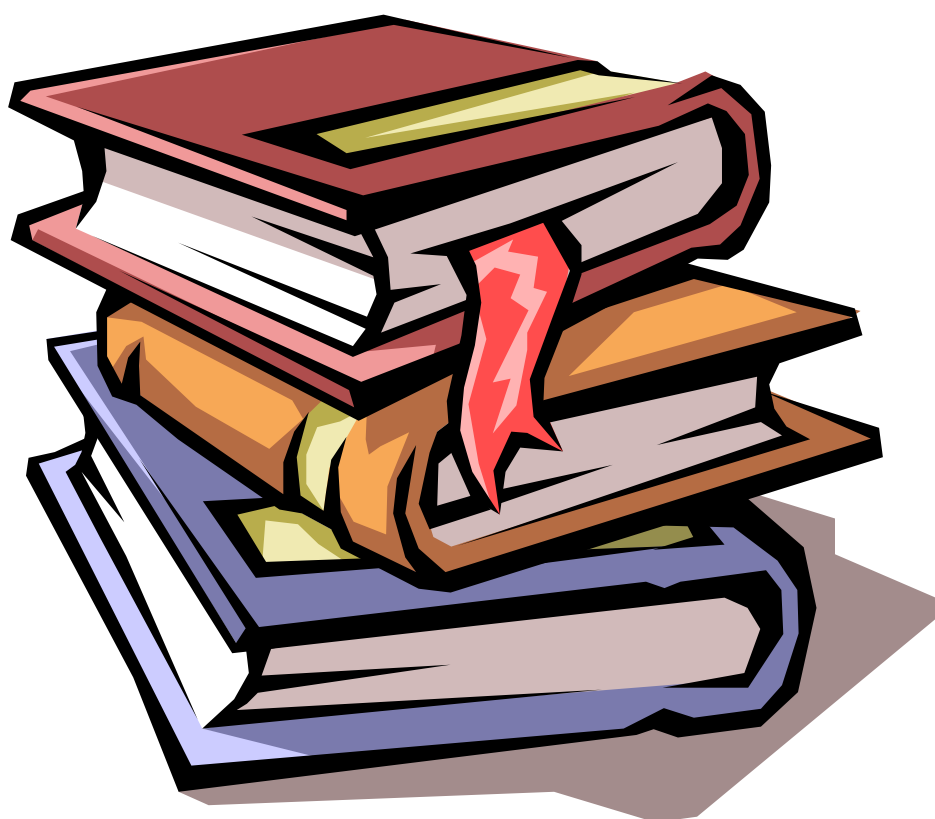


Appunti di



ANALISI MATEMATICA 2

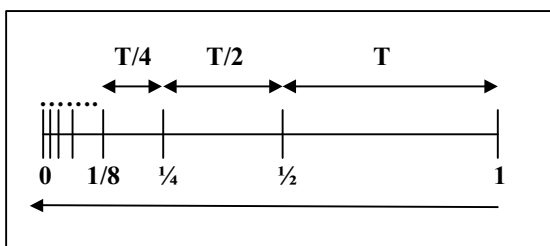
Serie

Prendiamo una successione di numeri $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Sommando tutti gli elementi (infiniti) di questa successione otteniamo una *serie*: $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Se limitiamo la somma ai primi n elementi della successione di numeri, otteniamo una *somma parziale* $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. È quindi chiaro che una serie è il *limite per n che tende all'infinito* della somma parziale. Questo lo si può dedurre anche attraverso il seguente approccio: prendo la *successione* delle somme parziali $S_n : S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$. Facendo il limite di questa successione ottengo il risultato della serie.

Teoria di Zenone

Un corridore deve andare dal punto **1** al punto **0**. Sappiamo che per andare dal punto **1** al punto $\frac{1}{2}$ impiega un tempo T . Quanto impiega per effettuare tutto il tragitto? La risposta è ovviamente $2T$.



Ora Zenone ragionò in questa maniera: suddivise il tragitto da **1** a **0** in infinite *tappe* ognuna delle quali dista dall'altra esattamente la metà di quanto resta da percorrere. Calcolò i tempi per percorrere tutte le tappe, li sommò e impose questa somma uguale a $2T$.

Ottenne quindi una serie del tipo:

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \dots + \frac{T}{2^n} + \dots = 2T$$

Il risultato di questo ragionamento fu quindi che una somma di infiniti elementi poteva avere un risultato finito. Il passo successivo sarebbe stato quello di trovare dei metodi per capire quando una serie *converge* ad un risultato finito e quando *diverge* verso l'infinito.

Prima di proseguire, però è necessario fare alcuni commenti:

- Se la serie viene eseguita su una successione di numeri complessi, allora o converge oppure diverge.
- Se la serie viene eseguita su una successione di numeri reali, allora o converge oppure diverge negativamente o positivamente oppure può essere una serie oscillante nel caso il limite della successione delle somme parziali non esista:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S \begin{cases} S \text{ finito} \Rightarrow \text{serie convergente o regolare} \\ S = +\infty \Rightarrow \text{serie divergente positivamente} \\ S = -\infty \Rightarrow \text{serie divergente negativamente} \\ \text{non esiste } S \Rightarrow \text{serie oscillante} \end{cases}$$

Serie geometrica (reale)

Una serie geometrica è la somma di una successione di potenze di uno stesso numero:

$$S_G = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n = 1 + b + b^2 + b^3 + \dots + b^n + \dots \quad (b \neq 0)$$

Si noti che l'indice della sommatoria parte da zero, quindi la somma parziale n -esima di una serie geometrica sarà la somma degli elementi della successione di potenze con indice che va da **0** ad **$n-1$** :

$$S_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^{n-1}$$

La somma parziale di questa particolare serie si può calcolare velocemente attraverso un piccolo *trucco*:

- Parto dalla definizione di somma parziale: $S_n = 1 + b + b^2 + b^3 + \dots + b^{n-1}$
- Moltiplico entrambi i membri per b : $b \cdot S_n = b + b^2 + b^3 + \dots + b^n$
- Riprendo S_n e sottraggo la quantità $b \cdot S_n$: $S_n - b \cdot S_n = (1 + b + b^2 + \dots + b^{n-1}) - (b + b^2 + b^3 + \dots + b^n)$
- Gli elementi di cui sopra si elidono due a due e resta solo (raccolgendo): $S_n(1 - b) = 1 - b^n$
- Ottengo S_n dividendo per $(1 - b)$: $S_n = \frac{(1 - b^n)}{(1 - b)} \quad (b \neq 1)$

Con questa definizione di somma parziale è più facile calcolare il limite:

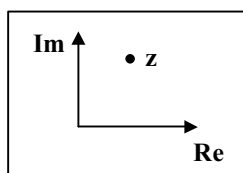
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-b^n}{1-b} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-b} - \frac{b^n}{1-b} \right) = \frac{1}{1-b} - \frac{1}{1-b} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} b^n$$

In questo caso è possibile ottenere diversi risultati, riassunti nella seguente tabella:

Valore di b	Valore di S_n	Carattere della serie
$ b < 1$	$\frac{1}{1-b}$	Convergente
$b > 1$	$+\infty$	Divergente positivamente
$b = 1$	$+\infty$	Divergente positivamente
$b \leq 1$	Non esiste	Indeterminata

Serie geometrica (complessa)

Prendo un numero complesso z . Questo è rappresentabile tramite un piano cartesiano:



Ora calcoliamo il limite della successione delle potenze di z : $\lim_{n \rightarrow +\infty} z^n$

Ora si possono avere tre casi distinti:

- $z = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} z^n = 1$
- $|z| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} z^n = 0$
- $|z| \geq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} z^n = \text{non esiste}$

Nel primo caso z corrisponde ad un reale di valore **1**, per cui si ottiene una successione di potenze di **1**, che risultano essere sempre uguali ad **1**.

Nel secondo caso teniamo conto del *modulo* di z e quindi consideriamo un'area circolare centrata nell'origine degli assi e di raggio minore di **1**. In questo caso, ragiono nel modo seguente:

$$\lim_n z^n = 0 \Leftrightarrow \lim_n |z^n| = 0 \Leftrightarrow \lim_n |z|^n = 0$$

Ora, visto che $|z|$ è un numero reale, ottengo che $|z| < 1$. In questo caso, quindi, la successione di potenze tenderà allo zero.

Nell'ultimo caso, infine, considero un'area corrispondente al complementare dell'area circolare considerata nel secondo esempio: quindi tutto il piano complesso tranne un *bucco* circolare centrato nell'origine di raggio **1**. Chiaramente questa area contiene anche il punto $z=1$ che è da escludere in quanto preso in considerazione nel primo caso. Ora, per dimostrare che il limite in questo caso non esiste, ragiono nel modo seguente:

$$|z^{n+1} - z^n| = \underbrace{|z|}_{\substack{\text{numero reale} \\ \geq 1 \text{ per ipotesi}}}^n \cdot |z - 1| \geq |z - 1| > 0$$

Quest'ultima equazione dice in sintesi che la differenza tra due elementi adiacenti della successione è *SEMPRE* maggiore di zero, per ogni indice n . Questo significa che il limite non esiste in quanto se esistesse, la differenza tra due indici adiacenti dovrebbe tendere allo zero (nell'equazione di cui sopra dovrebbe esserci un simbolo di *maggiore o uguale*), cosa che non succede proprio per l'equazione suddetta \rightarrow *non esiste il limite*.

Considerando un numero complesso z , posso trovare una serie geometrica data da $S_G = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ (come nel caso

reale, la serie è definita come somma degli elementi di una successione che in questo caso è di potenze).

Anche in questo caso, come in quello reale, posso trovare la formula *veloce* per calcolare la somma parziale:

$$S_n = \frac{1 - z^n}{1 - z} \quad (z \neq 1)$$

Anche in questo caso, a seconda del valore del limite di S_n posso risalire al carattere della serie:

Valore di b	Valore di S_n	Carattere della serie
$ z < 1$	$\frac{1}{1 - z}$	Convergente
$z = 1$	$+\infty$	Divergente
$z > 1$	Non esiste	Indeterminata

Criterio di Cauchy per le serie

Una serie converge se vale $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu : \forall n, m (n, m > \nu \Rightarrow |S_n - S_m| < \varepsilon)$

In parole povere, il criterio di Cauchy dice che se una serie converge, allora, per forza di cose, i suoi termini devono tendere a zero in quanto la differenza tra due somme parziali prese ad una certa distanza l'una dall'altra tende a zero a sua volta (infatti la serie è la somma di infiniti termini, per cui da un certo indice in poi questo termini devono tendere a zero!).

ATTENZIONE: affinché si possa usare il criterio di Cauchy è necessario lavorare all'interno di uno spazio metrico completo (ad esempio (\mathbf{C}, d) dove \mathbf{C} è il campo complesso e d è la distanza euclidea definita come $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$). Quindi la nozione di completezza è *condizione necessaria e sufficiente* per utilizzare il criterio di Cauchy.

Si noti inoltre che dire che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ (dove a_n è un termine della serie) è solo *condizione necessaria ma non sufficiente* alla convergenza della serie. Eppure sembrerebbe che questo limite dica la stessa cosa del criterio di Cauchy! In verità il criterio di Cauchy è più completo in quanto non pone limite alla distanza tra gli indici n ed m ai quali vengono calcolate le somme parziali, mentre in questo semplice limite ci si limita a dire che i termini della serie devono tendere a zero.

Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Analizziamo questa serie:

- non è oscillante in quanto $S_1 < S_2 < \dots < S_n < \dots$
- la successione delle somme parziali è crescente (anzi è *strettamente* crescente)

Utilizzando il criterio di Cauchy per vedere se la serie converge o diverge:

$$S_{2n} - S_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{> \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{> \frac{1}{2n}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{= \frac{1}{2n}} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Questo significa che se nel criterio di Cauchy utilizzo un $\varepsilon < \frac{1}{2}$ allora il criterio stesso non vale più in quanto ε è arbitrario. Quindi la serie diverge. Ora se le *successioni* delle somme parziali sono strettamente crescenti, allora la serie o converge oppure diverge positivamente. In questo caso abbiamo visto che la serie diverge quindi

divergerà positivamente e quindi avremo che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Si noti che anche la seguente serie è una serie armonica: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. In questo caso, però, la serie converge e così

pure per tutte le serie armoniche con potenza superiore alla prima. Posso quindi ricavare una *serie armonica generalizzata*:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \rightarrow \begin{cases} (\alpha > 0) \Rightarrow \text{converge} \\ (\alpha = 0) \Rightarrow \text{diverge positivamente} \end{cases}$$

Convergenza assoluta

$$\sum_n a_n \text{ è assolutamente convergente} \Leftrightarrow \sum_n |a_n| \stackrel{\text{def.}}{\text{è convergente}}$$

Con questa definizione posso dire che se una serie è assolutamente convergente, allora sarà convergente, ma non sarà vero il contrario. Quindi la convergenza assoluta è *più forte* della convergenza.

Dimostro questo tramite il criterio di Cauchy (è leggermente diverso e considero $m=n+p$):

$$\left(\sum_n |a_n| \text{ converge} \right) : \forall \varepsilon (> 0), \exists v : \forall n, p (n \geq v \Rightarrow |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon)$$

$$\left(\sum_n a_n \text{ converge} \right) : \forall \varepsilon (> 0), \exists v : \forall n, p (n \geq v \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon)$$

Ora li metto a confronto ed ottengo:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon \quad (\text{disuguaglianza triangolare})$$

Quindi se è vero che la serie converge assolutamente, allora è ancora più certo che la serie converge normalmente. Il contrario però non sempre è vero in quanto è possibile avere serie che convergono normalmente ma non assolutamente.

Ad esempio:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad \text{che converge al valore } \log 2.$$

Se considero i valori assoluti dei termini ottengo la serie armonica semplice che come abbiamo visto diverge positivamente.

Serie in campo reale (a termini non negativi)

Considero la serie $\sum_n a_n$ dove $\forall n (a_n \geq 0)$ (quindi i termini non sono mai negativi).

Ora posso dire che $\sum_n a_n$ è regolare (cioè converge) $\Leftrightarrow \sum_n a_n = \sup_n S_n (= S)$.

Infatti se la successione degli S_n è crescente, allora il valore S della serie è finito solo se la successione è limitata (il limite della successione sarà quindi S).

Criterio di confronto

Considero due serie a termini positivi $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ tali che $\forall n (0 \leq a_n \leq b_n)$ (quindi la serie dei b_n è *maggiorante* della serie degli a_n).

Posso dire che :

- se $\sum_n b_n$ converge, allora converge anche $\sum_n a_n$.
- se $\sum_n a_n$ diverge, allora diverge anche $\sum_n b_n$.

Dimostro il primo caso:

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad S'_n = \sum_{k=1}^n b_k \quad S_n \leq S'_n$$

$$S_n \leq S'_n \leq \sup_n S'_n < +\infty$$

L'ultima disuguaglianza dice che essendo S'_n finito (per ipotesi) allora sicuramente è finito anche S_n e quindi resta dimostrato il primo caso. È ovvio che il secondo caso è facilmente dimostrabile in maniera analoga.

Criterio della radice

Considero la serie $\sum_n a_n$ tale che $\forall n (a_n \geq 0)$ (termini non negativi).

Se vale $\forall n (\sqrt[n]{a_n} \leq R < 1)$, allora la serie $\sum_n a_n$ converge.

Dimostro quanto detto:

elevo la disuguaglianza del criterio alla n : $\forall n (a_n \leq R^n < 1)$.

Otengo una serie geometrica $\sum_n R^n$ maggiorante della serie $\sum_n a_n$. Per le proprietà delle serie geometriche ho che $\sum_n R^n$ converge e quindi, per il criterio del confronto, converge anche la serie $\sum_n a_n$.

Posso quindi dire che se $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$ allora a seconda del valore di L la serie ha i seguenti caratteri:

Valore di L	Carattere della serie
<1	Convergente
>1	Divergente positivamente
$=1$	Indeterminata

Si noti che $\lim_n \sqrt[n]{x_n} = \lim_n \frac{x_n + 1}{x_n}$.

Criterio del rapporto

Considero una serie $\sum_n a_n$ tale che $\forall n (a_n \geq 0)$ (a termini non negativi).

Se vale $\forall n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq R < 1 \right)$ allora la serie $\sum_n a_n$ converge.

Dimostro quanto appena detto:

$$\left. \begin{array}{l} a_2 \leq R \cdot a_1 \\ a_3 \leq R \cdot a_2 \leq R \cdot R \cdot a_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_n \leq R \cdot a_{n-1} \leq R^{n-1} \cdot a_1 \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\} \text{quindi posso dire che } \forall n (a_{n+1} \leq R^n \cdot a_1) \text{ per } n \geq 1.$$

Otengo quindi una serie geometrica $\sum_n R^n \cdot a_1$ che è maggiorante della serie $\sum_n a_n$.

Essendo $R < 1$, la serie geometrica converge e quindi, per il criterio del confronto, anche la serie $\sum_n a_n$ converge.

Posso quindi dire che a seconda del valore del limite $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ la serie ha i seguenti caratteri:

Valore di L	Carattere della serie
<1	Convergente
>1	Divergente positivamente
$=1$	Indeterminata

Criterio di Raabe

Considero una serie $\sum_n a_n$ tale che $\forall n (a_n \geq 0)$ (termini non negativi).

Se vale $\exists n_0, \exists k(>1): \forall n \left(n \geq n_0 \Rightarrow n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq k \right)$ allora la serie $\sum_n a_n$ converge.

Posso quindi dire che a seconda del valore del limite $\lim_n \left[n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right] = L$ la serie ha i seguenti caratteri:

Valore di L	Carattere della serie
>1	Convergente
≤ 1	Divergente

Osservazione per le serie a termini non POSITIVI

Per applicare i criteri ad una serie a termini *NON POSITIVI* studio la serie dei termini in valore assoluto:

$$\sum_n a_n \text{ tale che } \forall n (a_n \leq 0), \text{ allora studio } \sum_n |a_n|$$

Proposizione sulle serie ed integrali

Consideriamo una funzione $f: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$. Prendiamo per esempio la funzione $f = \frac{1}{x^p}$ con $p > 0$ (tende a zero per x tendente ad infinito).

Ora considero due valori:

- $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$
- $\sigma_n = \int_1^n f(x) \cdot dx$

La proposizione dice che le successioni (S_n) e (σ_n) o sono entrambe convergenti o sono entrambe positivamente divergenti.

Criterio di Leibnitz per le serie alternate

Considero una serie alternata $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$, $\forall n (a_n > 0)$.

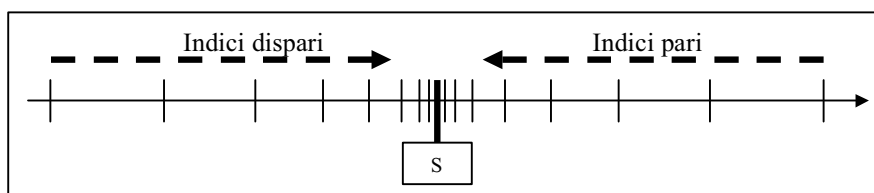
Il criterio di Leibnitz dice che *condizione sufficiente* per la convergenza di detta serie è che gli a_n tendano a zero per n tendente ad infinito (attenzione: dalla definizione della serie considerata, gli a_n sono sempre positivi!).

Quindi una serie alternata converge se vale $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Dimostriamo:

- Considero una somma parziale ad indice *pari*: $S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2}$
- Faccio la differenza tra S_{2n+2} e S_{2n} ed ottengo $S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2}$
- Questa differenza è positiva in quanto per ipotesi gli a_n sono positivi e decrescenti e quindi posso tranquillamente affermare che $S_{2n+2} \geq S_{2n}$.
- Ora considero una somma parziale ad indice *dispari*: $S_{2n+3} = S_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3}$
- Faccio la differenza tra S_{2n+3} e S_{2n+1} ed ottengo $S_{2n+3} - S_{2n+1} = -a_{2n+2} + a_{2n+3}$
- Questa differenza è negativa in quanto per ipotesi gli a_n sono positivi e decrescenti e quindi posso tranquillamente affermare che $S_{2n+3} \leq S_{2n+1}$.
- Ora metto insieme questi due risultati e posso affermare che $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$.

- Facendo il limite per n tendente ad infinito di quest'ultimo risultato, osservo che il termine a_{2n+1} tende a zero e quindi $S_{2n+1} = S_{2n}$ (per $n \rightarrow +\infty$). Il valore in cui si incontrano queste due *successioni* di somme parziali è il risultato della serie. In pratica le due *successioni* (quella con indici pari e quella con indici dispari) tendono allo stesso limite S da due direzioni diverse:



Osservazione sulle serie a termini complessi

Considero una serie a termini complessi $\sum_n z_n$ con $z_n = x_n + iy_n$. Posso allora considerare due serie distinte

e cioè la serie dei termini reali e la serie dei termini immaginari, ottenendo $S_n = \sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n x_k + i \sum_{k=1}^n y_k$.

ATTENZIONE: questo metodo è utile solo nei casi in cui sia facile separare la parte reale dalla parte immaginaria dei termini z_n .

Criterio di Dirichlet

Considero una serie nella forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot b_n$ con termini *misti* $a_n \in \mathbb{C}$ e $b_n \in \mathbb{R}$ (\mathbb{C} = campo complesso, \mathbb{R} = campo reale, ovviamente).

Considero la somma parziale dei soli termini a_n : $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$. S_n sarà quindi un numero complesso.

Se vale $\exists M : \forall n (|S_n| \leq M)$ ed i termini b_n sono positivi e decrescenti (tendenti a zero), allora la serie

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot b_n$ converge.

Criterio di Abel

Considero una serie nella forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot b_n$ con termini *misti* $a_n \in \mathbb{C}$ e $b_n \in \mathbb{R}$.

Se la serie complessa dei soli termini a_n : $\sum_n a_n$ converge e $|b_n| \leq M$, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot b_n$ converge.

Serie prodotto (Cauchy)

Considero due serie a termini complessi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A \in \mathbb{C}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = B \in \mathbb{C}$. Posso dire che esiste una serie la cui somma è $A \cdot B$.

Questa serie sarà $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ dove i termini c_n sono così definiti:

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \cdot b_0 \\ c_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 \\ c_2 = a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Posso inoltre affermare che se la serie degli a_n converge *assolutamente* ad A e la serie dei b_n converge a B , allora la serie dei c_n (serie prodotto) converge a $A \cdot B$.

Serie di Taylor

Considero una funzione $f: I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tale che $f \in C^\infty(I)$ (cioè fa parte dell'insieme delle funzioni derivabili infinite volte nell'intorno I di un punto x_0).

È possibile costruire un *polinomio* detto *polinomio di Taylor* definito come segue:

$$T_n[f](x) = p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Questo polinomio ha la caratteristica di avvicinarsi al valore di $f(x)$ al tendere di n all'infinito. La differenza tra il vero valore della funzione ed il valore del polinomio è detta *resto* ed è quindi definita come:

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \quad \text{dove il punto } c \in I(x_0, x) \text{ (cioè appartiene all'intorno di } x_0).$$

Al tendere di n all'infinito abbiamo detto che $p(x)$ tende al valore di $f(x)$ e quindi il resto $r_n(x)$ tenderà a zero.

Ho inoltre ridefinito f come $f(x) = p_n(x) + r_n(x)$.

Dal polinomio possiamo estrapolare una serie detta *serie di Taylor*: $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$.

Il polinomio e la serie di Taylor sono utili per ottenere *approssimazioni* accettabili di funzioni complesse. Infatti, solitamente, il polinomio di Taylor è di grado inferiore e comunque più semplice da manipolare della funzione iniziale.

Teorema sulla sviluppabilità di funzioni

Considero una funzione $f: I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ con $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

Se vale $\exists M: \forall n, x \left(|f^{(n)}(x)| \leq M \right)$, allora la funzione f è sviluppabile in *serie* di Taylor di *punto iniziale* x_0 .

Questo significa che all'interno dell'intorno I di x_0 le derivate n -esime di f devono essere tutte limitate.

Dimostrazione:

- so che la funzione f posso ridefinirla come $f(x) = p_n(x) + r_n(x)$
- so anche che il resto n -esimo è $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$, con $c \in I(x_0, x)$
- sempre dalla definizione di resto di Taylor so che $\lim_n r_n(x) = 0$
- posso dire che $|r_n(x)| \leq \frac{M \cdot \delta^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, dove $\delta^{n+1} = (x - x_0)^{n+1}$ (vedi definizione dell'intorno I).
- ora prendo la definizione del resto e l'ultima disuguaglianza ed ottengo $\frac{|r_n(x)| \cdot (n+1)!}{(x - x_0)^{n+1}} \leq M \Rightarrow |f^{(n+1)}(c)| \leq M$ che guarda caso è proprio la condizione di sviluppabilità sopracitata. Quindi la funzione f risulta essere sviluppabile.

Osservazioni sul resto

Considero una serie $\sum_n a_n$ e suppongo che sia convergente in S .

Fisso un indice m trascuro i primi m elementi della serie iniziale, ottenendo $a_{m+1} + a_{m+2} + \dots = \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k = R_m$.

La serie R_m così definita (serie resto) converge pure essa per qualsiasi valore di m (ovvio, in quanto la condizione necessaria alla convergenza di una serie è che i termini tendano a zero e quindi, trascurando i primi che sono i più *grandi*, sicuramente ottengo una serie convergente per il criterio del confronto in quanto R_m è minorante della serie iniziale).

Quanto vale R_m ? Ovviamente ho che $R_m = S - S_m$

Successioni di funzioni

Definisco successione di funzioni la $f_n : A \mapsto R$ (vale anche per il campo complesso). In pratica l'indice n della successione diventa un ulteriore *parametro* della funzione.

Convergenza puntuale su A

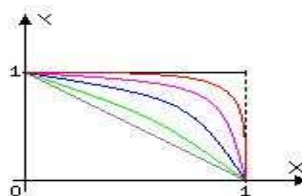
$\forall x \in A$, la successione $(f_n(x))$ converge se vale $\lim_n f_n(x) = l(x) = f(x)$ dove $f(x)$ è la *funzione limite*.

Esempio:

$$f_n(x) = 1 - x^n, \quad x \in [0, 1]$$

$$\begin{cases} f(0) = 1 & , x = 0 \\ f(1) = 0 & , x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_n f_n(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{funzione limite}} = 1, \quad x \in [0, 1[$$



Convergenza uniforme

Cosa significa fare il limite di una successione di funzioni?

$$\lim_n f_n(x) = f(x) \text{ significa che } \forall \varepsilon (> 0), \forall x, \exists v_{(\varepsilon, x)} (\forall n (n \geq v) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

Come si vede, il valore v è funzione del valore di ε e del valore di x . In tutti i casi in cui v è funzione della sola ε , allora ho convergenza *uniforme* della successione: $\forall \varepsilon (> 0), \forall x, \exists v_\varepsilon (\forall n (n \geq v) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$.

La convergenza uniforme di f_n in f si indica con una doppia freccia: $f_n \rightarrow f$.

Questo tipo di convergenza è molto importante in quanto tutte le proprietà di f_n si trasferiscono alla funzione limite f .

Proprietà di continuità

Considero una successione di funzioni f_n tale che $\forall n (f_n \text{ continua in } x_0)$.

Se vale che $f_n \rightarrow f$, allora anche la funzione limite f è continua in x_0 .

Proprietà di derivabilità

Considero una successione di funzioni f_n tale che $(f_n(x_0))$ converge.

Se vale $f'_n \rightarrow f'$, allora ho che $f_n \rightarrow f$, inoltre f è derivabile e la derivata è proprio f' .

Serie di funzioni

Considero una successione di funzioni $(f_n(x))$ dove $f_n : A \mapsto C$.

Definisco la somma parziale $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$. Supponendo che la successione delle somme parziali $(S_n(x))$

converga, posso dire che $\lim_n S_n(x) = f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$.

Teorema sull'uniforme convergenza e gli integrali

Considero una successione di funzioni f_n che sia convergente uniformemente in f e tale che tutte le f_n siano derivabili.

Volendo calcolare l'integrale della funzione f tra a e b posso utilizzare (spesso è più comodo) l'integrale del limite della successione. **ATTENZIONE:** questo posso farlo solo se c'è l'uniforme convergenza di f_n .

Quindi $\int_a^b f = \int_a^b \lim_n f_n = \lim_n \int_a^b f_n$, ma solo se $f_n \rightarrow f$.

Ora considero la successione di funzioni \mathbf{f}_n . Come visto, da questo posso ottenere la successione delle somme parziali $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$. Come visto il limite di tale successione è la funzione limite $\lim_n S_n(x) = f(x)$ che

è anche il valore della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x)$.

Se supponiamo che $f_n \rightarrow f$, allora $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \lim_n \sum_{k=1}^n f_k(x)$.

Volendo calcolare l'integrale di \mathbf{f} , posso utilizzare la forma

$$\int_a^b f = \int_a^b \lim_n \left(\sum_{k=1}^n f_k(x) \right) = \lim_n \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(x) = \lim_n \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)$$

Questo mi dice che l'integrale di \mathbf{f} è uguale alla somma della serie degli integrali di ogni funzione della successione (solo però se vale l'uniforme convergenza).

Criterio di uniforme convergenza di Cauchy

Ritorniamo per un attimo alla serie resto che, nel caso di serie di funzioni, sarà definita nella seguente maniera:

$$R_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots$$

Definisco *somma parziale del resto* la $R_{n,p}(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)$.

Come una comune somma parziale, anche questa è tale che $R_n(x) = \lim_p R_{n,p}(x)$.

Chiusa la parentesi (che ci servirà tra poco), considero una serie di funzioni $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$.

Cauchy chiede la convergenza del resto per avere l'uniforme convergenza della serie di funzioni:

$$\forall \varepsilon (> 0), \forall x, \exists v_\varepsilon : \forall p, n (n > v_\varepsilon \Rightarrow |R_{n,p}(x)| < \varepsilon)$$

Quindi se il resto della serie di funzioni converge, la serie converge uniformemente.

Criterio di uniforme convergenza di Weierstrass

Considero una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ con $x \in A$.

Se vale $\forall n, \exists M_n : \forall x (|f_n(x)| \leq M_n)$ (in pratica ogni \mathbf{f}_n deve essere limitata) ed inoltre vale

$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ converge, allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge *assolutamente ed uniformemente* su \mathbf{A} .

Proprietà delle serie uniformemente convergenti

Considero una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ con $x \in A$.

- Se la serie è uniformemente convergente ad \mathbf{f} e se le \mathbf{f}_n sono continue su \mathbf{A} , allora \mathbf{f} è continua su \mathbf{A} .
- Se la serie è uniformemente convergente ad \mathbf{f} e se le \mathbf{f}_n sono integrabili, allora \mathbf{f} è integrabile e vale

$$\int_a^b f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n$$

- Se la serie converge nel punto \mathbf{x}_0 e la serie delle derivate $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$ è uniformemente convergente,

allora la serie iniziale converge uniformemente ad \mathbf{f} su \mathbf{A} , inoltre \mathbf{f} è derivabile ed è $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$.

Serie di potenze

Considero una funzione generica $f: I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ed un punto $x_0 \in I$.

Questa funzione sia sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 e sia il suo sviluppo:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k \quad \text{valido } \forall x \in I \text{ e con } a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Imponendo $x_0=0$ ottengo la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ detta *serie di potenze*. Si nota quindi che uno sviluppo di Taylor in $x_0=0$ è una serie di potenze.

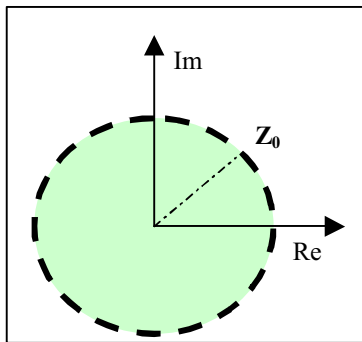
Analogamente posso considerare la serie di potenze *complessa* che segue: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$ dove $z \in \mathbb{C}$.

Chiaramente le serie di potenze convergono sempre quando z (o x) valgono zero, a prescindere dalla successione degli a_n in quanto in questo caso gli elementi della serie sono sempre nulli.

Proprietà fondamentale delle serie di potenze

Supponiamo che la serie di potenze complessa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ converga anche in un punto diverso da $z_0 \neq 0$. Allora

posso dire che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z_0^n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ converge assolutamente $\forall z: |z| < |z_0|$.



Questa proprietà definisce un'area circolare distante z_0 dall'origine. Ogni punto di questa area è un valore distinto di z che riesce a far convergere (assolutamente) la serie di potenze data. Si noti che da definizione l'area circolare *interna* è quella per la quale i punti z tendono a far convergere *assolutamente* la serie, mentre i punti z che stanno sulla circonferenza (quella tratteggiata in figura) fanno convergere *normalmente* la serie.

Ora dimostro quanto detto:

per dire che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z_0^n$ converge, è necessario che $a_n \cdot z_0^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (questo per la condizione *necessaria* di Cauchy). Quindi posso tranquillamente dire che $\exists M : \forall n \left(|a_n \cdot z_0^n| \leq M \right)$ (in pratica sto dicendo che tutti

gli elementi $a_n \cdot z_0^n$ sono limitati. Questo è vero in quanto Cauchy pretende addirittura che tendano a zero!).

Ora posso anche dire che $|a_n \cdot z^n| = \left| a_n \cdot \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \cdot z_0^n \right| \leq \underbrace{M}_{\substack{\text{quindi sostituisco} \\ |a_n \cdot z_0^n| \text{ con } M \\ \text{e cambio con } \leq}} \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$. In questa maniera ho maggiorato

la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot z^n|$ con la serie (geometrica) $M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$. Quest'ultima serie geometrica ha *ragione* $\left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$

in quanto per ipotesi abbiamo che $|z| < |z_0|$. Quindi la serie geometrica converge e quindi (criterio del confronto) anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot z^n|$ converge. Questo significa che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ converge assolutamente. La proprietà è quindi dimostrata.

Raggio di convergenza

Chiamo *raggio di convergenza* il valore $R(\geq 0) := \sup(|z|): \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n \text{ converge}$. Quindi posso dire che il raggio di convergenza è il confine dell'area di convergenza (in pratica la circonferenza tratteggiata nella figura di cui sopra).

Posso dire che per tutti i punti distanti dall'origine meno di R , la serie di potenze *converge assolutamente ed uniformemente*. Dimostrazione:

considero la solita serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ e considero un punto $z: |z| = r < R$.

Posso dire quindi che $|a_n \cdot z^n| \leq |a_n| \cdot r^n$. Per la proprietà fondamentale delle serie di potenze ho che la serie

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n$ converge assolutamente. Questa serie maggiora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot z^n|$ e quindi, per il criterio di

uniforme convergenza di Weierstrass, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot z^n|$ converge *assolutamente ed uniformemente*.

Calcolo del raggio di convergenza

Il raggio di convergenza esiste sempre per una serie di potenze, per cui posso sempre trovarlo. Di seguito sono riportati alcuni metodi per trovarlo:

- $\lambda = \max_n \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow \begin{cases} R = \frac{1}{\lambda}, \lambda > 0 \\ R = +\infty, \lambda = 0 \end{cases}$
- $\lim_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$. In questo caso questo limite può non esistere e devo quindi per forza usare il primo metodo descritto sopra.

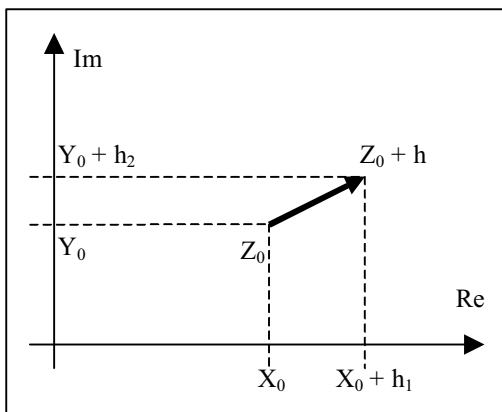
Derivata in campo complesso

Considero una funzione $f: A \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ ed un punto $z_0 \in A$. Calcolo il limite del *rapporto incrementale* di

questa funzione in un punto $z \in A: z \neq z_0$: $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ (nell'ultimo caso

deve essere $h \in \mathbb{C}$). Se questo limite esiste, allora il suo valore rappresenta il valore della derivata della funzione nel punto z_0 .

Cosa significa calcolare il rapporto incrementale di una *funzione complessa*?



Il valore h del limite (quello scritto nella seconda forma) è un valore complesso definito come $h = h_1 + i \cdot h_2$. Fare detto limite significa considerare un cerchio attorno al punto z_0 che tende a stringersi sempre più. Fare invece il limite nella prima forma significa *andare* dal punto z al punto z_0 e quindi scegliere un *percorso* che avvicini il punto z al punto z_0 .

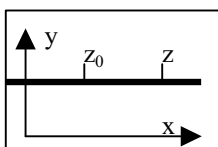
Questo è **MOLTO IMPORTANTE** in quanto questi due metodi di eseguire il limite del rapporto incrementale posso portare a risultati diversi: considero ad esempio due funzioni nel campo complesso Φ e Z tali che $\lim_{z \rightarrow z_0} \Phi(z) = l$ e $\lim_{t \rightarrow t_0} Z(t) = z_0$.

Posso dire che se $\lim_{z \rightarrow z_0} \Phi(z) = l$, allora $\lim_{t \rightarrow t_0} \Phi(Z(t)) = l$, ma

non il contrario (o meglio, il contrario non è sempre vero). Questo in quanto il valore del secondo limite è in funzione del *percorso* Z che utilizzo per avvicinarmi a z_0 (in pratica dipende dalla funzione Z).

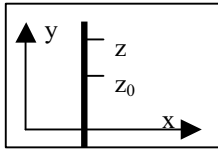
Ci sono casi in cui posso trovare due percorsi (due funzioni) Z_1 e Z_2 che portano il limite a due valori distinti l_1 ed l_2 . In questo caso la funzione $\Phi(z)$ non ha limite.

Ad esempio consideriamo la funzione $f(z) = \bar{z} = x - i \cdot y$ con $z = x + i \cdot y$ (in pratica la funzione f associa ad ogni numero complesso z il suo coniugato).



Calcoliamo il rapporto incrementale (nella prima forma) di f utilizzando il *percorso* orizzontale (in pratica z e z_0 hanno la stessa parte immaginaria).

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$



Facciamo ora la stessa cosa ma utilizzando il *percorso* verticale (in pratica z e z_0 hanno stessa parte reale).

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \frac{-i \cdot (y - y_0)}{i \cdot (y - y_0)} = -1$$

In questo caso i due limiti sono diversi e quindi il limite del rapporto incrementale non esiste \rightarrow la funzione non è derivabile su \mathbb{C} (campo complesso).

Derivata di una funzione di potenze

Considero una serie di potenze che definisca una funzione: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = f(z)$ con $|z| < R(>0)$ dove R è il raggio di convergenza della serie.
Si può dimostrare che:

- la serie delle derivate termine a termine $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot z^{n-1} \left(= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot z^n \right)$ ha lo stesso raggio di convergenza R .
- $f(z)$ è derivabile in \mathbb{C} ed inoltre $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot z^n$
- una funzione del tipo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ (quindi anche una serie di potenze) ha le derivate di ogni ordine (quindi $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{C})$).

Si noti che lo sviluppo in serie di Taylor crea una serie di potenze $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ dove

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Questo teorema sulla derivata di una serie di potenze quindi ci indica la strada per calcolare facilmente lo sviluppo in serie di funzioni che sono derivate di altre funzioni il cui sviluppo in serie sia già noto.

Funzioni analitiche

Una funzione è detta analitica se è definita nella seguente maniera: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ con $|z| < R(>0)$.

Teorema sulla integrabilità della serie di Taylor

Considero una funzione reale $f: I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ con $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Suppongo che la funzione f sia sviluppabile in I di punto iniziale x_0 .

La serie di Taylor dello sviluppo di f sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ dove $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Considero ora una serie di potenze in \mathbb{C} simile alla serie di sviluppo di cui sopra $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - x_0)^n$.

Prendendo come raggio di convergenza il valore δ e prendendo come origine il punto x_0 posso dire che la serie $\varphi(z)$ converge normalmente per i punti z che stanno sulla circonferenza di raggio δ centrata in x_0 e converge assolutamente ed uniformemente per i punti z che stanno all'interno di detta circonferenza (riguarda il discorso fatto per il raggio di convergenza).

Posso quindi affermare che la funzione iniziale (e quindi il suo sviluppo in serie di Taylor)

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ converge uniformemente su $[x_0 - h, x_0 + h]$ con $0 < h < \delta$ (considero solo il reale).

Questo mi consente di dire che $f(x)$ si può integrare termine a termine (inteso come termini della serie di Taylor):

$$\int_{x_0}^x f(x) = \int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \cdot dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \int_{x_0}^x (x - x_0)^n \cdot dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}$$

Tramite questo teorema riesco facilmente a risalire agli sviluppi delle funzioni primitive di altre funzioni il cui sviluppo in serie di Taylor è già noto.

Esponenziale complesso

Si può dimostrare che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = E(z) = e^z$. Questa serie converge assolutamente $\forall z \in \mathbb{C}$.

Le proprietà fondamentali dell'esponenziale complesso sono:
$$\begin{cases} e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \\ e^z \neq 0 \end{cases}$$

Formula di Eulero

La formula di Eulero dice che $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$.

Da quanto visto sopra, scritto che $e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i \cdot y)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k \cdot y^{2k}}{2k!}}_{\substack{n=2k \\ i^{2k}=(-1)^k \\ \cos y}} + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k \cdot y^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\substack{n=2k+1 \\ i^{2k+1}=i(-1)^k \\ \sin y}}.$

Da quanto scritto sopra, quindi, ottengo che $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y)$.

Si noti le seguenti importanti proprietà:

- $|e^z| = \sqrt{e^{2x} \cdot \cos^2 y + e^{2x} \cdot \sin^2 y} = e^x$
- $\arg(e^z) = y + 2k\pi$ dove **arg** indica la funzione *argomento* che ritorna l'angolo di un vettore rispetto all'asse delle ascisse.

Seno e coseno in campo complesso

Posso definire le funzioni *seno* e *coseno* in campo complesso partendo dall'esponenziale complesso:

prendo $e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!}$ e $e^{-iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iz)^k}{k!}$.

Calcolo $e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k}}{(2k)!}$ (sono sparite le potenze dispari).

Calcolo $e^{iz} - e^{-iz} = 2i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ (sono sparite le potenze pari).

Si dimostra che in campo complesso ho $\cos z = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k}}{(2k)!}}{2}$ e $\sin z = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k+1}}{(2k+1)!}}{2i}$.

Quindi, in parole semplici ho che $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ e $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

Da queste ottengo le formule *iperboliche* $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (ho considerato $z=x$ ed inoltre ho tolto la costante immaginaria dalle formule).

Logaritmo in campo complesso

Parto dall'esponente complesso $e^z = w$. Il valore w è assegnato e devo trovare il valore z tale che soddisfi l'equazione di cui sopra.

Tramite la formula di Eulero, trasformo l'equazione di cui sopra in $e^z = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) = w$.

Posso quindi dire che $|w| = e^x$ mentre $\arg w = y + 2k\pi$.

Sarà quindi $z = \ln|w| + i \arg w$. Visto che $\arg w$ è un insieme di valori (tutti distanti $2k\pi$ dagli altri), si capisce che il logaritmo complesso non è una funzione *iniettiva*. Per questo motivo introduciamo il cosiddetto *logaritmo principale* il quale utilizza l'*argomento principale*, cioè l'argomento con $k = 0$.

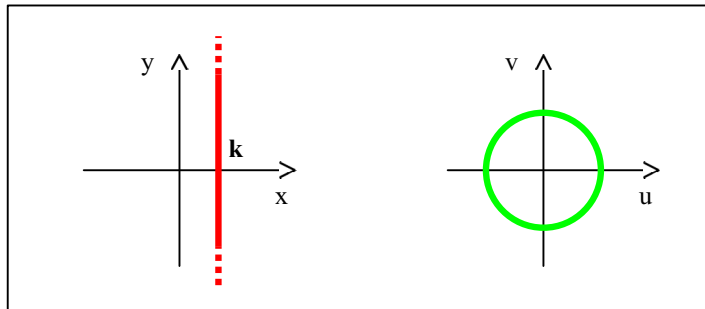
Consideriamo ora la trasformazione che subisce la coordinata immaginaria w che, tramite logaritmo, diventa z :

Abbiamo detto che $w = e^z$, inoltre possiamo vedere $w = u + i \cdot v$ e $z = x + i \cdot y \Rightarrow e^z = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y)$.

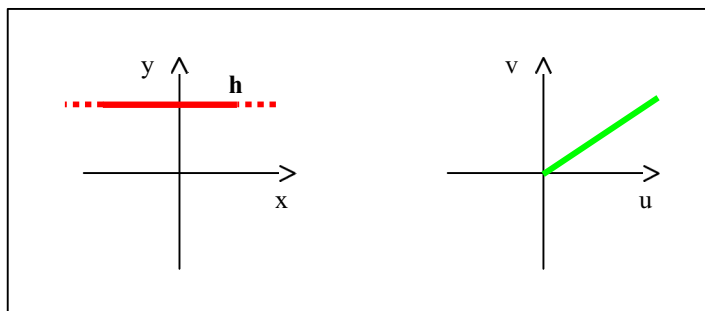
Questo significa che $w = e^z \Rightarrow u + i \cdot v = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y) \Rightarrow \begin{cases} u = e^x \cdot \cos y \\ v = e^x \cdot \sin y \end{cases}$.

Se ora grafichiamo l'andamento di questa trasformazione in \mathbf{R}^2 otteniamo i seguenti comportamenti:

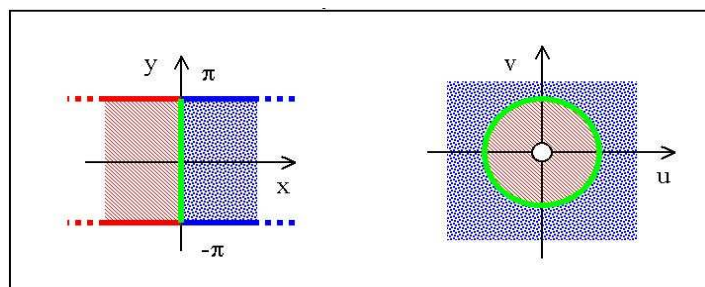
- Per le rette del tipo $x = k$ otteniamo $u = e^k \cdot \cos y$ e $v = e^k \cdot \sin y$ che rappresenta una circonferenza di raggio e^k :



- Per le rette del tipo $y = h$ otteniamo $u = e^x \cdot \cos h$ e $v = e^x \cdot \sin h$:



- Prendendo una striscia di ampiezza $-\pi < y \leq \pi$ otteniamo una figura come la seguente:



In pratica i punti che a sinistra rientrano nella parte rossa si trasformano nel cerchio (forato al centro) di colore rosso. I punti che rientrano nella parte blu, si trasformano nel complementare del cerchio di colore blu. I punti che rientrano nell'asse immaginario compreso tra $-\pi$ e π di colore verde, si trasformano nella circonferenza di colore verde (di raggio unitario).

Funzioni di più variabili

Considero uno spazio vettoriale \mathbf{R}^n con norma euclidea (sarà l'ambiente della variabile indipendente).

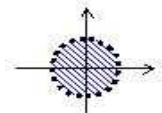
Il quadrato della norma euclidea, in uno spazio di questo genere, è definito come $\|\bar{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Definisco inoltre la distanza euclidea $d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|$.

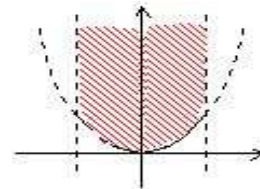
Tramite queste due proprietà, posso individuare dei sottoinsiemi dello spazio.

• In \mathbf{R}^2 :

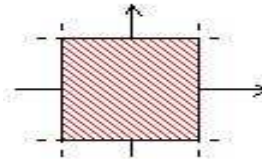
1. $x^2 + y^2 < 1$ individua un cerchio (senza circonferenza) di raggio unitario



2. $\begin{cases} y > x^2 \\ |x| \leq 2 \end{cases}$ individua una superficie parabolica tagliata

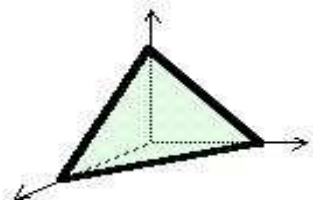


3. $\begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \end{cases}$ individua una superficie quadrata



• In \mathbf{R}^3 :

- A. $\begin{cases} x + y + z < 1 \\ x > 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \end{cases}$ individua il semispazio a forma di piramidale in figura

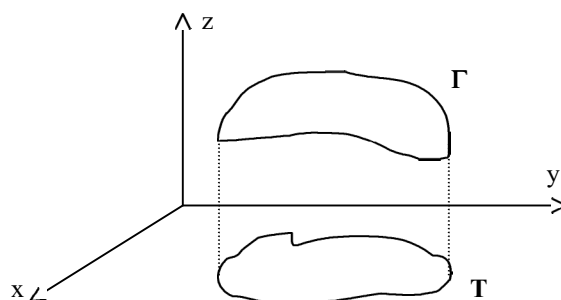


Applicazioni numeriche definite su \mathbf{R}^n

Normalmente le applicazioni numeriche definite su \mathbf{R}^n sono nella forma $f: T \subset \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$.

In simboli ho che $z = f(\bar{x})$ oppure che $z = f(x, y)$ dove x ed y sono le *componenti* di \bar{x} . Si noti che la denominazione *funzioni in più variabili* deriva dalla seconda forma data.

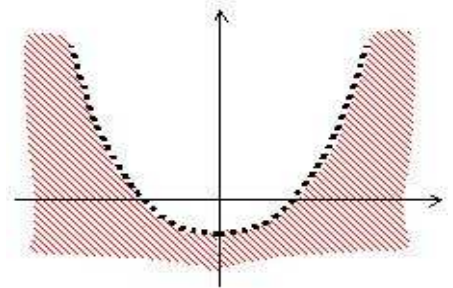
Definisco *grafico di f* l'insieme $\Gamma(f) = \{(\bar{x}, z) / \bar{x} \in T : z = f(\bar{x})\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$. In pratica non faccio altro che unire *dominio* e *codominio* dell'applicazione numerica in maniera da ottenere una superficie:



Campo di esistenza

Il *campo di esistenza* di una funzione rappresenta l'insieme dei punti del *dominio* in cui la funzione è definita. Applicando la funzione ai punti che stanno al di fuori di questo insieme, la funzione non può esistere in quanto la sua definizione non è compatibile con i punti stessi.

Ad esempio $f(x, y) = \ln(x^2 - y - 1)$ è definita nell'insieme di punti tali che $x^2 - y - 1 > 0$ in quanto il logaritmo è definito per numeri positivi. Questo significa che i punti di validità sono tali che $y < x^2 - 1$, che rappresenta l'insieme di punti che “sta sotto” alla parabola in figura.

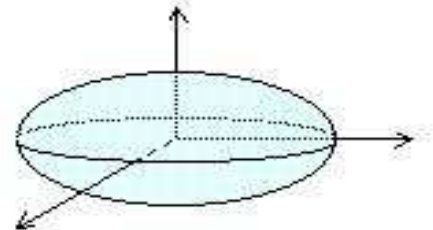


Ulteriore studio di grafici (e di superfici)

- **Elissoide:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

È una superficie definita in \mathbf{R}^3 con **a**, **b** e **c** > 0. Se sviluppo la definizione della funzione rispetto alla componente **z**, ottengo

$z = \pm c \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$. Il simbolo \pm suggerisce che la superficie sia simmetrica rispetto al piano **XY**. Inoltre se **a=b=c** ottengo una sfera.

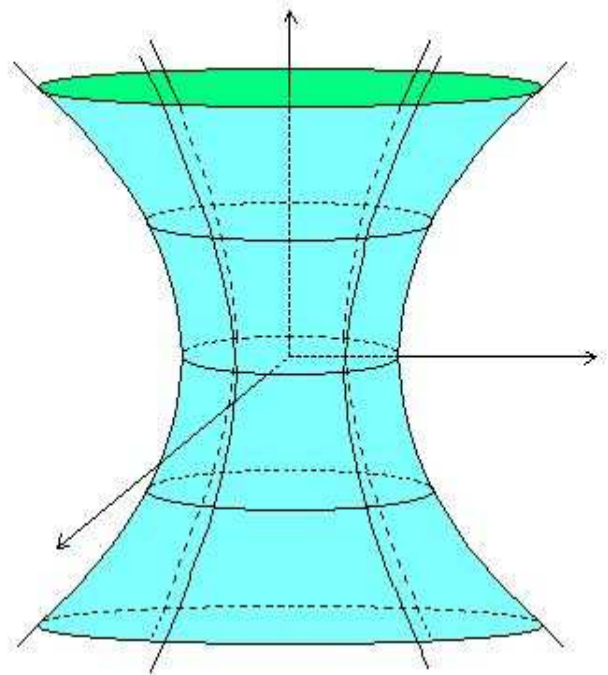


- **Iperboloide ad una falda:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

È una superficie definita in \mathbf{R}^3 con **a**, **b** e **c** > 0. Se sviluppo la definizione della funzione rispetto alla

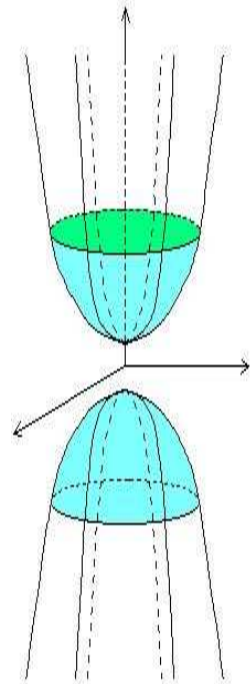
componente **z**, ottengo $z = \pm c \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}$.

Anche in questo caso ottengo una superficie simmetrica rispetto al piano **XY**.



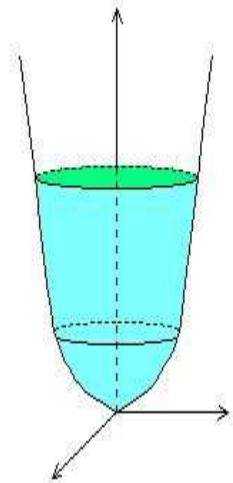
- **Iperboloide a due falde:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

È una superficie definita in \mathbf{R}^3 con **a**, **b** e **c** > 0. Se sviluppo la definizione della funzione rispetto alla componente **z**, ottengo $z = \pm c \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$. Anche in questo caso ottengo una superficie simmetrica rispetto al piano **XY**.



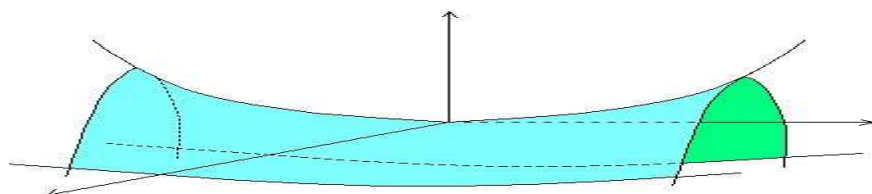
- **Paraboloide ellittico:** $2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$

È una superficie definita in \mathbf{R}^3 con **p** e **q** > 0. In questo caso la superficie non è simmetrica rispetto al piano **XY** in quanto il valore di **z** è definito univocamente per ogni coppia (**x**,**y**).



- **Paraboloide ellittico o a sella:** $2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$

È una superficie definita in \mathbf{R}^3 con **p** e **q** > 0. Anche in questo caso il valore di **z** è univocamente determinato per ogni coppia (**x**,**y**), per cui il grafico non sarà simmetrico rispetto al piano **XY**.



Superfici di rotazione

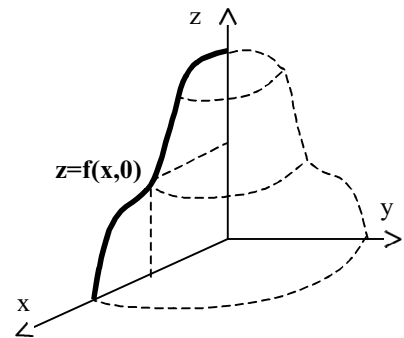
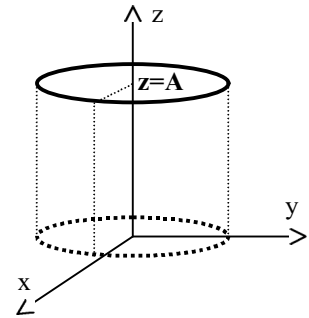
Considero una funzione definita come $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}) = z$. I suoi valori sono ricavati da una funzione g applicata ai valori della *norma* nel piano XY di ogni punto. Inoltre il valore della funzione f corrisponde all'*altezza* z di uno spazio tridimensionale.

Suppongo ora di prendere tutti i punti del piano XY a norma costante.

Ho quindi che $x^2 + y^2 = k \Rightarrow f(x, y) = g(\sqrt{k}) = A$. Si noti che sono partito dalla norma al quadrato, ma il ragionamento non cambia. Si ottiene quindi una costante A che corrisponde ad un'altezza z costante.

I punti di XY con norma costante stanno su una circonferenza. Valorizzando la coordinata z non si fa altro che spostare "in alto" questa circonferenza. In pratica abbiamo trovato una *curva di livello* simile a quelle visibili nelle cartine topografiche: la circonferenza rappresenta l'insieme dei punti di XY che sono tutti a livello z (che, per come ho costruito la $f(x, y)$, stanno tutti su una circonferenza).

Iterando il procedimento su A (cioè variando di volta in volta il valore del livello ottenendo così tante circonferenze, ognuna ad un livello diverso), riesco a trovare una superficie di rotazione (un po' come se lavorassi al tornio un pezzo di metallo). Studiando questa superficie si può notare che essa è la rotazione attorno all'asse z del grafico eseguito sul piano XZ (cioè con coordinata $y=0$). Quindi potrei graficare la funzione $z = g(\sqrt{x^2 + 0}) = g(x) = f(x, 0)$ e poi ruotare attorno all'asse z la figura ottenuta.



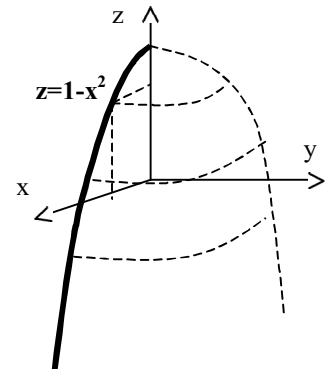
Facciamo un esempio concreto: considero la funzione $z = 1 - x^2 - y^2$.

Ponendo $\sigma = \sqrt{x^2 + y^2}$, posso scrivere

$z = 1 - x^2 - y^2 = 1 - \sigma^2 \Rightarrow g(\sigma) = 1 - \sigma^2$. Noto che questa funzione è definita come una superficie di rotazione (ha la funzione g che lavora sulla *norma*). Per ottenerne il grafico, posso agire come detto sopra, cioè pongo $y=0$ ottenendo $z = 1 - x^2$. Graficando questa funzione sul piano XZ otterrò una parabola con concavità verso il basso. Ruotando questo *profilo* attorno all'asse z , otterrò poi la superficie di rotazione associata alla funzione data.

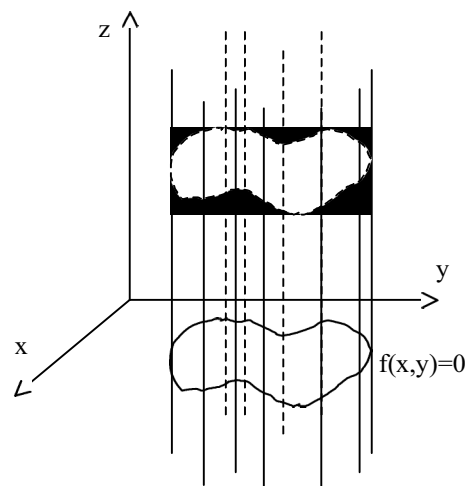
Di seguito sono riportati alcuni esempi di superfici di rotazione:

- **Sfera:** $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2} \Rightarrow \sigma = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow g(\sigma) = \sqrt{1 - \sigma^2}$
- **Cono:** $x^2 + y^2 - z^2 = 0 \Rightarrow z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, di quest'ultima considero solo la parte positiva, per cui ho $z = +\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \sigma = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow g(\sigma) = \sigma$



Il cilindro

Il cilindro è una superficie particolare in quanto è rappresentato da una superficie di sezione (che può essere circolare ed allora avremo il cilindro classico, o può avere altre forme ed allora avremo un cilindro generico) che viene traslata sull'asse z in modo da formare una *colonna*. L'equazione che definisce un cilindro è data dalla forma $f(x,y)=0$. Si noti che non vi rientra la coordinata z in quanto questa equazione deve valere per ogni valore di z (la sezione, abbiamo detto, deve essere traslata lungo questo asse). In pratica la funzione appena data definisce la sezione sul piano XY del cilindro stesso. Se questa equazione è quella di un cerchio, allora avremo un cilindro a sezione circolare.



Insiemi di livello

Nella definizione delle superfici di rotazione, abbiamo fatto cenno agli *insiemi di livello*, cioè agli insiemi dei punti del piano XY tali che applicandoli alla funzione di definizione della superficie si ottiene un valore costante. Questi insiemi di livello sono delle circonferenze (nel caso delle superfici di rotazione) e rappresentano tante sezioni parallele al piano XY della superficie stessa.

La definizione generale di insieme di livello per una funzione $f: T \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ è: $\{\bar{x} \in T / f(\bar{x}) = c\}$ dove la costante c rappresenta il livello associato a quell'insieme.

Limite delle funzioni a più variabili

Considero una funzione $f: X \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$.

Come si vede dalla definizione, il valore di f è in \mathbb{R} . Essendo \mathbb{R} ordinato, si può parlare di $\sup f(\bar{x})$, di $\max f(\bar{x})$ eccetera. Posso quindi calcolare il *limite* di questa funzione.

Considero un punto $\bar{x}_0 \in DX$ (cioè è un punto di *accumulazione*). Considero un valore $l \in \mathbb{R}$.

Posso scrivere che $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l$ se vale

$$\forall \varepsilon (> 0) \exists V_{\bar{x}_0} (\bar{x} \in V_{\bar{x}_0} \cap X \Rightarrow |f(\bar{x}) - l| < \varepsilon)$$

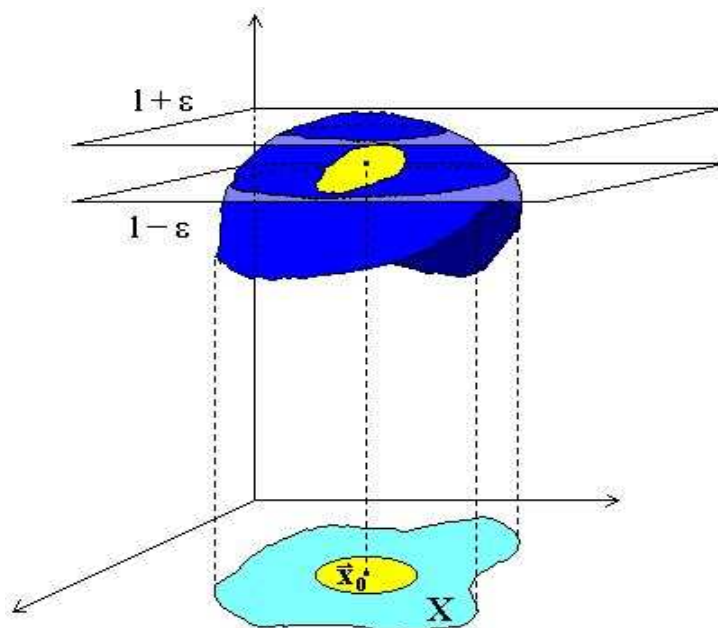
dove $V_{\bar{x}_0}$ è un intorno del punto \bar{x}_0 .

Se inoltre $\bar{x}_0 \in X$ e $l = f(\bar{x}_0)$ allora dico che

f è *continua* in \bar{x}_0 .

Graficando la definizione di limite di cui sopra posso dire che per ogni ε che prendo, esiste un intorno $V_{\bar{x}_0}$ tale che tutti i punti di questo

intorno che fanno parte anche di X (che è il dominio della funzione), hanno le loro immagini comprese tra due piani a livello $l-\varepsilon$ e $l+\varepsilon$.



Limiti iterati

Considero un punto fisso $\bar{x}_0 = (a, b)$ ed un punto generico $\bar{x} = (x, y)$.

Se $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l$ ed inoltre esistono anche $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = l$ e $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = l$ allora posso dire che vale

anche $\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right) = l$. In pratica, in questo caso, al limite posso arrivarci da qualsiasi strada ed ottengo sempre lo stesso risultato. Attenzione, però, in quanto il contrario non è vero (almeno non sempre): se $\lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right) = l$ non è detto che $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l$. Quindi, pur essendo uguali i limiti

iterati, non è detto che esista il limite della funzione.

Eventualmente, in \mathbf{R}^2 posso giungere allo stesso risultato anche utilizzando le *coordinate polari*.

La funzione diventa $f(x, y) = f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta) = g(\rho, \theta)$.

Da quanto scritto sopra deriva che $\begin{cases} x - x_0 = \rho \cos \theta \\ y - y_0 = \rho \sin \theta \end{cases}$.

Quindi $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0^+} g(\rho, \theta) = l$. Si noti che il secondo limite è indipendente dal valore di θ

(si dice che il limite è *uniforme* rispetto a θ).

Funzioni vettoriali

Considero una funzione definita come $f: X \subset \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^m$. Questa funzione trasforma punti di uno spazio n -dimensionale in punti di uno spazio m -dimensionale.

Possiamo vedere una funzione vettoriale come una m -pla di funzioni ad n variabili con valori reali:

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$ dove le f_1, f_2, \dots, f_m sono

funzioni ad n variabili nel reale definite come $f_{1..m}: X \subset \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$. Quindi possiamo scomporre una funzione vettoriale in m funzioni ad n variabili, studiarle una ad una e poi ottenere il risultato della funzione vettoriale mettendo insieme i risultati di ogni singola sottofunzione.

Si ricordi che tutte le trasformazioni lineari sono esempi di funzioni vettoriali.

Calcolo differenziale

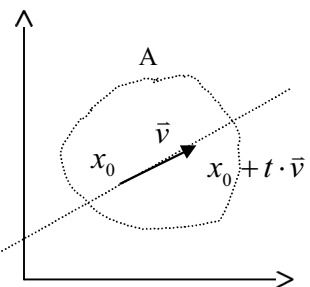
Considero una funzione $f: A \subset \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$, dove A è un aperto.

Considero inoltre un punto $x_0 \in A$ ed un versore \bar{v} che mi indichi una direzione ed un verso.

Da questi ultimi due elementi ottengo una retta passante dal punto con direzione e verso data da versore, la cui equazione è la seguente: $x = x_0 + t \cdot \bar{v}$. Ora prendo la funzione f e ne faccio il rapporto incrementale lungo la direzione di

\bar{v} , ottenendo $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cdot \bar{v}) - f(x_0)}{t} = D_{\bar{v}} f|_{x_0}$ che è detta *derivata*

direzionale ed indica la rapidità di variazione della funzione f nella direzione di \bar{v} .



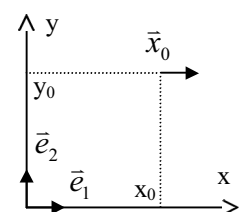
Derivata parziale

Definisco *derivata parziale* di f in x_0 , fatta rispetto a x_j e la indico con

$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = D_{\bar{e}_j} f(x_0)$ il limite seguente:

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cdot \bar{e}_j) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$, dove il secondo

termine è ovviamente un esempio in \mathbf{R}^2 dove \bar{e}_j è il versore $(1, 0)$ della base.



Il differenziale

Il *differenziale* è un concetto più *potente* della derivata direzionale che ci servirà per studiare le proprietà di una funzione in un punto.

Considero una funzione lineare $l: \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$. Considero inoltre un punto $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$. So che il punto è dato dalla somma delle sue componenti: $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \bar{e}_i$.

Per la linearità della funzione **l**, posso dire che $l(\bar{x}) = l\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot \bar{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot l(\bar{e}_i) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot a_i = \langle \bar{x}, \bar{a} \rangle$, dove le componenti del vettore **a** sono date dalla base canonica di \mathbf{R}^n trasformate dalla funzione **l**.

Posso quindi dire che $\exists \bar{a} (\in \mathbf{R}^n) / \forall \bar{h} (\in \mathbf{R}^n) \left(l(\bar{h}) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot h_i =: \langle \bar{a}, \bar{h} \rangle \right)$, cioè posso sempre trovare un vettore **a** tramite il quale posso *simulare* la funzione **l** per qualsiasi valore **h**. Questo è molto importante in quanto mi basta conoscere questo vettore e posso *scordarmi* della funzione **l**, lavorando molto più comodamente tramite il prodotto scalare.

Ad esempio si disponga di un cono di raggio **R** ed altezza **h**. Il suo volume sarà $V = \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 h$. Ora se vario le

dimensioni del cono in maniera che $\begin{cases} R \rightarrow R + \Delta R \\ h \rightarrow h + \Delta h \end{cases}$, come posso calcolare *rapidamente e facilmente* la variazione di volume del cono?

Pongo $f(R, h) = R^2 h$ e ne trovo l'incremento:

$$\begin{aligned} f(R + \Delta R, h + \Delta h) - f(R, h) &= (R + \Delta R)^2 \cdot (h + \Delta h) - R^2 h = \\ &= 2R \cdot h \cdot \Delta R + R^2 \Delta h + \underbrace{h \cdot (\Delta R)^2 + (\Delta R)^2 \cdot \Delta h + 2R \cdot \Delta R \cdot \Delta h}_{\sigma} \end{aligned}$$

Si noti che se gli incrementi ΔR e Δh sono piccoli, il valore σ che contiene i due incrementi con grado superiore al primo resta molto piccolo ed è quindi trascurabile.

Posso quindi dire che $\Delta f = f(R + \Delta R, h + \Delta h) - f(R, h) = l(\bar{v}) + \sigma$ dove con $\bar{v} = (\Delta R, \Delta h)$ rappresento l'incremento bidimensionale del cono.

Si noti che $l(\bar{v}) = 2R \cdot h \cdot \Delta R + R^2 \Delta h$ è una funzione lineare in quanto gli incrementi (che sono le variabili libere) sono presenti al primo grado.

Inoltre, per incrementi piccoli, ho che $\sigma = o(\|\bar{v}\|)$, dove chiaramente $\|\bar{v}\| = \sqrt{(\Delta R)^2 + (\Delta h)^2} \rightarrow 0$.

In questo caso, il vettore **a** con il quale possiamo sostituire la funzione lineare **l** sarà $\bar{a} = (2R \cdot h, R^2)$.

Infatti, moltiplicando scalarmente il vettore **a** per il vettore **v** (che rappresenta l'incremento dimensionale), otteniamo la variazione volumetrica del cono.

Ritorniamo alla teoria. Sia $f: A \subset \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$, dove **A** è un *aperto*.

La funzione **f** si dice *differenziabile* in $\bar{x}_0 \in A$ se esiste una applicazione lineare da \mathbf{R}^n ad \mathbf{R} tale che $f(\bar{x}_0 + \bar{h}) - f(\bar{x}_0) = l(\bar{h}) + o(\|\bar{h}\|)$. In questo caso l'applicazione lineare **l** è detta *differenziale* di **f** e si indica con il simbolo $df(\bar{x}_0)$.

Essendo il differenziale un'applicazione lineare, posso sempre scriverlo come prodotto scalare:

$\forall h(df(\bar{x}_0)(h) = \langle a, h \rangle)$. Il vettore **a** è detto *gradiente* ed è indicato con $\bar{a} = \nabla f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \bar{e}_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ dove $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ è la base canonica di \mathbf{R}^n .

Quindi alla fine posso scrivere $df(\bar{x})(\bar{h}) = \langle \nabla f(\bar{x}), \bar{h} \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) \cdot h_i$.

Si noti che il gradiente è un campo vettoriale le cui componenti sono le derivate parziali nel punto.

Teorema sul differenziale

Considero la funzione $f: A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ con A aperto.

Se la funzione f è differenziabile in $\bar{x} \in A$, allora:

- A. f è continua in \bar{x} . È evidente in quanto per $h \rightarrow 0$ ho che $f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot h_i = 0$.
- B. f è derivabile in \bar{x} in ogni direzione. $f(\bar{x} + t \cdot \bar{v}) - f(\bar{x}) = \langle \bar{a}, t \cdot \bar{v} \rangle + o(\|t \cdot \bar{v}\|)$. Quindi, per qualsiasi vettore \bar{v} , esisterà sempre un valore per l'equazione appena scritta e quindi esisterà sempre il limite del rapporto incrementale (rapporto tra l'equazione di prima e t). Inoltre osservo che la derivata direzionale è definita come:
- $$D_{\bar{v}} f(\bar{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + t \cdot \bar{v}) - f(\bar{x})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle \bar{a}, t \cdot \bar{v} \rangle + o(\|t \cdot \bar{v}\|)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot \langle \bar{a}, \bar{v} \rangle + o(\|t \cdot \bar{v}\|)}{t} = \langle \bar{a}, \bar{v} \rangle$$
- ed è quindi uguale al differenziale lungo \bar{v} .
- C. $df(\bar{x})(\bar{h}) = \langle \nabla f(\bar{x}), \bar{h} \rangle$. Dalla definizione di differenziale.

Osservazione sulla derivata direzionale

$$\left| \langle \bar{a}, \bar{h} \rangle \right| = \left| \sum_{i=1}^n a_i \cdot h_i \right| \leq \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{h}\|, \text{ quindi posso dire che } \frac{\left| \langle \bar{a}, \bar{h} \rangle \right|}{\|\bar{a}\| \cdot \|\bar{h}\|} \leq 1.$$

Togliendo il valore assoluto ottengo che $-1 \leq \frac{\langle \bar{a}, \bar{h} \rangle}{\|\bar{a}\| \cdot \|\bar{h}\|} \leq 1$. Posso quindi sostituire a questo rapporto il valore

di $\cos \varphi$ dove φ è un angolo opportunamente scelto in modo da verificare l'equazione $\frac{\langle \bar{a}, \bar{h} \rangle}{\|\bar{a}\| \cdot \|\bar{h}\|} = \cos \varphi$.

Si noti che $-\pi < \varphi < \pi$.

Con questo stratagemma posso dire che $\langle \bar{a}, \bar{h} \rangle = \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{h}\| \cdot \cos \varphi = D_{\bar{h}} f(\bar{x})$.

Osservazione sul gradiente

Dall'osservazione precedente, posso scrivere $D_{\bar{v}} f(\bar{x}) = \langle \nabla f(\bar{x}), \bar{v} \rangle = \|\nabla f(\bar{x})\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot \cos \varphi$. Essendo \bar{v} un versore, la sua norma sarà unitaria e quindi posso scrivere $D_{\bar{v}} f(\bar{x}) = \|\nabla f(\bar{x})\| \cdot \cos \varphi$.

In questo caso l'angolo φ corrisponde all'angolo tra i vettori \bar{v} e $\nabla f(\bar{x})$.

Ora mi chiedo quale dovrà essere il valore di questo angolo (e quindi quale dovrà essere la direzione di \bar{v}) per poter avere una derivata direzionale massima ed una minima?

- La derivata direzionale sarà massima quando $\bar{v} = \frac{\nabla f(\bar{x})}{\|\nabla f(\bar{x})\|}$ (cioè stessa direzione del gradiente). In questo caso $\cos \varphi = 1$ e la derivata vale $\|\nabla f(\bar{x})\|$.
- La derivata direzionale sarà minima quando $\bar{v} = -\frac{\nabla f(\bar{x})}{\|\nabla f(\bar{x})\|}$ (cioè direzione opposta a quella del gradiente). In questo caso $\cos \varphi = -1$ e la derivata vale $-\|\nabla f(\bar{x})\|$.

Utilizzo del differenziale

Come già detto posso scrivere $f(\bar{x}_0 + \bar{h}) - f(\bar{x}_0) = \langle \nabla f(\bar{x}_0), \bar{h} \rangle + \sigma$.

Se pongo $\bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{h}$ e quindi $\bar{h} = \bar{x} - \bar{x}_0$, posso scrivere:

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = \langle \nabla f(\bar{x}_0), (\bar{x} - \bar{x}_0) \rangle + \sigma \Rightarrow f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0) + \langle \nabla f(\bar{x}_0), (\bar{x} - \bar{x}_0) \rangle + \sigma$$

Questo mi dice che, sfruttando il differenziale, posso conoscere il valore della funzione f in un intorno del punto \bar{x}_0 (chiaramente più piccolo è l'intorno, migliore sarà l'approssimazione del valore in quanto il σ tenderà a zero).

Piano tangente a una superficie di equazione $z = f(x, y)$

Sia $z = f(x, y)$ una funzione differenziabile. Sia inoltre il punto $\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$ un punto in cui la funzione assume il valore $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Si dimostra che il piano tangente alla superficie $z = f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0, z_0) ha equazione:

$$z = z_0 + df(\bar{x}_0) = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{z_0} + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{y_0} (y - y_0)}_{df(\bar{x}_0) = \langle \nabla f(\bar{x}_0), (\bar{x} - \bar{x}_0) \rangle}$$

Quindi tramite il differenziale nel punto ed il valore della funzione nel punto stesso, ottengo l'equazione del piano tangente nel punto.

Condizione sufficiente per la differenziabilità

Considero la funzione $f: A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, con A aperto. Se in un intorno di un punto $\bar{x} \in A$ esistono e sono continue le derivate parziali della funzione f , allora f è differenziabile nel punto \bar{x} .

Osservazione sul differenziale

Il differenziale di una funzione f è definito come $df(\bar{x})(\bar{h}) = f_{x_1}(\bar{x}) \cdot h_1 + \dots + f_{x_n}(\bar{x}) \cdot h_n = \langle \nabla f(\bar{x}), \bar{h} \rangle$.

Se la funzione f è tale che $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_j$ (cioè è tale che le componenti di \bar{x} sono moltiplicate tutte per la costante nulla tranne la componente x_j), allora tutte le derivate parziali di detta funzione saranno nulle tranne la j -esima (ovvio).

Allora, utilizzando la formula del differenziale di cui sopra su questa funzione, si otterrebbe il seguente risultato: $df(\bar{x}) = 0 \cdot h_1 + \dots + f_{x_j}(\bar{x}) \cdot h_j + \dots + 0 \cdot h_n$.

Se chiamo $dx_j(\bar{h}) = dx_j = h_j$ e sostituisco, ottengo: $df(\bar{x}) = 0 \cdot dx_1 + \dots + f_{x_j}(\bar{x}) \cdot dx_j + \dots + 0 \cdot dx_n$.

Se ora considero una funzione f generica e ripetendo il ragionamento considerando le componenti singolarmente,

$$\text{ottengo } df(\bar{x}) = f_{x_1}(\bar{x}) \cdot dx_1 + \dots + f_{x_n}(\bar{x}) \cdot dx_n = \sum_{j=1}^n f_{x_j}(\bar{x}) \cdot dx_j.$$

Quindi df posso esprimerla come combinazione lineare di applicazioni lineari e questo conferma che il differenziale è un'applicazione lineare. Si noti che i dx osservabili nelle equazioni di cui sopra, sono funzioni lineari e non incrementi infinitesimi.

Derivate di ordine superiore

Considero la solita funzione $f: A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Supponiamo che, per ogni punto $\bar{x} \in U(\bar{x}_0)$ (U è un intorno) con $\bar{x}_0 \in A$, fissato un versore \bar{v} , esista $D_{\bar{v}} f|_{\bar{x}}$. Posso allora definire la funzione $D_{\bar{v}} f: U(\bar{x}_0) \mapsto \mathbb{R}$.

Sia ora \bar{w} un altro versore: se esiste $D_{\bar{w}} D_{\bar{v}} f|_{\bar{x}_0}$, essa sarà indicata con il simbolo $D_{\bar{w}\bar{v}}^2 f|_{\bar{x}_0}$ ed è detta *derivata seconda* di f rispetto ai versori \bar{w} e \bar{v} .

Se i versori \bar{w} e \bar{v} sono i versori \bar{e}_j ed \bar{e}_i della base di \mathbf{R}^n , allora posso utilizzare anche il seguente simbolo per

indicare la derivata seconda: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Si noti inoltre che in generale $D^2_{\bar{w}\bar{v}} f|_{\bar{x}_0} \neq D^2_{\bar{v}\bar{w}} f|_{\bar{x}_0}$.

Utilizzando l'altro simbolo posso dire che in generale $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$.

Teorema di Shwartz

Se le derivate seconde $f_{x_j x_k}$ e $f_{x_k x_j}$ esistono in un intorno di \bar{x} e sono continue in \bar{x}_0 , allora posso dire che vale $f_{x_k x_j}(\bar{x}) = f_{x_j x_k}(\bar{x})$.

Differenziale secondo

Considero la funzione $f: A \subset \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile in \mathbf{A} , allora esistono le derivate parziali di \mathbf{f} in un qualsiasi punto di \mathbf{A} , cioè $\forall j (=1, \dots, n), \exists f_{x_j}(\bar{x}), \bar{x} \in A$.

Se supponiamo che queste derivate siano a loro volta differenziabili in \bar{x} , allora diremo che \mathbf{f} è due volte differenziabile in \bar{x} .

Si dice *differenziale secondo* la forma quadratica $d^2 f(\bar{x})(\bar{h}) = \langle H_f(\bar{x}) \cdot \bar{h}, \bar{h} \rangle = \sum_{i,j} f_{x_i x_j}(\bar{x}) \cdot h_i \cdot h_j$,

dove $\bar{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n h_i \cdot \bar{e}_i$ e dove \mathbf{H}_f è la *matrice Hessiana*, definita nel seguente modo:

$$H_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1}(\bar{x}) & f_{x_1 x_2}(\bar{x}) & \dots & f_{x_1 x_n}(\bar{x}) \\ f_{x_2 x_1}(\bar{x}) & f_{x_2 x_2}(\bar{x}) & \dots & f_{x_2 x_n}(\bar{x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_n x_1}(\bar{x}) & f_{x_n x_2}(\bar{x}) & \dots & f_{x_n x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

cioè è la matrice di tutte le derivate seconde parziali.

Si può dimostrare che questa è una matrice simmetrica in quanto $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$.

Si noti che se il differenziale primo è dato da $df(\bar{h}) = \left(h_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot f$, il

differenziale secondo è dato da $d^2 f(\bar{h}) = \left(h_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 \cdot f$.

Differenziale di ordine k di f in un punto

Analogamente a quanto fatto per il differenziale secondo, posso dire che il differenziale di ordine \mathbf{k} di una funzione \mathbf{f} in un punto \mathbf{x} , è dato da $d^k f(\bar{h}) = \left(h_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k \cdot f$.

Formula di Taylor

Come già visto in precedenza, la formula di Taylor per una funzione di una variabile era la seguente:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}}_{\text{resto di Lagrange}}$$

Sia ora f una funzione definita su un aperto A di \mathbf{R}^n , a valori reali, cioè $f: A \subset \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$.

Supponiamo che f sia differenziabile in \bar{x}_0 .

Allora, dalla definizione di differenziale, posso dire che $f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = \langle \nabla f(\bar{x}_0), \bar{x} - \bar{x}_0 \rangle + o(\|\bar{x} - \bar{x}_0\|)$.

Da questa definizione posso notare la somiglianza con uno sviluppo di Taylor fermato al primo ordine.

Riscrivo quindi l'equazione nel modo seguente: $f(\bar{x}) = \underbrace{f(\bar{x}_0) + \langle \nabla f(\bar{x}_0), \bar{x} - \bar{x}_0 \rangle}_{\text{rappresenta la migliore approssimazione locale in } \bar{x}_0, \text{ affine in } \bar{x} - \bar{x}_0} + o(\|\bar{x} - \bar{x}_0\|)$.

Continuando il ragionamento in maniera analoga, posso dire che se f è differenziabile k volte sul segmento $[\bar{x}, \bar{x} + \bar{h}]$, e $k+1$ volte sul segmento $[\bar{x}, \bar{x} + \bar{h}]$, allora posso scrivere:

$$f(\bar{x} + \bar{h}) - f(\bar{x}) = df(\bar{x})(\bar{h}) + \frac{1}{2} d^2 f(\bar{x})(\bar{h}) + \dots + \frac{1}{k!} d^k f(\bar{x})(\bar{h}) + \frac{1}{(k+1)!} d^{(k+1)} f(\bar{x} + \theta \cdot \bar{h})(\bar{h})$$

dove θ è una quantità che va da 0 ad 1 (in simboli $0 \leq \theta \leq 1$). Con questo valore scelgo, per il differenziale di ordine $k+1$, un punto del segmento $[\bar{x}, \bar{x} + \bar{h}]$ come facevo con ξ nel caso di una funzione ad una variabile (ξ era infatti un punto compreso tra x ed x_0).

Si noti che questa equazione è analoga alla formula di Taylor con resto di Lagrange vista per il caso di una funzione ad una variabile.

Teorema sulla derivazione delle funzioni composte

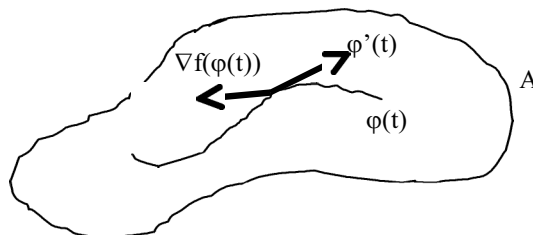
Considero una funzione $f: A \subset \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ ed una funzione $\varphi: I \subset \mathbf{R} \mapsto A \subset \mathbf{R}^n$.

Il risultato di $\varphi(t)$ (con $t \in I$) è un punto $\bar{x} \in A$, per cui posso dire che $\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(t) \end{cases}$ che sono dette *equazioni parametriche del cammino* $\varphi = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$.

Chiamo $F = f \circ \varphi$, da cui posso scrivere $F(t) = f(\varphi(t)) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$. Si noti che la funzione F è una funzione ad una variabile. La sua derivata prima è:

$$F'(t) = \frac{d}{dt} f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(t)) \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\varphi(t)) \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) \cdot \varphi'_i(t)$$

Utilizzando il prodotto scalare posso scrivere $F'(t) = \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle$ dove $\varphi'(t)$ è la derivata prima della funzione φ e rappresenta un vettore tangente alla curva $\varphi(t)$.



Di seguito è riportata la dimostrazione di quanto affermato in precedenza:

$$F(t + \Delta t) - F(t) = f(\varphi(t + \Delta t)) - f(\varphi(t)) = f(\varphi_1(t + \Delta t), \dots, \varphi_n(t + \Delta t)) - f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$$

Per la differenziabilità di \mathbf{f} in $\varphi(t)$ posso scrivere in altra forma quanto sopra, cioè $F(t + \Delta t) - F(t) = \langle \nabla f(\varphi(t)), \bar{v} \rangle + o(\|\bar{v}\|)$, dove $\bar{v} = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$.

$$\text{Dividendo per } \Delta t, \text{ ottengo } \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \left\langle \nabla f(\varphi(t)), \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \right\rangle + \frac{o(\|\bar{v}\|)}{\Delta t}.$$

$$\text{Il termine } \frac{o(\|\bar{v}\|)}{\Delta t} = \frac{o(\|\bar{v}\|)}{\Delta t} \cdot \frac{\|\bar{v}\|}{\|\bar{v}\|} = \frac{o(\|\bar{v}\|)}{\|\bar{v}\|} \cdot \frac{\|\bar{v}\|}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0.$$

$$\text{Il termine } \left\langle \nabla f(\varphi(t)), \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \right\rangle \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle.$$

$$\text{Il termine } \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} F'(t).$$

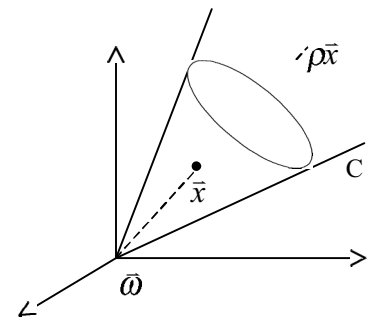
Quindi, in ultima analisi, ottengo che $F'(t) = \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle$, che è ciò che volevamo dimostrare.

Funzioni omogenee (positivamente)

Sono funzioni definite in coni con vertice in $\bar{0}$. Se sono definite in \bar{x} , sono definite su tutta la semiretta $\rho\bar{x}$, con $\rho > 0$. Il cono può coincidere con \mathbf{R}^n . $f: C \subset \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$, con C aperto.

La funzione \mathbf{f} si dice *positivamente omogenea di grado* $\mu \in \mathbf{R}$, se vale:

$$\forall \bar{x} (\in C), \forall \rho (> 0): (f(\rho\bar{x}) = f(\bar{x}) \cdot \rho^\mu)$$



Teorema di Eulero

Considero la funzione $f: C \subset \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$, con C cono aperto. Sia inoltre \mathbf{f} differenziabile in C . Allora posso dire che: \mathbf{f} è positivamente omogenea di grado $\mu \Leftrightarrow \forall \bar{x} (\in C): (\langle \bar{x}, \nabla f(\bar{x}) \rangle = \mu \cdot f(\bar{x}))$.

Riscrivendola in altra maniera ottengo $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \mu f$ che è detta *equazione di Eulero*.

Di seguito è riportata la dimostrazione della sufficienza.

Derivando rispetto a ρ l'uguaglianza $f(\rho\bar{x}) = \rho^\mu f(\bar{x})$, ottengo:

$$f(\rho \cdot x_1, \dots, \rho \cdot x_n) = \rho^\mu \cdot f(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(\rho\bar{x})x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\rho\bar{x})x_n = \mu \rho^{\mu-1} f(\bar{x})$$

Se ρ valesse 1, allora l'equazione diventerebbe $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x})x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x})x_n = \mu f(\bar{x})$, il che equivale alla

scrittura seguente: $\langle \bar{x}, \nabla f(\bar{x}) \rangle = \mu f(\bar{x})$ che è ciò che volevamo dimostrare.

Di seguito è riportata la dimostrazione della necessità.

$f(\rho\bar{x}) = \rho^\mu f(\bar{x}) \Rightarrow \frac{f(\rho\bar{x})}{\rho^\mu} = f(\bar{x})$. Ora $f(\bar{x})$ è costante rispetto a ρ . Se quindi definiamo $\varphi(\rho) = f(\bar{x})$,

la sua derivata rispetto a ρ dovrà per forza essere nulla.

$$\begin{aligned}\varphi'(\rho) &= \frac{d}{d\rho} [f(\rho x) \cdot \rho^{-\mu}] = \langle \nabla f(\rho x), x \rangle \cdot \rho^{-\mu} - f(\rho x) \cdot \mu \rho^{-\mu-1} = \rho^{-\mu-1} \cdot [\langle \nabla f(\rho x), x \rangle \cdot \rho - f(\rho x) \cdot \mu] = \\ &= \frac{1}{\rho^{\mu+1}} \left[\underbrace{\langle \nabla f(\rho x), \rho x \rangle}_{\text{per Eulero vale } \mu f'(\rho x)} - f(\rho x) \cdot \mu \right] = 0\end{aligned}$$

Questo conferma che φ è costante su \mathbf{R}^+ : $\varphi(\rho) = \varphi(1)$, cioè $\frac{f(\rho\bar{x})}{\rho^\mu} = f(\bar{x})$, cioè la tesi.

Derivazione delle funzioni vettoriali

Considero una funzione vettoriale $f: A \subset \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^m$. Come già detto nella teoria sulle funzioni vettoriali,

$$\text{posso scrivere } y = f(\bar{x}) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}.$$

La derivata direzionale di una funzione vettoriale non è un numero, ma un vettore: $D_{\bar{v}} f := (D_{\bar{v}} f_1, \dots, D_{\bar{v}} f_m)$.

Nel campo reale avevamo che $f(\bar{x} + \bar{h}) - f(\bar{x}) = l(\bar{h}) + \sigma = \langle \nabla f(\bar{x}), \bar{h} \rangle + \sigma$, con $\sigma = o(\|\bar{h}\|)$.

Anche in questo caso l'idea è quella di approssimare il vettore $f(x+h) - f(x)$ con una applicazione lineare su \mathbf{h} , applicazione da \mathbf{R}^n a \mathbf{R}^m .

Devo trovare $l(\bar{h}) = \sum_{i=1}^n h_i l(\bar{e}_i)$, dove $l(\bar{e}_i)$ è un vettore di \mathbf{R}^m . Considero una matrice ad m righe ed n colonne

$\mathbf{M}_{m,n}$. L'espressione $l(\bar{h}) = \sum_{i=1}^n h_i l(\bar{e}_i)$ diventa $l(\bar{h}) = M_{m,n} \cdot \bar{h}$ (forma matriciale).

La funzione \mathbf{f} si dice *differenziabile* in \bar{x} se esiste una matrice $\mathbf{M}_{m,n}$ ad m righe ed n colonne tale che valga la seguente equazione: $f(\bar{x} + \bar{h}) - f(\bar{x}) = M_{m,n} \cdot \bar{h} + o(\|\bar{h}\|)$.

Sviluppando quest'ultima equazione per ogni riga k della matrice ho $f_k(\bar{x} + \bar{h}) - f_k(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n m_{ki} h_i + o_k(\|\bar{h}\|)$,

dove m_{ki} è l'elemento i -esimo della riga k -esima della matrice $\mathbf{M}_{m,n}$.

Questa equazione altro non è che la definizione di differenziale della riga k e dunque la riga k di $\mathbf{M}_{m,n}$ rappresenta il gradiente della componente k della funzione \mathbf{f} : $(m_{k1}, \dots, m_{kn}) = (\partial x_1 f_k(\bar{x}), \dots, \partial x_n f_k(\bar{x}))$.

In conclusione, quindi, la matrice $\mathbf{M}_{m,n}$ rappresenta la versione multidimensionale del gradiente:

$$M = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{x}) \\ \dots \\ \nabla f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial x_1 f_1(\bar{x}) & \dots & \partial x_n f_1(\bar{x}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial x_1 f_m(\bar{x}) & \dots & \partial x_n f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

Tale matrice $\mathbf{M}_{m,n}$ è detta *matrice Jacobiana* di \mathbf{f} ed è indicata dai simboli $J_f(\bar{x})$, $D f(\bar{x})$ e $f'(\bar{x})$.

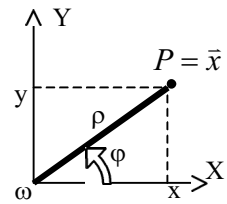
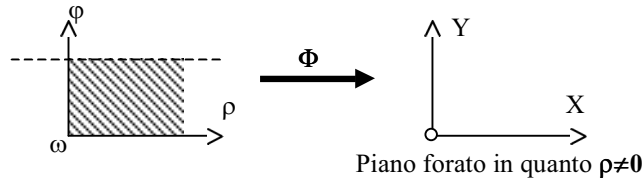
In conclusione \mathbf{f} è differenziabile in \bar{x} se e solo se $\forall k$ ho che la k -esima componente di \mathbf{f} (f_k) è differenziabile nel punto \bar{x} .

Coordinate polari nel piano (con polo in ω)

La trasformazione che porta da coordinate polari a coordinate cartesiane è una funzione

vettoriale da \mathbf{R}^2 a \mathbf{R}^2 definita come : $\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$.

Più precisamente la funzione è $\Phi : (\rho, \varphi) \in]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\mapsto (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$



Come faccio a calcolare ρ e φ noti x ed y ? Occorre individuare l'applicazione inversa $\Phi^{-1} : \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = ? \end{cases}$.

Come si vede, la componente φ non riesco a calcolarla, o meglio, riesco a farlo solo per i punti che cadono all'interno del primo quadrante cartesiano (uso la funzione arcotangente). Quindi la funzione Φ è continua, mentre la sua funzione inversa Φ^{-1} non lo è.

Se prendo la restrizione di Φ^{-1} a $R^2 - \{(x, y) / y = 0, x \geq 0\}$, allora posso dire che è continua.

Per gli altri quadranti devo tener conto dei segni di x ed y in maniera da variare il segno di φ che ottengo tramite la funzione arcotangente.

$$\varphi = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, x > 0, y \geq 0 \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi, x < 0, y \geq 0 \\ \arctg \frac{y}{x} + 2\pi, x > 0, y < 0 \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi, x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Funzioni da \mathbf{R}^2 in \mathbf{R}^3

Considero una funzione $r : (u, v) \in A \subset R^2 \mapsto r(u, v) \in R^3$. Questa funzione, per ogni coppia (u, v) ritorna un punto a tre dimensioni, per cui, graficandola, si ottiene una superficie 3D.

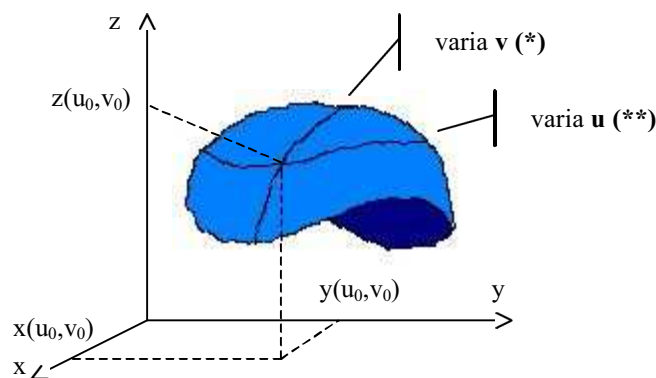
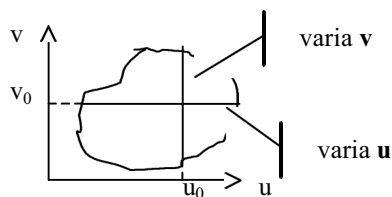
$$\bar{x} = r(u, v) \Rightarrow \bar{x} = (x, y, z) \Rightarrow \begin{cases} x = r_x(u, v) = x(u, v) \\ y = r_y(u, v) = y(u, v) \\ z = r_z(u, v) = z(u, v) \end{cases}$$

L'ultima equazione (o meglio l'insieme di equazioni raggruppate da una parentesi graffa) è detta *equazione parametrica della superficie*.

$$\text{Calcolando la matrice Jacobiana, ottengo } r'(u, v) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bar{r}_u = (x_u, y_u, z_u) \\ \bar{r}_v = (x_v, y_v, z_v) \end{cases}$$

I vettori \mathbf{r}_u ed \mathbf{r}_v rappresentano due vettori tangenti alla superficie lungo le direzioni \mathbf{u} e \mathbf{v} rispettivamente. Combinando questi due vettori ottengo l'equazione del piano tangente alla superficie (cioè $\mathbf{r}'(\mathbf{u}, \mathbf{v})$).

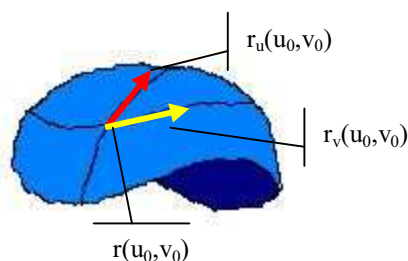
Facciamo un esempio:



L'equazione parametrica della curva (*) è $\begin{cases} x = x(u_0, v) \\ y = y(u_0, v) \\ z = z(u_0, v) \end{cases}$

L'equazione parametrica della curva (**) è $\begin{cases} x = x(u, v_0) \\ y = y(u, v_0) \\ z = z(u, v_0) \end{cases}$

Posso determinare i vettori tangenti nel punto (u_0, v_0) derivando le equazioni parametriche lungo le direzioni u e v , ottenendo due vettori: $\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$ ed $\vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$.



Questi due vettori individuano un piano tangente alla superficie nel punto $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. Posso addirittura ottenere il vettore normale a questo piano utilizzando il prodotto vettoriale, ottenendo $\vec{n} = \vec{r}_u(u_0, v_0) \wedge \vec{r}_v(u_0, v_0)$.

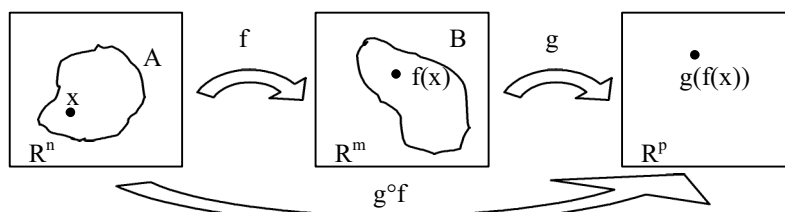
Espresso in forma matriciale, diventa $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} + \vec{e}_2 \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$

Teorema di derivazione della composizione

Considero due sottospazi $A \subset R^n$ e $B \subset R^m$.

Considero inoltre due funzioni vettoriali $f: A \mapsto B$ e $g: B \mapsto R^p$.

Visto che il codominio della funzione f è incluso (in questo caso è proprio uguale) al dominio della funzione g , allora posso eseguire la composizione $g \circ f$ (era una condizione necessaria).



Se la funzione f è differenziabile in x e la funzione g è differenziabile in $f(x)$, allora:

1. La funzione composizione $g \circ f$ è differenziabile in x
2. $J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x)$

Questo, in parole povere, significa che $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Il Laplaciano

Definisco *Laplaciano* la funzione Δu (o a volte ∇u) $= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, dove la funzione $u(x, y)$ è una funzione in coordinate cartesiane.

In coordinate polari, il Laplaciano diventa $\Delta \tilde{u} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho}$.

Quando $\Delta u = 0$, u è detta *funzione armonica*.

Funzioni da C a C

Considero una funzione $f: A \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$.

Posso scrivere (impropriamente) che $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$.

Ad esempio $e^z = f(z) \Rightarrow z = x + i \cdot y \Rightarrow e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$

Si noti però che $f(z) \neq e^x (\cos y + i \sin y)$, cioè non hanno la stessa espressione.

Ora posso dire che $\begin{cases} \operatorname{Re} f(x, y) = u(x, y) \\ \operatorname{Im} f(x, y) = v(x, y) \end{cases}$.

Derivando $f(x, y)$ ottengo $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = u_x + i \cdot v_x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = u_y + i \cdot v_y \end{cases}$, cioè derivo le singole componenti lungo i versori della base \mathbf{x} ed \mathbf{y} .

Infatti, calcolando il rapporto incrementale, ottengo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right) = u_x + i \cdot v_x$$

ed analogamente per $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Ora, la funzione f si dice *derivabile* nel punto z_0 se $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lambda \in \mathbb{C}$.

In questo caso pongo $f'(z_0) = \lambda$.

Il limite di cui sopra, è esprimibile nel modo seguente:

$$\forall \varepsilon (> 0) \exists \delta_\varepsilon (> 0): \left(0 < |z - z_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon \right)$$

Essendo nel campo complesso, le espressioni $|z - z_0|$ e $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right|$ rappresentano due *distanze*.

Una funzione derivabile in senso complesso in un suo aperto A , si dice *olomorfa* o *analitica* in A .

Analizziamo il limite di cui sopra. Al punto z_0 posso avvicinarmi in diversi modi: ad esempio tramite un incremento reale (Δx) o tramite un incremento immaginario (Δy).

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = f_x(x_0, y_0)$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + i \cdot \Delta y) - f(z_0)}{i \cdot \Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + i \cdot \Delta y) - f(x_0, y_0)}{i \cdot \Delta y} = \frac{1}{i} f_y(x_0, y_0)$$

Affinché la funzione $f(z)$ sia derivabile in senso complesso, i valori di cui sopra devono essere uguali, per cui

$$\text{ottengo } f_x(x_0, y_0) = \frac{1}{i} f_y(x_0, y_0).$$

Affinché due numeri complessi siano uguali, devono essere uguali la parte intera e quella reale, da cui, ottengo:

$$\underbrace{u_x + i \cdot v_x}_{f_x(x_0, y_0)} = \underbrace{\frac{1}{i} u_y + \frac{1}{i} i \cdot v_y}_{f_y(x_0, y_0)} \Rightarrow u_x + i \cdot v_x = \frac{1}{i} u_y + v_y \Rightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ -u_y = i \cdot v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = i^2 \cdot v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Quest'ultima condizione è nota come *criterio di Cauchy-Riemann* ed è necessaria affinché una funzione sia derivabile in senso complesso.

Considero ora la differenza del rapporto incrementale rispetto alla derivata: $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = \omega(z)$.

Si noti che $\underbrace{\omega(z)}_{z \rightarrow z_0} = o(1)$.

Dalla differenza di cui sopra, dopo alcuni semplici passaggi, posso ottenere un differenziale in senso complesso come il seguente: $f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \omega(z) \cdot (z - z_0)$.

Ora mi chiedo quando una funzione a valori complessi sia differenziabile in un punto. La risposta è che se sono differenziabili in un punto le due funzioni a valori reali che la compongono (la $u(x, y)$ e la $v(x, y)$ dei vari esempi), allora anche la funzione a valori complessi è differenziabile in quel punto.

Da questo deriva un teorema di differenziabilità

la funzione f è differenziabile in senso complesso in un punto $z_0 = (x_0, i \cdot y_0)$ se e solo se:

1. la funzione $f(x, y)$ è differenziabile in (x_0, y_0) .
2. Vale il criterio di Cauchy-Riemann $f_y(x_0, y_0) = i \cdot f_x(x_0, y_0)$

Regola di de l'Hopital nel complesso

Siano le funzioni f e g analitiche in A . Sia inoltre $f(z_0) = g(z_0) = 0$ e $g'(z_0) \neq 0$.

Allora posso dire che $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$.

Infatti, per la derivabilità ho che
$$\begin{cases} f(z) = \underbrace{f(z_0)}_{=0} + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \sigma_1 \\ g(z) = \underbrace{g(z_0)}_{=0} + g'(z_0) \cdot (z - z_0) + \sigma_2 \end{cases}$$

Dividendo membro a membro, ottengo:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{0 + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \sigma_1}{0 + g'(z_0) \cdot (z - z_0) + \sigma_2} = \frac{(z - z_0) \cdot \left(f'(z_0) + \frac{\sigma_1}{(z - z_0)} \right)}{(z - z_0) \cdot \left(g'(z_0) + \frac{\sigma_2}{(z - z_0)} \right)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Questo in quanto i termini σ sono degli infinitesimi di ordine superiore e quindi, per $z \rightarrow z_0$, tendono a zero. A maggior ragione se poi li dividiamo per la quantità $(z - z_0)$.

Funzioni implicite

Considero la funzione $f(x, y) = 0$ definita in un insieme $T \subset \mathbb{R}^2$. Fissando un valore x_0 ed applicandolo alla funzione f , ottengo $f(x_0, y) = 0$ che è in tutto e per tutto una funzione della sola variabile y (è l'unica che può variare perché x la manteniamo costante per ipotesi). Questa funzione può avere nessuna, una o più soluzioni. Se esiste un insieme I tale che per ogni suo punto $x \in I$ esiste uno ed un solo valore $y \in J$ tale che la coppia $(x, y) \in I \times J \subset T$ è soluzione della $f(x, y) = 0$, allora resta individuata la funzione $y = y(x)$ detta *funzione implicita* definita dall'equazione $f(x, y) = 0$.

Questa funzione implicita è tale che $f(x, y(x)) = 0$.

Di seguito sono riportati esempi di funzioni implicite:

- $e^y - x = 0$. Ricavo il valore di y : $y = \ln x$.
- $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Ricavo il valore di y : $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$.
- $\sin(y - x) = 0$. Ricavo il valore di y : $y - x = k\pi \Rightarrow y = x + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Si noti che non tutte le funzioni implicite di cui sopra possono essere graficate in quanto non posso associare una sola y per ogni x (ad esempio la seconda e la terza).

Teorema del Dini sulle funzioni implicite

Questo teorema mi dà una condizione sufficiente per ricavare una funzione implicita.

Considero $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Sia f continua. Sia inoltre f_y continua (cioè la derivata fatta rispetto alla variabile che si vuole ricavare, in questo caso y , deve essere continua).

Sia inoltre $f(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ (dove f_y è sempre la derivata fatta rispetto alla variabile che si desidera ricavare).

Allora esiste una sola funzione continua $y = y(x)$, definita in un opportuno intorno I di x_0 tale che in x_0 assume il valore $y(x_0)$ e che soddisfa la $f(x, y) = 0$.

Inoltre in I la $y = y(x)$ è derivabile con derivata (continua) uguale a $y'(x) = \frac{f'_x(x, y(x))}{f'_y(x, y(x))}$.

Di seguito la dimostrazione del teorema:

Supponiamo che risulti $f_y(x_0, y_0) > 0$ (nell'ipotesi deve essere diversa da zero, per cui mi sta bene).

Essendo la f_y continua (sempre per ipotesi), posso trovare un intorno $I \times J = H = \{|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < k\}$,

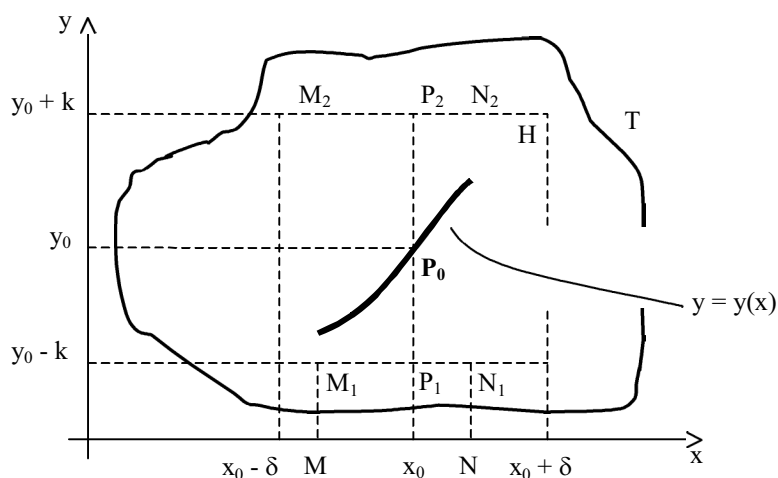
con δ e k positivi (opportunamente scelti), dove la $f(x, y)$ risulti continua.

Considero ora la funzione (in verità ad una sola variabile, come detto in precedenza) $f(x_0, y)$, con $y \in J$.

Essendo $f_y(x_0, y) > 0$, tale funzione risulta crescente in J e assume valore nullo in $P_0 = (x_0, y_0)$, perciò nei punti $P_1(x_0, y_1)$ e $P_2(x_0, y_2)$, con $y_1 < y_0 < y_2$, si avrà $f(P_1) < f(P_0) = 0 < f(P_2)$.

Per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno $M_1 N_1$ di P_1 ed un intorno $M_2 N_2$ di P_2 in ogni punto del

quale si ha rispettivamente $f(x, y) < 0$ e $f(x, y) > 0$. Inoltre, per il teorema dell'esistenza degli zeri, ad ogni x appartenente all'intersezione MN delle proiezioni di $M_2 N_2$ ed $M_1 N_1$ sull'asse delle ascisse viene associato un



valore $y \in J$. Questo valore è unico in quanto la funzione è strettamente crescente (abbiamo detto infatti che vale $f_y(x_0, y_0) > 0$).

Questo prova che nell'intorno MN di \mathbf{x}_0 esiste una funzione $y = y(x)$ che si dimostra essere continua e tale che $f(x, y(x)) = 0$. Questo dimostra il teorema del Dini.

Teorema del valor medio (o teorema di Lagrange per una variabile)

Per la differenziabilità di f , ho che $f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0) \cdot (y - y_0) + \sigma$.

Si ricordi che $\sigma = o(\|\bar{x} - \bar{x}_0\|)$, per $\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0$.

In alcuni casi il valore σ può dare fastidio o comunque la formula del Δf di cui sopra non è facilmente applicabile. In questi casi Lagrange dice che $f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{\xi}) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{\xi}) \cdot (y - y_0)$, dove il

punto $\bar{\xi} = (\xi, \eta)$ è intermedio a \bar{x} e a \bar{x}_0 ed è opportunamente scelto in modo da rendere valida l'equazione.

Si noti che il teorema è lo stesso che si aveva per le funzioni ad una variabile.

Tramite questo teorema, possiamo dimostrare che $y'(x) = \frac{f'_x(x, y(x))}{f'_y(x, y(x))}$ (vedi teorema del Dini).

Come appena detto $f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, \eta) \cdot (x - x_0) + f_y(\xi, \eta) \cdot (y - y_0)$.

Se è valido il teorema del Dini, allora ho che $y = y(x)$ e quindi $f(x, y) = f(x, y(x)) = 0$.

Inoltre ho che $f_y \neq 0$ nel punto (x_0, y_0) .

L'equazione del teorema del valor medio diventa quindi $0 = f_x(\xi, \eta) \cdot (x - x_0) + f_y(\xi, \eta) \cdot (y(x) - y(x_0))$.

Porto a destra un termine: $f_x(\xi, \eta) \cdot (x - x_0) = -f_y(\xi, \eta) \cdot (y(x) - y(x_0))$.

Divido reciprocamente i termini ed ottengo $-\frac{f_x(\xi, \eta)}{f_y(\xi, \eta)} = \frac{(y(x) - y(x_0))}{(x - x_0)}$.

Essendo ξ intermedio ad x ed x_0 ed essendo η intermedio ad y ed y_0 , segue che

$$\begin{cases} y(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y(x_0) \\ \xi \xrightarrow{x \rightarrow x_0} x_0 \\ \eta \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

Inoltre ho che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(y(x) - y(x_0))}{(x - x_0)} = y'(x_0)$ in quanto è un rapporto incrementale.

Per cui, alla fine, ottengo $\lim_{x \rightarrow x_0} -\frac{f_x(\xi, \eta)}{f_y(\xi, \eta)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(y(x) - y(x_0))}{(x - x_0)} = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = y'(x)$.

Resta quindi dimostrata anche questa equazione dovuta al teorema del Dini.

Grazie al teorema del valor medio, possiamo trovare anche la retta tangente in un punto alla curva la cui equazione è $f(x, y) = 0$.

Per Dini, ho infatti che $y'(x) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{(y - y_0)}{(x - x_0)}$.

Riorganizzando questa equazione ottengo $f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) - f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0$ che altro non è se non l'equazione della retta tangente nel punto (x_0, y_0) .

In forma vettoriale, posso riscriverla come $\nabla f(P_0) \cdot \overrightarrow{PP_0} = 0$, dove $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P = (x, y)$ ed appartiene alla retta tangente.

L'interpretazione geometrica dell'equazione appena scritta è molto semplice: il gradiente di una funzione è, in ogni punto, ortogonale alla curva della funzione stessa. Affinché il prodotto scalare sia nullo, il vettore del

gradiente ed il vettore $\overrightarrow{PP_0}$ dovranno per forza essere ortogonali tra loro. Questo significa che $\overrightarrow{PP_0}$ dovrà essere ortogonale ad un vettore ortogonale alla curva (gradiente). Essendo la funzione a due variabili (quindi la sua curva starà su un piano), l'unica direzione di $\overrightarrow{PP_0}$ che renda nullo il prodotto scalare con il gradiente è la direzione della retta tangente nel punto.

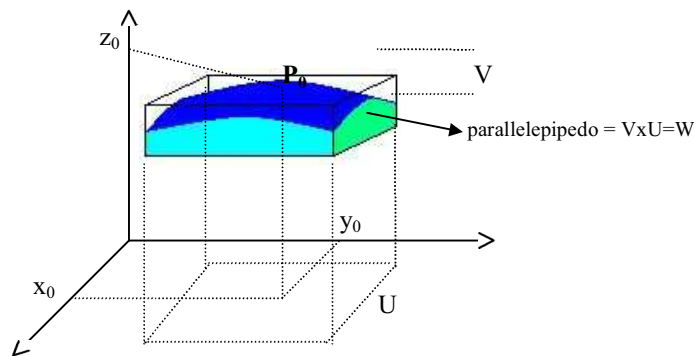
Osservazione: per questo motivo le linee di livello sono in ogni loro punto ortogonali al gradiente.

Funzioni implicite di più variabili

Considero la funzione $f: A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ (funzione a tre variabili).

Sia inoltre $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $U = I_{(x_0, y_0)}$ e $V = I_{(z_0)}$. Il parallelepipedo visibile in figura (quello che racchiude un "pezzo" di funzione 3D) è il sottospazio $W = V \times U$.

Assegnata l'equazione $f\left(\underbrace{x, y}_{\text{fissati}}, \underbrace{z}_{\text{vincolata}}\right) = 0$,



individuare sotto quali condizioni, almeno *localmente*, sia $f(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Spieghiamo prima di tutto cosa significa *localmente*: in un intorno W del punto (x_0, y_0, z_0) (in questo caso quindi si tratta di un intorno tri-dimensionale).

Come visto nel caso delle funzioni implicite in due variabili (trovavo un grafico di una funzione ad una variabile in quanto trovavo la y in funzione della x), anche in questo caso l'insieme dei punti (x, y, z) che verificano l'equazione di cui sopra, costituiscono il grafico di una funzione in due variabili (in pratica trovo la z in funzione di x ed y). In simboli posso dire che $z = g(x, y) \Leftrightarrow f(x, y, z) = 0$.

Estensione del teorema del Dini

Considero $f: A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, continua. Sia inoltre f_z continua (si parla sempre della derivata fatta rispetto alla variabile che si vuole ricavare, in questi esempi sarà la variabile z).

Siano infine $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ e $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Allora, sotto queste condizioni, esiste un intorno rettangolare $W = U \times V$ del punto (x_0, y_0, z_0) tale che, per ogni punto di questo intorno, vale $f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = g(x, y)$.

La funzione g sarà definita in U (intorno di (x_0, y_0)) a valori in V (intorno di z_0).

Questo significa che $\exists W = U \times V : \forall (x, y) \in U, \exists! z \in V / (f(x, y, z) = 0)$.

In simboli $(x, y) \in U \xrightarrow{g} z \in V / f(x, y, z) = 0$.

Se f è derivabile, si ha inoltre che

$$\begin{cases} g_x(x, y) = -\frac{f_x(x, y, g(x, y))}{f_z(x, y, g(x, y))} \\ g_y(x, y) = -\frac{f_y(x, y, g(x, y))}{f_z(x, y, g(x, y))} \end{cases}$$

Complementi al teorema esteso del Dini

Grazie al teorema esteso del Dini posso trovare l'equazione del piano tangente al grafico $z = g(x, y)$ nel punto (x_0, y_0, z_0) (analogamente a come trovavo l'equazione della retta tangente con il teorema del Dini per le funzioni a due variabili).

Infatti per la differenziabilità ho che $z - g(x_0, y_0) = g_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + g_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$.

Quindi, ragionando in maniera analoga a quanto fatto per il teorema del Dini in due variabili ottengo:

$$f_x(x_0, y_0, g(x_0, y_0)) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0, g(x_0, y_0)) \cdot (y - y_0) + f_z(x_0, y_0, g(x_0, y_0)) \cdot (z - z_0) = 0$$

che posso scrivere anche come $(\nabla f)(x_0, y_0, z_0) \cdot \overrightarrow{PP_1} = 0$.

Teorema del Dini per i sistemi

Supponiamo di avere un sistema di n equazioni in $n+r$ incognite: è possibile ottenere n variabili in dipendenza delle rimanenti r ?

In simboli, tramite il teorema di Dini, posso ottenere la seguente situazione:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = g_1(x_1, \dots, x_r) \\ y_2 = g_2(x_1, \dots, x_r) \\ \dots \\ y_n = g_n(x_1, \dots, x_r) \end{cases}$$

Casi particolari di sistemi (utilizzo del teorema del Dini)

Suppongo di avere il seguente sistema $\begin{cases} f(x, y, u, v) = 0 \\ g(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ con \mathbf{x} ed \mathbf{y} fissati, dove $f, g: A \subset \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}$.

Sia inoltre il punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$ tale da soddisfare il sistema.

Pongo ora $X = (x, y)$, $U = (u, v)$ e $F = (f, g)$.

Otengo una $F: A \subset \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^2$ ed il sistema visto in precedenza lo posso scrivere come $F(X, U) = 0$.

Questa scrittura è formalmente uguale alla più generica forma seguente: $f(x, y) = 0$.

Essendo \mathbf{x} ed \mathbf{y} fissati, voglio trovare le $u = u(x, y) = g_1(x, y)$ e le $v = v(x, y) = g_2(x, y)$ che mi soddisfino il sistema.

Suppongo che $F(X_0, U_0) = 0$ se esiste un intorno \mathbf{I} di \mathbf{X}_0 ed un intorno \mathbf{J} di \mathbf{U}_0 tale che $\forall X (\in \mathbf{I}) \exists! U (\in \mathbf{J}) / (F(X, U) = 0)$.

Allora esiste una $G: \mathbf{I} \mapsto \mathbf{J}$ tale che $U = G(X) \Leftrightarrow F(X, U) = 0$.

Le componenti di \mathbf{G} saranno la g_1 e la g_2 .

In definitiva, su $\mathbf{I} \times \mathbf{J}$, il sistema $\begin{cases} f(x, y, u, v) = 0 \\ g(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ equivale al sistema $\begin{cases} u = g_1(x, y) \\ v = g_2(x, y) \end{cases}$.

Quindi dal primo sistema ho ricavato le variabili \mathbf{u} e \mathbf{v} in funzione delle variabili \mathbf{x} ed \mathbf{y} .

Quando è possibile realizzare questa "trasformazione"?

Supponiamo che \mathbf{F} sia derivabile e che $F(X_0, U_0) = 0$.

Supponiamo inoltre che il Jacobiano $\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} (X_0, U_0) \neq 0$ (derivate calcolate in \mathbf{X}_0 e \mathbf{U}_0).

Allora esistono degli intorni \mathbf{I} (di \mathbf{X}_0) e \mathbf{J} (di \mathbf{U}_0) tali che, su $\mathbf{I} \times \mathbf{J}$, $F(X, U) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = g_1(x, y) \\ v = g_2(x, y) \end{cases}$.

Inoltre, se g_1 e g_2 sono derivabili, ho che $\frac{\partial g_1}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$ e $\frac{\partial g_2}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$.

Criterio di invertibilità per le funzioni piane

Data una trasformazione piana, quando posso invertirla?

Suppongo $H: A \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$. Posso scomporre H come $H: \begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{cases}$.

Suppongo che H, f e g siano derivabili.

Affinché possa sussistere l'invertibilità di H , fissata una coppia (x, y) deve esistere una ed una sola (u, v) tale che $x = f(u, v)$ e $y = g(u, v)$.

Posso definire un criterio di invertibilità (locale) nel modo seguente:

fissato un punto $U_0 = (u_0, v_0)$, il suo trasformato secondo H sarà $X_0 = (x_0, y_0)$. Se vale $\frac{\partial(f,g)}{\partial(u_0, v_0)} \neq 0$ (Jacobiano

non nullo) allora H è localmente invertibile in X_0 . Questo in quanto in un intorno di U_0 , la H è derivabile (quindi continua) ed inoltre la sua derivata non si annulla (quindi è strettamente crescente o strettamente decrescente). Queste sono due condizioni sufficienti all'invertibilità di H (però solo localmente ad X_0).

Riesaminiamo questo criterio tramite il teorema del Dini per i sistemi.

Considero il sistema $\begin{cases} x - f(u, v) = 0 \\ y - g(u, v) = 0 \end{cases}$. È un sistema in quattro variabili ed in due equazioni (caso simile al caso dei sistemi particolari di cui al capitolo precedente).

Il teorema del Dini dice che $\exists I_{X_0}, \exists J_{U_0} : \forall (x, y) \in I_{X_0}, \exists! (u, v) \in J_{U_0} / \underbrace{\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{cases}}_{\text{prerequisito per l'invertibilità}}$.

La coppia (x, y) è in un intorno di X_0 (per ipotesi del Dini). Dunque anche in questo caso ragiono localmente.

La condizione del teorema del Dini mi assicura che in questo intorno esiste una ed una sola coppia (u, v) tale che il sistema sia verificato. Questo significa che in questo intorno, la funzione H è una biezion e quindi esiste una sua funzione inversa (almeno localmente al punto X_0).

Altri casi particolari di sistemi (utilizzo del teorema del Dini)

Le curve sghembe non parametriche sono curve nello spazio formate dall'intersezione di due superfici.

La loro definizione è generalmente del tipo $\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$. Ora voglio ridurmi ad un caso parametrico.

Il sistema che definisce questo genere di curve si può pensare come una "macrofunzione" $F = F(f, g)$, dove per forza di cose $F: A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$.

Ora fissiamo la coordinata z . Voglio sapere se, fissata la z , esista una coppia (x, y) che soddisfi il sistema.

La soluzione sarà un sistema del tipo $\begin{cases} x = \varphi_1(z) \\ y = \varphi_2(z) \\ z = z \end{cases}$. Questa rappresenta una curva parametrica, che è ciò che

volevamo. Come faccio ad arrivarci?

Prendo un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ che verifichi il sistema iniziale (quello con f e g), quindi $F(P_0) = 0$.

Se vale $\left. \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \right|_{P_0} \neq 0$, allora $\exists W_{P_0} (= J_{x_0 y_0} \times I_{z_0}) : \forall z \in I_{z_0}, \exists! (x, y) \in J_{x_0 y_0} / \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$, dove

chiaramente $J_{x_0 y_0}$ è un intorno del punto (x_0, y_0) , I_{z_0} è un intorno del punto z_0 e W_{P_0} è un intorno del punto P_0 ottenuto come prodotto dei due intorni J ed I .

Con il passaggio di cui sopra ho in pratica ottenuto $\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \varphi_1(z) \\ y = \varphi_2(z) \end{cases}$, cioè sono passato ad un

sistema parametrico (che rappresenta quindi una curva parametrica). Geometricamente parlando, posso dire che il luogo dei punti di \mathbf{R}^3 che verifica il sistema iniziale è una curva parametrica.

Ricapitolando, posso quindi dire che se vale la “macrofunzione” \mathbf{F} è derivabile (e quindi continua), se inoltre

vale che $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0) = \mathbf{0}$ ed infine vale che $\left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0$, allora esistono degli intorno \mathbf{J} ed \mathbf{I} tali che

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \varphi_1(z) \\ y = \varphi_2(z) \end{cases} \text{ su } \mathbf{W} = \mathbf{J} \times \mathbf{I}.$$

Le funzioni φ_1 e φ_2 sono definite su \mathbf{I} e sono tali che $(\varphi_1(z), \varphi_2(z)) \in \mathbf{J}$.

Si ha inoltre che $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}}$ e $\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}}$, calcolati nel punto $(\varphi_1(z), \varphi_2(z), z)$.

Infatti, derivando rispetto a z il sistema $\begin{cases} f(\varphi_1(z), \varphi_2(z), z) \\ g(\varphi_1(z), \varphi_2(z), z) \end{cases}$, ottengo $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \end{cases}$.

$$\text{Raccogliendo } \varphi_1, \text{ ottengo } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial x}} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{-\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial x}} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

ho sostituito $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$

$$\text{Da questa ottengo } \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ -\frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}} \end{array} \right.$$

Se invece raccolgo φ_2 , arrivo in modo analogo al secondo risultato.

Teorema generale del Dini

Considero una funzione $f: A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^r$, con $r < n$, f derivabile in A .

Posso vedere la funzione f come una funzione vettoriale le cui componenti sono le $f_1 \dots f_r$ corrispondenti ai vettori della base di \mathbb{R}^r : $f = (f_1, f_2, \dots, f_r)$.

Suppongo che in un punto $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ valga $f(P_0) = 0$, cioè

$$\begin{cases} f_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0 \\ f_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0 \\ \dots \\ f_r(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0 \end{cases}.$$

Sia inoltre il rango della matrice

$$\begin{bmatrix} \partial x_1 f_1 & \dots & \partial x_r f_1 & \dots & \partial x_n f_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial x_1 f_r & \dots & \partial x_r f_r & \dots & \partial x_n f_r \end{bmatrix}$$

sia r (rango massimo).

minore M con $\det \neq 0$

Allora le prime r variabili si ottengono in funzione delle successive $(n-r)$ variabili. Questo significa che posso trovare delle funzioni $\varphi_1 \dots \varphi_r$ dipendenti dalle variabili $x_{r+1} \dots x_n$ con le quali risalire alle variabili $x_1 \dots x_r$. Queste funzioni, inoltre, sono tali da soddisfare la $f(\bar{x}) = 0$.

In simboli $\exists W_{P_0} / \forall x \in W_{P_0} : f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{r+1}, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_r = \varphi_r(x_{r+1}, \dots, x_n) \end{cases}$.

Inoltre, come al solito, si ha che $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = - \frac{\frac{\partial (f_1, \dots, f_r)}{\partial (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_r)}}{\frac{\partial (f_1, \dots, f_r)}{\partial (x_1, \dots, x_r)}}$, con $j \in [r+1, n]$.

Varietà in forma implicita

Una varietà in forma implicita rappresenta una superficie. Sia Γ un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , tale che $\forall P_0 \in \Gamma$, esiste un intorno W di P_0 tale che (localmente) $\Gamma \cap W = \{x \in W : G(x) = 0\}$, dove $G: W \mapsto \mathbb{R}^r$ è derivabile.

Questo significa che $\Gamma \cap W$ è costituita dai punti $x \in W$ tali che $\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ g_r(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$, dove le g_1, \dots, g_r sono le

funzioni associate alle componenti di G : $G = (g_1, g_2, \dots, g_r)$.

Se supponiamo poi che il rango della matrice

$$\begin{bmatrix} \partial x_1 g_1 & \dots & \partial x_r g_1 & \dots & \partial x_n g_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial x_1 g_r & \dots & \partial x_r g_r & \dots & \partial x_n g_r \end{bmatrix}$$

sia r (rango massimo), allora

$M \neq 0$

per il teorema del Dini generalizzato ottengo $x \in \Gamma \cap W \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{r+1}, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_r = \varphi_r(x_{r+1}, \dots, x_n) \end{cases}$, dove $\phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ è

una funzione definita in un intorno di $(x_{r+1}^0, \dots, x_n^0)$ e a valori in un intorno di (x_1^0, \dots, x_r^0) .

Il sottoinsieme Γ si dice allora *varietà* di classe C^1 e dimensione $(n-r)$ di equazione $G(x) = 0$.

Vettore tangente ad una varietà

Definisco come vettore tangente ad una varietà Γ nel punto $P_0 (\in \Gamma)$, il vettore \bar{h} quando esiste una funzione

definita come $\psi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$ e tale che
$$\begin{cases} \psi(0) = P_0 \\ \psi'(0) = \bar{h} \end{cases}$$

In pratica ψ rappresenta una curva tracciata sulla superficie della varietà. Quindi un vettore è tangente alla varietà quando è tangente ad una curva su di essa tracciata.

Chiarmente di curve tracciate sulla superficie posso trovarne infinite, per cui posso trovare infiniti vettori tangenti alla varietà in un punto. L'insieme di questi vettori rappresenta lo spazio tangente alla varietà in un punto (nel disegno di cui sopra si avrebbe un piano tangente).

Ma come posso determinare il vettore tangente partendo dalle equazioni? Per questo viene in aiuto una proposizione che dice che il vettore \bar{h} è tangente alla varietà Γ in P_0 se e solo se \bar{h} fa parte del nucleo del differenziale di Γ . Questo in quanto i vettori tangenti costituiscono il nucleo del differenziale.

In “soldoni” significa che
$$\begin{bmatrix} \partial x_1 g_1 & \dots & \partial x_n g_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial x_1 g_r & \dots & \partial x_n g_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \dots \\ h_r \end{bmatrix} = 0$$
. Geometricamente parlando l'equazione matriciale

appena vista sta a significare che il vettore \bar{h} è tangente a Γ quando il suo prodotto scalare con il differenziale è nullo, cioè quando \bar{h} è ortogonale al differenziale (infatti nei capitoli precedenti si è visto che i vettori tangenti sono ortogonali ai vettori del differenziale).

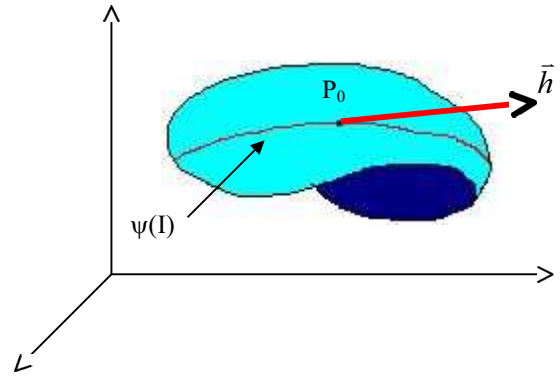
Che dimensioni ha uno spazio tangente a Γ ?

Per il teorema dimensionale ho che $\dim(\text{Im } T) + \dim(\text{Ker } T) = \dim V$.

Ora $\dim V = n$. Inoltre $T = df(P_0)$ (differenziale nel punto P_0) e quindi ho che $\dim(\text{Im } T) = r = \text{rango}(df(P_0))$, quindi $\dim(\text{Ker } T) = n - r$.

Chiamo *varietà tangente* a Γ in P_0 l'insieme $\{\bar{x} : \bar{x} = P_0 + \bar{h}\}$ (nell'esempio associato al disegno di cui sopra, corrisponderebbe al piano tangente in P_0).

Le equazioni di questa varietà tangente sono date da
$$\begin{bmatrix} \partial x_1 g_1 & \dots & \partial x_n g_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial x_1 g_r & \dots & \partial x_n g_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - x_1^0 \\ \dots \\ x_n - x_n^0 \end{bmatrix} = 0$$
.



Massimi e minimi

Sia $f: A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ con A aperto ed f derivabile. Definisco $P_0 \in A$ *punto critico* per $f \Leftrightarrow \nabla f(P_0) = 0$.

Dico inoltre che P_0 è *punto di massimo locale* per $f \Leftrightarrow \exists I_{P_0} : \forall P (P \in I_{P_0} \Rightarrow f(P) \leq f(P_0))$.

Analogamente dico che P_0 è *punto di minimo locale* per $f \Leftrightarrow \exists I_{P_0} : \forall P (P \in I_{P_0} \Rightarrow f(P) \geq f(P_0))$.

Definisco infine P_0 *punto estremante locale* per $f \Leftrightarrow$ punto di massimo o minimo relativo per f .

Se P_0 è un punto estremante per $f \Rightarrow P_0$ è un punto critico per f . Quindi la ricerca dei punti estremanti di f (su A) va eseguita sull'insieme dei punti critici per f (cioè i punti con gradiente nullo).

Si noti che non tutti i punti critici sono però estremanti. Cerchiamo quindi una condizione sufficiente che mi permetta di distinguere i punti che mi interessano.

Consideriamo la funzione f come una funzione di una variabile. Ricavo la formula di Taylor con resto di Peano:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \underset{h \rightarrow 0}{=} \underbrace{0}_{\substack{\text{questa sarebbe la } f' \\ \text{ma trattandosi di un} \\ \text{punto critico, il gradiente} \\ \text{è nullo (in questo caso} \\ \text{la derivata è nulla)}} + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot h^2 + o(h^2)$$

Evidentemente la derivata seconda f'' fornisce il segno della differenza al primo membro ("o piccolo" non entra in gioco perché infinitesimo di ordine superiore).

Questo significa che se $f'' > 0$ allora la differenza è positiva e cioè significa che nei punti "spostati di h " la f ritorna dei valori che stanno tutti sopra al valore riscontrato in x_0 (in x_0 si ha quindi una "concavità"). Questo significa che in x_0 ci sarà un punto di minimo relativo. Analogamente, se la $f'' < 0$, allora in x_0 si avrà un punto di massimo relativo.

Nel caso di funzioni a più variabili, procedo in maniera analoga. Sia \bar{x}_0 un punto critico di f (f regolare).

$$f(\bar{x}_0 + \bar{h}) - f(\bar{x}_0) \underset{\bar{h} \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} d^2 f(\bar{x}_0)(\bar{h}) + \frac{1}{6} d^3 f(\bar{x}_0)(\bar{h}) + \frac{1}{2} d^2 f(\bar{x}_0)(\bar{h}) + o(\|\bar{h}\|^2)$$

Anche in questo caso il segno della differenza al primo membro è dato dal differenziale secondo.

Questo differenziale è dato da $d^2 f(\bar{x}_0)(\bar{h}) = \sum_{i,j}^{1..n} f_{x_i x_j}(\bar{x}_0) h_i h_j$. Questa espressione è una forma quadratica in

n variabili, cioè un polinomio di secondo grado in n variabili.

Nel caso in cui $n=2$ e $f_{x_i x_j}(\bar{x}_0) = a_{ij}$, allora il differenziale diventa (sviluppo la definizione appena data):

$$d^2 f(\bar{x}_0) = a_{11} h_1^2 + a_{12} h_1 h_2 + a_{21} h_2 h_1 + a_{22} h_2^2$$

Più in generale scriveremo $q(\bar{h}) = q(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j}^{1..n} a_{ij} h_i h_j$.

Se $a_{ij} = a_{ji}$ allora la forma quadratica si dice *simmetrica*.

Alla forma quadratica $q(\mathbf{h})$ è associata la matrice $A = [a_{ij}]$.

$$\text{Più precisamente ho che } q(\bar{h}) = \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \dots \\ h_n \end{bmatrix} = \mathbf{h}^t \cdot A \cdot \mathbf{h}.$$

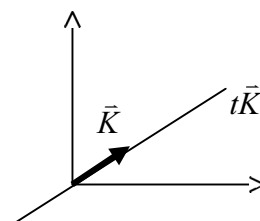
Segno di una forma quadratica

La forma quadratica $q(\bar{h})$ assume segno costante su ogni retta passante per l'origine (origine esclusa).

Infatti, sostituendo \bar{h} con $t\bar{K}$, ottengo $\begin{cases} q(\bar{h}) \\ \bar{h} = t\bar{K} \end{cases} \Rightarrow q(t\bar{K}) = t^2 q(\bar{K})$

In particolar modo ho che:

- q si dice *definita positiva* se $\forall \bar{h} (\in \mathbb{R}^n) \neq \bar{0} : q(\bar{h}) > 0$
- q si dice *definita negativa* se $\forall \bar{h} (\in \mathbb{R}^n) \neq \bar{0} : q(\bar{h}) < 0$



- q si dice *semidefinita positiva* se $\forall \bar{h} (\in R^n) \neq \bar{0} : q(\bar{h}) \geq 0$ ed inoltre $\exists \bar{h} \neq \bar{0} : q(\bar{h}) = 0$
- q si dice *semidefinita negativa* se $\forall \bar{h} (\in R^n) \neq \bar{0} : q(\bar{h}) \leq 0$ ed inoltre $\exists \bar{h} \neq \bar{0} : q(\bar{h}) = 0$
- q si dice *non definita* se $\exists \bar{h}_1, \bar{h}_2 : \begin{cases} q(\bar{h}_1) > 0 \\ q(\bar{h}_2) < 0 \end{cases}$.

Autovalori

Sia $A \in M_n$ (matrice quadrata di ordine n). Siano inoltre $\lambda \in C$ e $x \in C^n$.

Se vale $A \cdot x = \lambda \cdot x$ (cioè $(A - \lambda \cdot I_n) \cdot x = 0$ con I_n matrice identica), allora λ è detto *autovalore*.

Inoltre x è detto *autovettore* della matrice A .

Quindi, in pratica, ho che λ è autovalore $\Leftrightarrow \det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$.

Autovalori di una matrice simmetrica

Se una matrice A è simmetrica, allora:

- autovalori ed autovettori sono reali.
- Esistono n autovettori w_1, \dots, w_n indipendenti che costituiscono una base ortonormale: $w_i \cdot w_j = \delta_{ij}$, dove il

simbolo δ_{ij} è il cosiddetto *delta di Dirac* e vale $\begin{cases} \delta_{ij} = 1, & i = j \\ \delta_{ij} = 0, & i \neq j \end{cases}$.

- La matrice $Q = [w_1, \dots, w_n]$ è ortogonale (vale cioè $Q^{-1} = Q^t$) e diagonalizza la matrice A . Questo

significa che $Q^t \cdot A \cdot Q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda$.

Autovalori, autovettori e forme quadratiche

Sia q una forma quadratica simmetrica su R^n : $q(h) = h^t \cdot A \cdot h$.

Considero la trasformazione $h = Q \cdot K$ (trasformazione biettiva di R^n in R^n), dove Q è la matrice costruita con gli autovettori di A (l'abbiamo vista in precedenza).

Allora avrò che $q(h) = q(Q \cdot K) = K^t \cdot Q^t \cdot A \cdot Q \cdot K = K^t \cdot \Lambda \cdot K = \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot K_j^2$, dove Λ è la matrice

diagonali formata dagli autovalori (anche questa vista in precedenza).

Da questo risultato si deduce che:

- q è definita positiva \Leftrightarrow gli autovalori di A sono positivi
- q è definita negativa \Leftrightarrow gli autovalori di A sono negativi
- q è semidefinita positiva \Leftrightarrow gli autovalori di A sono non negativi ed almeno uno di essi è nullo
- q è semidefinita negativa \Leftrightarrow gli autovalori di A sono non positivi ed almeno uno di essi è nullo
- q è non definita \Leftrightarrow esistono almeno due autovalori di A di segno opposto

Si noti che se q è definita positivamente, allora $q(h) \geq \lambda_{\min} \cdot \|h\|^2$, $\forall h \in R^n$, dove $\lambda_{\min} = \min \lambda_i$.

Analogamente se q è definita negativamente, allora $q(h) \leq \lambda_{\max} \cdot \|h\|^2$, $\forall h \in R^n$, dove $\lambda_{\max} = \max \lambda_i$.

Forme quadratiche del differenziale secondo

Come abbiamo già detto, il differenziale secondo è definito come $d^2 f(\bar{x}_0)(\bar{h}) = \sum_{i,j}^{1..n} f_{x_i x_j}(\bar{x}_0) h_i h_j$ che è una

forma quadratica. Inoltre abbiamo anche detto che ad una forma quadratica q è possibile associare una matrice.

Allora, quale matrice posso associare al differenziale secondo? La matrice Hessiana $H_f(x_0) = [f_{ij}(x_0)]$.

Ora, sussiste la seguente proposizione:

sia f una funzione derivabile almeno fino al secondo grado e sia x_0 un punto critico per f (cioè $\nabla f(x_0) = 0$).

Allora si ha che:

- $d^2 f(x_0)$ definita positivamente $\Leftrightarrow x_0$ punto minimo forte locale (cioè strettamente minimo).
- $d^2 f(x_0)$ definita negativamente $\Leftrightarrow x_0$ punto massimo forte locale (cioè strettamente massimo).
- $d^2 f(x_0)$ non definita $\Leftrightarrow x_0$ punto di sella.

Infatti, se supponiamo $d^2 f(x_0)$ definita positivamente, allora ho che $d^2 f(x_0)(h) \geq \lambda_{\min} \cdot \|h\|^2$, dove λ_{\min} è il minimo autovalore della matrice Hessiana H_f associata al differenziale secondo.

Dalla formula di Taylor ottengo:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} d^2 f(x_0)(h) + o(\|h\|^2) \geq \frac{1}{2} \lambda_{\min} \|h\|^2 + o(\|h\|^2) = \frac{1}{2} \lambda_{\min} \|h\|^2 (1 + o(1))$$

e ciò comporta che, per tutti gli h (con h abbastanza piccolo) si ha che la differenza a primo membro è strettamente positiva e quindi x_0 è punto di minimo forte.

Analogamente si dimostra il caso di punto di massimo forte.

Nel caso di punto di sella, la non definizione del differenziale secondo sta ad indicare che nell'intorno di x_0 esistono punti che stanno sotto e punti che stanno sopra di esso.

Facciamo ora un esempio nel caso in cui $n = 2$. $f: A \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in A$ un punto critico per f . Allora:

- $|H_f(x_0)| > 0$ e $f_{xx} > 0$, allora x_0 è un punto di minimo relativo forte per f .
- $|H_f(x_0)| > 0$ e $f_{xx} < 0$, allora x_0 è un punto di massimo relativo forte per f .
- $|H_f(x_0)| < 0$, allora x_0 è un punto di sella per f .

Dire infatti che $|H_f(x_0)| > 0$, equivale a dire che gli autovalori hanno tutti lo stesso segno. Il loro segno poi lo vengo a conoscere quando testo il segno della f_{xx} (che sta sulla diagonale di H_f). Infatti, abbiamo detto che l'Hessiana è la matrice associata al differenziale secondo.

Gli autovalori del differenziale secondo saranno quindi dati dalla seguente equazione:

$$\det(H_f(x_0) - \lambda \cdot I_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} f_{xx} - \lambda & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (f_{xx} + f_{yy})\lambda + |H_f(x_0)| = 0$$

Da questa si desume che il segno degli autovalori λ_1 e λ_2 è lo stesso per entrambi quando l'Hessiana è positiva. In questo caso è sufficiente vedere il segno di f_{xx} (o f_{yy} , in quanto anche queste due derivate avranno stesso segno) per capire se il punto x_0 è punto di minimo o di massimo. Se invece l'Hessiana è minore di zero, allora gli autovalori avranno segni opposti e quindi x_0 sarà un punto di sella.

Si noti infine che se l'Hessiana risultasse essere nulla, allora dovremmo procedere in altro modo per capire se il punto x_0 è punto di minimo, di massimo o di sella (ad esempio andando a testare i valori di f in un intorno di x_0).

Massimi e minimi vincolati o condizionati

Facciamo un esempio di estremo vincolato. Si voglia calcolare il massimo del prodotto di 2 numeri non negativi, sapendo che la somma di tali numeri è 1.

Quindi avremo che $f(x, y) = x \cdot y$ ed avremo due vincoli: $x + y = 1$ ed inoltre $x, y \geq 0$.

Ottengo la funzione implicita $y = 1 - x$, da cui $\varphi(x) = f(x, 1 - x) = x \cdot (1 - x)$.

Derivo φ ed ottengo $\varphi'(x) = 1 - 2x$. Questa derivata devo imporla nulla in maniera da trovare il punto critico.

$$\varphi'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Ora derivo ancora φ per conoscere il segno della derivata seconda nel punto $x = \frac{1}{2}$ $\varphi''(x) = -2$ (sempre).

Quindi il punto $x = \frac{1}{2}$ è un punto di massimo e qui vale $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \max(x \cdot y) = \frac{1}{4}$.

Questo però non significa che il punto $x = \frac{1}{2}$ sia punto di massimo per il prodotto $(x \cdot y)$ in generale. Questo vale solo quando sono validi i vincoli imposti in precedenza (x ed y non negativi e che abbiano somma pari a 1).

Sia ora $f: A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, con A aperto di \mathbb{R}^n . Sia Γ una varietà di equazioni $\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ g_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$.

Il sistema di equazioni posso vederlo come $G = (g_1, \dots, g_n): A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^r$, con G derivabile. Questo in particolare significa che il rango della matrice $\left[\frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right]$ è r (infatti G va da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^r). Quindi Γ ha dimensioni $n-r$ (come visto nei capitoli precedenti).

Sia ora $\phi: I \subset \mathbb{R} \mapsto \Gamma$ con I intorno di 0 (si noti che ϕ è una funzione in una variabile).

Valga inoltre $\phi(0) = x_0 \in \Gamma$. Allora ϕ si dice *curva su Γ passante per x_0* (l'avevamo già visto).

Si noti che $\forall t \in I: (G(\phi(t)) = 0)$, cioè utilizzando la t come un "cursore" e spostandolo su tutto l'intorno I , la mia ϕ soddisfa sempre il sistema di equazioni che definisce la G (e quindi la curva sta su Γ).

Ora posso dire che x_0 è punto critico (o *stazionario*) per f , *vincolato* (o *condizionato*) su $\Gamma \Leftrightarrow \forall \phi$, curva differenziabile, su Γ , passante per x_0 vale $(f \circ \phi)'(0) = 0$, cioè $(f(\phi(0)))' = \nabla f(x_0) \cdot \phi'(0) = 0$. Questo significa che il vettore tangente a ϕ (cioè la sua derivata) è tangente anche ad f (infatti è ortogonale al gradiente di f , che come noto è ortogonale a tutti i vettori tangenti). Questo significa anche che il gradiente di f è ortogonale a Γ nel punto x_0 . Si noti che questa definizione di punto critico vincolato è diversa dalla definizione di punto critico normale in quanto in quest'ultima era sufficiente che $\nabla f(x_0) = 0$. Si nota bene quindi che un punto critico vincolato può anche non essere un punto critico normale per f .

Si noti, inoltre che $f \circ \phi$ è la restrizione di f sulla curva ϕ .

Ora che so che x_0 è un punto critico vincolato, posso dire che:

- x_0 punto di *massimo relativo condizionato* su Γ , per $f \Leftrightarrow \exists U \subseteq I_{x_0}, \forall x (x \in \Gamma \cap U \Rightarrow f(x) \leq f(x_0))$
- x_0 punto di *minimo relativo condizionato* su Γ , per $f \Leftrightarrow \exists U \subseteq I_{x_0}, \forall x (x \in \Gamma \cap U \Rightarrow f(x) \geq f(x_0))$
- x_0 punto *estremante condizionato* su Γ , per $f \Leftrightarrow x_0$ punto di minimo o massimo relativo condizionato su Γ , per f .

Posso inoltre dire che se x_0 è punto estremante condizionato su Γ per $f \Rightarrow x_0$ è punto critico vincolato per f su Γ .

La ricerca dei punti estremanti condizionati

Continuiamo ad utilizzare i simboli introdotti nel capitolo precedente. Nel punto \mathbf{x}_0 , lo spazio normale a Γ in tale punto ha, come base, i gradienti delle g , cioè $(\nabla g_1, \dots, \nabla g_n)$.

Abbiamo detto che $\nabla f(x_0)$ è normale anch'esso a Γ nel punto \mathbf{x}_0 , per cui fa parte anch'esso dello spazio normale di cui abbiamo appena dato una base. Questo significa che posso trovare degli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ univocamente determinati, tali che $\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \nabla g_i(x_0)$. Abbiamo poi visto che in verità la dimensione

di Γ è r in quanto questo è il valore del rango della matrice $\left[\frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right]$, quindi in verità l'equazione appena

vista diventa $\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot \nabla g_i(x_0)$.

Riscrivo l'equazione come $\nabla f(x_0) - \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot \nabla g_i(x_0) = 0$ e, ricordando la definizione di punto critico

normale, posso dire che \mathbf{x}_0 è punto critico della funzione $F = f - \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot g_i$.

Questo significa che i punti estremanti $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ per f su Γ andranno cercati tra le soluzioni $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$

del sistema (in $n+r$ equazioni)
$$\begin{cases} \partial x_i f - \sum_{k=1}^r \lambda_k \partial x_i g_k = 0 & , \quad i = 1 \dots n \\ g_j(x) = 0 & , \quad j = 1 \dots r \end{cases}$$

Ora devo classificare il punto critico (massimo, minimo o altro ?)

Sappiamo che \mathbf{x}_0 è punto critico per f ed inoltre gli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ fanno in modo che sia anche punto critico per F . Indico con q la forma quadratica associata alla matrice Hessiana di F , calcolata in \mathbf{x}_0 :

$$q(h) = h^t \cdot H(F)_{|_{X_0}} \cdot h = \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \cdot H(F)_{|_{X_0}} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \dots \\ h_n \end{bmatrix}$$

Indico poi con $T(\mathbf{x}_0)$ lo spazio tangente a Γ in \mathbf{x}_0 .

Questo spazio è costituito dai vettori h tali che
$$\begin{bmatrix} \partial x_1 g_1 & \dots & \partial x_n g_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial x_1 g_n & \dots & \partial x_n g_n \end{bmatrix}_{X_0} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \dots \\ h_n \end{bmatrix} = 0$$
 (cioè dagli h che sono

ortogonali al gradiente di G).

- se $q(h)$ è definita positivamente su $T(\mathbf{x}_0)$, allora \mathbf{x}_0 è punto di minimo relativo condizionato su Γ per f .
- se $q(h)$ è definita negativamente su $T(\mathbf{x}_0)$, allora \mathbf{x}_0 è punto di massimo relativo condizionato su Γ per f .

Si ricordi che il tipo di definizione di $q(h)$ è possibile averlo grazie al segno del determinante della Hessiana e dal segno di una delle derivate della diagonale della Hessiana stessa.

Superfici in \mathbf{R}^3

Sia A un aperto connesso di \mathbf{R}^2 . Sia anche $A \subset T \subset \overline{A}$ e sia pure $\overset{o}{T} = A$.

Supponiamo inoltre di avere $r: T \subset \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^3$ e che questa sia continua. L'applicazione \mathbf{r} avrà una definizione simile alla seguente:

$$r(u, v) = x(u, v) \cdot \vec{i} + y(u, v) \cdot \vec{j} + z(u, v) \cdot \vec{k}.$$

Se ora ho che $\Sigma := X(T)$, con $X(T) = (x, y, z) = r(u, v)$, allora dirò che \mathbf{r} parametrizza Σ .

Definisco (Σ, \mathbf{r}) come una superficie di \mathbf{R}^3 , detta anche superficie di equazioni $\mathbf{X} = \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Come abbiamo già detto, avremo che:

$$X = (x, y, z) = r(u, v) \Rightarrow X = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ con } \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

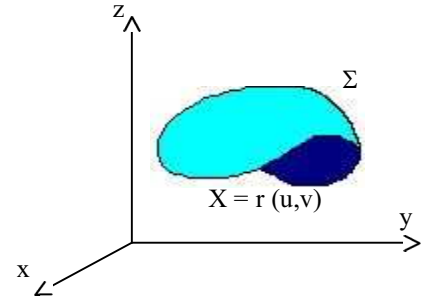
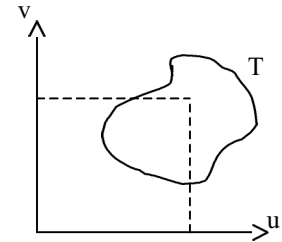
dove $\mathbf{x}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $\mathbf{y}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ e $\mathbf{z}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ sono dette *superfici parametriche* della Σ .

Inoltre, se \mathbf{r} è di classe C^k sull'interno T , allora anche la superficie Σ sarà di classe C^k .

In simboli: $r \in C^k(\overset{o}{T}) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\Sigma, r) \in C^k$.

Facciamo un esempio con le superfici cartesiane: sia $f: T \subset \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ e sia Σ il grafico di f .

Una parametrizzazione di Σ è la seguente: $r(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k}$.



Regolarità una superficie

Sia ora Σ una superficie di classe C^1 di equazioni $\mathbf{X} = \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Dico che il punto $P_0 = r(u_0, v_0)$, con $(u_0, v_0) \in \overset{o}{T}$, è *regolare* $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{rango} \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix}_{(u_0, v_0)} = 2$.

Dico inoltre che Σ è *regolare* \Leftrightarrow ogni punto $P_0 = r(u_0, v_0)$, con $(u_0, v_0) \in \overset{o}{T}$, è regolare.

Ad esempio le superfici cartesiane di classe C^1 sono regolari, infatti: $\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{bmatrix} = 2$.

Significato della nozione di regolarità

Dire che Σ sia regolare in $\mathbf{P}_0 = \mathbf{r}(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$, comporta che uno dei minori $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, $\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$, $\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$ sia non nullo

in $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$. Se per esempio non è nullo il primo, ottengo $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_{(u_0, v_0)} \neq 0$. Allora, per il teorema

del Dini, dal sistema $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ è possibile ricavare \mathbf{u} e \mathbf{v} in funzione di \mathbf{x} ed \mathbf{y} in un intorno di \mathbf{P}_0 . Allora

avrò la funzione implicita $z = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$, cioè la Σ , in un intorno di \mathbf{P}_0 , è una superficie cartesiana.

Facciamo un esempio: la $y = \sqrt{R - x^2 - z^2}$, con $(x^2 + z^2) < R^2$, è l'espressione cartesiana dell'emisfero destro della superficie sferica di raggio \mathbf{R} e centro nell'origine.

Un'altra parametrizzazione dello stesso emisfero potrebbe essere la seguente:

$$\mathbf{r}(\theta, \psi) = R \sin \psi \cos \theta \cdot \vec{i} + R \sin \psi \sin \theta \cdot \vec{j} + R \cos \psi \cdot \vec{k}$$

Avrò quindi $\begin{cases} x = R \sin \psi \cos \theta \\ y = R \sin \psi \sin \theta \\ z = R \cos \psi \end{cases}$ come equazioni parametriche.

Definizione alternativa di una superficie

Sia $F : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, con A aperto ed F di classe C^1 .

Consideriamo l'insieme di livello $E_0 = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$.

E_0 definisce una superficie Σ , se $\forall (x, y, z) \in E_0 : (\nabla F(x, y, z) \neq 0)$, tranne (al più) un numero finito di punti.

Basta infatti osservare che, in tali condizioni, in un intorno di ogni suo punto, E_0 è una superficie cartesiana (dal teorema del Dini, come visto sopra).

I punti in cui $\nabla F = 0$ vengono chiamati *punti singolari*.

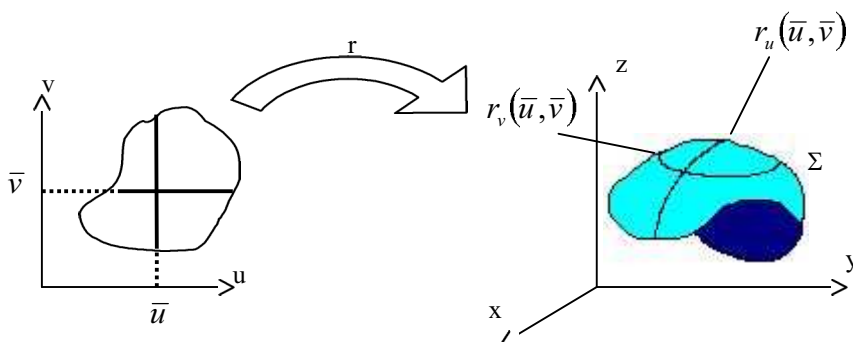
Ad esempio la $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ definisce implicitamente una superficie sferica, senza punti singolari, la

cui espressione è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0$.

Ulteriori osservazioni sulle superfici regolari

Sia Σ una superficie di equazioni parametriche $\mathbf{X} = \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ (con $r|_T$ iniettiva).

Fissando prima la \mathbf{u} e poi la \mathbf{v} ottengo due "righe" definite come $u \rightarrow r(\bar{u}, v)$ e $v \rightarrow r(u, \bar{v})$, che su Σ tracciano delle curve.



In figura sono indicate due *linee coordinate* su Σ . Il punto indicato su Σ (l'incrocio di queste due linee) ha coordinate locali (\bar{u}, \bar{v}) . Le equazioni di queste due linee coordinate sono $\begin{cases} r_u = x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k} \\ r_v = x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k} \end{cases}$.

Moltiplicando vettorialmente le due linee coordinate, ottengo:

$$r_u \wedge r_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \vec{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \vec{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \vec{k}$$

Si ha allora che Σ è regolare in $\mathbf{P} = \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ se e solo se $r_u \wedge r_v \neq \vec{0}$, cioè solo se \mathbf{r}_u ed \mathbf{r}_v sono indipendenti.

Effettuiamo ora un cambiamento di parametri (detto *regolare*).

$u = \varphi(s, t)$ e $v = \psi(s, t)$, con $(s, t) \in S$ e φ e ψ di classe C^1 . Sia inoltre $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(s, t)} \neq 0$ in S .

Allora ho una trasformazione che mi porta da S a T : $(s, t) \leftrightarrow (u, v)$.

Avrò quindi una $\tilde{r}(s, t) = \tilde{x}(s, t) \cdot \tilde{i} + \tilde{y}(s, t) \cdot \tilde{j} + \tilde{z}(s, t) \cdot \tilde{k}$, con
$$\begin{cases} \tilde{x}(s, t) = x(\varphi(s, t), \psi(s, t)) \\ \tilde{y}(s, t) = y(\varphi(s, t), \psi(s, t)) \\ \tilde{z}(s, t) = z(\varphi(s, t), \psi(s, t)) \end{cases}$$

Quindi sarà $\tilde{r}(s, t) = r(\varphi(s, t), \psi(s, t))$.

Le derivate (lungo s e t) saranno
$$\begin{cases} \tilde{r}_s = r_u \frac{\partial \varphi}{\partial s} + r_v \frac{\partial \psi}{\partial s} \\ \tilde{r}_t = r_u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + r_v \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{cases}$$

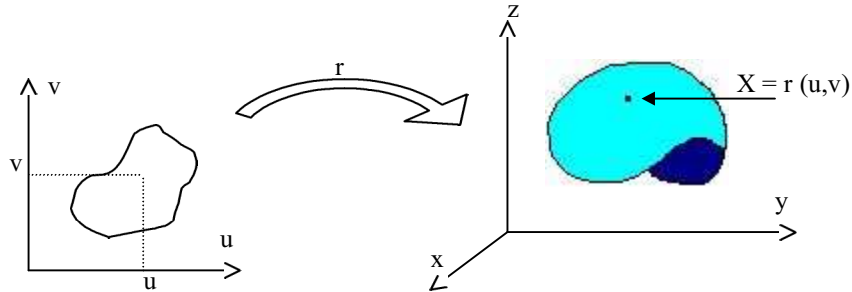
Moltiplicando vettorialmente otterrò:

$$\tilde{r}_s \wedge \tilde{r}_t = \left(r_u \frac{\partial \varphi}{\partial s} + r_v \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) \wedge \left(r_u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + r_v \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) \cdot (r_u \wedge r_v) = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(s, t)} \cdot (r_u \wedge r_v)$$

Quindi, in pratica, ottengo che $r_u \wedge r_v \neq \vec{0} \Leftrightarrow \tilde{r}_s \wedge \tilde{r}_t \neq \vec{0}$. Questo significa che la regolarità dei punti non cambia se si opera una trasformazione regolare dei parametri.

Definisco come $r \sim \tilde{r}$ (si legge r *equivalente* ad \tilde{r}) quando r ed \tilde{r} sono legate da un cambiamento regolare di parametri, con determinante dello Jacobiano positivo: in tal caso i vettori $r_u \wedge r_v$ ed $\tilde{r}_s \wedge \tilde{r}_t$ hanno stessa direzione e stesso verso (in ogni punto).

Riepilogo sulla parametrizzazione



$$X = r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \Rightarrow \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (\text{forma parametrica})$$

$$\begin{cases} u = \varphi(s, t) \\ v = \psi(s, t) \end{cases} \text{ con } (s, t) \in S \rightarrow \phi(s, t) = (\varphi(s, t), \psi(s, t)) = (u, v) \quad (\phi \text{ trasformazione piana})$$

Con la ϕ posso definire una $\tilde{r} = r \circ \phi$, ottenendo
$$\begin{cases} x = x(\varphi(s, t), \psi(s, t)) = \tilde{x}(s, t) \\ y = y(\varphi(s, t), \psi(s, t)) = \tilde{y}(s, t) \\ z = z(\varphi(s, t), \psi(s, t)) = \tilde{z}(s, t) \end{cases} \Rightarrow \tilde{r} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$$

ϕ è regolare $\Leftrightarrow \phi \in C^1$ ed inoltre se $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(s, t)} \neq 0$ in S .

ϕ mantiene la direzione del vettore normale ? (mi sto chiedendo se cambiando la parametrizzazione cambia il vettore normale). Abbiamo visto che $\tilde{r}_s \wedge \tilde{r}_t = \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(s, t)} \cdot (r_u \wedge r_v) \Rightarrow \tilde{r}_s \wedge \tilde{r}_t$ ha stessa direzione del vettore normale $r_u \wedge r_v$, quindi la risposta è: “cambiando la parametrizzazione (in maniera regolare) il vettore normale non cambia).

Dico infine che una trasformazione di parametri è una equivalenza quando $\exists \phi : \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(s, t)} > 0$.

In questo caso si nota che il vettore normale mantiene (oltre alla stessa direzione) anche lo stesso verso del vettore normale originale. Una equivalenza si indica con $r \sim \tilde{r}$.

Superficie di rivoluzione (in forma parametrica)

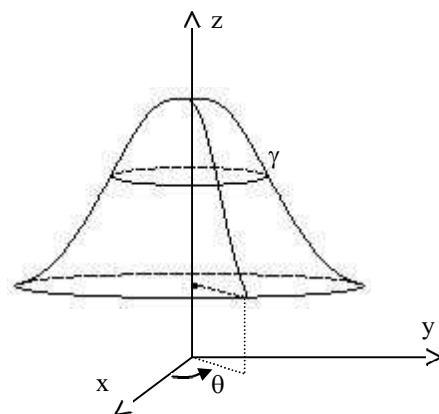
Si ottiene ruotando una curva piana γ intorno ad un asse giacente nel piano della curva.

$$\begin{cases} y = f(t) \\ z = g(t) \\ r(\theta, t) = f(t)\cos\theta \cdot \bar{i} + f(t)\sin\theta \cdot \bar{j} + g(t) \cdot \bar{k} \end{cases}$$

dove $(t, \theta) \in I \times [0, 2\pi]$.

La curva γ , nell'esempio, si trova sul piano ZY ($x=0$).

Durante la rotazione di un punto di γ , il parametro t si conserva (quindi la *quota* del punto resta invariata).



Vettore normale e piano tangente ad una superficie parametrica

Sia Σ una superficie regolare di equazioni parametriche $X = r(u, v)$.

Parametrizzo ulteriormente le equazioni utilizzando la variabile $t \in I \subset R$: $\gamma = \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$, da cui ottengo la

nuova funzione $\sigma(t) = r(\gamma(t)) = r(u(t), v(t))$, la quale rappresenta una curva tracciata su Σ .

Si noti che σ è una funzione ad una sola variabile, ma a valori in R^3 .

Posso vedere quindi la σ come $\sigma(t) = X = r(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$.

Se ora derivo rispetto alla variabile t , ottengo:

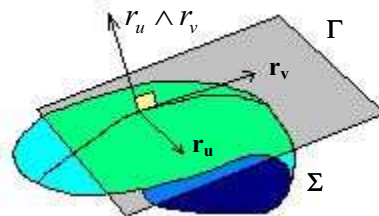
$$\sigma'(t) = (x_u \cdot u'(t) + x_v \cdot v'(t)) \cdot \bar{i} + (y_u \cdot u'(t) + y_v \cdot v'(t)) \cdot \bar{j} + (z_u \cdot u'(t) + z_v \cdot v'(t)) \cdot \bar{k}$$

che è il vettore tangente a σ (e quindi a Σ visto che σ è tracciato su di essa).

Raccogliendo i vari addendi, ottengo:

$$\sigma'(t) = r_u(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + r_v(u(t), v(t)) \cdot v'(t)$$

I vettori r_u ed r_v (grazie alla regolarità delle trasformazioni utilizzate) individuano un piano: questo piano è il piano tangente. Inoltre il loro prodotto vettoriale individua il vettore normale.



Equazione del piano tangente

Imponendo la condizione di ortogonalità ottengo l'equazione del piano tangente (in pratica prendo tutti i vettori che sono ortogonali al vettore $r_u \wedge r_v$):

$$\langle X - r(u, v), r_u(u, v) \wedge r_v(u, v) \rangle = 0$$

In formato matriciale, fissato il punto (u, v) , ottengo:

$$\begin{vmatrix} X - x(u, v) & Y - y(u, v) & Z - z(u, v) \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0.$$

Orientazione di una superficie

Considero una superficie regolare Σ (cioè in ogni suo punto esiste il vettore normale al piano tangente).

In ogni suo punto può essere preso, come versore normale, il versore \vec{n} o $-\vec{n}$ (a seconda della parametrizzazione scelta).

Questi due versori sono $\vec{n} = \frac{r_u \wedge r_v}{\|r_u \wedge r_v\|}$ e $-\vec{n} = -\frac{r_u \wedge r_v}{\|r_u \wedge r_v\|}$.

La scelta di uno dei due versori appena visti ci dà l'orientazione della superficie.

Σ si dice *orientabile* se è possibile effettuare una scelta della parametrizzazione regolare r di Σ , in modo tale che, fissato $P_0 \in \Sigma$ e considerata una qualunque curva regolare chiusa su Σ , passante per P_0 , si abbia che, descrivendo tale curva, il versore \vec{n} vari con continuità.

Una superficie chiusa, connessa, orientabile, suddivide \mathbf{R}^3 in due parti: una limitata (interna) e l'altra illimitata (esterna). Si può dunque parlare di *versore normale interno* \vec{n}_i ed *esterno* \vec{n}_e .

Se si effettua un cambiamento di parametrizzazione regolare, il piano tangente rimane invariato ed il versore normale (invariato in direzione) cambia di verso se lo Jacobiano del cambio di variabili è negativo, altrimenti mantiene anche il verso.

Per una superficie orientabile, l'orientazione (cioè l'insieme dei vettori normali) rimane inalterata per parametrizzazioni equivalenti (che hanno Jacobiano positivo).

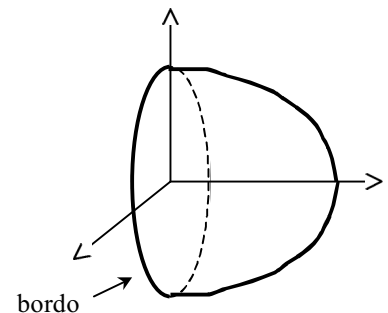
Una superficie orientata (regolare) è un insieme Σ con una classe di equivalenza a parametrizzazioni regolari.

Bordo di una superficie

Sia Σ una superficie di equazioni parametriche $X = r(u, v)$. Allora dico che (Σ, r) è *semplice* $\Leftrightarrow r|_T$ è iniettiva.

Se $r \in C^1(T)$ e T è aperto, allora definisco *bordo* di Σ la differenza $\partial\Sigma := \bar{\Sigma} - \Sigma$ (è la differenza della superficie Σ rispetto alla sua chiusura $\bar{\Sigma}$ in \mathbf{R}^3).

Si noti che le superfici con bordo vuoto e limitate in \mathbf{R}^3 si dicono *chiuse* (ad esempio una sfera).

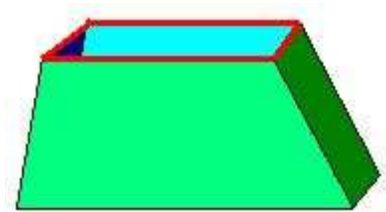


Superfici a pezzi

$\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ si dice *superficie C^1 a pezzi* se esiste un numero finito di curve regolari a tratti (spigoli) $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, contenute in Σ , che suddividono Σ in un numero finito di superfici (facce) Σ_j di classe C^1 .

Il bordo $\partial\Sigma$, in questo caso, è l'unione dei bordi delle facce Σ_j , con esclusione degli spigoli che appartengono contemporaneamente al bordo di facce adiacenti.

Nella figura a lato, il bordo è evidenziato in rosso e corrisponde agli spigoli delle facce laterali non condivisi con altre facce (la faccia superiore non c'è).



Integrale di una funzione vettoriale

Considero una funzione vettoriale $r : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$. In forma vettoriale sarà $\vec{r}(t) = r_i(t)\vec{i} + r_j(t)\vec{j} + r_k(t)\vec{k}$.

Definisco come integrale della funzione vettoriale \mathbf{r} il seguente integrale:

$$\int_a^b \vec{r} = \int_a^b \vec{r}(t)dt = \vec{i} \int_a^b r_i(t)dt + \vec{j} \int_a^b r_j(t)dt + \vec{k} \int_a^b r_k(t)dt$$

Essendo $\vec{r}'(t) = r'_i(t)\vec{i} + r'_j(t)\vec{j} + r'_k(t)\vec{k}$, sarà evidentemente $\int_a^b \vec{r}' = \vec{r}(b) - \vec{r}(a)$.

Proprietà dell'integrale di una funzione vettoriale

1. Considero un vettore costante \vec{c} . Allora $\left\langle \vec{c}, \int_a^b \vec{r}(t)dt \right\rangle = \int_a^b \langle \vec{c}, \vec{r}(t) \rangle dt$

2. $\left\| \int_a^b \vec{r} \right\| = \sqrt{\left(\int_a^b r_i \right)^2 + \left(\int_a^b r_j \right)^2 + \left(\int_a^b r_k \right)^2}$

3. $\left\| \int_a^b \vec{r} \right\| \leq \int_a^b \|\vec{r}\|$

Curve in \mathbb{R}^3

Sia \mathbf{r} una funzione vettoriale definita come $r : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ e sia essa continua in $I = [a, b]$.

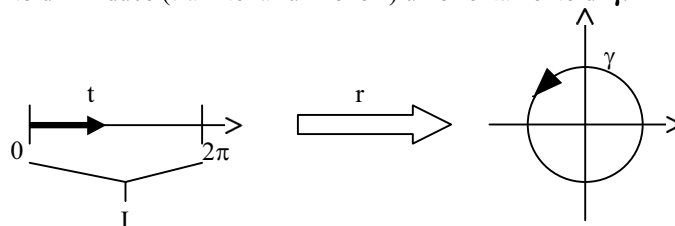
Sia inoltre γ l'immagine di I (tramite \mathbf{r}).

La funzione \mathbf{r} è detta *curva* di \mathbb{R}^3 . Si dice anche curva di equazioni parametriche $\mathbf{X} = \mathbf{r}(t)$.

Inoltre dico che \mathbf{r} è:

- *curva semplice* se \mathbf{r} è iniettiva su $[a, b]$
- *curva regolare* se \mathbf{r} è di classe $C^1(I)$ ed $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, $\forall t$.
- *curva regolare a tratti* se I è suddivisibile in un numero finito di sottoinsiemi, su ognuno dei quali \mathbf{r} è regolare.
- *curva chiusa* se $I = [a, b]$ ed inoltre $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$.

Si noti che l'orientamento di I induce (tramite la funzione \mathbf{r}) un orientamento di γ .



Cambiamento di parametro

Considero la funzione vettoriale $r : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$, regolare. Considero inoltre una ulteriore funzione $\phi : J \subset \mathbb{R} \mapsto I$.

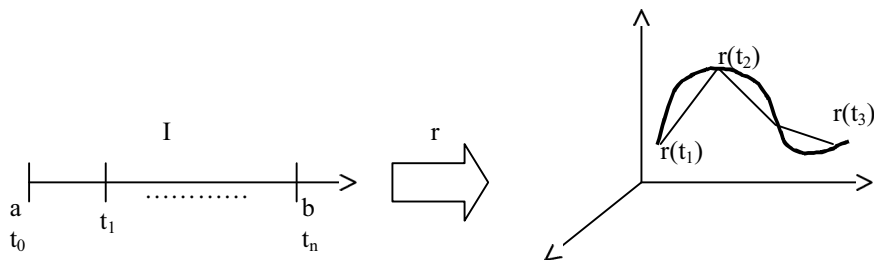
Sia la ϕ derivabile e la sua derivata in tutto J non si annulli (in pratica sia strettamente crescente o strettamente decrescente). Allora posso operare un cambio di parametro facendo $\tilde{r}(\tau) = r \circ \phi = r(\phi(\tau))$, con $\tau \in J$.

La funzione ϕ è detta *cambiamento regolare di parametro*. Inoltre:

- Se $\phi' > 0$, allora siamo di fronte ad una parametrizzazione equivalente e scrivo $r \sim \tilde{r}$.
- Se $\phi' < 0$, allora non posso dire che ϕ rappresenta un'equivalenza e scrivo $r \equiv -\tilde{r}$.

Rettificabilità una curva

Considero la funzione vettoriale $r : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$.



Suddivido l'intervallo di definizione I . Ottengo un insieme $D = \{a = t_0, t_1, \dots, b = t_n\}$ di punti di I .

Costruisco la *poligonale* Γ_D dei punti t_0, \dots, t_n ed ottengo altrettanti punti $P_0 = r(t_0), \dots, P_n = r(t_n)$.

Calcolo la lunghezza della poligonale come $\ell(\Gamma_D) = \sum_{j=0}^{n-1} \|P_{j+1} - P_j\|$.

Posso dire che la lunghezza della curva è $L(\Gamma_D) = \sup_D \ell(\Gamma_D)$, cioè la lunghezza della curva tende ad essere

uguale alla lunghezza della poligonale man mano che aumenta il numero di sottointervalli di I .

Dico che se una curva (γ, r) è regolare \rightarrow è rettificabile (cioè la sua lunghezza L è finita) e la lunghezza della

curva è $L = \ell(\gamma, r) = \int_a^b \|r'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(r'_1(t))^2 + (r'_2(t))^2 + (r'_3(t))^2} dt$.

Ascissa curvilinea o lunghezza d'arco

Sia (γ, r) una curva regolare. In particolare sia $r : [a, b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$.

La lunghezza della curva sarà $\ell(\gamma, r) = \int_a^b \|r'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt$.

Chiamo *velocità scalare* la quantità $\|r'(t)\| = v(t)$.

Allora la funzione $S(t) = \int_a^t v(u) du$ è detta *lunghezza d'arco* o *ascissa curvilinea*. Si noti che nell'integrale è

stata usata la variabile u per non confonderci con la quantità t che è il punto d'arrivo dell'integrale stesso.

La funzione S è strettamente crescente ed inoltre (per definizione) ho che $S'(t) = v(t) > 0$.

Quindi posso trovare la funzione inversa (cammino inverso) $t = t(S)$ che posso interpretare come cambiamento di parametrizzazione equivalente per la r . Infatti ho $\tilde{r}(S) = r(t(S))$.

Ad ogni valore di S , la funzione $\tilde{r}(S)$ mi restituisce le coordinate del punto individuato sulla curva.

Si noti che $S \in [0, \ell(\gamma, r)]$, per come è definito.

Per trovare il vettore tangente è sufficiente derivare ed ottengo $\tilde{r}'(S) = r'(t(S)) \cdot t'(S)$.

Inoltre $t'(S) = \frac{1}{\|r'(t(S))\|}$, da cui ho che $\|\tilde{r}'(S)\| = 1$, cioè il vettore tangente, $\forall S$, è in verità un versore

tangente a \tilde{r} nel punto $\tilde{r}(S)$.

Integrale curvilineo di una funzione

Considero una funzione $f: E \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ con E aperto connesso. Sia inoltre $r: [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una curva regolare a tratti.

Pongo $\int_r f := \int_a^b (f \circ r) \cdot \|r'(t)\| \cdot dt = \int_\gamma f(x, y, z) \cdot ds$, dove γ è la curva tracciata su E dalla funzione r .

Questo è un risultato importante in quanto il termine centrale (quello con la norma di r') è invariante per un cambiamento regolare di parametro (in particolare non dipende dall'orientazione della curva in quanto non si chiede che il cambiamento sia di tipo equivalente).

Se poi, in particolare, si utilizza una parametrizzazione equivalente \tilde{r} dove il parametro è la lunghezza d'arco S (come nell'esempio del capitolo precedente), ottengo:

$$\int_r f = \int_{\tilde{r}} f = \int_0^L f(\tilde{r}(s)) \cdot ds = \int_r f \cdot ds$$

dove chiaramente L è la lunghezza di \tilde{r} .

Integrale curvilineo di un campo o di una forma differenziale (lavoro)

Considero un campo vettoriale $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 \Rightarrow \vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$.

L'espressione $\omega = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ si dice *forma differenziale*.

Se si pone $dX = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$, allora $\omega = \langle \vec{f}, dX \rangle$ è detto *lavoro elementare* del campo, relativo allo spostamento dX .

Sia ora $r: [a, b] \mapsto E \subset \mathbb{R}^3$ una curva (dove E è una regione dove è definito il campo f).

Allora $r'(t) \cdot dt$ è (approssimativamente) uno spostamento elementare lungo la tangente alla curva.

Allora, la quantità $\langle f \circ r, r'(t) \cdot dt \rangle$ è il lavoro elementare per lo spostamento lungo la curva r .

Allora $\int_r \omega = \int_a^b \langle f \circ r, r'(t) \rangle \cdot dt$ rappresenterà il lavoro del campo, lungo la curva, a partire da $r(a)$.

Si noti che questo valore è invariante per curve equivalenti (che quindi mantengono l'orientazione).

Il lavoro generalmente dipende dal percorso. Quando ciò non avviene, allora il campo è detto *conservativo*.

Affinché un campo sia *conservativo*, deve esistere una funzione scalare $U(x, y, z)$ tale che $\nabla U = \vec{f}$. Tale funzione U è detto *potenziale* del campo.

In particolare il lavoro di un campo conservativo è:

$$L = \int_{P_1}^{P_2} \omega = \int_a^b \langle f \circ r, r' \rangle = \int_a^b \langle (\nabla U) \circ r, r' \rangle = \int_a^b \frac{d}{dt} \underbrace{(U \circ r)}_{U(x(t), y(t), z(t))} = [U \circ r]_{t=a}^{t=b} = U(r(b)) - U(r(a)) = U(P_2) - U(P_1)$$



Ricerca del potenziale

Supponiamo che l'integrale di f sia indipendente dalla traiettoria (quindi f è un campo conservativo).

Il lavoro è, come già visto, $\phi(x) = \int_a^x \langle f \circ r, r' \rangle$. Quindi $\nabla \phi = \vec{f}$ e questo significa che ϕ è un potenziale.

Teorema di Poincare

Sia Ω un aperto *convesso* (cioè, presi due punti qualsiasi di Ω sia sempre possibile trovare un segmento tutto incluso in Ω stesso che unisca i due punti di cui sopra).

Considero inoltre un campo vettoriale $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{f} = (f_1, \dots, f_n)$.

Allora $\vec{f} = \nabla U \Leftrightarrow \partial_j f_k = \partial_k f_j$, per $j, k \in \{1, \dots, n\}$.

Diamone la dimostrazione.

Sia ω un punto di Ω . Sia anche \mathbf{X} un punto di Ω e sia $X = tx$ con \mathbf{x} costante e $0 \leq t \leq 1$ (equazione parametrica del segmento con parametro t). Sia γ il segmento che va da ω a \mathbf{X} (tutto appartenente a Ω in quanto quest'ultimo è convesso ed i punti di confine sono interni del convesso).

Considero che il punto ω sia dato da un'equazione del tipo: $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$ (in questa maniera mi preparo a cercare il potenziale), dove $f = f(tx)$.

Visto che $\begin{cases} X_1 = tx_1 \\ \dots \\ X_n = tx_n \end{cases}$, allora ho che $f(tx) = X(tx)$.

Sostituendo ottengo $\omega = X_1 dX_1 + \dots + X_n dX_n$.

Integrando, ottengo $\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 \langle f(tx), x \rangle dt = U(x) = \int_0^1 \psi(x, t) dt$.

Quindi il potenziale in un punto \mathbf{x} è dato dall'integrale di cui sopra.

Resta da provare che $f = \nabla U$, cioè che $\partial_k U = f_k$. Ora, so che $\partial_k U = \int_0^1 (\partial_k \psi(x, t)) dt$, dove

$$\partial_k \psi(x, t) = \partial_k \left(\sum_{i=1}^n f_i(tx) x_i \right) = \sum_{i=1}^n (\partial_k f_i(tx) x_i) = \sum_{i=1}^n (\partial_k f_i(tx) \cdot t \cdot x_i) + f_k(tx)$$

Se, come da ipotesi del teorema, ho che $\partial_j f_k = \partial_k f_j$, ottengo $\partial_k \psi(x, t) = \langle \nabla f_k(tx), x \rangle t + f_k(tx)$

Pongo ora $g(t) = f_k(tx)$, sostituisco ed ottengo $\partial_k \psi(x, t) = tg'(t) + g(t)$. Sostituisco ancora ed ottengo:

$$\partial_k U(x) = \int_0^1 [tg'(t) + g(t)] dt = [tg(t)]_0^1 - \int_0^1 g(t) dt + \int_0^1 g(t) dt = g(1) = f_k(x)$$

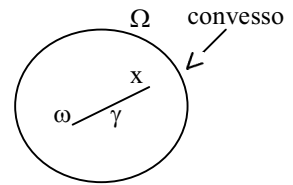
Questo teorema vale per insiemi convessi, ma esistono delle generalizzazioni.

Generalizzazione del teorema di Poincare

Considero $n=2$, $f \in C^1(\Omega)$. Sia inoltre $f = X(x, y)\vec{i} + Y(x, y)\vec{j}$ e $\omega = Xdx + Ydy$.

La frontiera $\partial\Omega$ sia connessa e sia un'unica curva di Jordan (non vale quindi una superficie a forma di corona o comunque "bucata", in quanto avrebbe più di una frontiera). Con $n=2$, questo significa che se ogni poligonale si può ridurre ad un punto senza spezzarla e senza uscire dall'insieme, allora questo insieme gode di connessione lineare semplice (è più debole della convessità ma gli assomiglia). Con $n=3$ sarebbe: quando ogni superficie poliedrica può ridursi ad un punto o ad una poligonale senza spezzarla e senza uscire dall'insieme, allora questo insieme gode di connessione superficiale semplice.

Allora posso dire che $\partial_y X = \partial_x Y \Leftrightarrow f = \nabla U$.



Integrazione multipla

Sia $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, con f limitata e $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ rettangolare (per semplicità).

Eseguiamo due decomposizioni (una per le x ed una per le y):
$$\begin{cases} D_1 = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_{r-1} < x_r = b\} \\ D_2 = \{y_0 = c < y_1 < \dots < y_{r-1} < y_r = d\} \end{cases}$$

La decomposizione di tutto Ω sarà $D = D_1 \times D_2$.

Il generico intervallino di Ω lo chiameremo Ω_{hk} . Su questo intervallino, la funzione è dotata di estremo superiore ed inferiore: $m_{hk} = \inf_{\Omega_{hk}} f$ e $M_{hk} = \sup_{\Omega_{hk}} f$.

Costruiamo le somme inferiori e superiori:
$$\begin{cases} s = s(D, f) = \sum_{h,k} m_{hk} \cdot \mu_2(\Omega_{hk}) \\ S = S(D, f) = \sum_{h,k} M_{hk} \cdot \mu_2(\Omega_{hk}) \end{cases}, \text{ dove } \mu_2(\Omega_{hk}) \text{ è la misura}$$

dell'arco dell'intervallino Ω_{hk} .

Per $f \geq 0$, s rappresenta il volume di un pluriintervallo contenuto in $\Gamma(f)$ (cilindroide), mentre S rappresenta il volume di un pluriintervallo contenente $\Gamma(f)$.

Per *cilindroide* si intende l'insieme dei punti P tali che la loro coppia di coordinate (x, y) cada in Ω e che la loro quota z sia compresa tra 0 e $f(x, y)$ (compresi). Quindi intendo tutta la "colonna" visibile in figura, base e "testa" comprese.

$s \leq S \Rightarrow m \cdot \mu_2(\Omega) \leq s \leq S \leq M \cdot \mu_2(\Omega)$, cioè prendendo come unico intervallo tutto l'insieme Ω , ottengo che s ed S sono compresi tra il minimo cilindroide (di base massima) ed il massimo cilindroide (di base massima). Infatti le quantità m ed M rappresentano rispettivamente il minimo ed il massimo di f su tutto Ω (che come detto è preso come unico intervallo).

Si noti che $s \leq S$ a prescindere dalla decomposizione scelta. Addirittura ho che prese due decomposizioni diverse D' e D'' , ottengo sempre che $s(D', f) \leq S(D'', f)$ e quindi anche $s(D'', f) \leq S(D', f)$.

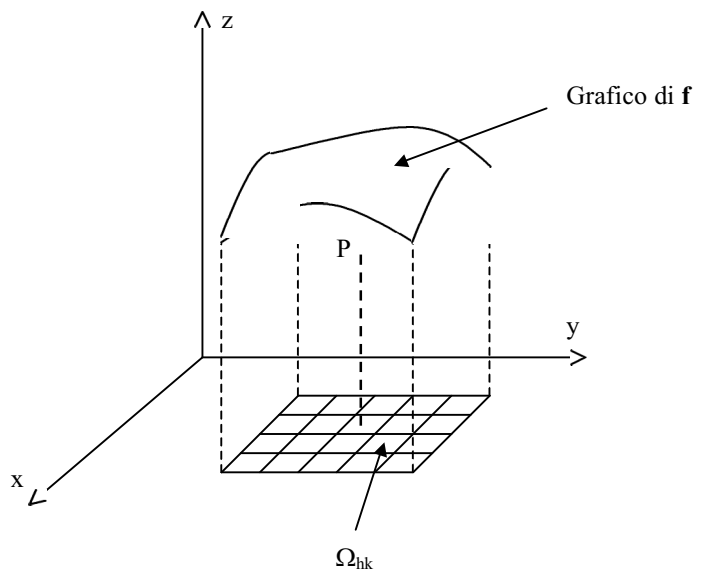
Posso per questo motivo dire che vale sempre $\sup_D s(D, f) \leq \inf_D S(D, f)$.

Dico che f è integrabile su $\Omega \Leftrightarrow \sup_D s(D, f) = \inf_D S(D, f)$ (integrazione nel senso di Riemann).

L'integrale di f su Ω (che ha due dimensioni) è un integrale multiplo ed è indicato con $\int_{\Omega} f$ o come $\iint_{\Omega} f$.

Dal punto di vista geometrico l'integrale multiplo rappresenta il volume del cilindroide $\Gamma(f)$, cioè in simboli:

$$\mu_3(\Gamma(f)) = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$



Criteri di integrabilità

1. Il primo criterio deriva da quanto detto al capitolo precedente:
La funzione f è integrabile su $\Omega \Leftrightarrow \forall \varepsilon (> 0), \exists D_\varepsilon : S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) < \varepsilon$.
2. Se f è continua su Ω (rettangolo chiuso) $\Rightarrow f$ è integrabile su Ω .
3. Se f è *generalmente continua* e limitata $\Rightarrow f$ è integrabile su Ω .
La definizione di *generale continuità* implica che l'insieme dei punti di discontinuità abbia area nulla. In pratica significa che i punti di discontinuità devono essere in numero finito e che la discontinuità in quei punti non porti la funzione all'infinito.

Riduzione di integrali doppi

Sia f una funzione integrabile su Ω secondo Riemann, con $\Omega = [a, b] \times [c, d]$.

Fissando una delle due coordinate ottengo una riga (verticale o orizzontale a seconda della coordinata che blocco) su Ω . Calcolando l'integrale multiplo su queste righe è come se si calcolasse l'integrale semplice su una funzione che come unico parametro ha la coordinata non bloccata. Iterando il procedimento (andando quindi a bloccare una delle coordinate in ognuno dei suoi infiniti valori possibili), ottengo un integrale di un integrale:

- Se $\forall y \in [c, d], \exists G(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, dove $G(y): x \mapsto f(x, y)$, allora la $G(y)$ è integrabile su $[c, d]$ e

$$\text{risulta } \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d G(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

- Analogamente per la x , se $\forall x \in [a, b], \exists H(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, dove $H(x): y \mapsto f(x, y)$, allora la $H(x)$

$$\text{è integrabile su } [a, b] \text{ e risulta } \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b H(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

- Posso ora combinare i due procedimenti di cui sopra e dire che se $\forall y \in [c, d], \exists G(y)$ e se

$$\forall x \in [a, b], \exists H(x), \text{ allora } \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

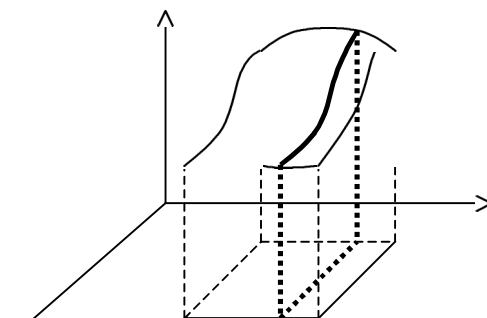
Principio di Cavalieri

L'interpretazione dell'integrale doppio è il volume del cilindroide. Sfruttando la riduzione degli integrali doppi come visto nel capitolo precedente, posso dire che se $G(y)$ ed $H(x)$ sono due curve tracciate sulla superficie di f , allora il loro integrale (rispettivamente lungo x ed y) rappresenta una sezione del cilindroide. Se ora eseguo l'integrale di questa sezione lungo la coordinata restante (rispettivamente y ed x), ottengo il volume del cilindroide, cioè l'integrale di f .

Geometricamente parlando, posso scrivere che

$$\mu_3(\Gamma_{\Omega}(f)) = \int_c^d \mu_2(\text{sez}(\Gamma_{\Omega}(f))) dy \quad (\text{guarda caso rispecchia}$$

la definizione di volume di un cilindro).



Integrale multiplo di funzioni definite in insiemi non rettangolari

Sia $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, con Ω non rettangolare, ma compatto e misurabile (per misurabile si intende che la sua frontiera abbia misura nulla).

Racchiudiamo ora Ω in un rettangolo \mathbf{R} e definiamo una $\tilde{f}(P) = \begin{cases} f(P), & P \in \Omega \\ 0, & P \in \mathbf{R} - \Omega \end{cases}$.

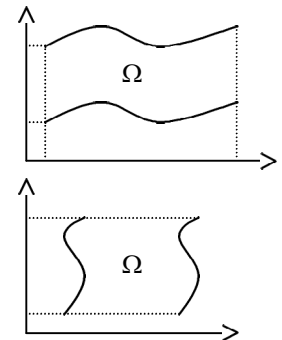
Si noti che se f è continua su Ω , in generale questo non implica che \tilde{f} sia continua su \mathbf{R} , in quanto i punti che stanno al di fuori di Ω sono nulli mentre quelli che stanno sulla frontiera potrebbero esser non nulli. È quindi sui punti di frontiera che potrebbero esserci i punti di discontinuità. Essendo però (per ipotesi) Ω misurabile, la misura della sua frontiera è nulla e quindi il numero di punti di discontinuità è finito e la loro misura tendente al nulla. Questo significa che se f è continua su $\Omega \Rightarrow \tilde{f}$ è generalmente continua su \mathbf{R} .

Per i criteri di integrabilità ho che se f è continua su Ω , allora f è integrabile su Ω . Analogamente ho che se \tilde{f} è generalmente continua su \mathbf{R} , allora \tilde{f} è integrabile su \mathbf{R} .

Quindi, ricapitolando, anche se il compatto su cui è definita la funzione non è rettangolare, la \tilde{f} è integrabile.

Dominio normale (semplice) rispetto ad un asse

- Rispetto all'asse \mathbf{X} : siano $g_1(\mathbf{x})$ e $g_2(\mathbf{x})$ due funzioni tali che $g_1(x) \leq g_2(x)$.
Il dominio è $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$
- Rispetto all'asse \mathbf{Y} : siano $h_1(\mathbf{y})$ e $h_2(\mathbf{y})$ due funzioni tali che $h_1(y) \leq h_2(y)$.
Il dominio è $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$



Riduzione di una funzione definita in un insieme non rettangolare

Supponiamo f continua e limitata nell'interno del compatto $\overset{o}{\Omega}$. Sia \tilde{f} l'estensione di f al rettangolo \mathbf{R} . Allora se \tilde{f} è integrabile, ho che f è integrabile. Se Ω è un dominio normale, allora f è integrabile su Ω e risulta:

- (Ω normale all'asse \mathbf{X}):
$$\iint_{\Omega} f = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$$
- (Ω normale all'asse \mathbf{Y}):
$$\iint_{\Omega} f = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx$$

La riduzione è analoga alla riduzione per il rettangolo: la differenza sta nel fatto che $g_1(\mathbf{x})$ e $g_2(\mathbf{x})$ (o $h_1(\mathbf{y})$ e $h_2(\mathbf{y})$) sono variabili.

Proprietà degli integrali

Sia Ω limitato e misurabile. Sia inoltre f una funzione integrabile nel senso di Riemann. Allora:

1. L'integrale è lineare: $\iint_{\Omega} (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \iint_{\Omega} f_1 + c_2 \iint_{\Omega} f_2$
2. L'integrale è monotono: $f \geq g \Rightarrow \iint_{\Omega} f \geq \iint_{\Omega} g$
3. $\left| \iint_{\Omega} f \right| \leq \iint_{\Omega} |f|$

Teorema della media

$$\inf_{\underbrace{|\Omega|}_{\substack{\text{misura} \\ \text{di } \Omega}}} f \leq \frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega} f \leq \sup f$$

Se f è continua e Ω è compatto, misurabile e connesso, allora il teorema si specializza:

$$\exists (x_0, y_0) \in \Omega : \underbrace{\frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega} f}_{\text{valore medio}} = f(x_0, y_0)$$

Proprietà additiva degli integrali

Siano Ω_1 ed Ω_2 due insiemi adiacenti ma non sovrapposti (tali, cioè, che $\mu_2(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 0$).

Se f è integrabile su Ω_1 e Ω_2 , allora f è integrabile su $\Omega_1 \cup \Omega_2$ e vale $\iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \iint_{\Omega_1} f + \iint_{\Omega_2} f$.

Integrali tripli

Supponiamo di avere una funzione in tre variabili $f(x, y, z)$, definita in T .

Integrando, ottengo un integrale triplo (analogamente all'integrale doppio visto fino ad ora):

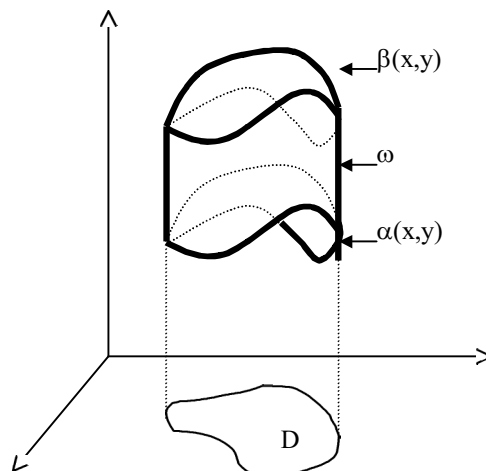
$$\iiint_T f = \int_T f(x, y, z) dx dy dz$$

Si noti che l'integrale triplo $\iiint_T 1 = \text{volume}(T) = \mu_3(T)$.

Domini normali in tre variabili

Siano $\alpha(x, y)$ e $\beta(x, y)$ due funzioni tali che $\alpha \leq \beta$.

Il dominio Ω è $\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in D \wedge \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$,
quindi Ω sarà il solido che si vede in figura.



Riduzione degli integrali tripli

Analogamente alla riduzione di integrali doppi, non faccio altro che considerare “bloccate” due coordinate, integrare per la coordinata rimanente e poi integrare successivamente il risultato ottenuto.

• Primo metodo:
$$\iiint_{\Omega} f = \iint_D dx dy \underbrace{\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z) dz}_{F(x,y)} = \iint_D F(x,y) dx dy$$

Con questo metodo, considero bloccate la \mathbf{x} e la \mathbf{y} . Ottengo quindi una funzione ad una variabile (la \mathbf{z}) di cui faccio l'integrale. Se ora sblocco la \mathbf{x} e la \mathbf{y} , ottengo una funzione $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ a due variabili della quale posso fare l'integrale.

• Secondo metodo:
$$\iiint_{\Omega} f = \int_a^b dx \iint_{\Omega_x} f(x,y,z) dy dz$$

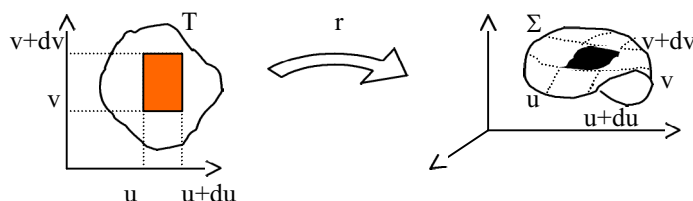
Con questo metodo, considero bloccata la sola \mathbf{x} . In questo modo prendo una sezione di Ω (la Ω_x). Questa sezione è bidimensionale e vi è definita la funzione a due variabili della quale posso fare l'integrale. A questo punto, sblocco la \mathbf{x} e procedo con l'ulteriore integrale lungo l'insieme di definizione delle \mathbf{x} .

Principio di Cavalieri per gli integrali tripli

Se la funzione \mathbf{f} è identicamente uguale ad uno, allora dico che
$$\mu_3(\Omega) = \int_a^b \mu_2(\Omega_x) dx.$$

Area di una superficie

Considero un dominio bidimensionale \mathbf{T} associato (tramite una funzione \mathbf{r}) ad una curva tridimensionale Σ .



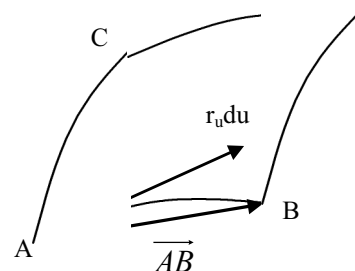
Un punto \bar{x} di Σ è definito come $\bar{x} = r(u,v) = r_1(u,v)\bar{i} + r_2(u,v)\bar{j} + r_3(u,v)\bar{k}$.

Quindi le equazioni parametriche di Σ saranno
$$\begin{cases} x = r_1(u,v) \\ y = r_2(u,v) \\ z = r_3(u,v) \end{cases}$$

Ora mi chiedo quanto vale l'area della superficie curva in relazione ad un rettangolino $[u, u+du] \times [v, v+dv]$.

Posso approssimare i lati curvi del rettangolino nel seguente modo:

$$\begin{cases} r(u+du, v) - r(u, v) = r_u(u, v)du + o(du) & \text{per il lato AB} \\ r(u, v+dv) - r(u, v) = r_v(u, v)dv + o(dv) & \text{per il lato AC} \end{cases}$$



Se non considero $o(du)$ e $o(dv)$, allora approssimo i lati \mathbf{AB} e \mathbf{AC} alle derivate lungo \mathbf{u} e \mathbf{v} nel punto \mathbf{A} .

Quindi, ricapitolando, approssimo l'area del quadrilatero curvilineo con l'area del parallelogramma individuato dai vettori $\mathbf{r}_u du$ e $\mathbf{r}_v dv$.

L'area di un parallelogramma individuato da due vettori è pari a $Area = \|\bar{a} \wedge \bar{b}\|$, per cui otteniamo che

l'elemento area, che è l'espressione seguente: $d\sigma = |r_u \wedge r_v| du dv$.

Iterando questo procedimento per ogni rettangolino di decomposizione di \mathbf{T} (e quindi di Σ), otteniamo l'area della superficie Σ :
$$a(\Sigma) = \iint_{\Sigma} d\sigma = \iint_T \|r_u \wedge r_v\| du dv.$$

Nel caso di grafici cartesiani, ho che le equazioni parametriche sono
$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{cases}$$

Quindi $r(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k}$, da cui
$$\begin{cases} r_x(x, y) = \vec{i} + f_x(x, y)\vec{k} \\ r_y(x, y) = \vec{j} + f_y(x, y)\vec{k} \end{cases}$$

Otengo $r_x \wedge r_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -\vec{i}f_x - \vec{j}f_y + \vec{k} \Rightarrow \|r_x \wedge r_y\|^2 = 1 + |\nabla f|^2$

Alla fine, quindi ottengo l'area di una superficie cartesiana $a(\Sigma) = \iint_T \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx dy$.

Integrale superficiale

Sia $h = h(x, y, z)$ una funzione a valori reali, definita su Σ (superficie regolare e semplice).

Allora $\iint_{\Sigma} h d\sigma = \iint_T (h \circ r) \|r_u \wedge r_v\| du dv$, supposto che l'integrale a destra sia definito.

L'integrale superficiale (e quindi l'area della superficie) è invariante per cambiamenti regolari di parametrizzazione.

Sia, infatti, $(u, v) \in T \mapsto I(u, v) \in R^3$ la parametrizzazione di Σ . Sia inoltre $u = \varphi(s, t)$ e $v = \psi(s, t)$ (con $(s, t) \in S$) il cambiamento regolare di parametri.

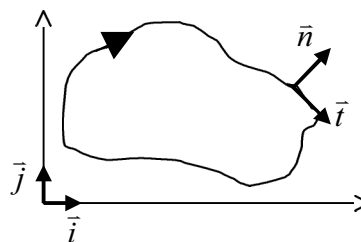
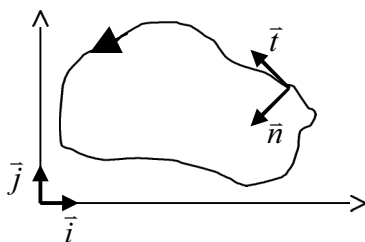
Pongo $\tilde{r}(s, t) = r(\varphi(s, t), \psi(s, t))$ la nuova parametrizzazione di Σ .

Ricordiamo che $\tilde{r}_s \wedge \tilde{r}_t = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(s, t)} \cdot (r_u \wedge r_v)$. Si ha allora che:

$$\iint_T h(r(u, v)) \|r_u \wedge r_v\| du dv = \iint_S h(\tilde{r}(s, t)) \|\tilde{r}_s \wedge \tilde{r}_t\| \cdot \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(s, t)} \right|^{-1} \cdot \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(s, t)} \right| ds dt = \iint_S (h \circ r) \|\tilde{r}_s \wedge \tilde{r}_t\| ds dt$$

Formula di Gauss-Green nel piano

Come scelgo l'orientamento di una curva ?



Dei due orientamenti in figura, quello giusto (orientamento positivo) è quello a sinistra. Normalmente, infatti, l'orientamento si costruisce in questo modo:

- il vettore normale \mathbf{n} deve puntare i punti interni dell'insieme
- successivamente si costruisce il vettore tangente \mathbf{t} in modo che rispetti la “regola della mano destra”: \mathbf{n} ha direzione e verso dell'indice, \mathbf{t} quella del pollice, il medio indica il vettore risultante dal prodotto vettoriale (nella figura a sinistra è un vettore che esce dal foglio) che rappresenta l'orientamento della curva (in base alla “regola del cavatappi” questo vettore indica un orientamento antiorario sulla frontiera della curva).

Quindi, una volta scelta il vettore tangente giusto, ottengo l'orientamento semplicemente seguendo la direzione ed il verso di questo vettore tangente (o con la “regola della mano destra” e poi la “regola del cavatappi”).

Supponiamo ora di avere un dominio normale rispetto all'asse X che chiameremo D .

Quindi $\begin{cases} a < x < b \\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x) \end{cases}$ con φ_1 e φ_2 regolari a tratti.

Supponiamo di avere una funzione $F(x, y)$ definita in D che possa essere scomposta come $F(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$.

Sia anche F di classe $Cl^1(\overline{D})$ (nella chiusura di D).

Posso allora dire che $\iint_D P_y = - \int_{\partial^+ D} P dx$, dove con $\partial^+ D$ indico una parametrizzazione inettiva, regolare a tratti,

che dia un orientamento positivo a ∂D (cioè alla frontiera di D).

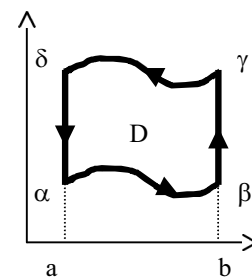
Dimostriamolo:

sfruttando la riduzione dell'integrale, posso dire che

$$\iint_D P_y = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} P_y dy = \int_a^b [P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))] dx$$

Invece, adesso calcoliamo $-\int_{\partial^+ D} P dx$.

Scegliamo una parametrizzazione che mi dia orientamento positivo, cioè che vada da α a β a γ a δ e poi di nuovo ad α .



$$\overrightarrow{\alpha\beta}: \begin{cases} x=t \\ y=\varphi_1(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b$$

$$\overrightarrow{\beta\gamma}: \begin{cases} x=b \\ y=t \end{cases}, \quad \varphi_1(b) \leq t \leq \varphi_2(b) \quad (\text{integrale nullo})$$

$$-\overrightarrow{\gamma\delta} = \overrightarrow{\delta\gamma}: \begin{cases} x=t \\ y=\varphi_2(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b \quad (\text{ho invertito l'integrale corrispondente})$$

$$-\overrightarrow{\delta\alpha} = \overrightarrow{\alpha\delta}: \begin{cases} x=a \\ y=t \end{cases}, \quad \varphi_1(a) \leq t \leq \varphi_2(a) \quad (\text{ho invertito l'integrale corrispondente che però è nullo})$$

Combino i risultati ed ottengo:

$$-\int_{\partial^+ D} P dx = -\int_a^b P(t, \varphi_1(t)) dt + \int_a^b P(t, \varphi_2(t)) dt = \int_a^b [P(t, \varphi_2(t)) - P(t, \varphi_1(t))] dt$$

Confronto questo risultato con quello ottenuto in precedenza e posso quindi affermare che $\iint_D P_y = - \int_{\partial^+ D} P dx$.

In maniera analoga posso ragionare nel caso in cui D sia un dominio normale rispetto all'asse Y .

In questo caso ottengo $\iint_D Q_x = + \int_{\partial^+ D} Q dy$.

Combinando questi due risultati, ottengo la prima versione del teorema di Gauss-Green:

sia D un dominio limitato, tale che ∂D ammette parametrizzazione inettiva (curva di Jordan, cioè superficie senza buchi), regolare a tratti e che sia normale rispetto ad entrambi gli assi.

Sia F una funzione definita in D e tale che sia $F = P\vec{i} + Q\vec{j}$, con $F \in Cl^1(\overline{D})$.

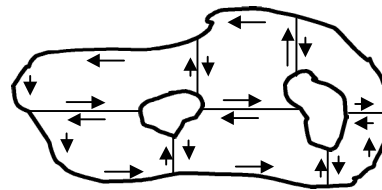
Allora si ha che $\iint_D (Q_x - P_y) = \int_{\partial^+ D} P dx + Q dy$.

Come abbiamo visto, però, una condizione del teorema è che il dominio abbia come frontiera una curva di Jordan, cioè una curva unica (nel caso di un dominio "bucato" la frontiera è formata da più parti).

Come posso agire nel caso di un dominio che non ammetta come frontiera una curva di Jordan?

Dominio S-decomponibile

Un dominio S-decomponibile (o *ammissibile*) è un dominio D la cui frontiera è costituita da parti disgiunte ognuna delle quali sia suscettibile di una parametrizzazione inettiva, chiusa, regolare a tratti che induce su di essa una orientazione positiva. Inoltre D è decomponibile in sottoinsiemi, ognuno normale rispetto ad entrambi gli assi.



Teorema di Gauss-Green per domini S-decomponibili

Se D è S-decomponibile ed inoltre ho che $F = (P\vec{i} + Q\vec{j}) \in Cl^1(\overline{D})$, allora $\iint_D (Q_x - P_y) = \int_{\partial^+ D} Pdx + Qdy$.

Infatti, essendo D S-decomponibile, ho che $D = \bigcup D_i$, $\overset{o}{D_i} \cap \overset{o}{D_j} = \emptyset$, D_i normale rispetto ad entrambi gli assi. Per cui posso scrivere che $\iint_D (Q_x - P_y) = \sum_i \iint_{D_i} (Q_x - P_y) = \sum_i \int_{\partial^+ D_i} Pdx + Qdy = \int_{\partial^+ D} Pdx + Qdy$.

Applicazione del teorema di Gauss-Green

Calcolo l'area di un dominio D ammissibile attraverso un integrale di frontiera.

Chiaramente deve essere $P, Q \in Cl^1(\overline{D})$ (condizione del teorema).

Il teorema mi dice che $\iint_D P_y = - \int_{\partial^+ D} Pdx$ e che $\iint_D Q_x = + \int_{\partial^+ D} Qdy$.

Allora, per $P=y$ e $Q=x$, ottengo $-\iint_D dxdy = \int_{\partial^+ D} ydx$ e $\iint_D dxdy = \int_{\partial^+ D} xdy$.

Combino ed ottengo $\text{Area}(D) = \iint_D dxdy = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ D} ydx + xdy$.

Calcoliamo ad esempio l'area di un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Parametrizzo la frontiera: $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

L'area sarà $\text{Area}(D) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt = \pi \cdot ab$.

Divergenza e rotore di un vettore

Considero un campo di vettori $v: A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ con $v \in Cl^1(A)$.

Un qualsiasi vettore di v sarà dato da $\vec{v} = \sum_i v_i \cdot \vec{e}_i$, dove con \vec{e}_i si intendono i versori della base.

Chiamo *divergenza* di v la quantità $\text{div } v = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$.

Chiamo *rotore* di v il vettore $\text{rot } v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \vec{k}$.

Considerando ora $v=F$ e ricordando che $F = P\vec{i} + Q\vec{j}$, ottengo dei vettori che stanno tutti sul piano XY .

Il rotore di v (cioè di F in questo caso), sarà quindi $\text{rot}(\vec{F}) = (Q_x - P_y) \vec{k}$, cioè il rotore è un vettore normale al piano XY (ha un'unica componente parallela all'asse Z).

Quindi posso dire anche che $\text{rot}_z(\vec{F}) = Q_x - P_y$ (considero solo questa componente).

Osservo ora che se \mathbf{D} è ammissibile, allora posso dire che $\int_{\partial^+ D} Pdx + Qdy = \int_{\partial D} \langle F, T^+ \rangle$, dove con T^+ indico il versore tangente che induce una orientazione positiva di $\partial \mathbf{D}$.

$$\text{Infatti } \int_{\partial^+ D} Pdx + Qdy = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt$$

$$\text{Ora, il versore } T^+ \text{ è definito come } T^+ = \frac{x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j}}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$$

Ora calcolo:

$$\int_{\partial D} \langle F, T^+ \rangle ds = \int_a^b \left[P(x(t), y(t)) \cdot \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} + Q(x(t), y(t)) \cdot \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right] \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt$$

Da cui segue l'asserto.

Teorema di Stokes nel piano

Riprendendo i risultati ottenuti nel capitolo precedente e combinandoli, posso dire che:

$$\iint_D \text{rot}_z(\bar{F}) = \int_{\partial D} \langle F, T^+ \rangle$$

dove, come detto, T^+ è il versore tangente nel senso positivo di $\partial \mathbf{D}$.

In pratica questo teorema dice che il flusso di **rot** \mathbf{F} attraverso \mathbf{D} , nella direzione e verso di \mathbf{k} , coincide con il lavoro (cioè la circuitazione) di \mathbf{F} lungo $\partial \mathbf{D}$, calcolato nel senso positivo.

In soldoni posso dire che il rotore di un campo vettoriale piano rappresenta la densità superficiale di circuitazione di \mathbf{F} in un punto (mi dà quindi una misura di quanto ruota \mathbf{F} per unità di area).

Teorema di Gauss nel piano

Parto dalla equazione $\iint_D (Q_x - P_y) = \int_{\partial^+ D} Pdx + Qdy$ e poi pongo $-\mathbf{Q}=\mathbf{P}$ e $\mathbf{P}=\mathbf{Q}$.

Otengo così $\iint_D (P_x + Q_y) = \int_{\partial^+ D} -Qdx + Pdy$.

Prendiamo la definizione del versore normale esterno: $n_e = \frac{dy}{ds}\bar{i} - \frac{dx}{ds}\bar{j}$ (dove S è la lunghezza d'arco).

Prendiamo anche la definizione del versore tangente: $T = \frac{dx}{ds}\bar{i} + \frac{dy}{ds}\bar{j}$.

Il versore \mathbf{T} è preso in modo che induca un orientamento positivo di $\partial \mathbf{D}$.

$$\text{Posso allora dire che } \int_{\partial^+ D} -Qdx + Pdy = \int_{\partial D} \langle -Q\bar{i} + P\bar{j}, T \rangle ds = \int_{\partial D} \left(-Q \frac{dx}{ds} + P \frac{dy}{ds} \right) ds = \int_{\partial D} \langle F, n_e \rangle ds.$$

$$\text{Questo significa che } \iint_D \text{div } F = \int_{\partial D} \langle F, n_e \rangle.$$

Cioè il flusso uscente di \mathbf{F} da $\partial \mathbf{D}$ è uguale all'integrale della divergenza di \mathbf{F} in \mathbf{D} .

La divergenza di \mathbf{F} in un punto \mathbf{p} , rappresenta la densità superficiale di flusso uscente in quel punto.

Teorema di Stokes nello spazio

Generalizziamo allo spazio \mathbf{R}^3 l'eguaglianza $\iint_D \text{rot}_z F = \int_{\partial D} \langle F, T^+ \rangle$.

Sia Σ una superficie semplice, regolare, orientabile, con bordo parametrizzabile come curva chiusa, regolare a tratti. La parametrizzazione sia data da $r: T \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$.

Assegnato il vettore \mathbf{n}_e , normale, viene individuata la *faccia positiva* e la *faccia negativa* di Σ .

Posso dire che $\partial\Sigma$ (bordo di Σ) è orientato positivamente, se immaginando di camminare percorrendo $\partial\Sigma$ sulla faccia positiva (la direzione ed il verso *pie-de-testa* sono gli stessi del vettore \mathbf{n}_e) mantengo alla mia sinistra i punti di Σ .

In pratica il vettore \mathbf{n}_e vede sempre come antioraria l'orientazione positiva di Σ .

Considero \mathbf{r} definita come $r: \bar{T} \subset \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^3$, con T aperto la cui frontiera è parametrizzata come curva semplice, chiusa, regolare a tratti. Inoltre considero $r \in Cl^2(\bar{T})$.

Il vettore normale alla curva \mathbf{r} su Σ sarà $\bar{n}_e = \bar{r} = \frac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\|}$. Prenderemo questo vettore come vettore normale

che indichi la faccia positiva di Σ e quindi la sua orientazione positiva.

Passando il bordo di T alla funzione \mathbf{r} , ottengo il bordo di Σ : $r(\partial T) = \partial\Sigma$.

Considero ora una parametrizzazione di ∂D chiusa, semplice, regolare a tratti che orienta positivamente ∂T e la indico con $\sigma(t) = (u(t), v(t))$.

Allora posso dire che $r \circ \sigma$ è una parametrizzazione di $\partial\Sigma$ come curva chiusa, semplice, regolare a tratti, orientata positivamente.

Se ora ∂T non è unica ma è costituita da punti disgiunti $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ parametrizzabili come curve chiuse, semplici e regolari a tratti ed inoltre se T è S-decomponibile, allora posso dire che $\partial T = \bigcup_k \gamma_k$ e che $\partial\Sigma = \bigcup_k \Gamma_k$, dove

con Γ_k indico parti disgiunte di $\partial\Sigma$ definite come $\Gamma_k = r(\gamma_k)$.

Introducendo una parametrizzazione σ_k semplice, chiusa, regolare a tratti, che orienta positivamente la γ_k associata, allora $r \circ \sigma_k$ è una parametrizzazione di Γ_k semplice, chiusa, regolare a tratti che conferisce a Γ_k una

orientazione positiva rispetto al vettore $\bar{n}_e = \bar{r} = \frac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\|}$.

Considero ora che $\Sigma \subset A$ con A aperto, e che un campo di vettori $F = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ sia di classe $Cl^1(A)$.

Allora posso dire che $\iint_{\Sigma} \langle \text{rot } F, \bar{n}_e \rangle d\sigma = \int_{\partial\Sigma} \langle F, T^+ \rangle$ dove T^+ è il solito vettore tangente a $\partial\Sigma$ nel verso positivo di $\partial\Sigma$ rispetto all'orientazione data da \mathbf{r} .

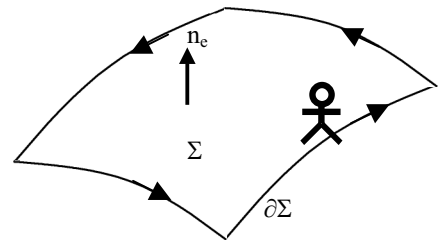
Posso riscrivere l'eguaglianza di cui sopra nella maniera seguente:

$$\iint_{\Sigma} [(R_y - Q_z) \cos(\bar{n}_e, \bar{i}) + (P_z - R_x) \cos(\bar{n}_e, \bar{j}) + (Q_x - P_y) \cos(\bar{n}_e, \bar{k})] d\sigma = \int_{\partial^+ \Sigma} P dx + Q dy + R dz$$

dove $\partial^+ \Sigma$ indica una parametrizzazione del bordo, semplice, regolare a tratti che conferisce al bordo stesso una orientazione positiva rispetto ad \mathbf{n}_e .

Posso infine asserire che il flusso del rotore di \mathbf{F} attraverso Σ nella direzione di \mathbf{n}_e è uguale al lavoro (cioè la circuitazione) di \mathbf{F} lungo $\partial\Sigma$ nel verso positivo di $\partial\Sigma$ rispetto ad \mathbf{n}_e .

Questo teorema può estendersi alle superfici Σ orientabili, regolari a tratti, che si possano decomporre nell'unione di un numero finito di superfici Σ_j tali che $\overset{o}{\Sigma}_i \cap \overset{o}{\Sigma}_j = \emptyset$. Ad esempio nel caso del cilindro posso scomporre la superficie del cilindro stesso in due semicilindri, i quali rispettano le condizioni del teorema.



Teorema della divergenza nello spazio

Green diede la seguente formulazione del teorema nel piano:

$$\iint_D \operatorname{div} F = \int_{\partial D} \langle F, \vec{n}_e \rangle.$$

Vediamo ora di generalizzarlo allo spazio, come fatto con il teorema di Stokes.

Sia $D \subset \mathbb{R}^3$ un dominio limitato la cui frontiera ∂D sia parametrizzabile come superficie chiusa, regolare ed orientabile. Sia inoltre la sua orientazione quella corrispondente alla scelta del vettore normale esterno \vec{n}_e .

Supponiamo, per ora, che D sia normale rispetto all'asse Z :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y), (x, y) \in B \subset \mathbb{R}^2\}$$

con B aperto connesso di \mathbb{R}^2 e $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(B)$.

Sia ora $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$.

Allora posso dire che $\iiint_D R_z = \iint_{\partial D} R \cos(\vec{n}_e, \vec{k}) d\sigma$.

$$\text{Infatti } \iiint_D R_z = \iint_B dx dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} R_z dz = \iint_B [R(x, y, \varphi_2(x, y)) - R(x, y, \varphi_1(x, y))] dx dy.$$

$$\text{Inoltre, se considero } F = R\vec{k}, \text{ ho che } \iiint_D \operatorname{div} F = \iint_{\partial D} \langle F, \vec{n}_e \rangle d\omega \Leftrightarrow \iiint_D R_z dx dy dz = \iint_{\partial D} R \cos(\vec{n}_e, \vec{k}) d\sigma.$$

Adesso calcolo l'integrale superficiale e noto che principalmente ho tre situazioni distinte:

- su $\Sigma_1, z = \varphi_1(x, y), \vec{n}_e = \frac{(\varphi_{1x}\vec{i} + \varphi_{1y}\vec{j} - \vec{k})}{\sqrt{1 + \|\nabla \varphi_1\|^2}}, d\sigma = \sqrt{1 + \|\nabla \varphi_1\|^2}$
- su $\Sigma_2, z = \varphi_2(x, y), \vec{n}_e = \frac{(-\varphi_{2x}\vec{i} - \varphi_{2y}\vec{j} + \vec{k})}{\sqrt{1 + \|\nabla \varphi_2\|^2}}, d\sigma = \sqrt{1 + \|\nabla \varphi_2\|^2}$
- su Σ (pareti laterali del cilindroide) ho che $\vec{n}_e \perp \vec{k}$ e quindi l'integrale si annulla.

Quindi alla fine ottengo:

$$\iint_{\partial D} R \cos(\vec{n}_e, \vec{k}) d\sigma = \iint_B \left[\frac{R(x, y, \varphi_2(x, y))}{\sqrt{1 + \|\varphi_2\|^2}} \right] d\sigma - \iint_B \left[\frac{R(x, y, \varphi_1(x, y))}{\sqrt{1 + \|\varphi_1\|^2}} \right] d\sigma = \iint_B [R(x, y, \varphi_2(x, y)) - R(x, y, \varphi_1(x, y))] dx dy$$

$$\text{che confrontato con quanto ottenuto per } \iiint_D R_z, \text{ mi dimostra l'eguaglianza } \iiint_D R_z = \iint_{\partial D} R \cos(\vec{n}_e, \vec{k}) d\sigma.$$

$$\text{Analogamente posso ricondurre al caso di } D \text{ normale rispetto all'asse } Y: \iint_D Q_y = \iint_{\partial D} Q \cos(\vec{n}_e, \vec{j}) d\sigma \text{ ed al}$$

$$\text{caso di } D \text{ normale rispetto all'asse } X: \iint_D P_x = \iint_{\partial D} P \cos(\vec{n}_e, \vec{i}) d\sigma.$$

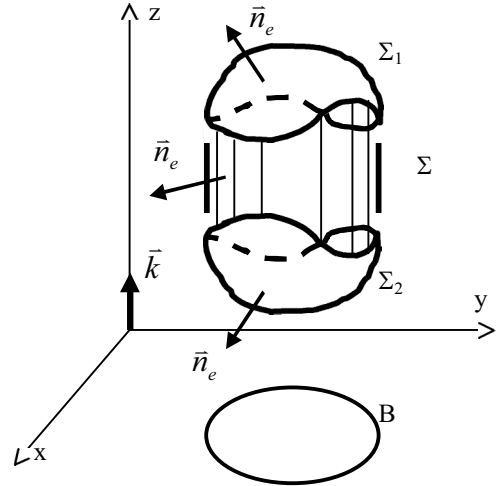
Sia ora D normale rispetto a tutti gli assi cartesiani e sia $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ un campo di classe $C^1(D)$.

$$\text{Si ha che } \iiint_D \operatorname{div} F = \iint_{\partial D} \langle F, \vec{n}_e \rangle d\sigma.$$

Il flusso uscente da ∂D di F eguaglia l'integrale della divergenza di F in D .

Il teorema della divergenza si estende a domini limitati la cui frontiera è costituita dall'unione di un numero finito di superfici Σ_j chiuse, regolari, orientabili e disgiunti e che siano decomponibili in un numero finito di sottoinsiemi normali rispetto a tutti gli assi cartesiani.

Anche in questo caso la divergenza di F in un punto rappresenta la densità di flusso di F in quel punto.



Equazioni differenziali: introduzione

Consideriamo il cosiddetto *modello di Maltus*: evoluzione di una popolazione isolata con unici fattori di fertilità e mortalità. Di seguito riporto alcuni simboli che utilizzerò per indicare certe quantità

- $N(t)$ è il numero di individui al tempo t
- λ è il numero di nati, per individuo, nell'unità di tempo (se ad esempio su una popolazione di 1000 individui ho 60 nati in due anni, allora $\lambda = \left(\frac{60}{1000 \cdot 2}\right) = 0,03$)
- μ è la percentuale di individui morti nell'unità di tempo (se ad esempio su una popolazione di 1000 individui ho 4 morti in due anni, allora $\mu = \left(\frac{4}{1000 \cdot 2}\right) = 0,002$)
- $(\lambda - \mu) = \varepsilon$ sarà il tasso di variazione del numero di individui per unità di tempo e per individuo.

In un intervallo di tempo Δt , ho una variazione di individui pari a $\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}$. Facendo il limite di Δt tendente a zero, otterrò la variazione di individui istantanea al tempo t : $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = N'(t)$. Questa

variazione istantanea equivale alla derivata nel "punto dell'asse temporale" t della funzione $N(t)$.

Questo valore equivale al tasso di variazione del numero di individui per unità di tempo e per individuo $(\lambda - \mu)$, moltiplicato per il numero di individui al tempo t .

In altre parole ho che $N'(t) = (\lambda - \mu) \cdot N(t)$, cioè ho una equazione in cui compare sia la funzione normale che la sua derivata.

Come si risolve una equazione del genere? Facilmente:

$$\begin{aligned} N'(t) &= (\lambda - \mu) \cdot N(t) \Rightarrow N'(t) - \varepsilon N(t) = 0 \Rightarrow \underbrace{e^{-\varepsilon t} \cdot (N'(t) - \varepsilon N(t))}_{D(e^{-\varepsilon t} N(t))} = \underbrace{e^{-\varepsilon t} \cdot 0}_0 \Rightarrow \text{integro} \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{-\varepsilon t} N(t) = \underbrace{c}_{\text{costante}} \Rightarrow N(t) = c \cdot e^{\varepsilon t} \end{aligned}$$

Quindi, in definitiva, il numero di individui in un certo istante t si trova risolvendo $N(t) = c \cdot e^{\varepsilon t}$.

Cosa rappresenta la costante c ? Rappresenta il numero di individui al tempo t_0 . Quindi $N(t) = N(t_0) \cdot e^{\varepsilon t}$.

Se il tasso di variazione ε è negativo, allora la popolazione tenderà all'estinzione (più morti che nascite).

Se il tasso di variazione ε è positivo, allora la popolazione crescerà esponenzialmente.

Se il tasso di variazione ε è nullo, allora la popolazione si manterrà in numero nel tempo.

Si tenga conto che il modello di Maltus è semplicistico. Non tiene conto delle risorse ambientali, considera i coefficienti di fertilità e di mortalità come costanti.

Un modello migliore è il *modello logistico*. Esso parte da un semplice presupposto: una popolazione più numerosa comporta un maggiore dispendio di risorse ambientali che quindi influirà negativamente sul tasso di crescita (diminuirà il coefficiente di fertilità e aumenterà quello di mortalità).

Questo nuovo modello introduce una nuova equazione (in verità parte da quella appena vista ed introduce un

nuovo coefficiente):
$$N'(t) = \varepsilon N(t) - \frac{\varepsilon}{k} N^2(t) \Rightarrow N'(t) = \varepsilon N(t) \cdot \left[1 - \frac{N(t)}{k}\right].$$

Il termine $-\frac{\varepsilon}{k} N^2(t)$ "mitiga" il termine già visto in precedenza $\varepsilon N(t)$ e dà una misura del cosiddetto "attrito sociale" che è proporzionale al numero di incontri per individuo, nell'unità di tempo.

Studiamo questa equazione indicando $N(t) = y(t)$, $\varepsilon = a$, $\frac{1}{k} = b \Rightarrow \dot{y} = ay(1 - by)$.

Due soluzioni dell'equazione sono $y = 0$ e $y = \frac{1}{b}$.

Studiamo le altre soluzioni:

$$\frac{\dot{y}}{y(1 - by)} = a \Rightarrow \int \frac{dy}{y(1 - by)} = \int a \cdot dt \Rightarrow \int \frac{dy}{y(1 - by)} = at + K_1$$

Ora ho che $\int \frac{dy}{y(1-by)} = \ln|y| + \ln\left|\frac{1}{1-by}\right| + K_2 = \ln\left|\frac{y}{1-by}\right| + K_2$

da cui segue che $\ln\left|\frac{y}{1-by}\right| = at + \underbrace{K}_{K=K_1+K_2} \Rightarrow \left|\frac{y}{1-b}\right| = \underbrace{c}_{c=e^K} \cdot e^{at}$.

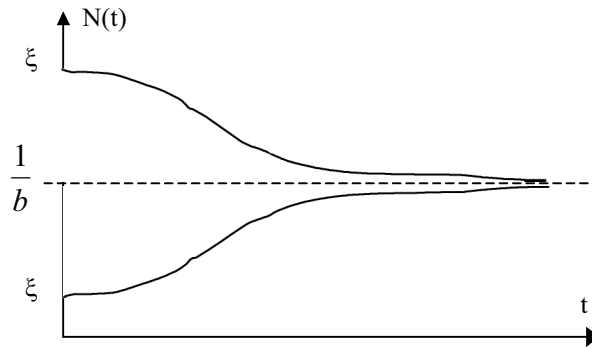
Se $0 < y < \frac{1}{b}$, ho che $y(t) = \frac{c \cdot e^{at}}{1 + c \cdot b \cdot e^{at}}$.

Suppongo ora che al tempo $t=0$ la $y(0) = \xi$ (sempre con $0 < \xi < \frac{1}{b}$).

Otengo $y(0) = \frac{c}{1+cb} = \xi \Rightarrow c = \frac{\xi}{1-\xi b}$ che è la *condizione iniziale*. Sostituisco c nella equazione di $y(t)$ ed

otengo $y(t) = \frac{\xi e^{at}}{1 - b\xi + \xi b e^{at}}$. Tornando ora ai simboli originali e graficando l'andamento di $N(t) = y(t)$ in

funzione di ξ , ottengo un grafico simile al seguente (comportamento asintotico):



Un nuovo modello che tenga conto del numero delle prede e dei predatori all'interno di un ambiente è il *modello preda-predatore di Volterra*.

Sia $x = x(t)$ il numero delle prede ed $y = y(t)$ il numero di predatori.

Allora ho che $\frac{\dot{x}}{x} = a - by$, la quale mi dice che il tasso di crescita delle prede per individuo (tasso relativo) è costante in assenza di predatori ($y=0$), ma decresce linearmente con y (cioè se ci sono predatori, il numero delle prede tende a decrescere).

Inoltre ho che $\frac{\dot{y}}{y} = -c + dx$, la quale mi dice che il tasso relativo di crescita dei predatori è costante (negativo)

in assenza di prede ($x=0$), ma cresce linearmente con x (cioè se non ci sono prede, i predatori muoiono di fame, mentre se le prede ci sono, i predatori mangiano e si riproducono).

Questo modello è quindi dato dal seguente sistema:
$$\begin{cases} \frac{\dot{x}}{x} = a - by \\ \frac{\dot{y}}{y} = -c + dx \end{cases}, \text{ con } a, b, c, d > 0.$$

Passiamo ora ad altro: la *legge di Newton*.

Questa legge descrive il moto unidimensionale di un punto ed è definita come $\ddot{y} = f(t, y, \dot{y})$, dove t è la variabile temporale, y è la posizione del punto, \dot{y} la sua velocità e \ddot{y} la sua accelerazione (che corrisponde alla forza diviso la massa del punto). Per poter lavorare con questa legge è necessario conoscere le *condizioni iniziali*, cioè il valore di y e di \dot{y} al tempo t_0 . È chiaro che cercheremo le soluzioni delle posizioni $y(t)$.

Alcune definizioni

La seguente $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ si dice *equazione di ordine n in forma normale*.

Si noti che $f: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}$ e che $y^{(1)}(t), \dots, y^{(n)}(t)$ sono le successive n derivate di $y(t)$.

La seguente $y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)y(t) = b(t)$ si dice *equazione lineare di ordine n* .

La seguente $y^{(n)}(t) = f(y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ si dice *autonomia* in quanto il secondo membro non dipende esplicitamente da t .

Chiamo *soluzione ed integrale* di $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ una funzione $y = \varphi(t)$ definita in $I \subset \mathbb{R}$, differenziabile n volte, tale che $(t, \varphi(t), \varphi^{(1)}(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in D$ e $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi^{(1)}(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$, $\forall t \in I$.

Sistemi del primo ordine

Chiamo *sistema del primo ordine* un sistema definito come

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ \dot{y}_n = f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

dove $f_i: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}$ e $y_1(t), \dots, y_n(t)$ sono le incognite.

Il sistema può scriversi in forma vettoriale: $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, dove $f = (f_1, \dots, f_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Soluzione del sistema è una funzione $\varphi: I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ tali che $(t, \varphi(t)) \in D$ e $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$, $\forall t \in I$.

Le condizioni iniziali sono del tipo $\varphi(t_0) = \xi \in \mathbb{R}^n$, con ξ assegnato.

Posso dire che ogni equazione in forma normale può trasformarsi in un sistema del primo ordine.

Infatti $y^{(n)} = f(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)})$. Pongo $y_1 = y$, $y_2 = y^{(1)}$, \dots , $y_n = y^{(n-1)}$.

Otengo

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dots \\ \dot{y}_{n-1} = y_n \\ \dot{y}_n = f(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad \text{che è un sistema del primo ordine equivalente all'equazione di cui sopra.}$$

Il vettore che verifica il sistema sarà $(y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$, mentre $y(t)$ sarà la soluzione dell'equazione.

Introduzione alle equazioni lineari

Considero $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y^{(1)} + a_n(x)y = f(x)$ dove $f(x)$ rappresenta il termine noto dell'equazione. Chiamo *omogenea associata* la stessa equazione con $f(x) = 0$. I coefficienti dell'equazione resteranno gli stessi. Se $a_i \in C^0(I)$, con $I \in \mathbb{R}$, allora le soluzioni di una siffatta equazione lineare omogenea costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione n .

Questo significa che $y = (y_1, \dots, y_n) \in V$ con V spazio vettoriale. Ma allora anche $y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$ è ancora

soluzione a prescindere dal valore delle costanti c_i .

Se y_1, \dots, y_n costituiscono un sistema di n soluzioni indipendenti di una equazione lineare omogenea di ordine n ,

allora l'equazione $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = \sum_{i=1}^n c_i y_i$ si dice *integrale generale* della equazione e, al

variare degli scalari c_1, \dots, c_n fornisce tutte le soluzioni dell'equazione (questo dipende dal fatto che y_1, \dots, y_n , essendo indipendenti, costituiscono una base dello spazio vettoriale delle soluzioni che è di dimensione n).

Per la motivazione ora segnalata una equazione lineare omogenea di ordine n ha sempre l'integrale generale (è necessario però dimostrare che lo spazio delle soluzioni ha dimensione n , cioè che le soluzioni y_1, \dots, y_n siano indipendenti).

Per far ciò calcolo il determinante del *Wronskiano*, cioè la seguente matrice $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(1)}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$

Si ha $\begin{cases} \forall x (W(x) \neq 0) \Leftrightarrow y_1, \dots, y_n \text{ indipendenti} \\ \forall x (W(x) = 0) \Leftrightarrow y_1, \dots, y_n \text{ dipendenti} \end{cases}$.

Equazione completa

Considero la $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$, con $a_i, f \in C^0(I)$.

Allora se y, \bar{y} sono soluzioni di questa equazione $\rightarrow y - \bar{y}$ è soluzione della omogenea associata.

Se inoltre due equazioni lineari hanno gli stessi coefficienti e diversi termini noti (rispettivamente f e φ), allora $K_1 y + K_2 z$ è soluzione della equazione che ha per termine noto $K_1 f + K_2 \varphi$, dove K_1 e K_2 sono scalari ed y (rispettivamente z) è soluzione della equazione che ha per termine noto f (rispettivamente φ).

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x)$$

$$z^{(n)} + a_1(x)z^{(n-1)} + \dots + a_n(x)z = \varphi(x)$$

$$K_1 y + K_2 z \text{ verifica la } w^{(n)} + a_1(x)w^{(n-1)} + \dots + a_n(x)w = K_1 f + K_2 \varphi.$$

Questo è chiamato anche *principio di sovrapposizione*.

Da queste considerazioni segue che $y - \bar{y} = \sum c_i y_i$ con y_1, \dots, y_n soluzioni indipendenti della equazione omogenea associata. Dunque $y = \sum c_i y_i + \bar{y}$ è l'integrale generale della *equazione completa*.

Problema di Cauchy

Considero la solita $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x)$ con le n condizioni iniziali $y(x_0) = u_0, y^{(1)}(x_0) = u_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = u_{n-1}$, dove chiamante u_0, \dots, u_{n-1} sono valori assegnati da noi.

Dato che, come visto al capitolo precedente, la soluzione generica è $y = \sum c_i y_i + \bar{y}$ (con y_1, \dots, y_n soluzioni indipendenti della omogenea associata ed \bar{y} integrale particolare della equazione di cui sopra), si ha che:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = u_0 - \bar{y}(x_0) \\ c_1 y_1^{(1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(1)}(x_0) = u_1 - \bar{y}^{(1)}(x_0) \\ \dots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = u_{n-1} - \bar{y}^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

(ho espanso la $y = \sum c_i y_i + \bar{y}$ (prima riga) e ne ho poi fatto le derivate successive (righe dalla seconda in poi) tenendo conto delle condizioni iniziali di cui ad inizio capitolo e spostando i termini di \bar{y}).

Questo è un sistema lineare nelle incognite c_1, \dots, c_n .

Poiché il determinante dei coefficienti di questo sistema equivale al Wronskiano $W(x)$ ed essendo questo sicuramente non nullo (dato che per ipotesi le soluzioni y_1, \dots, y_n sono indipendenti), si deduce che il problema di Cauchy ha una soluzione ed essa è unica.

Formula risolutiva per l'equazione lineare del primo ordine

Considero una equazione definita come $y' = Py + Q$ con y funzione incognita, $P, Q \in C^0(I)$.

Sia A una primitiva di P (cioè $A = \int P$). Supponiamo che vi sia una soluzione y dell'equazione (e sappiamo che ciò è vero) e moltiplichiamo l'equazione membro a membro per e^{-A} .

Otterremo $e^{-A}(y' - Py) = Qe^{-A} \Rightarrow y'e^{-A} - \underbrace{P}_{P=A'} e^{-A} = Qe^{-A}$ che posso riscrivere come $D(ye^{-A}) = Qe^{-A}$.

Integrando ottengo $ye^{-A} = \int Qe^{-A} + c$ (con c costante arbitraria).

Quindi in definitiva ottengo $y = ce^A + e^A \int Qe^{-A}$.

Si noti che questa soluzione corrisponde all'integrale generale $y = cy_1 + \bar{y}$ dove e^{-A} è la soluzione della omogenea associata e $e^A \int Qe^{-A}$ è l'integrale particolare della equazione completa.

Come risolvo l'eventuale problema di Cauchy? La condizione iniziale sarebbe $y(x_0) = y_0$.

Porrei inoltre $A(x) = \int_{x_0}^x P$. Procedendo come fatto in precedenza otterrei $y = y_0 e^A + e^A \int_{x_0}^x Qe^{-A}$.

Formula risolutiva alternativa

Considero sempre la $y' = Py + Q$. Prendo la omogenea associata $y' = Py$. Pongo $A = \int P$.

Moltiplico per e^{-A} ottenendo $e^{-A}\left(y' - \underbrace{P}_{P=A'} y\right) = 0$ che corrisponde a $D(e^{-A}y) = 0$.

Integro quest'ultima equazione ottenendo $e^{-A}y = c \Rightarrow y = ce^A$ che è l'integrale generale della omogenea associata. Abbiamo però detto che l'integrale generale della equazione normale è nella forma $y = \underbrace{ce^A}_{\text{integrale generale omogenea associata}} + \bar{y}$

dove \bar{y} è una soluzione qualsiasi della equazione normale. Utilizzando il metodo di Lagrange (vedi più avanti) possiamo dire che questa è nella forma $\bar{y} = \gamma e^A$ dove γ è una funzione da determinare (ad esempio con il metodo della variazione della costante arbitraria, esposto più avanti).

Sostituisco la \bar{y} nella equazione normale e trovo la γ : $\bar{y}' = Py + Q \Rightarrow \gamma'e^A + \underbrace{A''e^A\gamma = P\gamma e^A}_{\text{questi due sono uguali perchè } P=A'} + Q$,

da cui ottengo $\gamma'e^A = Q \Rightarrow \gamma' = e^{-A}Q \Rightarrow \gamma = \int e^{-A}Q$.

Combinando la soluzione precedente (l'integrale generale della omogenea associata) con quest'ultimo risultato (l'integrale generale della equazione normale) ottengo la soluzione $y = ce^A + e^A \underbrace{\int e^{-A}Q}_{\bar{y}}$ che è lo stesso

risultato ottenuto con la formula risolutiva precedente.

Il caso dei coefficienti costanti

Considero la $y' = Py + Q(x)$ con $P \in R$ costante.

Risolvero la omogenea associata $y' = Py$ ricercando soluzioni del tipo $e^{\lambda x}$ con $\lambda \in R$ da determinare.

Sostituisco questa soluzione all'equazione ottenendo $(\lambda - P)e^{\lambda x} = 0$, da cui $\lambda - P = 0 \Rightarrow \lambda = P$ (in quanto l'esponenziale non si annulla mai e quindi l'unica soluzione è quella che annulla il termine tra parentesi).

Dunque in questo caso $y = ce^{Px}$ è l'integrale generale della omogenea associata.

Sempre nel caso dei coefficienti costanti, un integrale particolare dell'equazione normale può essere determinato a seconda della definizione di $Q(x)$:

1. Se $Q(x)$ è definito nella forma $Q(x) = e^{\beta x}$, l'integrale particolare della equazione normale sarà definito nella forma $\bar{y}(x) = Ke^{\beta x}$ con k da determinare.

Sostituisco nell'equazione ottenendo: $K\beta e^{\beta x} = PKe^{\beta x} + e^{\beta x}$, da cui $K(\beta - P) = 1$

Se ora $\beta \neq P$ ho che $K = \frac{1}{\beta - P}$ e quindi $\bar{y}(x) = \frac{1}{\beta - P} e^{\beta x}$ e $y' = Py + e^{\beta x} \Rightarrow y = ce^{\beta x} + \frac{1}{\beta - P} e^{\beta x}$.

Se invece $\beta = P$ non vi sono soluzioni particolari dell'equazione del tipo $Ke^{\beta x}$. In tal caso cerco \bar{y} nella forma $\bar{y}(x) = Kxe^{\beta x}$, trovando $K=1$ e quindi $y' = \beta y + e^{\beta x} \Rightarrow y = ce^{\beta x} + xe^{\beta x}$.

Quindi, in definitiva, l'integrale generale dell'equazione $y' = Py + Q(x)$ con P costante è del tipo:

$$y(x) = \begin{cases} ce^{\beta x} + \frac{1}{\beta - P} e^{\beta x} & \text{per } \beta \neq P \\ ce^{\beta x} + xe^{\beta x} & \text{per } \beta = P \end{cases}$$

2. Se $Q(x)$ è definito nella forma $Q(x) = \sin \gamma x$ con $\gamma \in R$ costante, la soluzione particolare sarà nella forma $\bar{y}(x) = K_1 \sin \gamma x + K_2 \cos \gamma x$.

Sostituendo nella equazione normale ottengo $\begin{cases} -K_2 \gamma = PK_1 + 1 \\ K_1 \gamma = PK_2 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} K_1 = -\frac{P}{P^2 + \gamma^2} \\ K_2 = -\frac{\gamma}{P^2 + \gamma^2} \end{cases}$

Un procedimento analogo si segue per la forma $Q(x) = \cos \gamma x$.

Equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti

Considero l'equazione $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ con $a_i \in R$ e costanti.

Cerchiamo le soluzioni nella forma $y = e^{\alpha x}$ con α da determinarsi.

Sostituendo nell'equazione, ottengo $e^{\alpha x}(\alpha^2 + a_1 \alpha + a_2) = 0$.

Dividendo per $e^{\alpha x}$ (che per le proprietà dell'esponenziale sappiamo essere sempre non nullo), ottengo la cosiddetta equazione *caratteristica* $\alpha^2 + a_1 \alpha + a_2 = 0$, della quale posso facilmente trovare le radici α_1 ed α_2 .

Si noti che l'eq. Caratteristica equivale a sostituire α al posto di y , elevandolo al grado della derivata di y (nell'esempio $y'' = \alpha^2$, $y' = \alpha$, $y = \alpha^0 = 1$).

Queste due radici possono ovviamente essere anche complesse. La ricerca delle soluzioni dell'equazione differenziale è in funzione del valore di queste due costanti:

1. $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ($\Delta > 0$). Allora $e^{\alpha_1 x}$ ed $e^{\alpha_2 x}$ sono soluzioni (eventualmente complesse) dell'equazione differenziale

e sono indipendenti in quanto $W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & \alpha_2 e^{\alpha_2 x} \end{vmatrix} = e^{\alpha_1 x} \cdot e^{\alpha_2 x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = e^{(\alpha_1 + \alpha_2)x} (\alpha_2 - \alpha_1) \neq 0$,

essendo $\alpha_1 \neq \alpha_2$ per ipotesi.

In questo caso l'integrale generale può scriversi come $y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}$ con c_1 e c_2 reali.

2. $\alpha_1 = \alpha_2$ ($\Delta = 0$). Allora $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{a_1}{2}$. Trovo (in maniera analoga a quanto fatto nel primo caso) una

soluzione del tipo $y_1 = e^{\alpha_1 x}$ (ma non riesco a trovarne un'altra in questa maniera). Posso però verificare che anche la $y_2 = x e^{\alpha_1 x}$ è un altro integrale dell'equazione assegnata e che inoltre y_1 ed y_2 sono indipendenti. L'integrale generale sarà quindi $y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 x e^{\alpha_1 x}$.

3. $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ($\Delta < 0$). Allora α_1 ed α_2 sono costanti complesse e valgono $\alpha_1 = u + iv$ ed $\alpha_2 = u - iv$, dove ho

$$\text{che } u = -\frac{a_1}{2} \text{ e } v = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}.$$

$$\text{Ottengo gli integrali } \begin{cases} y_1 = e^{\alpha_1 x} = e^{(u+iv)x} = e^{ux} (\cos vx + i \sin vx) \\ y_2 = e^{\alpha_2 x} = e^{(u-iv)x} = e^{ux} (\cos vx - i \sin vx) \end{cases} \quad (\text{tramite Eulero})$$

$$\text{Da queste ottengo che } \begin{cases} \frac{(y_1 + y_2)}{2} = e^{ux} \cos vx \\ \frac{(y_1 - y_2)}{2i} = e^{ux} \sin vx \end{cases}, \text{ dove } e^{ux} \cos vx \text{ ed } e^{ux} \sin vx \text{ sono ancora soluzioni}$$

dell'equazione e sono inoltre indipendenti.

In forma reale, ottengo l'integrale generale $y = c_1 e^{ux} \cos vx + c_2 e^{ux} \sin vx$.

Equazione completa

Considero l'equazione $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ con $f(x)$ assegnata.

L'integrale generale sarà $y(x) = \underbrace{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)}_{\text{integrale generale della omogenea associata}} + \underbrace{\bar{y}(x)}_{\text{integrale particolare equazione completa}}$

Studiamo alcune $f(x)$ particolari:

$$1. \quad f(x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \bar{y} = \frac{1}{a_2}, & a_2 \neq 0 \\ \bar{y} = \frac{x}{a_1}, & a_2 = 0, a_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ottengo } y'' = 1 \Rightarrow y' = x + K_1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} x^2 + K_1 x + K_2.$$

$$2. \quad f(x) = e^{\beta x}, \text{ con } \beta \text{ fissato. Ottengo } \bar{y} = \begin{cases} K e^{\beta x}, & K = \frac{1}{\beta^2 + a_1 \beta + a_2}, \quad \beta^2 + a_1 \beta + a_2 \neq 0 \\ K x e^{\beta x}, & K = \frac{1}{2\beta + a_1}, \quad \begin{cases} \beta^2 + a_1 \beta + a_2 = 0 \\ 2\beta + a_1 \neq 0 \end{cases} \\ K x^2 e^{\beta x}, & K = \frac{1}{2}, \quad \begin{cases} \beta^2 + a_1 \beta + a_2 = 0 \\ 2\beta + a_1 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Sostituendo la \bar{y} opportuna nell'equazione differenziale, trovo il valore di K .

3. $f(x) = \sin Kx$. Ottengo $\bar{y} = K_1 \sin Kx + K_2 \cos Kx$ con K_1 e K_2 da determinarsi.

$$\text{Trovo il sistema } \begin{cases} K_1(a_2 - K^2) - K_2 K a_1 = 1 \\ K_1 a_1 K + K_2(a_2 - K^2) = 0 \end{cases}.$$

Ottengo il determinante della matrice dei coefficienti $\begin{vmatrix} a_2 - K^2 & -a_1 K \\ a_1 K & a_2 - K^2 \end{vmatrix} = (a_2 - K^2)^2 + a_1^2 K^2$ col quale

determino i valori di K_1 e K_2 (se $a_2 \neq K^2$ oppure $a_1 \neq 0$).

Nel caso in cui $a_2 = K^2$ e $a_1 = 0$ (cioè se $y'' + K^2 y = \sin Kx$) trovo che $\bar{y} = \frac{-x}{2K} \cos Kx$ è soluzione

particolare della equazione e dunque ottengo l'integrale generale $y = c_1 \cos Kx + c_2 \sin Kx - \frac{x}{2K} \cos Kx$.

Il metodo di Lagrange

Questo metodo permette di individuare un integrale particolare di una equazione lineare non omogenea, una volta che sia noto l'integrale generale della omogenea associata. Il metodo vale qualunque sia l'ordine della equazione (di seguito svilupperemo il caso $n=2$ solo per comodità).

Considero la $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ e l'integrale generale della omogenea associata $y_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ dove y_1 ed y_2 sono supposti noti (sono integrali indipendenti della equazione omogenea associata).

Sappiamo che l'integrale generale dell'equazione ad inizio capitolo è del tipo $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \bar{y}$, dove \bar{y} un integrale particolare della equazione completa.

Cerco \bar{y} nella forma $\bar{y} = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2$ dove γ_1 e γ_2 sono funzioni, per il momento arbitrarie, che determineremo imponendo a \bar{y} di verificare la equazione differenziale iniziale.

Come si vede, \bar{y} ha la stessa forma dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata. Per questo motivo, il metodo di Lagrange è detto anche *metodo della variazione delle costanti arbitrarie*.

Derivo \bar{y} ed ottengo $\bar{y}' = \gamma_1 y_1' + \gamma_2 y_2' + \gamma_1' y_1 + \gamma_2' y_2$. Impongo la condizione $\gamma_1' y_1 + \gamma_2' y_2 = 0$ e derivo ancora, ottenendo $\bar{y}'' = \gamma_1 y_1'' + \gamma_2 y_2'' + \gamma_1' y_1' + \gamma_2' y_2'$.

Sostituisco \bar{y} , \bar{y}' ed \bar{y}'' nell'equazione differenziale ed ottengo:

$$\gamma_1 y_1'' + \gamma_2 y_2'' + \gamma_1' y_1' + \gamma_2' y_2' + a_1(\gamma_1 y_1' + \gamma_2 y_2') + a_2(\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2) = f(x)$$

Si noti che nell'equazione di cui sopra i termini $\gamma_1 y_1'' + \gamma_2 y_2'' + a_1(\gamma_1 y_1' + \gamma_2 y_2') + a_2(\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2)$ rappresentano l'omogenea associata all'equazione differenziale originale, per cui la loro somma è nulla (proprio per come è definita una omogenea associata).

Resta quindi $\gamma_1' y_1' + \gamma_2' y_2' = f(x)$. Questa equazione, combinata con la condizione imposta qualche riga più

sopra, forma il sistema di Cramer seguente: $\begin{cases} \gamma_1' y_1 + \gamma_2' y_2 = 0 \\ \gamma_1' y_1' + \gamma_2' y_2' = f(x) \end{cases}$. Si noti che il determinante della matrice dei

coefficienti di tale sistema coincide con il Wronskiano $W(x)$ che è non nullo, essendo y_1 ed y_2 soluzioni indipendenti della omogenea associata, per cui esiste ed è unica la soluzione.

$$\text{In particolare ottengo } \begin{cases} \gamma_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(x)} \\ \gamma_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W(x)} \end{cases} \Rightarrow \text{integrando} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = \int_{x_0}^x \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(x)} dx \\ \gamma_2 = \int_{x_0}^x \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W(x)} dx \end{cases}$$

Ho dunque individuato γ_1 e γ_2 (devo però impostare i valori iniziali $\gamma_1(x_0)$ e $\gamma_2(x_0)$ ad un valore prefissato, ad esempio a zero). Ottengo così (sostituendo in \bar{y} i valori trovati):

$$\bar{y} = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 = - \int_{x_0}^x \frac{y_1(x) y_2(t)}{W(t)} f(t) dt + \int_{x_0}^x \frac{y_2(x) y_1(t)}{W(t)} f(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{W(t)} f(t) dt$$

Esistenza ed unicità della soluzione: alcune premesse

Sia E uno spazio metrico ed f una applicazione di E in sé.

L'applicazione f si dice *contrazione* di E se $\forall x, \forall y (d(f(x), f(y)) \leq K \cdot d(x, y))$, con $0 < K < 1$.

Il punto x si dice *punto fisso* di E se $f(x) = x$.

Una contrazione f ha al massimo un punto fisso. Infatti supponendo che x ed y siano punti fissi distinti per f , ho che $d(f(x), f(y)) = d(x, y) \leq K \cdot d(x, y) < d(x, y)$ in quanto K è minore di uno. Ma questo è assurdo perché questa disuguaglianza ci dice che $K \cdot d(x, y)$ è contemporaneamente maggiore e minore di $d(x, y)$, il che è ovviamente assurdo. Per cui l'ipotesi che x ed y siano due punti fissi distinti è altrettanto assurda e resta quindi verificata la condizione che una contrazione f abbia al massimo un punto fisso.

Considero ora un punto $x_0 \in E$ ed una applicazione (iterativa) definita come $x_n = f(x_{n-1})$. Allora la successione $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ si dice *costruita* (o *definita*) con il *metodo delle approssimazioni successive*.

Si può dimostrare che se f è una contrazione di E , la successione costruita con il metodo delle approssimazioni successive è una successione di Cauchy, cioè vale $\forall \varepsilon, \exists v_\varepsilon : \forall n, m (n, m > v_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon)$. In verità la definizione originale era leggermente diversa: in questo caso, essendo E uno spazio metrico, ho utilizzato direttamente la distanza tra i punti x_n ed x_m .

Esiste infine un teorema che dice che ogni contrazione f di uno spazio metrico completo E ha uno ed un solo punto fisso. Infatti, fissato un punto $x_0 \in E$, sia (x_n) la successione definita con il metodo delle approssimazioni successive. Poiché tale successione è di Cauchy (vedi più sopra), essa sarà senz'altro limitata ed il suo limite sarà x . Essendo però la successione definita come $x_{n+1} = f(x_n)$, avrò che per n tendente all'infinito i valori di x_{n-1} e di x_n tenderanno a coincidere (precisamente tenderanno al limite della successione, cioè ad x), cioè $x_n = f(x_{n-1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x = f(x)$. Ma questa, come visto in precedenza, è la definizione di un punto

fisso, da cui resta verificata la prima parte del teorema. Abbiamo inoltre detto che una contrazione ha al massimo un punto fisso, per cui è verificata anche la seconda parte del teorema.

Si osservi infine che ogni contrazione è una funzione continua.

Esistenza ed unicità della soluzione: problema di Cauchy

Cauchy si pose un problema: come fare a capire se la soluzione di una equazione differenziale esiste ed è unica? Facciamo un paio di esempi:

1. $\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(\tau) = \xi \end{cases}$ dove f è una funzione con discontinuità di prima specie nel punto τ . In questo caso è vero che

y sarebbe derivabile in un intorno di τ (infatti ho definito il valore di $y(\tau)$ proprio nel sistema), ma questo è in contraddizione con la definizione della derivata che è definita uguale ad f , e la funzione f , come detto, presenta una discontinuità di prima specie proprio in τ . Questa contraddizione porta a dire che il problema non ha soluzione in un intorno di τ .

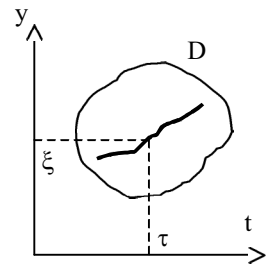
2. $\begin{cases} \dot{y} = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ In questo caso ho tre soluzioni possibili (soluzione non unica):
$$\begin{cases} \varphi_1(t) = 0 \\ \varphi_2(t) = \begin{cases} \left(\frac{2t}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \\ \varphi_3 = -\varphi_2 \end{cases}$$

Partiamo dal primo esempio. Come posso trovare una soluzione che verifichi il sistema e tale che possa esistere anche in un intorno di τ (che anzi possa esistere in τ stesso)?

Consideriamo la $f(t, y)$: essa è definita come $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$.

Esplicitando il sistema del primo esempio ottengo

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ \dot{y}_n = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_1(\tau) = \xi_1 \\ \dots \\ y_n(\tau) = \xi_n \end{cases}$$



dove $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ è un vettore di \mathbb{R}^n .

Dico che $\mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{y})$ è *lipshitziana* in \mathbf{D} , rispetto ad \mathbf{y} , uniformemente in \mathbf{t} , se esiste una costante \mathbf{L} (detta *costante di Lipshitz*) tale che, per $(t, y), (t, z) \in D$, vale $\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L\|y - z\|$.

Nel caso di \mathbf{f} numerica (dipendente cioè dalle variabili reali \mathbf{t} ed \mathbf{y}), la condizione precedente diventa:

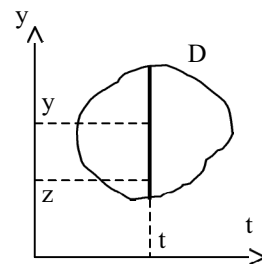
$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|$$

Cosa significa questo? Riscrivo la condizione come $\frac{|f(t, y) - f(t, z)|}{|y - z|} \leq L$, cioè il

rapporto incrementale (=la derivata) resta limitato (fissato \mathbf{t}).

Dico che \mathbf{f} è *localmente lipshitziana* in \mathbf{D} , rispetto ad \mathbf{y} , uniformemente in \mathbf{t} , se ogni punto di \mathbf{D} ha un intorno in cui vale la precedente disuguaglianza (in questo caso la costante \mathbf{L} può dipendere dall'intorno considerato).

Dico che $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ è lipshitziana se e solo se lo sono tutte le \mathbf{f}_i .



Posso dire che se \mathbf{f} e $\frac{\partial f_j}{\partial y_s}$ (con $\mathbf{j}=1..n$ ed \mathbf{s} fissato) sono continue in \mathbf{D} , allora \mathbf{f} è localmente lipshitziana in \mathbf{D}

rispetto ad \mathbf{y} , uniformemente in \mathbf{t} (in pratica quindi mi basta che \mathbf{f} sia continua (=derivabile) e che la derivata parziale di \mathbf{f} rispetto ad \mathbf{y}_s sia continua e limitata).

Introduco ora il teorema di esistenza ed unicità locale.

Considero $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$. Se valgono:

1. \mathbf{f} è continua in \mathbf{D}
2. \mathbf{f} è localmente lipshitziana in \mathbf{D} , rispetto ad \mathbf{y} , uniformemente in \mathbf{t}

allora $\forall (\tau, \xi) \in D, \exists I_\delta = [\tau - \delta, \tau + \delta]$ nel quale è definita una soluzione φ di $\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(\tau) = \xi \end{cases}$ (è il sistema

definito nel primo esempio del capitolo, che è quello da cui siamo partiti).

Tale soluzione è unica, nel senso che ogni altra soluzione coincide con φ , nell'intervallo I_δ .

La soluzione dell'equazione $\dot{y} = f(t, y)$ che verifica la condizione $\xi = \varphi(\tau)$ la indico con $\varphi(t, \tau, \xi)$.

Questa soluzione sarà tale che $\varphi \in C^1(I_\delta)$. I valori (τ, ξ) sono detti *condizioni iniziali*.

La soluzione φ è garantita nell'intervallo (della variabile \mathbf{t})

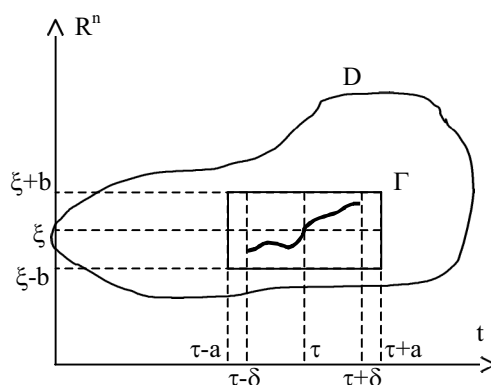
$$I_\delta = [\tau - \delta, \tau + \delta] \quad \text{con} \quad \delta = \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L} \right\} \quad \text{dove}$$

$$M = \max_{\Gamma} \|f(t, y)\| \quad \text{ed } L \text{ è la costante di Lipshitz.}$$

L'intervallo multidimensionale (cioè di ogni variabile di \mathbf{f}) sarà $\Gamma = \{(t, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - \tau| \leq a, |y - \xi| \leq b\}$.

Quindi, in verità l'intervallo di esistenza della soluzione potrebbe essere più ampio di I_δ .

Parto ad esempio dal punto $(\tau_1, \xi_1) = (\tau + \delta, \varphi(\tau + \delta))$ (cioè dal limite destro dell'intervallo I_δ). Se riesco ad individuare un nuovo intervallo $I_{\delta_1} = [\tau_1 - \delta_1, \tau_1 + \delta_1]$ in



cui il problema di Cauchy, dati (τ_1, ξ_1) , ha soluzione φ_1 , allora φ è *prolungabile a destra* e φ_1 rappresenta appunto il suo *prolungamento destro*. Ora, per l'unicità della soluzione, ho che $\varphi_1 = \varphi$ su $I_\delta \cap I_{\delta_1}$.

In maniera analoga posso prolungare φ a sinistra (parto dal limite sinistro di I_δ).

I nuovi intervalli di definizione li chiamo *intervalli massimali* (rispettivamente *destro* e *sinistro*).

La non prolungabilità della soluzione a tutto l'intervallo $[\tau - a, \tau + a]$ può dipendere dal fatto che la soluzione φ "esce" da Γ attraverso i lati $y = \xi \pm b$ prima di "toccare" i lati $x = \tau \pm a$.

È importante avere informazioni sull'intervallo massimale di esistenza della soluzione: se questo intervallo è limitato e la soluzione tende ad infinito avvicinandosi al bordo prolungato, allora un eventuale modello fisico associato all'equazione differenziale che stiamo studiando prevede un andamento anomalo (catastrofico ?) in un tempo finito.

Se invece l'intervallo massimale è prolungato all'infinito (quindi φ è *indefinitamente prolungabile* a destra o a sinistra di τ), allora è interessante studiare il comportamento asintotico di φ (cioè il comportamento per $\tau \rightarrow \pm\infty$ a seconda del verso del prolungamento).

Proviamo ora a globalizzare l'esistenza della soluzione.

Consideriamo $S =]\tau_1, \tau_2[\times R^n$. Supponiamo che f sia definita sulla chiusura \bar{S} e che siano verificate le ipotesi di esistenza ed unicità locale della soluzione $\varphi(t, \tau, \xi)$ (con $\tau \in S$).

Allora se esistono due costanti $K_1 \geq 0$ e $K_2 \geq 0$ tali che valga $\|f(t, y)\| \leq K_1 + K_2\|y\|$, $\forall (t, y) \in \bar{S}$, allora $\forall (\tau, \xi) \in S$ ho che $\varphi(t, \tau, \xi)$ è definita in tutta \bar{S} .

Questa condizione è verificata se:

1. f è limitata in \bar{S}
2. f è lipshitziana in \bar{S} , rispetto ad y , uniformemente in t : infatti se vale $\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L\|y - z\|$, ponendo $z=0$ ed $M_0 = \max\|f(t, 0)\|$, ottengo $\|f(t, y)\| \leq \|f(t, y) - f(t, 0)\| + \|f(t, 0)\| \leq L\|y\| + M_0$. Se ora pongo $L=K_2$ ed $M_0=K_1$, ottengo la condizione desiderata.
3. Tutte le derivate parziali $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ sono continue e limitate in \bar{S} .

Facciamo un esempio:

$$\text{Considero un sistema come il seguente: } \begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}(t)y_1 + \dots + a_{1n}(t)y_n + b_1(t) \\ \dots \\ \dot{y}_n = a_{n1}(t)y_1 + \dots + a_{nn}(t)y_n + b_n(t) \end{cases}$$

In forma matriciale posso riscrivere il sistema come $\dot{y} = A(t)y + b(t)$, dove chiaramente ho che

$$A(t) = [a_{ij}(t)], \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \dots \\ b_n(t) \end{bmatrix}.$$

Se $a_{ij}, b \in Cl([\tau_1, \tau_2])$, allora la terza condizione di cui sopra è verificata (infatti ho che $\frac{\partial f_i}{\partial y_j} = a_{ij}(t)$).

Questo implica che le soluzioni del problema $\dot{y} = Ay + b$, con condizioni iniziali $y(\tau) = \xi$ (dove $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$), sono definite su tutto $[\tau_1, \tau_2]$.

Sistemi lineari omogenei

Definisco sistema lineare omogeneo un sistema che, in forma matriciale, sia definito come segue:

$$\dot{x} = A(t)x, \quad \text{con} \quad A(t) = [a_{ij}(t)], \quad \text{con} \quad i, j = 1, \dots, n, \quad \text{ed inoltre} \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad a_{ij} \in Cl^0(I), \quad \text{dove} \\ I = [a, b] \subset R.$$

Indico con \mathbf{V} lo spazio vettoriale delle soluzioni. Allora posso dire che $\dim \mathbf{V} = n$.

Dimostriamolo: indico con φ^j la soluzione del problema $\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(a) = e^j \end{cases}$, dove $e^j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ (l'uno è in

corrispondenza della riga j-esima).

Posso dire che:

1. $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ sono indipendenti: infatti se $\sum c_i \varphi^i = \bar{0}$, allora anche $\sum c_i e^i = \bar{0}$ e quindi, per come sono definite le e^i , dovrà per forza essere $c_i = 0, \forall i$. Da cui segue l'indipendenza delle soluzioni.

2. $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ generano \mathbf{V} , cioè $\forall y(\in \mathbf{V}), \exists c_1, \dots, c_n : (y = \sum c_i \varphi^i)$: infatti, posto $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = y(a)$, avendo

che $\varphi = \sum c_i \varphi^i$, è ovvio che $\varphi(a) = c = y(a)$.

Quindi φ ed y verificano il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(a) = c \end{cases}$. Ora, per il teorema di unicità $\varphi = y$ e

dunque ho che $y = \sum c_i \varphi^i$, che è quello che volevamo provare.

Ora, assegnato il sistema $\dot{x} = A(t)x$, se x^1, \dots, x^n sono soluzioni indipendenti del sistema, l'espressione $c_1 x^1 + \dots + c_n x^n$ si dice *integrale generale* del sistema (si badi che le x^n non sono potenze!).

Questa espressione, al variare delle costanti c_i , fornisce tutte le soluzioni del sistema.

Si osservi che se x^1, \dots, x^n sono soluzioni di $\dot{x} = A(t)x$ e $t_0 \in I = [a, b]$ (intervallo di definizione dei coefficienti della matrice $A(t)$), allora x^1, \dots, x^n sono indipendenti $\Leftrightarrow x^1(t_0), \dots, x^n(t_0)$ sono indipendenti.

Matrice fondamentale

Considero il sistema lineare omogeneo $\dot{x} = A(t)x$, con x^1, \dots, x^n soluzioni.

Costruisco la matrice $V(t) = \begin{bmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^1 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$ come la matrice contenente le componenti (pedice) di ogni

soluzione (apice) del sistema lineare omogeneo.

Se x^1, \dots, x^n sono soluzioni indipendenti del sistema, allora \mathbf{V} è detta *matrice fondamentale* ed è tale che per essa vale $\det V(t) = W(t)$ (dove $\mathbf{W}(t)$ è il Wronskiano).

Per il Wronskiano sussiste la seguente proposizione: $W(t) = W(c) \cdot e^{\int_c^t a_{ii}(\tau) d\tau}$, dove $c \in I$ (che è l'intervallo di definizione degli $a_{ij}(t)$).

Dimostriamolo.

Innanzitutto calcolo la derivata del Wronskiano (seguo la regola di derivazione di un determinante, che è valida

in generale): $W'(t) = \begin{vmatrix} \dot{x}_1^1 & \dots & \dot{x}_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^1 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{x}_n^1 & \dots & \dot{x}_n^n \end{vmatrix}$ (derivo man mano ogni riga)

Essendo, per ipotesi, $\dot{x} = A(t)x$, ho che $\begin{cases} \dot{x}_1^j = \sum_{k=1}^n a_{1k} x_k^j \\ \dots \\ \dot{x}_n^j = \sum_{k=1}^n a_{nk} x_k^j \end{cases}$, per cui posso riscrivere quanto sopra nel modo

seguito (sostituisco i vari \dot{x}_i^j):

$$W'(t) = \begin{vmatrix} \sum_h a_{1h} x_h^1 & \dots & \sum_h a_{1h} x_h^n \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n^1 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_h a_{nh} x_h^1 & \dots & \sum_h a_{nh} x_h^n \end{vmatrix}$$

Questo equivale a scrivere: $W'(t) = a_{11}W(t) + \dots + a_{nn}W(t) = W(t) \cdot \text{traccia}(A) = W(t) \sum_{i=1}^n a_{ii}$

Quest'ultima è una equazione lineare del primo ordine. Risolviamola.

Considero un punto c appartenente ad I (insieme di definizione degli a_{ji}).

Con metodi normali di risoluzione ottengo $e^{-\int_c^t \text{traccia}(A)} \cdot (W'(t) - \text{traccia}(A) \cdot W(t)) = 0$ che posso riscrivere

abbastanza facilmente in $D \left\{ e^{-\int_c^t \text{traccia}(A)} \cdot W(t) \right\} = 0$.

Da questa, integrando, ottengo $W(t) = W(c) \cdot e^{\int_c^t \text{traccia}(A)}$ che è quello che volevamo dimostrare.

Sempre dalla $D \left\{ e^{-\int_c^t \text{traccia}(A)} \cdot W \right\} = 0$ si capisce che $e^{-\int_c^t \text{traccia}(A)} \cdot W = \text{costante}$. Imponendo $t=c$ trovo la

costante, la quale equivale proprio a $W(c)$.

Questo è un risultato importante in quanto ci dice che se esiste un punto c di I per il quale vale $W(c)=0$, allora W sarà nullo per qualsiasi altro punto di I . Se invece esiste un punto c di I per il quale vale $W(c) \neq 0$, allora W sarà non nullo per qualsiasi altro punto di I . Quindi, in pratica, W o è sempre nullo o è sempre non nullo.

Nel caso in cui ho $W(c) \neq 0$, ho che le soluzioni x^1, \dots, x^n sono indipendenti.

Calcolo delle derivate della matrice fondamentale

Calcoliamo la derivata della matrice fondamentale V . Considero il solito sistema lineare omogeneo $\dot{x} = A(t)x$, dove $A(t) = [a_{ij}(t)]$. Suppongo che x^1, \dots, x^n siano soluzioni indipendenti.

La matrice fondamentale sarà $V(t) = \begin{bmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n^1 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$.

La derivata invece sarà $V'(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1^1 & \dots & \dot{x}_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dot{x}_n^1 & \dots & \dot{x}_n^n \end{bmatrix}$ (occhio! Questa è la derivata di una matrice e non di un

determinante come visto in precedenza per il Wronskiano).

Come fatto in precedenza, posso sostituire i vari \dot{x}_i^j tramite la definizione stessa del sistema lineare, ottenendo:

$$V'(t) = \begin{bmatrix} \sum a_{1k} x_k^1 & \dots & \sum a_{1k} x_k^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum a_{nk} x_k^1 & \dots & \sum a_{nk} x_k^n \end{bmatrix} = A \cdot V$$

Quindi in definitiva ho che $\dot{V} = AV$.

Sistemi lineari non omogenei: metodo di Lagrange

Considero un sistema lineare non omogeneo $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ con $b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \dots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$.

Siano x^1, \dots, x^n soluzioni indipendenti del sistema lineare omogeneo associato $\dot{x} = A(t)x$.

Se ora x ed x^* sono soluzioni del sistema lineare non omogeneo, vale che $x - x^* = \sum c_i x^i$.

Riscritta in un altro modo, ho che $x = x^* + \sum c_i x^i$. Questa x sarà quindi l'integrale generale del sistema lineare non omogeneo ed è data dalla somma delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato e di una soluzione particolare del sistema non omogeneo (x^*). Un po' come succedeva per le equazioni lineari non omogenee viste in precedenza.

Determiniamo la x^* tramite il metodo di Lagrange.

Ricerco x^* nella forma $x^* = \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n^1 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = V(t) \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, dove le $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sono funzioni da

determinare.

Sostituisco ora la mia x^* nel sistema non omogeneo:

$$\dot{x} = Ax + b \Rightarrow \dot{V} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix} + V \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dots \\ \dot{\gamma}_n \end{pmatrix} = \underbrace{AV}_{AV=\dot{V}} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix} + b \Rightarrow V \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dots \\ \dot{\gamma}_n \end{pmatrix} = b$$

derivata di un prodotto di
matrici: è simile alla
derivata di un prodotto

Da questa ottengo facilmente $\begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dots \\ \dot{\gamma}_n \end{pmatrix} = V^{-1} \cdot b$, dove $V^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$ con $\sigma_{ij} = \frac{\text{comp_algeb}(V_{ij})}{\underbrace{W(t)}_{W=\det V}}$.

In maniera compatta posso riscriverlo come $\dot{\gamma}_i(t) = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t) \cdot b_j(t)$.

Integrando quest'ultima ottengo $\gamma_i(t) = \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(\tau) b_j(\tau) d\tau$.

Verifico anche che $\gamma_i(t_0) = 0, \forall i \in [1, n]$.

Facciamo un esempio:

Considero il sistema lineare non omogeneo $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$.

Svolgendo i calcoli, posso riscriverlo come $\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 & + t \\ \dot{x}_2 = & & x_3 & + 1 \\ \dot{x}_3 = -2x_1 & + x_2 & + 2x_3 & + e^{3t} \end{cases}$.

Studiamo prima di tutto il sistema omogeneo associato: $\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 \\ \dot{x}_2 = & & x_3 \\ \dot{x}_3 = -2x_1 & + x_2 & + 2x_3 \end{cases}$

Ponendo $y=x_1$ e sostituendolo nel sistema di cui sopra, ottengo che questo sistema equivale alla equazione lineare omogenea $\ddot{y} - 2\dot{y} - \dot{y} + 2y = 0$.

Troviamo l'equazione caratteristica di questa equazione: $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$.

Risolviendo questa equazione ottengo che le soluzioni della equazione omogenea associata sono e^t, e^{2t}, e^{-t} .

Queste soluzioni equivalgono alle soluzioni $\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ del sistema omogeneo associato.

Queste soluzioni sono indipendenti (non faremo la dimostrazione di questo).

Otengo quindi l'integrale generale del sistema omogeneo associato: $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$.

Trovo ora l'integrale generale del sistema completo.

Trovo la matrice fondamentale: $V(t) = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} & e^{-t} \\ e^t & 2e^{2t} & -e^{-t} \\ e^t & 4e^{2t} & e^{-t} \end{bmatrix}$

Ora trovo x^* nella forma $x^*(t) = V(t) \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix}$.

Col procedimento spiegato sopra ottengo $V(t) \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \\ \dot{\gamma}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$.

Questo corrisponde al sistema $\begin{cases} e^t \dot{\gamma}_1 + e^{2t} \dot{\gamma}_2 + e^{-t} \dot{\gamma}_3 = t \\ e^t \dot{\gamma}_1 + 2e^{2t} \dot{\gamma}_2 - e^{-t} \dot{\gamma}_3 = 1 \\ e^t \dot{\gamma}_1 + 4e^{2t} \dot{\gamma}_2 + e^{-t} \dot{\gamma}_3 = e^{3t} \end{cases}$.

Risolviendo il sistema ottengo le soluzioni particolari γ_1, γ_2 e γ_3 .

Soluzione delle equazioni lineari tramite i sistemi lineari

Considero una equazione lineare (omogenea) definita come $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$.

Ponendo $x_1=y, x_2=y^{(1)}, \dots, x_n=y^{(n-1)}$ posso trasformarla nel sistema
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_n = (a_n x_1 + \dots + a_2 x_{n-1} + a_1 x_n) \end{cases}$$

La matrice di questo sistema sarà $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \end{bmatrix}$ (si noti che la prima colonna è tutta nulla

e l'ultima riga corrisponde ai coefficienti dell'ultima equazione del sistema).

Ho che y è soluzione dell'equazione $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ y^{(1)} \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ è soluzione del sistema.

Inoltre le soluzioni y_1, \dots, y_n dell'equazioni sono indipendenti \Leftrightarrow le soluzioni $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1^{(1)} \\ \dots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_n \\ y_n^{(1)} \\ \dots \\ y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$ del sistema

sono indipendenti.

Le soluzioni del sistema sono indipendenti se e solo se il Wronskiano è non nullo, per cui le soluzioni dell'equazione saranno indipendenti se e solo se il Wronskiano è non nullo.

Analogamente posso considerare una equazione lineare non omogenea. In questo caso la trasformerò in un sistema lineare non omogeneo e troverò la soluzione particolare come spiegato al capitolo precedente.

Quindi, in definitiva, una equazione lineare la posso sempre trasformare in un sistema lineare (omogeneo o meno a seconda dell'omogeneità dell'equazione) ed utilizzare i procedimenti descritti in precedenza per arrivare alle soluzioni che saranno quindi soluzioni dell'equazione e del sistema lineare.

Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti

Considero il sistema lineare omogeneo $\dot{x} = Ax$ con A matrice *costante* $n \times n$ (cioè i suoi termini non dipendono dalla variabile t).

Esistono soluzioni del sistema nella forma $e^{\lambda t} v$ dove λ è uno scalare e v è un vettore non nullo e non dipendente dalla variabile t .

Pongo quindi $x(t) = e^{\lambda t} v$ e sostituisco nel sistema, ottenendo $\lambda e^{\lambda t} v = A(e^{\lambda t} v) \Rightarrow \lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} Av$.

Si deduce che $e^{\lambda t} v$ è soluzione di $\dot{x} = Ax$ se e solo se $Av = \lambda v$. Questo implica che v sia un autovettore di A corrispondente all'autovalore λ .

Quindi il problema si riduce (per così dire...) alla ricerca degli autovalori e degli autovettori di A , cioè alla soluzione della tipica equazione $(A - \lambda I)v = 0$ dove I è la matrice *identità*.

Segue che se A ha n autovettori indipendenti, allora individuiamo n soluzioni indipendenti del sistema e quindi siamo in grado di scrivere l'integrale generale.

Si ricordi a tal proposito che gli autovettori di una matrice sono indipendenti se corrispondono ad altrettanti autovalori distinti della matrice stessa.

Nel caso di \mathbf{A} a valori reali, se trovo un autovalore λ complesso tale che $\lambda = \alpha + i\beta$, troverò un autovettore del tipo $v = v^1 + iv^2$. In questo caso le funzioni $\begin{cases} (v^1 \cos \beta t - v^2 \sin \beta t)e^{\alpha t} \\ (v^1 \sin \beta t + v^2 \cos \beta t)e^{\alpha t} \end{cases}$ sono soluzioni reali del sistema.

Serie di matrici

Considero una matrice \mathbf{C}_k (matrice quadrata di ordine \mathbf{n}) tale che sia definita come $C_k = \left[(c_{ij})^k \right]$ (in pratica, cioè, i suoi elementi c_{ij} sono elevati alla k).

Se $\forall i, j \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_{ij})^k \right)$ converge (quindi se converge la serie di ogni singolo elemento della matrice), allora

diremo che la serie di matrici $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{C}_k$ converge alla matrice $\mathbf{C} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} (c_{ij})^k \right]$ (i suoi elementi sono le serie di ogni singolo elemento della matrice \mathbf{C}_k).

Norma di una matrice

Definisco *norma di una matrice* il valore $\|\mathbf{C}\| = \sqrt{\sum_{i,j} |c_{ij}|^2}$.

Si verifica la disuguaglianza triangolare $\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$ dove, chiaramente, \mathbf{A} e \mathbf{B} sono matrici quadrate dello stesso ordine.

Da questa deriva (iterando la disuguaglianza k volte sulla matrice \mathbf{A}) che $\|\mathbf{A}^k\| \leq \|\mathbf{A}\|^k, \forall k$.

Assoluta convergenza di una serie di matrici

Sia (\mathbf{C}_k) una serie di matrici quadrate di ordine \mathbf{n} . Si ha che se $\sum \|\mathbf{C}_k\|$ converge \rightarrow converge anche $\sum \mathbf{C}_k$.

Infatti $\forall i, j \left(\left| (c_{ij})^k \right| \leq \|\mathbf{C}_k\| \right)$, e se $\|\mathbf{C}_k\|$ converge, per il criterio del confronto ho che $\forall i, j \left(\sum_k |(c_{ij})^k| \right)$

converge. Questo implica (assoluta convergenza implica convergenza) che $\forall i, j \left(\sum_k (c_{ij})^k \right)$ converge, da cui resta dimostrato l'asserto.

Matrice esponenziale

Sia \mathbf{A} una matrice quadrata di ordine \mathbf{n} . Posto $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ (con \mathbf{I} matrice identità), consideriamo la serie di matrici definita come $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$.

Tale serie converge (qualunque sia la matrice \mathbf{A}). Infatti posso dire che $\left\| \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|\mathbf{A}\|^k}{k!}$ e poiché posso dimostrare

che $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\mathbf{A}\|^k}{k!} = e^{\|\mathbf{A}\|}$ (si ricordi che $\|\mathbf{A}\|$ è un numero, quindi questa serie è una semplice serie esponenziale), per

il criterio del confronto ho che anche la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \right\|$ converge. Da qui segue l'asserto (in quanto l'assoluta convergenza implica la convergenza).

Porremo $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ (sembrerebbe una definizione non molto corretta).

Osservo la seguente proprietà $e^{tA} \cdot e^{sA} = e^{(t+s)A}$, $\forall s, t$ (analogamente al caso reale). Da questa proprietà posso ovviamente dire che $e^{tA} \cdot e^{-tA} = e^{0 \cdot A} = I$ (anche in questo in maniera analoga al caso reale).

In generale, però, ho che $e^A \cdot e^B \neq e^{A+B}$.

L'unica eccezione si ha quando $AB = BA$ (che con le matrici non sempre è vero). In questo caso vale anche la proprietà $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$.

Proprietà importante della matrice esponenziale

Osserviamo che vale $e^{At} \cdot A = A \cdot e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^{k+1}$.

Questo in quanto $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$ (lo posso ricavare rapidamente da quanto detto nel capitolo precedente).

Moltiplicare questo per A dà quindi come risultato quanto scritto ad inizio capitolo.

Indico ora con $E(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (a_{ij})^k \right]$.

Ogni elemento della matrice $E(t)$ vale $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (a_{ij})^k$ che è una serie di potenza convergente per qualsiasi t .

Derivo la $E(t)$ ed ottengo $E'(t) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} (a_{ij})^k \right] = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (a_{ij})^{k+1} \right]$ (posso farlo perché k va ad infinito e

quindi mi basta cambiare il punto di partenza della sommatoria). Quindi $E'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^{k+1} = A e^{At} = e^{At} A$.

Questo significa che $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$ (che è analogo al caso reale).

Osservazione sulla risoluzione di sistemi lineari

Considero l'equazione lineare omogenea $\dot{x} = \alpha x$ con α reale. Questa ha come soluzione la $x = K e^{\alpha t}$ (qualunque sia K reale).

Considero ora il sistema lineare omogeneo $\dot{x} = Ax$ con A matrice quadrata di ordine n costante. Questo ha per soluzione il sistema $x = e^{At} v$ (qualunque sia il vettore costante v).

Supponiamo che A abbia autovalori di molteplicità maggiore di uno.

Ad esempio prendiamo il sistema $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot x$

Questa matrice A ha un autovalore $\lambda=1$ con molteplicità 2 ed un autovalore $\lambda=2$ con molteplicità 1. Infatti

risolvendo la $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda)$ dove si vede chiaramente la

molteplicità dei singoli autovalori.

Questo significa che il sistema differenziale ha due sole soluzioni indipendenti: $e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ed $e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Quindi, in conclusione, il sistema non ammette altre soluzioni, indipendenti dalle precedenti, del tipo $e^{\lambda t} \cdot v$. Per scrivere l'integrale generale del sistema occorrono però tre soluzioni indipendenti (l'ordine di A è 3).

Osserviamo che, con il solito truccetto del "metti e togli", posso scrivere $e^{At} v = e^{(At-\lambda I+\lambda I)} v = e^{(A-\lambda I)t} e^{\lambda t} v$.

Ora calcoliamo $e^{\lambda t} v = \left(I + \lambda I t + \frac{\lambda^2 I^2 t^2}{2!} + \dots \right) v = \left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \dots \right) I v = e^{\lambda t} v$ (in pratica tolgo I).

Riscrivo allora $e^{At} v = e^{\lambda t} e^{(A-\lambda I)t} v = e^{\lambda t} e^{(A-\lambda I)t} v$.

Osserviamo inoltre che se $(A-\lambda I)^m v = \bar{0}$, allora lo sviluppo di $e^{(A-\lambda I)t} v$ termina dopo m termini.

Infatti $e^{(A-\lambda I)t} v = v + t(A-\lambda I)v + \frac{t^2}{2!}(A-\lambda I)^2 v + \dots$

Poichè però $\forall l (\in N): \left((A-\lambda I)^{m+l} v = (A-\lambda I)^l \cdot \underbrace{(A-\lambda I)^m v}_{=0 \text{ per ipotesi}} \right) = 0$, allora i termini dello sviluppo di cui

sopra che hanno potenza maggiore di m saranno tutti nulli.

In definitiva quindi se vale $(A-\lambda I)^m v = 0$ ho il seguente sviluppo:

$$e^{At} v = e^{\lambda t} e^{(A-\lambda I)t} v = e^{\lambda t} \left[v + t(A-\lambda I)v + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (A-\lambda I)^{m-1} v \right]$$

Applichiamo ora queste osservazioni al problema che ci siamo posto (quello della matrice A con autovalori a molteplicità maggiore di uno).

Sia A una matrice quadrata di ordine n con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ di molteplicità rispettivamente, n_1, \dots, n_k (dovrà per forza essere $\sum n_i = n$).

Sia λ_j uno di tali autovalori e siano v_j ($< n_j$) gli autovettori indipendenti associati a λ_j (si dice che l'autospazio relativo a λ_j ha dimensione v_j).

Allora l'equazione (in v) $(A-\lambda_j I)^2 v = \bar{0}$ ha almeno v_j+1 soluzioni indipendenti.

Supponiamo di avere un autovalore di molteplicità maggiore di uno: dobbiamo trovare, oltre alle prime v_j soluzioni che otteniamo, anche le altre n_j-v_j soluzioni indipendenti.

Quanto detto sopra ci permette di affermare che esiste almeno un vettore v^* tale che valga
$$\begin{cases} (A-\lambda_j I)v^* \neq \bar{0} \\ (A-\lambda_j I)^2 v^* = \bar{0} \end{cases}$$

(questo v^* è quindi indipendente dalle v_j soluzioni già trovate). Sviluppo $e^{At} v^*$ (che verifica certamente il sistema $\dot{x} = Ax$ essendone una soluzione) ed ottengo: $e^{At} v^* = e^{\lambda_j t} e^{(A-\lambda_j I)t} v^* = e^{\lambda_j t} \left[v^* + t(A-\lambda_j I)v^* \right]$.

Questo sviluppo è un'ulteriore soluzione del sistema lineare.

Se ancora non si sono ottenute n_j soluzioni indipendenti del sistema, ripeto il procedimento aumentando la

potenza: esiste almeno un vettore \tilde{v} per il quale vale:
$$\begin{cases} (A-\lambda_j I)^2 \tilde{v} \neq \bar{0} \\ (A-\lambda_j I)^3 \tilde{v} = \bar{0} \end{cases}$$

Per tale vettore siamo in grado di sviluppare la $e^{At} \tilde{v} = e^{\lambda_j t} \left[\tilde{v} + t(A-\lambda_j I)\tilde{v} + \frac{t^2}{2} (A-\lambda_j I)^2 \tilde{v} \right]$.

Questo sviluppo è un'ulteriore soluzione del sistema lineare.

Posso ripetere il procedimento fino a che non si ottengono, relativamente all'autovalore λ_j tutte le n_j soluzioni indipendenti che ci servono.

Possiamo quindi utilizzare questo algoritmo per individuare l'integrale generale di un sistema $\dot{x} = Ax$ con matrice A costante.

Torniamo all'esempio che abbiamo fatto ad inizio capitolo: $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x$.

Abbiamo trovato gli autovalori: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$.

Consideriamo il primo autovalore: $\lambda=1$. Troviamo v : $(A - \lambda I)v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$.

L'equazione è risolta per $v_2=v_3=0 \Rightarrow x(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è una soluzione del sistema (dovrei eseguire lo sviluppo di

$e^{At} v$ che in questo caso si ferma alla potenza 0 e quindi ho subito il risultato di cui sopra).

Questo autovalore ha però molteplicità 2, per cui proseguo nel cercare un'altra soluzione indipendente.

Questa volta calcolo $(A - \lambda I)^2 v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$

Cerco un vettore v che mi verifichi questo sistema, ma non quello precedente $(A - \lambda I)v = 0$ in quanto deve

essere una soluzione indipendente. Questo vettore è $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Eseguo lo sviluppo in modo da trovare la soluzione del sistema:

$$x(t) = e^{At} v = e^t e^{(A-I)t} v = e^t \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = e^t \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = e^t \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si noti che in questo caso ho fermato lo sviluppo al termine a potenza 1 (come detto in precedenza lo sviluppo si ferma alla potenza subito precedente a quella di ricerca del vettore).

Ora ho trovato due soluzioni indipendenti, per cui mi fermo (trovo al massimo un numero di soluzioni indipendenti che eguaglia la molteplicità dell'autovalore).

Passo ora all'autovalore $\lambda=2$ (molteplicità 1 per cui mi basta trovare una soluzione).

Procedendo in maniera analoga trovo la soluzione $x(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

L'integrale generale del sistema sarà quindi: $x(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Equazioni differenziali con cambiamento di variabili

Considero l'equazione $xy'' - y' - 4x^3y = x^3$. La sua omogenea associata $xy'' - y' - 4x^3y = 0$ è a coefficienti variabili. Sia, per ipotesi, imposta la condizione iniziale $y(0)=1$ e la soluzione deve essere convergente per $x \rightarrow +\infty$.

Eseguo un cambio di variabili: $x = \psi(t)$ la cui inversa è $t = \varphi(x)$.

Otengo una nuova funzione incognita $Y(t) = y(\psi(t))$ e quindi, inversamente, $y(x) = Y(\varphi(x))$.

$$\text{Calcolo } \begin{cases} y'(x) = Y'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \\ y''(x) = Y''(\varphi(x)) \cdot [\varphi'(x)]^2 + Y'(\varphi(x)) \cdot \varphi''(x) \end{cases}$$

Sostituisco nell'equazione data ed ottengo $x[Y''\varphi'(x)^2 + Y'\varphi''(x)] - Y'\varphi'(x) - 4x^3Y = 0$ (ho tralasciato i parametri delle Y che sono sempre $\varphi(x)$).

Ora dobbiamo trovare $\varphi(x)$. Notiamo che i coefficienti di Y' formano una equazione lineare omogenea:

$$x\varphi''(x) - \varphi'(x) = 0$$

Questa è semplice da risolvere (separazione delle variabili): $\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{1}{x}$. Integro ed ottengo $\log|\varphi'| = \log|x|$.

Usando l'esponenziale ottengo $\varphi' = x$. Integro nuovamente ed ottengo $\varphi = \frac{x^2}{2}$.

Quindi il cambiamento di variabili sull'equazione iniziale sarà $t = \varphi(x) = \frac{x^2}{2}$.

La funzione inversa è chiaramente $x = \sqrt{2t}$ (in questo caso scelgo x e non $|x|$ perché la soluzione deve essere convergente per $x \rightarrow +\infty$ e quindi x è sicuramente positivo).

Sostituisco la x nella equazione con le Y (si ricordi che, per trovare la φ abbiamo imposto che i coefficienti di Y' si annullassero, per cui non avremo termini in Y'): $Y''\sqrt{2t} \cdot 2t - 4(\sqrt{2t})^3 Y = 0$.

Semplifico il termine $(\sqrt{2t})^3$, ottenendo $Y'' - 4Y = 0$. Trovo l'equazione caratteristica $\alpha^2 - 4 = 0$.

La risolvo e trovo $\alpha = \pm 2$, da cui l'integrale generale sarà $Y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}$.

Ora torno alla variabile x (mi basta sostituire t con $\frac{x^2}{2}$) ed ottengo $y(x) = c_1 e^{-x^2} + c_2 e^{x^2}$.

Ora, imponendo la condizione iniziale e tenendo conto che la soluzione deve convergere per $x \rightarrow \infty$ (quindi ho sicuramente che $c_2=0$ in quanto il termine associato a questa costante divergerebbe esponenzialmente), trovo la soluzione che è $y(x) = \frac{5}{4}e^{-x^2} - \frac{1}{4}$.

Equazioni del primo ordine

Vediamo ora alcuni metodi di risoluzione per le equazioni a variabili separabili.

1. Primo metodo con gli integrali definiti

Considero la $y' = A(x)B(y)$ con $B(y) \neq 0$. Separo le variabili: $\frac{y'}{B(y)} = A(x)$.

Integro: $\int_{x_0}^x \frac{y'}{B(y(t))} dt = \int_{x_0}^x A(t) dt$. Eseguo la sostituzione $y(t) = \tau \Rightarrow \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{d\tau}{B(\tau)} = \int_{x_0}^x A(t) dt$.

Otengo due primitive: $G(\tau) = \int \frac{1}{B(\tau)}$ ed $F(\tau) = \int A(t)$.

La soluzione diventa quindi $G(y(x)) - G(y(x_0)) = F(x) - F(x_0)$, dalla quale è necessario estrarre la $y(x)$. Si noti che questa nuova equazione non è però differenziale.

2. Secondo metodo con gli integrali indefiniti.

Considero sempre la $y' = A(x)B(y)$. Analogamente al caso precedente, arrivo a

$$\int \frac{y'(x)}{B(y(x))} dx = \int A(x) dx \quad (\text{si noti che questa volta gli integrali sono indefiniti}). \text{ Eseguo ancora la}$$

$$\text{sostituzione } y(x) = \tau, \text{ ottenendo } \int \frac{d\tau}{B(\tau)} = \int A(x) dx.$$

Otengo sempre le due primitive $G(y(x))$ e $F(x)$ dalle quali ottengo l'equazione $G(y(x)) = F(x) + k$.

Equazioni omogenee

Vediamo un metodo risolutivo per questo tipo di equazioni.

Considero un'equazione del tipo $y' = f(x, y)$ con f omogenea di grado 0. Dire che f è omogenea significa dire che $f(\mu x, \mu y) = f(x, y)$, $\forall \mu \neq 0$.

Prendendo $\mu = \frac{1}{x}$ (con $x \neq 0$, chiaramente), ottengo $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

Ora effettuo il seguente cambio di funzione incognita: $\frac{y(x)}{x} = t(x)$.

Inversamente ottengo, quindi, $y(x) = x \cdot t(x)$. Da questa, derivando, ottengo $y' = t(x) + x \cdot t'(x)$.

Sostituisco nella definizione della equazione ed ottengo $\underbrace{t + xt'}_{y'} = f(1, t)$.

Da questa passo rapidamente alla seguente $t' = [f(1, t) - t] \cdot \frac{1}{x}$ che è una equazione a variabili separabili e quindi ricado nel caso illustrato nel capitolo precedente.

Equazioni riducibili alle omogenee

Considero la seguente equazione: $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$. Questa non è sicuramente omogenea (presenza delle costanti c e c').

Estrapolo il sistema $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ il cui determinante $ab' - a'b \neq 0$ mi dice che il sistema ha un'unica

soluzione. Eseguo un cambiamento di variabile indipendente e di funzione incognita: $\begin{cases} x = t + \alpha \\ y = \eta + \beta \end{cases}$.

Dalla equazione della y di quest'ultimo sistema, ottengo, inversamente, la $\eta(t) = y(t + \alpha) - \beta$.

Derivando ottengo $\eta'(t) = y'_x(t + \alpha)$, dalla quale, inversamente, ottengo $y'(x) = \eta'_t(x - \alpha) = \eta'(t)$.

Eseguendo le sostituzioni nell'equazione non omogenea iniziale ottengo una nuova equazione differenziale, ma questa volta l'equazione sarà omogenea: $\eta'(t) = f\left(\frac{at + b\eta}{a't + b'\eta}\right)$. Risolvendo questa, trovo la $\eta(t)$ che

utilizzerò per ricavare la $y(x) = \eta(x - \alpha) + \beta$.

A questo punto avrò ottenuto la soluzione dell'equazione iniziale.

Equazioni riducibili ad equazioni lineari

Facciamo alcuni esempi di equazioni differenziali che possono essere ridotte ad equazioni lineari:

1. Equazione di Bernoulli

$$y' = a(x)y + b(x)y^n \text{ con } a, b \in C^1.$$

Si noti che nel caso di $n=0$ o $n=1$ questa equazione si presenta già come equazione lineare.

Quindi studiamo il caso in cui $n \neq 0$ e $n \neq 1$.

Divido per y^n ed ottengo $y'y^{-n} = a(x)y^{1-n} + b(x)$.

Eseguo un cambiamento di funzione incognita: $t(x) = y^{1-n}(x)$.

Derivando ottengo $t'(x) = (1-n)y^{-n}y'$.

Eseguendo la sostituzione nella equazione di cui sopra (tenendo conto anche del termine $(1-n)$), ottengo la seguente: $y'y^{-n} = ay^{1-n} + b \Rightarrow t' = (1-n)at + (1-n)b$ che è un'equazione lineare.

$$\text{La risolvo ottenendo una soluzione del tipo } t(x) = e^{\int_{x_0}^x (1-n)a(t)dt} \cdot \left\{ c + (1-n) \int_{x_0}^x b(t) e^{-\int_{x_0}^t (1-n)a(s)ds} dt \right\}.$$

Questa (enorme...) soluzione la utilizzo per trovare la $y(x)$ che sarà $y(x) = t(x)^{\frac{1}{1-n}}$ (ottenuta dalla definizione di $t(x)$ data durante il cambiamento di funzione incognita di cui sopra).

2. Equazione di Riccati

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \text{ con } a, b, c \in C^1.$$

Sia w un integrale particolare di questa equazione. Posto $y = u + w$ e sostituendo nella equazione iniziale, dovrò avere $u' + w' = a(x)[u^2 + w^2 + 2uw] + b(x)[u + w] + c(x)$ (semplice sostituzione).

Essendo w , come detto, una soluzione dell'equazione, ho che $w' = a(x)w^2 + b(x)w + c(x)$ (essendo una soluzione, deve verificare l'equazione!).

Questo significa che nell'equazione dove ho sostituito $u + w$, il termine w' al primo membro si semplifica con parecchi termini del secondo membro. Resta dunque $u' = a(x)[u^2 + 2uw] + b(x)u$.

Rimescolando i termini arrivo alla seguente $u' = u[a(x)2w + b(x)] + a(x)u^2$ che è una equazione di Bernoulli con $n=2$ in u . Risolvendola trovo u e w e quindi y (abbiamo detto che $y = u + w$).

3. Equazione di Eulero

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \text{ con } a_k \in R.$$

Supposto $x > 0$ effettuo un cambiamento di variabile indipendente: $x = e^t \Rightarrow t = \ln x$.

Effettuo anche un cambiamento di funzione incognita: $u(t) = y(e^t) \Rightarrow y(x) = u(t)|_{t=\ln x}$.

Derivando ottengo $y'(x) = u'(t) \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} u'(t) \Rightarrow x y'(x) = u'(t)$.

Derivando ancora ottengo $y''(x) = u''(t) \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} u'(t) \Rightarrow x^2 y''(x) = u''(t) - u'(t)$ e così via per tutte le successive derivate fino a quella di ordine n .

L'equazione iniziale diventa quindi $\sum_{k=0}^n a_k x^{n-k} y^{(n-k)} = \sum_{h=0}^n b_h u^{(n-h)}(t) = 0$ con $b_h \in R$.

L'equazione con le u è sicuramente più facile da risolvere in quanto i coefficienti b_h sono costanti (ad esempio con il metodo matriciale).

Questo metodo è valido anche per $x < 0$. È sufficiente porre $\tau = -x$ (quindi avrò $\tau > 0$) e $v(t) = y(-t)$.

Avrò quindi $y(x) = v(\tau)|_{\tau=-x}$ e derivando $y' = v' \cdot (-1), \dots, y^{(k)} = v^{(k)} \cdot (-1)^k$.

Alla fine otterrò $\sum_{k=0}^n a_k x^{n-k} y^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n a_k \tau^{n-k} v^{(n-k)} = 0$ che è risolvibile in maniera analoga al caso visto in precedenza (anche in questo caso avremo dei coefficienti costanti).

Equazioni del primo ordine in forma non normale

1. Considero una equazione in forma non normale del tipo $x = f(y')$ con $f \in C^1([\alpha, \beta])$ ed $f' \neq 0$.

Se $f' > 0$ **o** $f' < 0$, allora esiste g (inversa di f). In questo caso ottengo $y' = g(x)$ e posso integrare.

Deriviamo l'equazione iniziale: $D(x) = D(f(y')) \Rightarrow 1 = f'(y')y''$.

Moltiplico per y' ed ottengo $y' = f'(y')y''y'$.

Integro ed ottengo $\int_a^x y' dx = \int_a^x f'(y')y''y' dx = \int_a^x f'(y')y'y'' dx$.

Effettuo un cambiamento di variabile: $\begin{cases} \tau = y'(x) \\ d\tau = y'' dx \end{cases}$. Sostituisco nell'ultimo integrale di cui sopra ed

ottengo la seguente equazione: $\int_a^x y'(x) dx = \int_{y'(a)}^{y'(x)} \tau f'(\tau) d\tau \Rightarrow y(x) - y(a) = \int_{y'(a)}^{y'(x)} \tau f'(\tau) d\tau$.

In questa maniera ho ottenuto la seguente rappresentazione parametrica della soluzione:

$$\begin{cases} x = f(\tau) \\ y = \int_{y'(a)}^{\tau} \tau f'(\tau) d\tau + y(a) \end{cases}$$

Si noti l'ultimo termine della seconda equazione: $y(a)$. Questo lo si ottiene dall'ultimo passaggio dell'equazione di due righe più sopra, dove avevo al primo termine $y(x) - y(a)$ che ora è passato al secondo termine.

2. Considero una equazione del tipo $y = f(y')$.

Derivo ambo i membri dell'equazione ed ottengo $y' = f'(y')y''$.

Divido per y' ottenendo $1 = \frac{f'(y')}{y'} y''$.

A questo punto integro: $\int_a^x dx = \int_a^x \frac{f'(y')}{y'} y'' dx = \int_{y'(a)}^{y'(x)} \frac{f'(\tau)}{\tau} d\tau$ dove nell'ultimo membro ho effettuato un

cambio di variabile ponendo $\tau = y'(x)$.

Ottengo $x - a = \int_{y'(a)}^{y'(x)} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \Rightarrow \begin{cases} x = a + \int_{g(y(a))}^u \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \\ y = f(u) \end{cases}$ ponendo $y' = g(y) = u = y'(x)$.

Equazioni del secondo ordine

1. Considero la $f(y, y', y'') = 0$ (manca la x esplicitata).

Pongo $y' = g(y)$. In questo modo ho che $y'' = g'(y)y'$.

Sostituendo, l'equazione diventa $f(y, g(y), g'(y)g(y)) = 0$ che è un'equazione del primo ordine nella funzione incognita g . Trovata la g , risolvo la $y' = g(y)$ che risulta essere a variabili separabili.

2. Considero la $f(x, y', y'') = 0$ (manca la y esplicitata).

Pongo $y'(x) = t(x)$ e la sostituisco nell'equazione ottenendo $f(x, t, t') = 0$ che è un'equazione del primo ordine. Trovata la t devo risolvere la $y'(x) = t(x)$.

Equazioni esatte

Considero un'equazione del tipo $y' = f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{dy}{dx}$ con $P, Q \in C^1$ in un rettangolo.

Posso riscrivere l'equazione come $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

Questa equazione si dice *esatta* se la funzione differenziale al primo membro ammette primitiva (se ϕ è la primitiva allora deve essere $\frac{\partial \phi}{\partial x} = P$ e $\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q$).

Quanto appena scritto mi dice che la primitiva è anche il potenziale del campo definito come $\vec{f} = P\vec{i} + Q\vec{j}$.

Supponiamo esatta l'equazione e sia $\phi(x, y)$ una primitiva della forma differenziale del primo membro. Allora:

1. x è soluzione dell'equazione $\Rightarrow \phi(x, u(x)) = \text{costante}$ (rispetto ad x) con $u(x)$ definita implicitamente.

Infatti posso scrivere:

$$\frac{d}{dx}\phi(x, u(x)) = \phi_x(x, u(x)) + \phi_y(x, u(x))u' = P(x, u(x)) + Q(x, u(x))u' = P(x, u(x)) + Q(x, u(x))\left(-\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}\right) = 0$$

Quindi $\phi(x, u(x)) = \text{costante}$ rispetto ad x .

2. y è definita implicitamente dalla equazione $\phi(x, y) = 0$ in un intorno $(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow y$ verifica l'equazione ed inoltre ho che $y(\bar{x}) = \bar{y}$.

Infatti posso scrivere:

$$y' = -\frac{\phi_x(x, y(x))}{\phi_y(x, y(x))} = -\frac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))}$$

E quindi y verifica l'equazione. Inoltre per l'ipotesi del teorema del Dini ho che $y(\bar{x}) = \bar{y}$.

Equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

Si cercano soluzioni esponenziali del tipo $y = e^{\alpha x}$. Sostituendo si ottiene $e^{\alpha x} \cdot \phi(\alpha) = 0$ dove con $\phi(\alpha)$ viene indicata la $\phi(\alpha) = \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n$.

Ora posso avere due casi:

1. Le n radici dell'equazione $\phi(\alpha) = 0$ sono distinte e sono $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Otengo che $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ sono integrali indipendenti dell'equazione differenziale.

L'integrale generale sarà $y = \sum_{i=1}^n c_i e^{\alpha_i x}$.

2. Le radici distinte dell'equazione $\phi(\alpha) = 0$ sono solo $p < n$ e sono $\alpha_1, \dots, \alpha_p$.

Queste radici hanno molteplicità k_1, \dots, k_p tali che $(k_1 + k_2 + \dots + k_p) = n$.

Se α è multiplo di ordine k , ottengo k integrali indipendenti della equazione differenziale e questi integrali sono nella forma $e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x}$ (come abbiamo già visto alcuni capitoli fa).

L'integrale generale dell'equazione sarà $y = \sum_{i=1}^p (c_{i1} e^{\alpha_i x} + c_{i2} x e^{\alpha_i x} + \dots + c_{ik_i} x^{k_i-1} e^{\alpha_i x})$ dove k_i è la molteplicità α_i .

Osserviamo ora che le radici α_i non sono necessariamente reali. Però, se i coefficienti delle equazione differenziale sono reali, allora l'integrale generale può essere scritto in forma reale.

Se $\phi(x) = 0$ ammette radice $\beta + i\gamma$, allora ammette anche la radice $\beta - i\gamma$ (e con lo stesso ordine di molteplicità).

Allora, relativamente alle radici, si hanno i seguenti integrali della equazione: $x^q e^{(\beta \pm i\gamma)x}$ con $q = 0, \dots, k-1$.

Poiché $\begin{cases} x^q \frac{e^{(\beta+i\gamma)x} - e^{(\beta-i\gamma)x}}{2} = x^q e^{\beta x} \cos \gamma x \\ x^q \frac{e^{(\beta+i\gamma)x} + e^{(\beta-i\gamma)x}}{2} = x^q e^{\beta x} \sen \gamma x \end{cases}$ valgono ancora come integrali della equazione, alle

soluzioni $x^q e^{(\beta \pm i\gamma)x}$ sostituiamo le soluzioni $\begin{cases} x^q e^{\beta x} \cos \gamma x \\ x^q e^{\beta x} \sen \gamma x \end{cases}$ (con $q=0, \dots, k-1$).

L'integrale sarà (supposto k_1, \dots, k_r reali di molteplicità h_1, \dots, h_r e $\beta_1 \pm i\gamma_1, \dots, \beta_s \pm i\gamma_s$ di molteplicità g_1, \dots, g_s e

tali che $\sum_{i=1}^r h_i + 2 \sum_{j=1}^s k_j = n$):

$$y = \sum_{m=1}^r (c_{m1} + c_{m2}x + \dots + c_{mh_m} x^{h_m-1}) e^{\alpha_m x} + \sum_{m=1}^s [(c'_{m1} + c'_{m2}x + \dots + c'_{mg_m} x^{g_m-1}) \cos \gamma_m x + (c''_{m1} + c''_{m2}x + \dots + c''_{mg_m} x^{g_m-1}) \sen \gamma_m x]$$

Finito di stampare il 09/07/2001

Copyright in 2001 by Cristiano Casadei

e-mail: cristiano.casadei@libero.it

Spero che questi appunti possano servirti
Perdona alcune mie definizioni "personalizzate"
ma non sono un matematico!
Anzi, se noti degli errori madornali, ti prego di
farmelo sapere tramite e-mail.
(se vuoi mandami anche il tuo nome, così che lo possa
inserire tra la lista dei collaboratori)
In bocca al lupo!



INDICE

SERIE.....	2
TEORIA DI ZENONE	2
SERIE GEOMETRICA (REALE).....	2
SERIE GEOMETRICA (COMPLESSA)	3
CRITERIO DI CAUCHY PER LE SERIE	4
SERIE ARMONICA	4
CONVERGENZA ASSOLUTA.....	5
SERIE IN CAMPO REALE (A TERMINI NON NEGATIVI).....	5
CRITERIO DI CONFRONTO	5
CRITERIO DELLA RADICE	6
CRITERIO DEL RAPPORTO.....	6
CRITERIO DI RAABE.....	7
OSSERVAZIONE PER LE SERIE A TERMINI NON POSITIVI	7
PROPOSIZIONE SULLE SERIE ED INTEGRALI	7
CRITERIO DI LEIBNITZ PER LE SERIE ALTERNATE	7
OSSERVAZIONE SULLE SERIE A TERMINI COMPLESSI	8
CRITERIO DI DIRICHLET	8
CRITERIO DI ABEL.....	8
SERIE PRODOTTO (CAUCHY).....	8
SERIE DI TAYLOR.....	9
TEOREMA SULLA SVILUPPABILITÀ DI FUNZIONI	9
OSSERVAZIONI SUL RESTO.....	9
SUCCESSIONI DI FUNZIONI.....	10
CONVERGENZA PUNTUALE SU A	10
CONVERGENZA UNIFORME.....	10
PROPRIETÀ DI CONTINUITÀ.....	10
PROPRIETÀ DI DERIVABILITÀ.....	10
SERIE DI FUNZIONI.....	10
TEOREMA SULL'UNIFORME CONVERGENZA E GLI INTEGRALI	10
CRITERIO DI UNIFORME CONVERGENZA DI CAUCHY	11
CRITERIO DI UNIFORME CONVERGENZA DI WEIERSTRASS	11
PROPRIETÀ DELLE SERIE UNIFORMEMENTE CONVERGENTI.....	11
SERIE DI POTENZE.....	12
PROPRIETÀ FONDAMENTALE DELLE SERIE DI POTENZE.....	12
RAGGIO DI CONVERGENZA	12
CALCOLO DEL RAGGIO DI CONVERGENZA	13
DERIVATA IN CAMPO COMPLESSO.....	13
DERIVATA DI UNA FUNZIONE DI POTENZE	14
FUNZIONI ANALITICHE.....	14
TEOREMA SULLA INTEGRABILITÀ DELLA SERIE DI TAYLOR.....	14
ESPOENZIALE COMPLESSO	15
FORMULA DI EULERO	15
SENO E COSENO IN CAMPO COMPLESSO.....	15
LOGARITMO IN CAMPO COMPLESSO.....	16
FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI.....	17
APPLICAZIONI NUMERICHE DEFINITE SU \mathbb{R}^N	17
CAMPO DI ESISTENZA	18
ULTERIORE STUDIO DI GRAFICI (E DI SUPERFICI).....	18
SUPERFICI DI ROTAZIONE	19
SUPERFICI DI ROTAZIONE	20
IL CILINDRO	21
INSIEMI DI LIVELLO	21
LIMITE DELLE FUNZIONI A PIÙ VARIABILI	21
LIMITI ITERATI.....	22
FUNZIONI VETTORIALI.....	22
CALCOLO DIFFERENZIALE.....	22
DERIVATA PARZIALE	22
IL DIFFERENZIALE	23
TEOREMA SUL DIFFERENZIALE.....	24
OSSERVAZIONE SULLA DERIVATA DIREZIONALE.....	24
OSSERVAZIONE SUL GRADIENTE.....	24
UTILIZZO DEL DIFFERENZIALE.....	25
PIANO TANGENTE A UNA SUPERFICIE DI EQUAZIONE $Z = F(X,Y)$	25
CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA DIFFERENZIABILITÀ.....	25
OSSERVAZIONE SUL DIFFERENZIALE.....	25
DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE.....	25
TEOREMA DI SHWARTZ.....	26
DIFFERENZIALE SECONDO.....	26
DIFFERENZIALE DI ORDINE K DI F IN UN PUNTO.....	26
FORMULA DI TAYLOR	27
TEOREMA SULLA DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE	27
FUNZIONI OMOGENEE (POSITIVAMENTE).....	28
TEOREMA DI EULERO	28

DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI VETTORIALI.....	29
COORDINATE POLARI NEL PIANO (CON POLO IN ω).....	30
FUNZIONI DA \mathbb{R}^2 IN \mathbb{R}^3	30
TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLA COMPOSIZIONE.....	31
IL LAPLACIANO.....	32
FUNZIONI DA \mathbb{C} A \mathbb{C}	32
REGOLA DI DE L'HOPITAL NEL COMPLESSO.....	33
FUNZIONI IMPLICITE.....	34
TEOREMA DEL DINI SULLE FUNZIONI IMPLICITE.....	34
TEOREMA DEL VALOR MEDIO (O TEOREMA DI LAGRANGE PER UNA VARIABILE).....	35
FUNZIONI IMPLICITE DI PIÙ VARIABILI.....	36
ESTENSIONE DEL TEOREMA DEL DINI.....	36
COMPLEMENTI AL TEOREMA ESTESO DEL DINI.....	37
TEOREMA DEL DINI PER I SISTEMI.....	37
CASI PARTICOLARI DI SISTEMI (UTILIZZO DEL TEOREMA DEL DINI).....	37
CRITERIO DI INVERTIBILITÀ PER LE FUNZIONI PIANE.....	38
ALTRI CASI PARTICOLARI DI SISTEMI (UTILIZZO DEL TEOREMA DEL DINI).....	38
TEOREMA GENERALE DEL DINI.....	40
VARIETÀ IN FORMA IMPLICITA.....	40
VETTORE TANGENTE AD UNA VARIETÀ.....	41
MASSIMI E MINIMI.....	42
SEGNO DI UNA FORMA QUADRATICA.....	42
AUTOVALORI.....	43
AUTOVALORI DI UNA MATRICE SIMMETRICA.....	43
AUTOVALORI, AUTOVETTORI E FORME QUADRATICHE.....	43
FORME QUADRATICHE DEL DIFFERENZIALE SECONDO.....	44
MASSIMI E MINIMI VINCOLATI O CONDIZIONATI.....	45
LA RICERCA DEI PUNTI ESTREMANTI CONDIZIONATI.....	46
SUPERFICI IN \mathbb{R}^3	47
REGOLARITÀ DI UNA SUPERFICIE.....	47
SIGNIFICATO DELLA NOZIONE DI REGOLARITÀ.....	47
DEFINIZIONE ALTERNATIVA DI UNA SUPERFICIE.....	48
ULTERIORI OSSERVAZIONI SULLE SUPERFICI REGOLARI.....	48
RIEPILOGO SULLA PARAMETRIZZAZIONE.....	49
SUPERFICIE DI RIVOLUZIONE (IN FORMA PARAMETRICA).....	50
VETTORE NORMALE E PIANO TANGENTE AD UNA SUPERFICIE PARAMETRICA.....	50
EQUAZIONE DEL PIANO TANGENTE.....	51
ORIENTAZIONE DI UNA SUPERFICIE.....	51
BORDO DI UNA SUPERFICIE.....	51
SUPERFICI A PEZZI.....	51
INTEGRALE DI UNA FUNZIONE VETTORIALE.....	52
PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DI UNA FUNZIONE VETTORIALE.....	52
CURVE IN \mathbb{R}^3	52
CAMBIAIMENTO DI PARAMETRO.....	52
RETTIFICABILITÀ DI UNA CURVA.....	53
ASCISSA CURVILINEA O LUNGHEZZA D'ARCO.....	53
INTEGRALE CURVILINEO DI UNA FUNZIONE.....	54
INTEGRALE CURVILINEO DI UN CAMPO O DI UNA FORMA DIFFERENZIALE (LAVORO).....	54
RICERCA DEL POTENZIALE.....	54
TEOREMA DI POINCARÉ.....	55
GENERALIZZAZIONE DEL TEOREMA DI POINCARÉ.....	55
INTEGRAZIONE MULTIPLA.....	56
CRITERI DI INTEGRABILITÀ.....	57
RIDUZIONE DI INTEGRALI DOPPI.....	57
PRINCIPIO DI CAVALIERI.....	57
INTEGRALE MULTIPLO DI FUNZIONI DEFINITE IN INSIEMI NON RETTANGOLARI.....	58
DOMINIO NORMALE (SEMPLICE) RISPETTO AD UN ASSE.....	58
RIDUZIONE DI UNA FUNZIONE DEFINITA IN UN INSIEME NON RETTANGOLARE.....	58
PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI.....	59
TEOREMA DELLA MEDIA.....	59
PROPRIETÀ ADDITIVA DEGLI INTEGRALI.....	59
INTEGRALI TRIPLI.....	59
DOMINI NORMALI IN TRE VARIABILI.....	59
RIDUZIONE DEGLI INTEGRALI TRIPLI.....	60
PRINCIPIO DI CAVALIERI PER GLI INTEGRALI TRIPLI.....	60
AREA DI UNA SUPERFICIE.....	60
INTEGRALE SUPERFICIALE.....	61
FORMULA DI GAUSS-GREEN NEL PIANO.....	61
DOMINIO S-DECOMPONIBILE.....	63
TEOREMA DI GAUSS-GREEN PER DOMINI S-DECOMPONIBILI.....	63
APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI GAUSS-GREEN.....	63
DIVERGENZA E ROTORE DI UN VETTORE.....	63
TEOREMA DI STOKES NEL PIANO.....	64
TEOREMA DI GAUSS NEL PIANO.....	64
TEOREMA DI STOKES NELLO SPAZIO.....	65
TEOREMA DELLA DIVERGENZA NELLO SPAZIO.....	66
EQUAZIONI DIFFERENZIALI: INTRODUZIONE.....	67

ALCUNE DEFINIZIONI.....	69
SISTEMI DEL PRIMO ORDINE	69
INTRODUZIONE ALLE EQUAZIONI LINEARI	69
EQUAZIONE COMPLETA	70
PROBLEMA DI CAUCHY	70
FORMULA RISOLUTIVA PER L'EQUAZIONE LINEARE DEL PRIMO ORDINE.....	71
FORMULA RISOLUTIVA ALTERNATIVA.....	71
IL CASO DEI COEFFICIENTI COSTANTI	71
EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI.....	72
EQUAZIONE COMPLETA	73
IL METODO DI LAGRANGE.....	74
ESISTENZA ED UNICITÀ DELLA SOLUZIONE: ALCUNE PREMESSE	75
ESISTENZA ED UNICITÀ DELLA SOLUZIONE: PROBLEMA DI CAUCHY	75
SISTEMI LINEARI OMOGENEI.....	77
MATRICE FONDAMENTALE	78
CALCOLO DELLE DERIVATE DELLA MATRICE FONDAMENTALE.....	79
SISTEMI LINEARI NON OMOGENEI: METODO DI LAGRANGE	80
SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI LINEARI TRAMITE I SISTEMI LINEARI	82
SISTEMI LINEARI OMOGENEI A COEFFICIENTI COSTANTI	82
SERIE DI MATRICI.....	83
NORMA DI UNA MATRICE.....	83
ASSOLUTA CONVERGENZA DI UNA SERIE DI MATRICI.....	83
MATRICE ESPONENZIALE	83
PROPRIETÀ IMPORTANTE DELLA MATRICE ESPONENZIALE	84
OSSERVAZIONE SULLA RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI	84
EQUAZIONI DIFFERENZIALI CON CAMBIAMENTO DI VARIABILI	87
EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE	87
EQUAZIONI OMOGENEE	88
EQUAZIONI RIDUCIBILI ALLE OMOGENEE	88
EQUAZIONI RIDUCIBILI AD EQUAZIONI LINEARI.....	89
EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE IN FORMA NON NORMALE	90
EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE.....	90
EQUAZIONI ESATTE	91
EQUAZIONI LINEARI OMOGENEE A COEFFICIENTI COSTANTI	91