$

progressione geometrica di ragione *k/q*, e pertanto

$$A_n = a \cdot \frac{k^{n-1} \cdot k \cdot q^{-1} - q^{n-1}}{k \cdot q^{-1} - 1}$$ e moltiplicando numeratore e denominatore per *q*

(3.12.1) $$A_n = a \cdot \frac{k^n - q^n}{k - q}$$

e per il valore all'anno *0* oppure all'anno intermedio *m*

(3.12.2) $$A_0 = \frac{A_n}{q^n} = \frac{a}{q^n} \cdot \frac{k^n - q^n}{k - q} = a \cdot \nu \cdot \frac{1 - (k \cdot \nu)^n}{1 - k \cdot \nu} = a \cdot \frac{1 - (k \cdot \nu)^n}{q - k}$$

(3.12.3) $$A_m = \frac{A_n}{q^{n-m}} = A_n \cdot q^{m-n} = A_0 \cdot q^m$$

Notiamo che per k = 1 ritroviamo ancora le 3.4.1 - 3.4.2 - 3.4.3, che per k < 1 la progressione decresce e tende a *0* per $n \to \infty$, e che per k = q le espressioni precedenti perdono significato, ma che in tal caso

(3.12.1') $$A_n = n \cdot a \cdot q^{n-1} = n \cdot a \cdot k^{n-1}$$ (3.12.2') $$A_0 = n \cdot a \cdot \nu = \frac{n \cdot a}{k}$$

Se le annualità sono anticipate le espressioni precedenti vanno moltiplicate per il fattore di capitalizzazione.

Inoltre se la serie progredisce illimitatamente, ed essendo sempre positivi sia *k* che *ν*, dalle 3.12.2 e 3.12.2' avremo tre casi

(3.12.4') per $k \cdot \nu < 1 \; (k < q)$ $\lim\limits_{n\to\infty} a \cdot \nu \cdot \dfrac{1-(k \cdot \nu)^n}{1-k \cdot \nu} = \dfrac{a \cdot \nu}{1-k \cdot \nu} = \dfrac{a}{q-k}$

essendo in questo caso $\lim\limits_{n\to\infty} (k \cdot \nu)^n = 0$

(3.12.4'') per $k \cdot \nu = 1 \quad (k = q)$ $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a \cdot \nu = \infty$

(3.12.4''') per $k \cdot \nu > 1 \quad (k > q)$ $\lim\limits_{n\to\infty} a \cdot \nu \cdot \dfrac{1-(k \cdot \nu)^n}{1-k \cdot \nu} = \infty$

in quanto il numeratore è un infinito di ordine superiore a qualsiasi numero razionale, e quindi al denominatore.

Ad esempio, una serie di *8* annualità posticipate, in progressione geometrica crescente, con la prima annualità uguale all'unità, con k = 1,1 e con saggio d'interesse del *20%* annuo, porta ai seguenti valori

A_n = 21,562 A_0 = 5,014 A_4 = 10,398

e se la progressione è illimitata

A_0 = 10,000

Se invece k = 1,1 ma r = 10%

A_n = 15,589 A_0 = 7,272 A_4 = 10,648 $A_0 \; per \, n \to \infty = \infty$

ed ancora, se k = 1,1 ma r = 5%

A_n = 13,322 A_0 = 9,017 A_4 = 10,960 $A_0 \; per \, n \to \infty = \infty$

L'applicazione dei due regimi lineari di cui al par. 3.9 porta, nel caso di rate periodiche e posticipate, alle sommatorie

$$A_{n,i,s} = \sum_{1}^{n}{}_i \, a \cdot k^{i-1} \cdot [1 + (n-i) \cdot r] \qquad A_{0,s,c} = \sum_{1}^{n}{}_i \, a \cdot k^{i-1} \cdot (1 - i \cdot r)$$

che, dopo laboriosi sviluppi, si esplicitanno in

$$(3.12.5)\quad A_{n,i,s} = \frac{a}{k-1} \cdot \left[k^n - 1 - r \cdot \left(n - \frac{k^n - 1}{k-1} \right) \right]$$

$$(3.12.5')\quad A^x_{n,i,s} = \frac{a}{k-1} \cdot \left[k^n - 1 - r \cdot \left(n - k \cdot \frac{k^n - 1}{k-1} \right) \right]$$

$$(3.12.6)\quad A_{0,s,c} = \frac{a}{k-1} \cdot \left[k^n - 1 + r \cdot \left(\frac{k^n - 1}{k-1} - n \cdot k^n \right) \right]$$

$$(3.12.6')\quad A^x_{n,i,s} = \frac{a}{k-1} \cdot \left[k^n - 1 + r \cdot \left(k \cdot \frac{k^n - 1}{k-1} - n \cdot k^n \right) \right]$$

dove, in analogia alle 3.11.4 e 3.11.5 abbiamo indicato il tasso di sconto con r. Con riferimento all'esempio delle 8 annualità, con a = 1, k = 1,1, r = 0,05 si ottengono i valori 13,154 – 13,726 – 8,579 – 9,151.

3.13 Annualità variabili senza legge matematica

Non sempre è possibile calcolare il valore capitale di un bene attraverso la valutazione di una successione di redditi che si presentino con annualità costanti o variabili come nei paragrafi precedenti. In particolare nell'estimo rurale, soprattutto nella stima delle colture da frutto e da legno, ma anche nell'estimo industriale, il bene presenta spese concentrate d'impianto e redditi iniziali negativi decrescenti (avviamento), poi positivi crescenti, poi crescenti costanti, ed infine positivi decrescenti fino ad annullarsi per vetustà od obsolescenza, oppure fino a quella che viene chiamata *età del tornaconto* di cui si dirà ai paragrafi successivi.

L'andamento dei redditi, riferiti solitamente a scadenze annuali posticipate (bilanci) può quindi rappresentarsi come in Fig. 18, in cui il grafico è in realtà costituito da una successione di punti corrispondenti alle scadenze annuali, che abbiamo idealmente congiunto con una linea continua nella quale si possono riconoscere le quattro fasi anzidette che

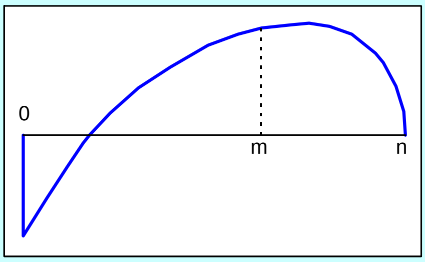


Fig. 18

nell'estimo rurale vengono chiamate *fase d'infanzia, di adolescenza, di maturità e di vecchiaia*.

Si tratta di annualità dette *variabili con legge naturale*, mentre in altri tipi di beni, tipicamente i fabbricati o altre opere analoghe, i redditi variano generalmente di non molto intorno a valori medi economici di cui diremo ai paragrafi successivi.

Nessuna difficoltà, con le conoscenze fin qui acquisite, per trovare l'accumulazione economica della progressione delle annualità, e quindi il valore del bene in stima analitica, all'inizio o al termine del ciclo, oppure in un momento intermedio. Basterà stabilire intelligentemente il tasso di capitalizzazione ed usare le espressioni 3.1.1 - 3.1.2 - 3.1.3, utilizzando il regime ad interesse composto per le ragioni più volte dette.

Purtuttavia, con la considerazione che per la capitalizzazione dei redditi occorre guardare alla produttività futura del bene, certamente basata sulle statistiche del passato o sull'andamento di beni consimili, ma sempre guardando in avanti nel tempo, sarà talvolta possibile individuare periodi nei quali, mediamente, i valori annuali si presentano costanti oppure variabili con legge matematica; in tal caso si potranno utilizzare anche le altre espressioni trovate.

Ad esempio, indicata schematicamente una successione di valori annuali posticipati come di seguito, relativa ad un ciclo di ventotto anni, oltre alla spesa iniziale d'impianto ed al capitale di realizzo alla fine del ciclo, ed ipotizzato che il ciclo termini con reddito nullo (se ne parlerà al par. 3.14)

-25	-12	-9	-6	-3	0	2	4	8	16	32	....	32	30	28	26	24	20	16	12	8	4	0	+10
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	....	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	

nonché tenuto conto di un saggio d'interesse del *3%*, si potrà scrivere

$$A_{28} = -25 \cdot 1{,}03^{28} - \left[\left(12 - \frac{3}{0{,}03} \right) \cdot \frac{1{,}03^5 - 1}{0{,}03} + \frac{5 \cdot 3}{0{,}03} \right] \cdot 1{,}03^{23} + 2 \cdot \frac{2^5 - 1{,}03^5}{2 - 1{,}03} \cdot 1{,}03^{18} +$$

$$+ 32 \cdot \frac{1{,}03^7 - 1}{0{,}03} \cdot 1{,}03^{11} + \left[\left(32 - \frac{2}{0{,}03} \right) \cdot \frac{1{,}03^5 - 1}{0{,}03} + \frac{5 \cdot 2}{0{,}03} \right] \cdot 1{,}03^6 + \left[\left(20 - \frac{4}{0{,}03} \right) \cdot \frac{1{,}03^6 - 1}{0{,}03} + \frac{6 \cdot 4}{0{,}03} \right] + 10 =$$

$$= 580{,}910$$

$$A_0 = 580{,}910 \cdot 1{,}03^{-28} = 253{,}902$$

$$A_{10} = 580{,}910 \cdot 1{,}03^{-18} = 341{,}224$$

Nella figura 19, oltre all'andamento delle annualità (in nero) ed a quello del valore dell'intero ciclo (in rosso), viene indicata (in azzurro) la progressione del termine $\dfrac{P}{q^n - 1}$ con n variabile, di cui si dirà ai paragrafi seguenti.

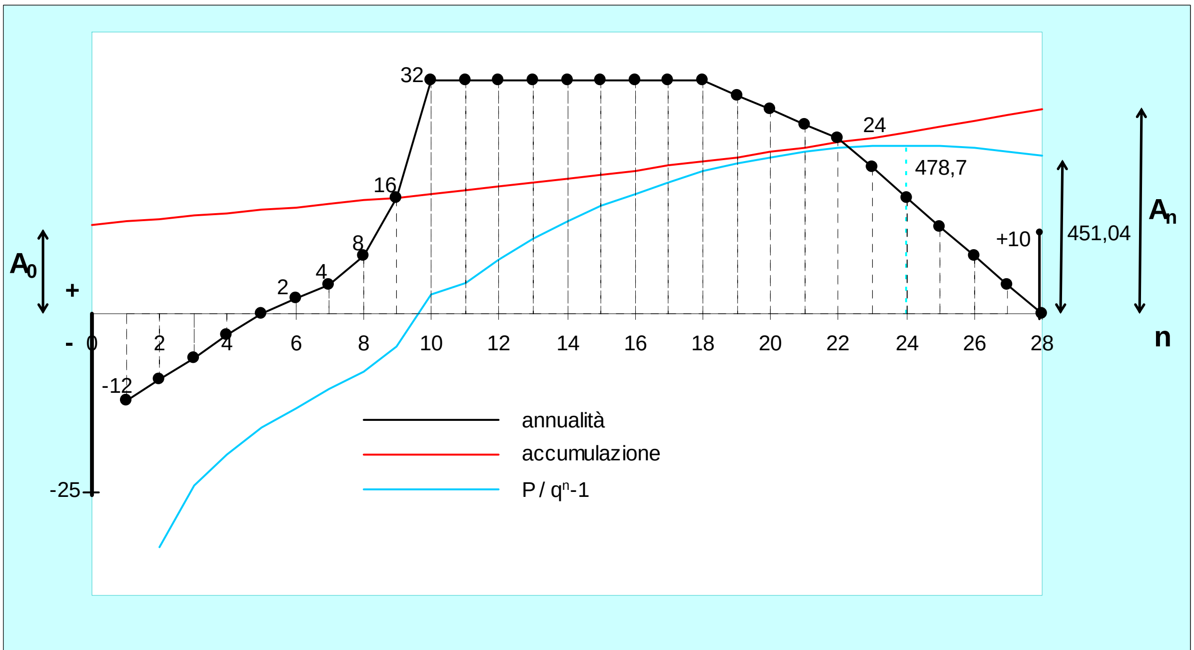


Fig. 19

3.14 Le periodicità (o poliannualità)

Un problema tipico nell'estimo rurale, ma anche in altre tipologie estimative, è il dover cercare il valore capitale di un bene capace di dare una successione di redditi variabili che si ripetono poi periodicamente in modo che la redditività si possa ritenere illimitata. Si tratta di cicli (o turni) di più annualità posticipate che sono variabili secondo i tipi studiati nei paragrafi precedenti (se fossero annualità costanti il problema non si porrebbe), con l'eventualità che si possa pensare ad un primo ciclo più lungo per ovvie ragioni di impianto. Il problema può venir presentato come nella figura seguente, nella quale con P abbiamo inteso il valore dell'accumulazione finale delle n annualità di ogni turno.

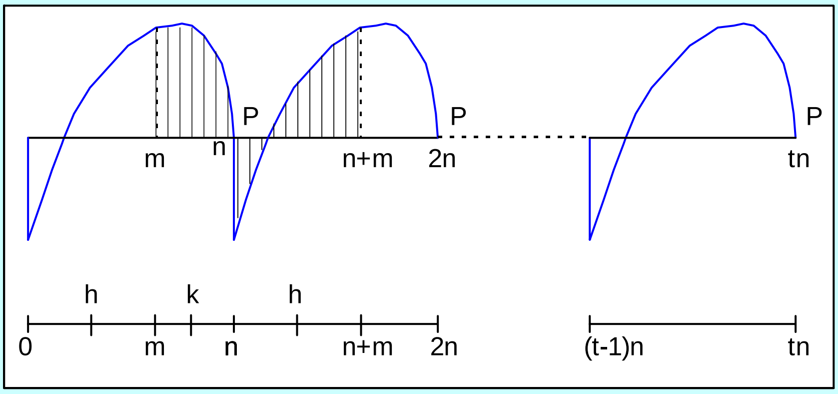


Fig. 20

Tale valore P può essere considerato come accumulazione finale (A_n) di n annualità della tipologia di quelle già studiate come costanti e limitate. Pertanto dalla 3.4.1

$$(3.14.1)\quad P = a_m \cdot \frac{q^n - 1}{r} \rightarrow a_m = P \cdot \frac{r}{q^n - 1} \rightarrow A_{tn} = a_m \cdot \frac{q^{tn} - 1}{r} = P \cdot \frac{a^{tn} - 1}{q^n - 1}$$

$$(3.14.2)\quad A_0 = \frac{A_{tn}}{q^{tn}} = \frac{P}{q^{tn}} \cdot \frac{q^{tn} - 1}{q^n - 1}$$

avendo utilizzato con a_m una annualità posticipata virtuale che chiameremo *"media economica di n annualità variabili"* e che definiremo meglio al paragrafo 3.16. Se il valore periodico P dovesse ritenersi anticipato nel suo turno, basterà moltiplicare le espressioni precedenti per q^n. Se il turno è unico si ricade ovviamente nelle formule dei paragrafi precedenti.

Da quanto precede, e dalla 3.5.1, si trae anche che, se le periodicità debbono ritenersi, illimitate, il valor capitale del bene capace di queste redditività sarà

$$(3.14.3)\quad C = A_0 = \frac{a_m}{r} = \frac{1}{r} \cdot P \cdot \frac{r}{q^n - 1} = \frac{P}{q^n - 1}$$

Sarà difficile individuare beni capaci di produrre redditi con cicli periodici variabili con leggi matematiche. Comunque, al solo fine di completezza dell'argomento, osserviamo che le espressioni delle periodicità si ricavano da quelle delle annualità ponendo al posto dell'annualità il valore P della periodicità, al posto del fattore q quello di q^n, ed al posto del saggio d'interesse r quello di $q^n - 1$.

Nell'esempio presentato al paragrafo precedente, se si dovesse poter presumere che quel ciclo possa ripetersi in modo illimitato, il valore capitale del bene sarebbe

$$C = A_0 = 580{,}91 \cdot \left(1{,}03^{28} - 1\right)^{-1} = 451{,}042 \qquad \text{contro 253,902 per turno isolato}$$

Rimane ancora da analizzare il valore del bene in un momento *m* intermedio di un turno produttivo nel caso della serie illimitata di poliannualità. Osserviamo anzitutto che il valore capitale della 3.14.3 compete all'inizio di un turno qualsiasi, cioè di tutti i turni. Calcolato questo valore, possiamo seguire tre vie (Medici, opera citata par. 1.2)

a) accumulando i redditi da *m* all'inizio del prossimo turno e scontando poi in *m* questo valore assieme al valore capitale competente (metodo a valore futuro)

$$(3.14.4)\quad V_m = \frac{\sum_m^n a_k \cdot q^{(n-k)} + C}{q^{n-m}}$$

Nell'esempio del paragrafo 3.13 avremo all'anno *10* di un turno qualsiasi

$$V_{10} = \frac{\sum_{10}^{28} a_k \cdot 1{,}03^{(28-k)} + 451{,}042}{1{,}03^{18}} = 614{,}192$$ (contro 341,224 per turno isolato)

b) montando in *m* il valor capitale delle poliannualità, considerato all'inizio di quel turno, e detraendo l'accumulo (pure in *m*) dei redditi percepiti da *0* a *m*, già considerati nel valor capitale (metodo a valor passato)

$$(3.13.5)\quad V_m = C \cdot q^m - \sum_0^m a_h \cdot q^{(m-h)}$$

$$V_{10} = 451{,}042 \cdot 1{,}03^{10} - \sum_0^{10} a_h \cdot 1{,}03^{(10-h)} = 614{,}191$$

c) simulando che la serie di annualità inizi da *m*, con turno da *m* a *n+m* (metodo a cicli fittizi - parte ombreggiata in fig. 20)

$$(3.13.6)\quad V_m = \frac{\sum_m^n a_k \cdot q^{(n-k+m)} + \sum_0^m a_h \cdot q^{(m-h)}}{q^{n-1}}$$

$$V_{10} = \frac{\sum_{10}^{28} a_k \cdot 1{,}03^{(28-k+10)}}{1{,}03^{28} - 1} = 614{,}192$$

3.15 L'età del tornaconto

Riprendendo il concetto espresso all'inizio del par. 3.13, si può osservare come il valore all'anno *0*, cioè il valore capitale di un bene a redditi variabili come quelli di cui all'esempio del paragrafo citato, è pure esso variabile se limitiamo progressivamente la durata del turno. Osserviamo che nella 3.14.3

$$C = \frac{P}{q^n - 1}$$

dove *P* è l'accumulazione all'anno *n* delle annualità positive e negative del turno, sia il numeratore che il denominatore variano con il variare della lunghezza temporale del turno. L'accumulazione *P* aumenta con il progredire degli anni del turno fintantoché i redditi sono positivi, ma contemporaneamente si presenta l'effetto diminutivo del denominatore sulla frazione. Nella figura 19 abbiamo rappresentato con la linea azzurra l'andamento del valore dell'espressione per i numeri dell'esempio, dal quale rileviamo che il valor capitale massimo dell'insieme delle periodicità illimitate lo si ha non attendendo lo spegnersi dei redditi, bensì interrompendo i turni ad un'età che nell'esempio è di anni *24*, in cui il valore capitale C = 478,696 contro l'analogo valore 451,042 ricavato per l'anno *28*, allo spegnersi dei redditi. Ne consegue un andamento corretto della figura 20 come nella 21, nella quale abbiamo pure indicato l'eventualità di un primo turno di maggiore ampiezza per ragioni di avviamento.

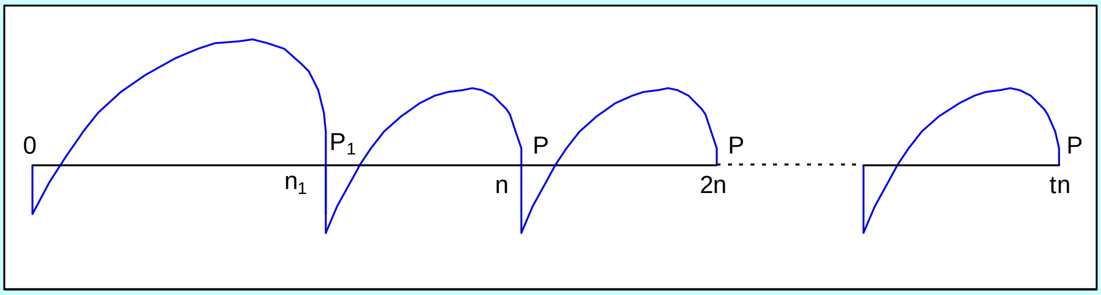


Fig. 21

Con le conoscenze acquisite non sarà difficile trovare nei vari casi la durata migliore del turno, che nell'estimo rurale viene chiamata *"età del tornaconto"*, sul cui significato estimativo rimandiamo alla lettura di testi specifici (ad es. G. Antonelli, Estimo rurale, civile e catastale, ed. Ofiria, Firenze).

Va ancora detto che la ricerca del massimo della 3.14.3 sarebbe possibile matematicamente se l'espressione rappresentasse una funzione continua e derivabile nell'intervallo di turno, ciò che generalmente non lo è. Sarà pertanto necessario cercare il massimo per tentativi.

3.16 Valori medi

Abbiamo introdotto al paragrafo 3.14 il concetto di *media economica*, cioè di quella annualità virtuale e costante che produce gli stessi effetti economici (accumulazione iniziale e finale) di una serie di annualità comunque variabili.

Sarà quindi in regime d’interesse composto e nel caso di annualità variabili in progressione aritmetica

(3.16.1) $$a_m = a + \frac{d}{r} - n \cdot \frac{d}{q^n - 1}$$

e per la progressione geometrica

(3.16.2) $$a_m = a \cdot \frac{k^n - q^n}{k - q} \cdot \frac{r}{q^n - 1}$$

e per k = q

(3.16.2') $$a_m = n \cdot a \cdot k^{n-1} \cdot \frac{r}{q^n - 1}$$

Non sarà difficile trovare la media economica negli altri casi. Nell'esempio del par. 3.13 tale valore risulta

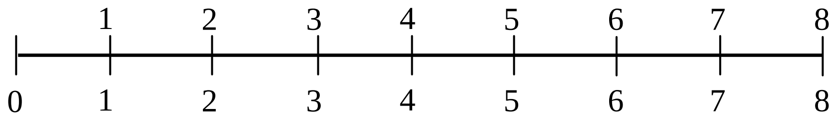
$$a_m = A_{28} \cdot \frac{r}{q^{28} - 1} = 13{,}531$$

annualità che accumulata come costante e illimitata fornisce il valore capitale trovato alla fine del paragrafo precedente

$$C = \frac{13{,}531}{0{,}03} = 451{,}042$$

Il confronto di questo valore con gli altri valori medi generalmente usati per rappresentare con un solo numero un gran numero di dati (altrimenti difficilmente valutabili nel loro complesso) ci porta a far notare che, mentre la media economica è influenzata dal saggio d'interesse, le altre medie ne sono indipendenti.

Ad esempio, se riprendiamo la serie di *8* annualità posticipate, in progressione aritmetica crescente secondo la serie dei numeri naturali (vedi par 3.11), notiamo che



con il saggio	r = 5%	$a_m = 1 + \frac{1}{0{,}05} - 8 \cdot \frac{1}{1{,}05^8 - 1}$	= 4,244
" "	r = 3%	a_m=	= 4,345
" "	r = 1%	a_m=	= 4,448
" "	r = 0,1%	a_m=	= 4,495

In merito alla media aritmetica ricordiamo anzitutto che se una serie di valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si presentano con frequenze (o pesi) $p_1, p_2, \ldots\ p_n$ la loro media è

(3.16.3) $$M_A = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n}{\sum p_i}$$

che se i pesi (o frequenze) sono tutti uguali, diventa semplicemente

(3.15.3') $$M_{A,S} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Nel nostro esempio M_A = 4,5, e notiamo come la diminuzione del saggio d'interesse porti la media economica vicina, ma sempre in difetto, a quella aritmetica.

Il confronto con la media geometrica porta a valori più distanti. In merito alla successione di cui sopra ricordiamo che la media geometrica, pesata o semplice, è

(3.15.4) $$M_G = \left(x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot \ldots x_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{\Sigma p_i}} \qquad M_{G,S} = \left(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_n\right)^{\frac{1}{n}}$$

e ricordiamo pure che il logaritmo della media geometrica è la media aritmetica (pesata o semplice) dei logaritmi dei dati

$$log\, M_G = \frac{1}{\sum p_i} \cdot \left(p_1 \cdot log\, x_1 + p_2 \cdot log\, x_2 + \ldots p_n \cdot log\, x_n\right)$$

$$log\, M_{G,S} = \frac{1}{n} \cdot \left(log\, x_1 + log\, x_2 + \ldots log\, x_n\right)$$

Nel nostro caso M_G = 3,764, ben distante dalle due medie già esaminate.

Per completezza didattica citiamo ancora la media armonica, uguale all'inverso della media aritmetica dell'inverso dei dati, cioè

(3.15.5) $$M_H = \left[\frac{1}{\sum p_i} \cdot \left(\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2} + \ldots \frac{p_n}{x_n}\right)\right]^{-1} \qquad M_{H,S} = \left[\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots \frac{1}{x_n}\right)\right]^{-1}$$

Nel nostro caso $M_H = 2{,}943$, ancor più distante dalle altre.

Analogamente a quanto sopra, per l'esempio di cui al par. 3.12, cioè per la seguente serie di annualità in progressione geometrica

	1	1,1	$1{,}1^2$	$1{,}1^3$	$1{,}1^4$	$1{,}1^5$	$1{,}1^6$	$1{,}1^7$
0	1	2	3	4	5	6	7	8

Con il saggio r = 5% $\quad a_m = 1 \cdot \frac{1{,}1^8 - 1{,}05^8}{1{,}1 - 1{,}05} \cdot \frac{0{,}05}{1{,}05^8 - 1} = 1{,}395$

" " r = 3% $\quad a_m =$ = 1,409

" " r = 1% $\quad a_m =$ = 1,422

" " r = 0,1% $\quad a_m =$ = 1,428

$M_A = 1{,}429$ $\qquad M_G = 1{,}396$ $\qquad M_H = 1{,}363$

Concludiamo osservando che per dati positivi

$$M_H \leq M_G \leq a_m \leq M_A$$

3.17 Scadenza media

Fra le varie operazioni che possono doversi fare nell'ambito di una successione di *n* annualità, va considerata in particolare quella della determinazione di un unico momento temporale *t* in cui il valore di detta successione possa venir scambiato con un unico capitale predeterminato, in regime di equivalenza finanziaria. Il capitale di scambio è solitamente la somma algebrica delle annualità ancora nell'operazione (tutte, se si è all'inizio della successione) ed il momento *t* cercato viene chiamato "*scadenza media*" ed è ovviamente collocato fra *0* e *n*, oppure fra *m* e *n* se il momento *m* della valutazione è successivo all'inizio dell'intera operazione, che termina in *n*.

Sarà quindi, per annualità discrete ed in regime d'interesse composto

	a_h		a_k	
0	t_h	t	t_k	n

(3.17.1) $V_{t,i,c} = \sum_{0}^{t}{}_h a_h \cdot q^{(t-t_h)} + \sum_{t}^{n}{}_k a_k \cdot v^{(t_k - t)} = \sum_{0}^{n} a_i$

dove *i* sta sia per *h* che per *k*

od anche, accumulando tutte le annualità in *n*, oppure in *0*, e poi scontando oppure montando tutto in *t*

$$(3.17.1')\ V_{t,i,c} = \nu^{(n-t)} \cdot \sum_0^n {}_i a_i \cdot q^{(n-i)} = q^t \cdot \sum_0^n a_i \cdot \nu^{t_i} = \sum_0^n a_i$$

da cui $$t = \frac{log \sum_0^n a_i - log \sum_0^n a_i \cdot \nu^{t_i}}{log\, q}$$

Ad esempio, per una serie di *8* annualità del valore di *125* ciascuna, impegnate al *5%*, e per le quali $V_{0,i,c} = 807{,}902$

$$t = \frac{log\,1000 - log\,807{,}902}{log\,1{,}05} = 4{,}372$$

ed osserviamo che abbassando il tasso al *2%*, e quindi con $V_{0,i,c} = 915{,}685$, segue t = 4,448, mentre se lo aumentiamo al *8%* e quindi con $V_{0,i,c} = 718{,}330$, segue t = 4,299; cioè aumentando il tasso la scadenza media diminuisce, e viceversa. Quando il tasso tende a 0 la scadenza media tende alla media aritmetica pesata delle varie annualità.

Va ancora detto che, ovviamente, se le annualità sono illimitate pure la scadenza media tende a $+\infty$.

Nel caso di serie di annualità periodiche posticipate in progressione aritmetica, non sarà difficile riconoscere, con riferimento al par 3.11, che

$$(3.17.1'')\qquad t = \frac{log\left[\left(a + \frac{n-1}{2} \cdot d\right) \cdot n\right] - log\, A_0}{log\, q}$$

Nel caso di serie di annualità di progressione geometrica (par. 3.12)

$$(3.17.1''')\qquad t = \frac{log\, \frac{k^n - 1}{k-1} - log\, \nu \cdot \frac{1-(k \cdot \nu)^n}{1 - k \cdot \nu}}{log\, q}$$

L'impiego, in questa operazione, degli altri regimi di cui al par 3.9 porta alle espressioni

$$(3.17.2)\ V_{t,i,s} = \sum_0^t {}_h a_h \cdot \left[1 + (t - t_h) \cdot r\right] + \sum_t^n {}_k a_k \cdot \frac{1}{1 + (t_k - t) \cdot r} = \sum_0^n a_i$$

(3.17.3) $V_{t,S,c} = \sum_{0}^{t} {}_h a_h \cdot \frac{1}{1-(t-t_h)\cdot d} + \sum_{t}^{n} {}_k a_k \cdot [1-(t_k - t)\cdot d] = \sum_{o}^{n} a_i$

Risolvibili nell'incognita *t* solo per tentativi.

Va detto invece che negli usi bancari viene spesso utilizzato un *regime misto, lineare* sia per montare che per scontare, cioè

(3.17.4) $V_t = \sum_{0}^{t} {}_h a_h \cdot [1+(t-t_h)\cdot r] + \sum_{t}^{n} {}_k a_k \cdot [1-(t_k - t)\cdot d] = \sum_{0}^{n} a_i$

che per saggio unico *r* e dopo alcuni passaggi porta alle

(3.17.4') $\sum_{0}^{n} {}_i a_i \cdot t_i = \sum_{0}^{t} {}_h a_h \cdot t_h + \sum_{t}^{n} {}_k a_k \cdot t_k$

(3.17.4'') $t = \frac{\sum_{0}^{n} {}_i a_i \cdot t_i}{\sum_{0}^{n} {}_i a_i}$

Nel caso di un flusso continuo di reddito $\varphi(t)$ il tempo di scadenza medio in regime di interesse composto, semplice e di sconto commerciale nasce dalle

(3.17.5) $\int_{0}^{t} \varphi(t)\cdot e^{\delta\cdot(t-t_h)} \cdot dt + \int_{t}^{t_n} \varphi(t)\cdot e^{-\delta\cdot(t_n - t_k)} \cdot dt = \int_{0}^{t_n} \varphi(t) dt$

(3.17.6) $\int_{0}^{t} \varphi(t)\cdot [1+(t-t_h)\cdot h]\cdot dt + \int_{t}^{t_n} \varphi(t)\cdot \frac{1}{1+(t_k - t)} \cdot dt = \int_{0}^{t_n} \varphi(t)\cdot dt$

(3.17.7) $\int_{0}^{t} \varphi(t)\cdot \frac{1}{1-d\cdot(t-t_h)} \cdot dt + \int_{t}^{t_n} \varphi(t)\cdot [1-d\cdot(t_k - t)]\cdot dt = \int_{0}^{t_n} \varphi(t)\cdot dt$

che, con l'espressione del regime finanziario istantaneo convergono nella

(3.17.8) $\int_{0}^{t} \varphi(t)\cdot e^{\int_{t_h}^{t} \delta(t)\cdot dt} \cdot dt + \int_{t}^{t_n} \varphi(t)\cdot e^{-\int_{t}^{t_n} \delta(t)\cdot dt} \cdot dt = \int_{0}^{t_n} \varphi(t)\cdot dt$

Con le ormai note semplificazioni per φ = cost., δ = cost. oppure $\delta = f(t)$ per i casi più conosciuti.

3.18 Avvertenze

In questo capitolo 3° abbiamo usato in modo equivalente il termine *saggio* e *tasso* per indicare l'interesse per unità di capitale e unità di tempo in una operazione finanziaria; lo abbiamo fatto per abituare il lettore alla pratica bancaria corrente di confusione dei due termini, con prevalenza alla parola *tasso*. Ricordiamo però che al par. 1.1 di questi *Elementi* abbiamo precisato la differenza concettuale fra le due parole.

Va inoltre detto che per quanto riguarda la simbologia, si è cercato di adottare simboli semplici, storicamente tradizionali; il lettore rimanga però avvertito che su altri testi di questi argomenti potrà trovare altri simboli per le nostre stesse espressioni.

Capitolo 3°

ESERCIZI E QUESITI

1 - Qual’ è il valore dell’accumulazione finale di una serie di 12 annualità anticipate, di valore costante 100, impiegate in regime di interesse composto con saggio del 4% ? Ed il valore iniziale dell’accumulazione ? Ed il valore dopo trascorsi 6 anni dall’inizio ? . [R.: 1562,684; 976,048; 1235,012]

2 - Qual’ è il valore capitale di un bene capace di un reddito di valore 100, annuale posticipato e illimitato, ma differito di 6 anni, in regime d’interesse composto al saggio del 3% ? [R.: 2791,614]

3 - Qual’ è il valore attuale (iniziale) di una serie di 24 redditi quadrimestrali posticipati di valore 100, in regime di interesse composto, all’interesse annuale equivalente del 8% ? [R.: 1769,179]

4 - Qual’ è il valor capitale di un bene capace di un reddito di valore 100, trimestrale posticipato e illimitato, in regime di interesse composto, all’interesse annuale equivalente del 8% ? [R.: 5147,595]

5 - Un capitale del valore attuale C = 10.000 viene scambiato con una serie di 12 rate semestrali posticipate costanti, differite di due anni, al tasso composto del 3% semestrale. Qual’ è l’importo delle rate semestrali ? [R.: 1130,710]

6 - Un capitale del valore attuale C = 10.000 viene scambiato con una serie di rate semestrali anticipate del valore di 1000 ciascuna, in regime di interesse composto, al tasso annuo del 8%. Qual’ è il numero delle rate, calcolato in difetto, e qual’ è l’importo dell’ultima rata ? [R.: 12; 1322,217]

7 - Un capitale di valore attuale C = 10.000 viene scambiato con una serie di 24 rate trimestrali posticipate dal valore di 500 ciascuna, in regime di interesse composto. Qual’ è il tasso annuale di interesse dell’operazione, con metodo iterativo (5 iterazioni) partendo dall’espressione di Baily, oppure con il metodo di Newton partendo da un tasso trimestrale r = 0,06, oppure con il metodo di interpolazione lineare partendo da tassi trimestrali del 0,014 e 0,016 ? Cosa si osserva ? [R.: 0,06170; 0,06188; 0,06195]

8 - Un bene del valore 1000 viene venduto al prezzo di 200 in contanti ed in 8 rate trimestrali posticipate uguali, in regime di sconto commerciale al tasso annuale del 8%. Qual' è il valore di ogni rata ? [R.: 109,890]

9 - Una serie di importi pari a 1000, 2000, 3000, 2000, 1000 sono esigibili rispettivamente fra 6 mesi, 1 anno, 18 mesi, 2 anni, 30 mesi. Qual' è il valore equivalente di scambio attuale, in regime lineare di sconto, al tasso del 10% annuo ? [R.: 7650,00]

10 - Qual' è il montante di una serie di 8 versamenti trimestrali posticipati di importo 100 ciascuno, in regime di interesse semplice al saggio annuo del 5% ? Ed il valore attuale di questa serie in regime pure lineare con tasso di sconto pari al saggio d'interesse scontato ? [R.: 835,000; 757,143]

11 - Qual' è il valore dell'accumulazione finale delle 8 annualità posticipate di cui all'esempio del par. 3.11, in progressione aritmetica crescente secondo la serie di numeri naturali (prima annualità uguale all'unità), con saggio d'interesse del 5% annuo, in regime di interesse semplice ? Ed in regime di sconto commerciale, sempre con tasso del 5% ? [R.: 40,200; 41,313]

12 - Qual' è il valore attuale (iniziale) dell'accumulazione finale delle 8 annualità di cui all'esercizio precedente, in regime di sconto razionale e commerciale con tasso di sconto pari al saggio d'interesse scontato (par. 2.4 op. 2.7) ? [R.: 28,227; 26,381]

13 - Qual' è il valore dell'accumulazione finale delle 8 annualità posticipate, in progressione geometrica crescente, con la prima annualità uguale all'unità, con k = 1,1 e con saggio d'interesse del 5% annuo (par. 3.12), in regime di interesse semplice ? Ed in regime di sconto commerciale, sempre con tasso del 5% ? [R.: 13,154; 13,712]

14 – Qual' è il valore attuale (iniziale) della serie di 8 annualità di cui all'esercizio presedente, in regime di sconto razionale e commerciale con tasso di sconto pari al saggio di interesse scontato (par. 2.4 op 2.7) ? [R.: 9,228; 8,715]

15 - Un'operazione finanziaria prevede 8 rate semestrali posticipate di valore 125 ciascuna al tasso istantaneo costante $\delta = 0{,}05$. Qual' è il montante al termine dell'operazione ed il valore attuale? [R.: 1199,079; 803,767]

Si applichino le 3.10.5 e 3.10.6. Si osservi la progressione geometrica della serie degli importi. Si controllino i valori ottenuti attraverso le 3.4.1 e 3.4.2 con il tasso ricavato dalla $\delta = \ln(1+r)$.

16 - All’operazione di cui all’esercizio precedente viene applicato il tasso istantaneo variabile $\delta = \frac{0,05}{1+0,05 \cdot t}$. Calcolare il montante ed il valore attuale. [1153,010; 823,578]

Si applichino le 3.10.7 e 3.10.8.

17 - All’operazione di cui all’esercizio 15 viene applicato il tasso istantaneo variabile $\delta = \frac{0,05}{1-0,05 \cdot t}$. Calcolare il montante ed il valore attuale. [R.: 1291,667; 775,000]

Si applichino le 3.10.9 e 3.10.10.

18 - Un reddito giornaliero di valore 100 viene operativamente previsto per la durata di due anni di 365 giorni ciascuno, in regime di interesse composto, al tasso del 5% annuo. Calcolare il montante al termine dell’operazione ed il valore attuale. [R.: 76675,300; 69546,738].

Si calcoli il tasso giornaliero equivalente in base alla 2.10.4. Si applichino le 3.4.1 e 3.4.2.

19 - L’operazione di cui all’esercizio precedente viene eseguito in regime di interesse semplice, alle stesse condizioni. Si calcoli il montante ed il valore attuale.

[R.: 76645,000; 69571,886]

Si calcoli il tasso giornaliero tenendo conto che il regime è lineare. Si applichino le 3.9.1 e 3.9.3, quest’ultima attraverso un programma di calcolo della sommatoria.

20 - L’operazione di cui all’esercizio 18 viene eseguita in regime di sconto commerciale, alle stesse condizioni. Si calcoli il montante ed il valore attuale. [R.: 76918,732; 69345,000]

Si applichino le 3.9.2 e 3.9.4; per la 3.9.2 con programma di calcolo della sommatoria.

21 - Un flusso continuo di reddito dell’intensità giornaliera di valore 100 viene previsto per la durata di due anni di 365 giorni ciascuno, in regime finanziario istantaneo, al tasso giornaliero costante equivalente al tasso annuale del 5%. Si calcoli il montante ed il valore attuale.

[R.: 76680,423; 69551,388]

Si calcoli il tasso giornaliero equivalente in base alla 2.10.4. Si ricordi che in questo regime δ = ln(1+r). Si applichino le 3.7.7 e 3.7.8.

22 - L’operazione di cui all’esercizio precedente viene eseguita in regime finanziario istantaneo al tasso giornaliero variabile $\delta = \dfrac{r}{1 + r \cdot t}$ con r = 0,05/365. Si calcoli il montante ed il valore attuale. [R.: 76534,074; 69576,431].

Si applichino le 3.10.13 e 3.10.14.

23 - L’operazione di cui all’esercizio 21 viene eseguita in regime finanziario istantaneo al tasso giornaliero $\delta = \dfrac{r}{1 - r \cdot t}$ con r = 0,05/365. Si calcoli il montante ed il valore attuale. [R.: 77055,556; 69350,000].

Si applichino le 3.10.15 e 3.10.16.

24 - Nell’esempio numerico del par. 3.13 qual’ è il valore della accumulazione delle annualità all’anno 18, oppure all’anno 22 ? Se questi cicli periodici sono in numero illimitato, qual’ è il valore dell’espressione 3.14.3 se limitiamo la durata del turno all’anno 18 oppure all’anno 22 ? [R.: 432,252; 486,503; 404,843; 471,660]

25 - Qual’ è il valore attuale, potenziale, di un bene che con un progetto d’investimento produttivo viene ritenuto capace di un reddito poliannuale, che al termine del primo turno di avviamento di 10 anni ha un valore di accumulazione di 1000, e che successivamente e per tre turni di 8 anni ciascuno ha una previsione di 1500 sempre per l’accumulazione dei prodotti e spese al termine di ogni turno, in regime di interesse composto al tasso del 4% annuo. Qual’ è il valore attuale se i turni successivi al primo sono da ritenersi illimitati ? [R.: 2352,368; 3424,971]

26 - Qual’ è il tempo di scadenza medio all’inizio di una serie di 8 annualità posticipate, in progressione aritmetica crescente secondo la serie dei numeri naturali (prima annualità uguale all’unità) e con saggio di interesse del 5% annuo (par. 3.11 e 3.17), in regime di interesse composto ? [R.: 5,570]

27 - Qual’ è il tempo di scadenza medio nell’esercizio precedente, in regime misto lineare con saggio unico ? [R.: 5,667]

28 - Qual’ è il tempo di scadenza medio all’inizio di una serie di 8 annualità posticipate, in progressione geometrica crescente, con la prima annualità uguale all’unità, con k = 1,1 e con saggio d’interesse del 20% - 10% - 5% annui (par. 3.12), in regime di interesse composto ? Cosa si osserva ? [R.: 4,522; 4,750; 4,871]

29 - Qual’ è il tempo di scadenza medio nell’esercizio precedente in regime lineare con saggio unico ? [R.: 4,996]

30 - Qual’ è il tempo di scadenza medio all’inizio dell’operazione di cui all’esempio numerico del par. 3.13, in regime di interesse composto ? [R.: 18,678]

31 - Qual’ è il tempo di scadenza medio nell’esercizio precedente se l’operazione è già giunta all’anno 18 oppure all’anno 22 ? [R.: 22,061; 24,814].