

# Richiami sulla misura di lunghezze e ampiezze

*Pier Carlo Craighero*

Docente di Matematica  
Facoltà di Ingegneria  
Università degli Studi di Udine

Centro Polifunzionale di Pordenone dell'Università degli Studi di Udine

Copyright

© Centro Polifunzionale di Pordenone dell'Università degli Studi di Udine  
Vietata ogni modifica anche parziale senza il consenso scritto degli autori

Versione del 21 luglio 2005

# Indice

<b>1</b>	<b>LA MISURA DELLE LUNGHEZZE</b>	<b>1</b>
1.1	Il concetto di lunghezza . . . . .	1
1.2	L'ordinamento naturale di $\mathcal{L}$ . . . . .	3
1.3	La somma di lunghezze . . . . .	5
1.4	La differenza di lunghezze . . . . .	7
1.5	Multipli e sottomultipli di una lunghezza . . . . .	7
1.6	Il prodotto di una lunghezza per un numero razionale non negativo . . . . .	10
1.7	Richiami sulla continuità della retta . . . . .	11
1.8	L'insieme delle lunghezze $\mathcal{L}$ è continuo . . . . .	12
1.9	L'insieme delle lunghezze $\mathcal{L}$ è archimedeo . . . . .	13
1.10	Il prodotto di una lunghezza per un numero reale non negativo . . . . .	14
1.11	La misura delle lunghezze . . . . .	15
1.12	La relazione fondamentale tra misure . . . . .	18
<b>2</b>	<b>LA MISURA DELLE AMPIEZZE</b>	<b>22</b>
2.1	Il concetto di ampiezza . . . . .	22
2.2	Somma di angoli . . . . .	27
2.3	Sottomultipli di un angolo . . . . .	29
2.4	Multiplo di un angolo secondo un numero reale . . . . .	31
2.5	Misura degli angoli . . . . .	33
2.6	Angoli generalizzati . . . . .	35

# Capitolo 1

## LA MISURA DELLE LUNGHEZZE

### 1.1 Il concetto di lunghezza

Nell'insieme  $\mathbf{Sg}$  dei segmenti dello spazio, ivi compresi i segmenti *nulli*, cioè ridotti ad un unico punto, si pone la

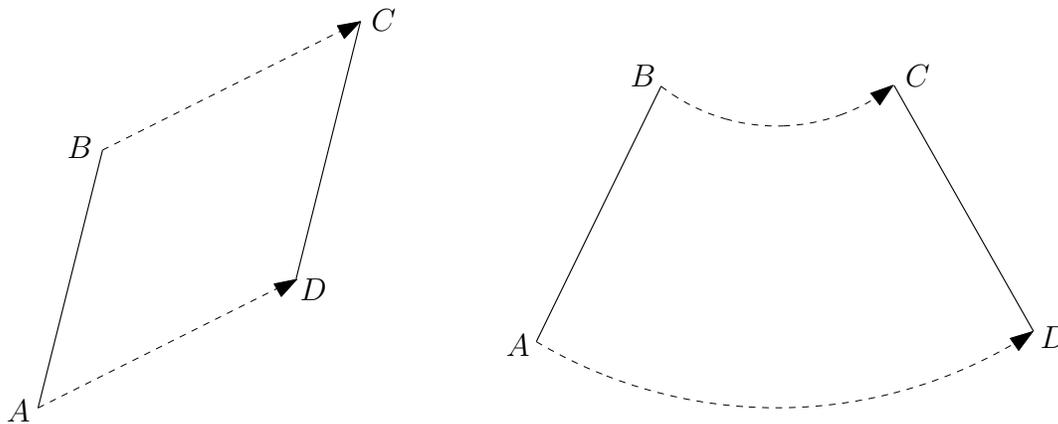
*relazione di congruenza*

con la seguente

**Definizione 1.1** Si pone  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ , e si legge  $\overline{AB}$  è *congruente*, o *congruo*, o *sovrapponibile* a  $\overline{CD}$ , se esiste un *movimento (rigido)*  $\mathbf{H}$  dello spazio tale che sia

$$\mathbf{H}(\overline{AB}) = \overline{CD}$$

Si dimostra facilmente che  $\mathbf{H}$  trasforma allora gli estremi di  $\overline{AB}$  negli estremi di  $\overline{CD}$ : anzi si può sempre disporre di un  $\mathbf{H}$  tale che sia addirittura  $\mathbf{H}(A) = C$  e  $\mathbf{H}(B) = D$ .



**Proposizione 1.1** *La relazione di congruenza gode delle seguenti proprietà.*

- 1) È *riflessiva*, cioè  $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ ,  $\forall \overline{AB} \in \mathbf{Sg}$ : infatti, tra i **movimenti** dello spazio c'è l'*identità*  $\mathbf{I}$ , per cui :

$$\mathbf{I}(\overline{AB}) = \overline{AB} \implies \overline{AB} \equiv \overline{AB}$$

- 2) È *simmetrica*, cioè  $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \implies \overline{CD} \equiv \overline{AB}$ : infatti, per ogni **movimento**  $\mathbf{H}$ , l'*inverso*  $\mathbf{H}^{-1}$  di  $\mathbf{H}$  è ancora un **movimento**, quindi si ha :

$$\overline{AB} \equiv \overline{CD} \implies \exists \mathbf{H} : \mathbf{H}(\overline{AB}) = \overline{CD} \implies \mathbf{H}^{-1}(\overline{CD}) = (\overline{AB}) \implies \overline{CD} \equiv \overline{AB}$$

- 3) È *transitiva*, cioè risulta :

$$\overline{AB} \equiv \overline{CD} \wedge \overline{CD} \equiv \overline{EF} \implies \overline{AB} \equiv \overline{EF} :$$

infatti, dati due **movimenti**  $\mathbf{H}_1$  e  $\mathbf{H}_2$  la loro **composizione**  $\mathbf{H}_2 \circ \mathbf{H}_1$  è ancora un **movimento**, ne segue

$$\begin{aligned} \overline{AB} \equiv \overline{CD} \wedge \overline{CD} \equiv \overline{EF} &\implies \exists \mathbf{H}_1 : \mathbf{H}_1(\overline{AB}) = \overline{CD} \wedge \exists \mathbf{H}_2 : \mathbf{H}_2(\overline{CD}) = \overline{EF} \implies \\ &\implies (\mathbf{H}_2 \circ \mathbf{H}_1)(\overline{AB}) = \mathbf{H}_2(\mathbf{H}_1(\overline{AB})) = \mathbf{H}_2(\overline{CD}) = \overline{EF} \implies \overline{AB} \equiv \overline{EF}. \end{aligned}$$

Come in ogni insieme in cui è definita una **relazione di equivalenza**, l'insieme  $\mathbf{Sg}$  dei segmenti dello spazio si ripartisce in

### *classi di congruenza*

con le seguenti proprietà:

- 1) in ciascuna **classe** vi sono tutti segmenti a due a due **congruenti** fra loro e **non congruenti** ad alcun altro segmento di un'altra **classe** ;
- 2) le **classi di congruenza** sono (quindi) a due a due **disgiunte**, cioè non hanno alcun elemento (= segmento) in comune ;
- 3) l'unione di tutte le **classi di congruenza** è l'intero insieme  $\mathbf{Sg}$  ;
- 4) l'insieme dei segmenti nulli è una **classe di congruenza** .

**Definizione 1.2** *Le classi di congruenza dei segmenti dello spazio si chiamano*

*le lunghezze.*

L'insieme delle lunghezze si denoterà con  $\mathcal{L}$ .

La classe di tutti i segmenti nulli si denoterà con  $0$ , e si chiamerà la **lunghezza nulla**.

Per ogni lunghezza  $l \in \mathcal{L}$ , ogni segmento  $\overline{AB} \in l$  si dirà un **rappresentante di  $l$** :  $l$  stessa potrà essere denotata col simbolo  $[\overline{AB}]$  e chiamata **la lunghezza di  $\overline{AB}$** . Tutti i rappresentanti di una stessa lunghezza  $l$  si diranno **egualmente lunghi** o di **egual lunghezza**.

Risulta ovvio da quanto precede il seguente fatto:

$$[\overline{AB}] = [\overline{CD}] \iff \overline{AB} \equiv \overline{CD}$$

## 1.2 L'ordinamento naturale di $\mathcal{L}$

Nell'insieme delle lunghezze si introduce una

**relazione d'ordine stretto**

con la seguente

**Definizione 1.3** Si pone

$$l_1 < l_2$$

e si legge  $l_1$  è (**strettamente**) **minore** di  $l_2$ , se, scelto un rappresentante di  $l_1$ ,  $\overline{A_1B_1}$ , il rappresentante di  $l_2$  di origine  $A_2 = A_1$  e giacente dalla stessa banda di  $B_1$  rispetto ad  $A_1$  sulla retta per  $A_1$  e  $B_1$

**contiene strettamente**  $\overline{A_1B_1}$

cioè il suo estremo  $B_2$  cade oltre  $B_1$  (v. figura).



Si prova, ma è totalmente evidente, che tale definizione non dipende dal particolare rappresentante di  $l_1$  prescelto.

Anche la **transitività** della relazione d'ordine posta è perfettamente intuitiva

$$l_1 < l_2 \wedge l_2 < l_3 \implies l_1 < l_3$$

È chiaro infine che date due lunghezze **distinte**  $l_1, l_2$ , si ha che

$$l_1 < l_2 \text{ AUT } l_2 < l_1$$

(il simbolo AUT significa che si verifica **una sola** delle alternative in questione)

Per questa proprietà si dice che:

*l'ordinamento introdotto in  $\mathcal{L}$  è un ordine totale*

**Osservazione 1.1** Vi sono insiemi ordinati  $E$  il cui ordine non è totale: esistono cioè coppie di elementi  $x, y$  di  $E$  non confrontabili rispetto all'ordine introdotto in  $E$ .

A volte è utile considerare la **relazione d'ordine debole**

$$l_1 \leq l_2$$

la cui definizione è ovvia.

Inoltre la locuzione  $l_2$  è **maggiore di**  $l_1$  sarà equivalente alla  $l_1$  è **minore di**  $l_2$ :

$$l_2 > l_1 \iff l_1 < l_2$$

**Osservazione 1.2** Fissiamo una semiretta  $s$  qualsiasi, di origine  $S$ .



Associando ad ogni segmento  $\overline{SP} \subset s$  la rispettiva lunghezza  $l = [\overline{SP}]$  si ottiene chiaramente una

**corrispondenza biunivoca**

fra l'insieme dei segmenti di  $s$  di origine  $S$  e l'insieme delle lunghezze  $\mathcal{L}$ .

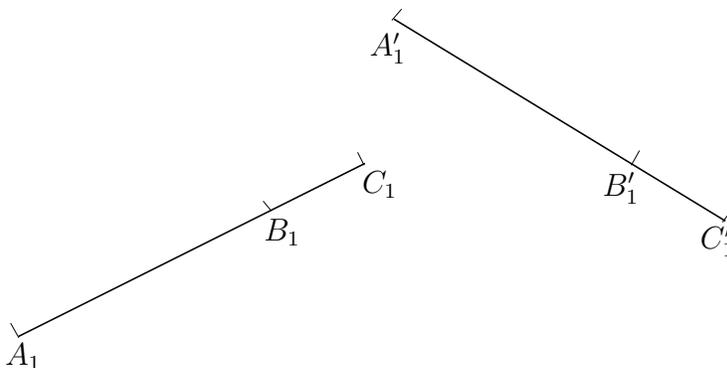
### 1.3 La somma di lunghezze

Due lunghezze  $l_1$ ,  $l_2$  possono essere in modo del tutto naturale **sommate** secondo la seguente

**Definizione 1.4** Sia  $\overline{A_1B_1}$  un rappresentante di  $l_1$  e sia  $\overline{B_1C_1}$  il rappresentante (che facilmente si dimostra esistere ed essere unico) di  $l_2$  adiacente ad  $\overline{A_1B_1}$ , con l'origine in  $B_1$ : ebbene, si pone

$$l_1 + l_2 \stackrel{DEF.}{=} [\overline{A_1C_1}]$$

$l_1 + l_2$  si chiama **la somma** di  $l_1$  e di  $l_2$ .



La definizione è **lecita** perché, partendo da un altro rappresentante di  $l_1$ ,  $\overline{A'_1B'_1}$ , il segmento  $\overline{A'_1C'_1}$  (v.figura) risulta **congruo** ad  $\overline{A_1C_1}$ , come si dimostra, ma è anche del tutto ovvio per l'intuizione: sicché la definizione di  $l_1 + l_2$  dipende **solo** dalla coppia  $(l_1, l_2)$  di lunghezze considerate.

Sono di agevole verifica, ma anche chiarissime all'intuito, le seguenti proprietà della somma di lunghezze:

**Proposizione 1.2** *Risulta:*

- 1)  $(l_1 + l_2) + l_3 = l_1 + (l_2 + l_3)$ ,  $\forall l_1, l_2, l_3 \in \mathcal{L}$ , cioè la somma di lunghezze è un'operazione **associativa**;
- 2)  $l + 0 = 0 + l = l$ ,  $\forall l \in \mathcal{L}$ , cioè la lunghezza nulla è **elemento neutro o zero** per la somma di lunghezze;

- 3)  $l_1 + l_2 = l_2 + l_1, \forall l_1, l_2 \in \mathcal{L}$ , cioè la somma di lunghezze è un'operazione *commutativa*.

Per queste proprietà l'insieme  $\mathcal{L}$  prende il nome di:

*semigrupp commutativo*

rispetto alla somma di lunghezze.

**Proposizione 1.3** *La proprietà 1) permette di dare senso non equivoco al simbolo*

$$l_1 + l_2 + l_3$$

*Successive applicazioni della 1) permettono addirittura di dare senso alla scrittura:*

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n$$

*e di riconoscere che*

*il risultato non dipende dal modo in cui si associano gli addendi:*

*ad esempio, per  $n = 4$ , si ha che*

$$(l_1 + l_2 + l_3) + l_4 = [l_1 + (l_2 + l_3)] + l_4 = l_1 + [(l_2 + l_3) + l_4] = l_1 + (l_2 + l_3 + l_4)$$

*ma anche*

$$(l_1 + l_2 + l_3) + l_4 = [(l_1 + l_2) + l_3] + l_4 = (l_1 + l_2) + (l_3 + l_4)$$

*La proprietà 1) e la 3) **assieme** consentono poi di parlare della somma di  $n$  lunghezze*

$$l_1, l_2, \dots, l_n$$

*indipendentemente anche dall'ordine in cui si presentano:*

*ad esempio, per  $n = 3$ , si ha che:*

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 + l_3 &= (l_1 + l_2) + l_3 = (l_2 + l_1) + l_3 = l_2 + l_1 + l_3 = \\ &= l_2 + (l_1 + l_3) = l_2 + (l_3 + l_1) = l_2 + l_3 + l_1 = \text{ecc. ecc.} \end{aligned}$$

**Osservazione 1.3** Il lettore conosce già la struttura di *semigrupp commutativo*: l'insieme  $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  dei numeri *interi non negativi*, dotato dell'operazione di somma, ha le tre proprietà richieste.

Anche l'insieme dei *numeri interi positivi* (i *numeri naturali*)  $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$  può essere considerato un *semigrupp commutativo*, però rispetto al *prodotto*, per il quale l'1 risulta *elemento neutro*.

## 1.4 La differenza di lunghezze

Date due lunghezze  $l_1$  e  $l_2$  con  $l_1 \leq l_2$ , è evidente che

*esiste una ed una sola lunghezza  $l$ :  $l_1 + l = l_2$*

Tale lunghezza  $l$  si chiama la *differenza di  $l_2$  e  $l_1$*  e si denota con il simbolo:

$$l_2 - l_1$$

La differenza di lunghezze non è, come la somma, un'operazione binaria definita in  $\mathcal{L}$ : si può eseguire solo se  $l_1 \leq l_2$ . È chiaro inoltre che valgono le proprietà

- 1)  $l_2 - l_1 = 0 \iff l_1 = l_2$ ;
- 2)  $(l_1 + l_2) - l_1 = l_2$ ,  $(l_1 + l_2) - l_2 = l_1$ ;
- 3)  $l_1 + l = l_2 + l \implies l_1 = l_2$ , (segue dalla 2));

La proprietà 3) si esprime dicendo che per la somma di lunghezze vale la:

*regola di semplificazione*

che vale anche nei semigruppri ricordati nell'Oss.1.3, §1.3.

## 1.5 Multipli e sottomultipli di una lunghezza

Se nella somma di  $n$  lunghezze  $l_1 + l_2 + \dots + l_n$ , di cui alla Prop.1.3, §1.3 risulta

$$l_1 = l_2 = \dots = l_n = l$$

si porrà

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n \stackrel{DEF.}{=} n \cdot l \quad (\text{o anche } n l)$$

si pone così il concetto di

*multiplo di una lunghezza secondo un numero intero positivo,*

che si può estendere ragionevolmente ponendo:

$$0 \cdot l = 0$$

Per questo prodotto sono di facile verifica le seguenti proprietà:

- 1)  $n \cdot (l_1 + l_2 + \dots + l_r) = n \cdot l_1 + n \cdot l_2 + \dots + n \cdot l_r$ : ciò è dovuto all'*indipendenza* della somma di lunghezze dall'ordine in cui sono sommate ;
- 2)  $(n_1 + n_2 + \dots + n_r) \cdot l = n_1 \cdot l + n_2 \cdot l + \dots + n_r \cdot l$ : ciò dipende dalla sola *associatività* della somma ;
- 3)  $m \cdot (n \cdot l) = n \cdot (m \cdot l) = (m \cdot n) \cdot l$  (caso particolare di **2**) ;
- 4)  $n < m \wedge l \neq 0 \Leftrightarrow n \cdot l < m \cdot l$  ;
- 5)  $l_1 < l_2 \wedge n \neq 0 \Leftrightarrow n \cdot l_1 < n \cdot l_2$  ;
- 6)  $n \cdot l_1 = n \cdot l_2 \wedge n \neq 0 \Rightarrow l_1 = l_2$  ;
- 7)  $n \cdot (l_2 - l_1) = n \cdot l_2 - n \cdot l_1$  : infatti si ha  $l_1 + (l_2 - l_1) = l_2 \Rightarrow n \cdot [l_1 + (l_2 - l_1)] \stackrel{\text{per 1)}}{=} n \cdot l_1 + n \cdot (l_2 - l_1) = n \cdot l_2 \Rightarrow n \cdot (l_2 - l_1) = n \cdot l_2 - n \cdot l_1$  .

Data una lunghezza  $l$  e un numero intero positivo  $n$ , una lunghezza  $l'$  tale che risulti

$$n \cdot l' = l$$

si dice

**sottomultiplo  $n$ -esimo di  $l$**

e poiché, quando esiste, in virtù della **5**) sopra stabilita, essa è *unica*, si può porre

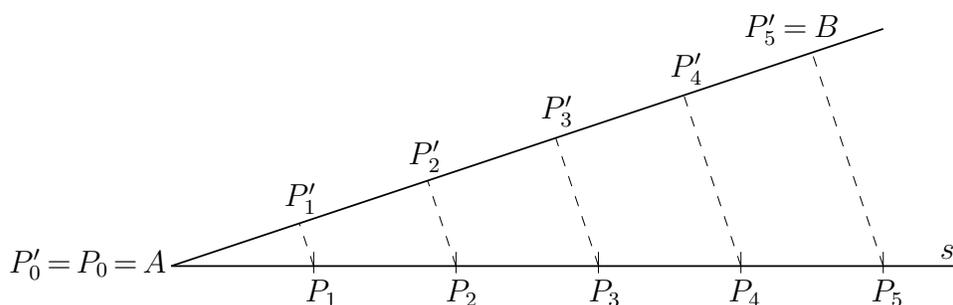
$$l' \stackrel{DEF.}{=} \frac{1}{n} \cdot l \quad \left( o \text{ anche } \frac{1}{n} l \right)$$

giungendo al concetto di

**multiplo di una lunghezza secondo un numero razionale del tipo  $\frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$**

**Osservazione 1.4** Nei trattati più rigorosi di geometria euclidea l'esistenza del sottomultiplo  $n$ -esimo di una lunghezza  $l$  viene dimostrata come teorema dedotto dal ben noto *sistema di assiomi* fondamento di questa teoria. Qui, per ragioni di brevità e chiarezza, seguiremo l'esempio di trattati più elementari, nei quali si preferisce assumere come assioma l'esistenza del sottomultiplo  $n$ -esimo di una lunghezza  $l$ , la qual cosa è del resto in accordo col carattere estremamente intuitivo di questo concetto.

Ricordiamo anche la ben nota costruzione del sottomultiplo (in figura è  $n = 5$ ) di un segmento, basata sul **teorema di Talete**:



Se  $l = [\overline{AB}]$  è la lunghezza di cui si vuole costruire la quinta parte  $\frac{1}{5}l$ , sulla semiretta  $s$  si riporta, a partire da  $A = P_0$ , 5 volte il rappresentante di una arbitraria lunghezza, ottenendo i punti  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ , con  $\overline{P_{i-1}P_i}$  tutti congrui fra loro ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ). Tracciata la retta per  $P_5$  e  $B$ , e per  $P_4, P_3, P_2, P_1$  le parallele ad essa, restano individuati sul segmento  $\overline{AB}$   $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, P'_5 = B$ : i segmenti  $\overline{P'_{i-1}P'_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) (avendo posto  $P'_0 = A$ ) risultano, per il teorema di Talete, tutti congrui fra loro, per cui, ad esempio, si ha

$$\frac{1}{5}l = [\overline{AP'_1}]$$

Per il sottomultiplo di una lunghezza si hanno le seguenti proprietà, di agevole verifica:

$$1') \quad \frac{1}{n}(l_1 + l_2) = \frac{1}{n}l_1 + \frac{1}{n}l_2;$$

$$2') \quad \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot l\right) = \frac{1}{mn} \cdot l = \frac{1}{nm} \cdot l = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{m} \cdot l\right);$$

$$3') \quad m \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot l\right) = \frac{1}{n} \cdot (m \cdot l) : \text{infatti si ha}$$

$$n \cdot \left[ m \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot l\right) \right] = (mn) \cdot \left[\frac{1}{n} \cdot l\right] = m \cdot \left[ n \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot l\right) \right] = m \cdot l, \text{ donde } 3');$$

$$4') \quad l_1 < l_2 \iff \frac{1}{n} \cdot l_1 < \frac{1}{n} \cdot l_2.$$

## 1.6 Il prodotto di una lunghezza per un numero razionale non negativo

La proprietà **3'** del §1.5 precedente consente la definizione di

**prodotto di un numero razionale non negativo per una lunghezza**

Sia  $r = \frac{m}{n}$  un numero  $\in \mathbb{Q}^+$  ed  $\mathbf{l}$  una lunghezza  $\in \mathcal{L}$ :  
si pone

$$(*) \quad r \cdot \mathbf{l} = \frac{m}{n} \cdot \mathbf{l} \stackrel{DEF.}{=} m \cdot \left( \frac{1}{n} \cdot \mathbf{l} \right)$$

Molto spesso si scrive  $r \mathbf{l}$  al posto di  $r \cdot \mathbf{l}$ .

La **definizione è lecita** poiché, se  $\frac{p}{q}$  è un'altra frazione rappresentante di  $r$ , e risulta, ad esempio,

$$p = d \cdot m \wedge q = d \cdot n$$

con  $d \in \mathbb{N}$  opportuno, calcolando con la stessa regola  $(*)$  si ottiene:

$$\begin{aligned} r \cdot \mathbf{l} &= \frac{p}{q} \cdot (\mathbf{l}) = p \cdot \left( \frac{1}{q} \cdot \mathbf{l} \right) = (dm) \cdot \left( \frac{1}{dn} \cdot \mathbf{l} \right) = (dm) \cdot \left[ \frac{1}{d} \cdot \left( \frac{1}{n} \cdot \mathbf{l} \right) \right] = \\ &= (md) \cdot \left[ \frac{1}{d} \cdot \left( \frac{1}{n} \cdot \mathbf{l} \right) \right] = m \cdot \left\{ d \cdot \left[ \frac{1}{d} \cdot \left( \frac{1}{n} \cdot \mathbf{l} \right) \right] \right\} = m \cdot \left( \frac{1}{n} \cdot \mathbf{l} \right) = \frac{m}{n} \cdot (\mathbf{l}), \end{aligned}$$

**cioè lo stesso risultato.**

Sono di facile verifica le proprietà di tale prodotto qui di seguito elencate:

- 1)  $r \cdot (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2) = r \cdot \mathbf{l}_1 + r \cdot \mathbf{l}_2$ ;
- 2)  $(r + s) \cdot \mathbf{l} = r \cdot \mathbf{l} + s \cdot \mathbf{l}$ ;
- 3)  $r \cdot (s \cdot \mathbf{l}) = (r \cdot s) \cdot \mathbf{l}$  [ in particolare  $r \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \mathbf{l} \right) = \left( r \cdot \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{l} = 1 \cdot \mathbf{l} = \mathbf{l}$  ] ;
- 4)  $\mathbf{l}_1 < \mathbf{l}_2 \wedge r \neq 0 \iff r \cdot \mathbf{l}_1 < r \cdot \mathbf{l}_2$ .

## 1.7 Richiami sulla continuità della retta

Sia  $r$  una qualsiasi retta e  $V$  uno dei suoi due *ordinamenti naturali*, uno opposto dell'altro, detti anche i suoi *versi naturali*.

Se il punto  $P_1$  precede il punto  $P_2$  secondo  $V$ , scriveremo

$$P_1 < P_2 \quad (V)$$

**Definizione 1.5** Due insiemi, non vuoti, di punti di  $r$ ,  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , si diranno

*separati*

se  $\forall A \in \mathcal{A}$  e  $\forall B \in \mathcal{B}$  si ha che

$$A < B \quad (V)$$

**Definizione 1.6** Due insiemi, non vuoti, di punti di  $r$ ,  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , si diranno

*contigui*

se, fissata una arbitraria lunghezza  $l > 0$ ,  $\exists A \in \mathcal{A} \wedge \exists B \in \mathcal{B} : [\overline{AB}] < l$ .

Detto a parole, vi sono elementi di  $\mathcal{A}$  e di  $\mathcal{B}$

*vicini quanto si vuole.*

Ciò posto ricordiamo il ben noto

### POSTULATO DI DEDEKIND O DELLA CONTINUITÀ DELLA RETTA :

Dati due insiemi, *non vuoti separati e contigui* di punti,  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , esiste

*uno ed un solo punto  $S$  che è l'elemento di separazione fra  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ ,*

*tale cioè che*

$$(*) \quad A \leq S \leq B, \quad \forall A \in \mathcal{A} \wedge \forall B \in \mathcal{B}$$

In effetti il postulato afferma *l'esistenza* del punto  $S$ , l'unicità è facile conseguenza della contiguità di  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ .

Si noti che in  $(*)$  può verificarsi l'uguaglianza in una sola delle disuguaglianze, essendo

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$$

**Osservazione 1.5** Vi sono insiemi ordinati che *non risultano continui*: ben noto è l'esempio dei due insiemi di numeri razionali positivi

$$\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Q}^+ : a^2 < 2\}, \quad \mathcal{B} = \{b \in \mathbb{Q}^+ : b^2 > 2\}$$

si dimostra agevolmente infatti che, rispetto all'ordinamento usuale di  $\mathbb{Q}^+$ ,  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  sono *separati e contigui*; non esiste però un numero razionale  $s$  che sia elemento di separazione di  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ : infatti un tale numero dovrebbe avere il suo quadrato uguale a 2,

$$s^2 = 2$$

e questo è impossibile,  $\sqrt{2}$  essendo un numero irrazionale.

## 1.8 L'insieme delle lunghezze $\mathcal{L}$ è continuo

Conseguenza della continuità della retta è la

*continuità dell'insieme delle lunghezze  $\mathcal{L}$  rispetto al suo ordinamento*

Questo fatto si precisa nell'enunciato seguente:

**Proposizione 1.4** *Due insiemi non vuoti separati e contigui di lunghezze  $\mathcal{L}'$ ,  $\mathcal{L}''$ , hanno uno ed un solo elemento di separazione  $l$ , tale cioè da aversi*

$$l' \leq l \leq l'', \quad \forall l' \in \mathcal{L}' \quad \wedge \quad \forall l'' \in \mathcal{L}''$$

La verifica di tale enunciato è immediata, una volta che si considerino tutti i rappresentanti degli elementi di  $\mathcal{L}'$  e  $\mathcal{L}''$  con l'origine in uno stesso punto  $A$  e gli estremi su una semiretta  $s$  di origine  $A$ .



L'insieme  $\mathcal{A}'$  degli estremi  $P'$  dei rappresentanti degli  $l' \in \mathcal{L}'$  e quello  $\mathcal{A}''$  degli estremi dei rappresentanti degli  $l'' \in \mathcal{L}''$  risultano insiemi *separati e contigui* di punti della retta  $r$  sostegno di  $s$ .

Se  $P$  è l'elemento di separazione di  $\mathcal{A}'$  e  $\mathcal{A}''$ , evidentemente

$$l = [\overline{AP}] \text{ è l'elemento di separazione di } \mathcal{L}' \text{ ed } \mathcal{L}''.$$

## 1.9 L'insieme delle lunghezze $\mathcal{L}$ è archimedeo

Data una lunghezza  $l_1 \neq 0$ , si consideri una lunghezza  $l_2$  tale che

$$l_1 < l_2;$$

posto

$$[\overline{AB_i}] = l_i, \quad i = 1, 2$$



per quanto piccola rispetto ad  $l_2$  possa essere  $l_1$ , l'intuizione ci dice che un multiplo opportunamente grande di  $l_1$  risulterà **maggiore** di  $l_2$ : in altre parole, procedendo da  $A$  con passi di lunghezza  $l_1$ , ad un certo punto si raggiunge e supera qualunque punto fissato  $B_2$ .

Benchè così immediato per l'intuizione, questo fatto non può essere dimostrato in base ai postulati e bisogna quindi formularlo esplicitamente col nome ormai convenzionale di

**POSTULATO DI ARCHIMEDE.** *Date due lunghezze  $l_1$  e  $l_2$ , con  $l_1 \neq 0$ , esiste  $n \in \mathbb{N}$ :*

$$n \cdot l_1 > l_2$$

La proprietà archimedeica di  $\mathcal{L}$  ha un'importante conseguenza che giova sottolineare

**Proposizione 1.5** *Data due lunghezze  $l_1$  e  $l_2$ , con  $l_1 \neq 0$ , esiste un*

**sottomultiplo di  $l_2$  minore di  $l_1$ ,**

*cioè  $\exists n \in \mathbb{N}$ :*

$$\frac{1}{n} \cdot l_2 < l_1$$

**DIM.**

Per Archimede  $\exists n : n \cdot l_1 > l_2$ , donde

$$l_1 = \frac{1}{n} \cdot (n \cdot l_1) > \frac{1}{n} \cdot l_2 \implies \frac{1}{n} \cdot l_2 < l_1, \quad C.V.D.$$

## 1.10 Il prodotto di una lunghezza per un numero reale non negativo

Nel §1.4 si è definito il prodotto di una lunghezza per un numero razionale non negativo. Sia  $\alpha$  un **numero reale irrazionale**: come costruire ragionevolmente il multiplo di una lunghezza  $l$  per  $\alpha$ , denotato con il simbolo

$$\alpha \cdot l \quad \text{o anche} \quad \alpha l ?$$

Il modo è molto naturale.  $\alpha$  è approssimato per difetto e per eccesso da due successioni di numeri razionali decimali: ad esempio, se  $\alpha = \sqrt{2}$ , le due successioni sono

$$1) \quad 1 < 1.4 < 1.41 < 1.414 < 1.4142 < \dots$$

$$2) \quad 2 > 1.5 > 1.42 > 1.415 > 1.4143 > \dots$$

la prima crescente (meglio: non decrescente), la seconda decrescente (meglio: non crescente). La situazione è riassumibile efficacemente con il simbolo

$$1 < 1.4 < 1.41 < 1.414 < 1.4142 \leq \dots < \sqrt{2} < \dots \leq 1.4143 < 1.415 < 1.42 < 1.5 < 2$$

e più in generale, per un numero irrazionale  $\alpha$ , con

$$(*) \quad r_0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_i \leq \dots < \alpha < \dots \leq s_i \leq \dots \leq s_1 \leq s_0$$

essendo  $r_i$  ed  $s_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , le successioni di numeri razionali decimali finiti approssimanti  $\alpha$  rispettivamente per difetto e per eccesso.

Ricordiamo che risulta

$$(**) \quad s_i - r_i = \frac{1}{10^i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Da (\*) e (\*\*) segue facilmente che le due classi di lunghezze

$$(\#) \quad r_0 l, r_1 l, \dots, r_i l, \dots, \quad ; \quad \dots, s_i l, \dots, s_1 l, s_0 l,$$

*risultano due classi separate e contigue di lunghezze:*

si definirà logicamente la lunghezza multipla di  $\mathbf{l}$  per  $\alpha$  mediante la posizione

$$(\#) \quad \alpha \mathbf{l} \stackrel{DEF.}{=} \textit{l'elemento di separazione delle due classi}$$

Le proprietà di un prodotto di un numero reale  $\geq 0$  qualunque per una lunghezza si provano verificando che i membri delle uguaglianze sono elementi di separazione di medesime coppie di classi separate e contigue di lunghezze. Sorvoliamo sui particolari ed elenchiamo queste proprietà

$$1) \quad \alpha(\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2) = \alpha \mathbf{l}_1 + \alpha \mathbf{l}_2 ;$$

$$2) \quad (\alpha_1 + \alpha_2) \mathbf{l} = \alpha_1 \mathbf{l} + \alpha_2 \mathbf{l} ;$$

$$3) \quad \alpha_1(\alpha_2 \mathbf{l}) = (\alpha_1 \alpha_2) \mathbf{l} ;$$

$$4) \quad \alpha(\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2) = \alpha \mathbf{l}_1 - \alpha \mathbf{l}_2 .$$

1), 2) e 3) si generalizzano al solito per induzione.

## 1.11 La misura delle lunghezze

Sia data una lunghezza  $\mathbf{l}_0 \neq \mathbf{0}$ . Sussiste allora la seguente

**Proposizione 1.6** *Esiste una ed una sola funzione*

$$\mu_{\mathbf{l}_0} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

*tale che*

$$1) \quad \mu_{\mathbf{l}_0}(\mathbf{l}) = 0 \iff \mathbf{l} = \mathbf{0} ;$$

$$2) \quad \mu_{\mathbf{l}_0}(\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2) = \mu_{\mathbf{l}_0}(\mathbf{l}_1) + \mu_{\mathbf{l}_0}(\mathbf{l}_2) ;$$

$$3) \quad \mu_{\mathbf{l}_0}(\mathbf{l}_0) = 1 ;$$

La funzione  $\mu_{\mathbf{l}_0}$  prende il nome di

*funzione - misura delle lunghezze rispetto all'unità di misura  $\mathbf{l}_0$*

Dal punto di vista della misurazione pratica le tre proprietà sopra enunciate appaiono del tutto evidenti: certamente l'esistenza e l'unicità di  $\mu_{l_0}$  vanno dimostrate, ma ciò esorbita dagli scopi di queste note.

Mettiamo in luce piuttosto altre proprietà notevoli della funzione - misura (brevemente detta anche misura), conseguenze delle proprietà già esposte.

**Proposizione 1.7** *La funzione  $\mu_{l_0}$  risulta una*

*corrispondenza iniettiva che rispetta gli ordinamenti di  $\mathcal{L}$  e di  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ .*

$$\begin{aligned} \text{DIM. } \quad l_1 < l_2 &\implies l_2 = l_1 + l \text{ con } l = l_2 - l_1 > \mathbf{0} \implies \mu_{l_0}(l_2) = \mu_{l_0}(l_1 + l) = \\ &= \mu_{l_0}(l_1) + \mu_{l_0}(l) > \mu_{l_0}(l_1) \quad (\text{perchè } \mu_{l_0}(l) > 0) \implies \mu_{l_0}(l_1) < \mu_{l_0}(l_2) : \end{aligned}$$

ciò si esprime appunto dicendo che  $\mu_{l_0}$  *rispetta gli ordinamenti di  $\mathcal{L}$*  e di  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ .

Come conseguenza di ciò si ha che

$$\begin{aligned} \{ \quad l_1 \neq l_2 \text{ (e sia ad esempio) } l_1 < l_2 \implies \mu_{l_0}(l_1) < \mu_{l_0}(l_2) \implies \mu_{l_0}(l_1) \neq \mu_{l_0}(l_2) \quad \} \\ \implies \mu_{l_0} \text{ è } \mathbf{iniettiva}. \end{aligned}$$

**Proposizione 1.8** *Risulta  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  e  $\forall l \in \mathcal{L}$ ,*

$$(*) \quad \mu_{l_0}(\alpha l) = \alpha \mu_{l_0}(l)$$

*proprietà che si esprime di solito dicendo che*

*la funzione  $\mu_{l_0}$  è lineare*

*Dalla (\*) si trae poi facilmente per induzione la più generale*

$$(**) \quad \mu_{l_0}(\alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_n l_n) = \alpha_1 \mu_{l_0}(l_1) + \dots + \alpha_n \mu_{l_0}(l_n)$$

**DIM.** Scriveremo per brevità  $\mu$  al posto di  $\mu_{l_0}$ .

La dimostrazione di (\*) è facile se  $\alpha \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ : basta estendere la **2**) di Prop.1.6 per induzione ottenendo la

$$\mu(l_1 + l_2 + \dots + l_n) = \mu(l_1) + \mu(l_2) + \dots + \mu(l_n),$$

e poi assumere  $l_1 = l_2 = \dots = l_n = l$ , ottenendo

$$\mu(n\mathbf{l}) = n\mu(\mathbf{l})$$

Se  $\alpha = \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , si procede nel modo seguente:

$$\mu(\mathbf{l}) = \mu\left(n\left(\frac{1}{n}\mathbf{l}\right)\right) = n\mu\left(\frac{1}{n}\mathbf{l}\right) \implies \mu\left(\frac{1}{n}\mathbf{l}\right) = \frac{1}{n}\mu(\mathbf{l})$$

Se poi  $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ , si ha che

$$\mu\left(\frac{m}{n}\mathbf{l}\right) = \mu\left(m\left(\frac{1}{n}\mathbf{l}\right)\right) = m\mu\left(\frac{1}{n}\mathbf{l}\right) = m\left(\frac{1}{n}\mu(\mathbf{l})\right) = \left(m \cdot \frac{1}{n}\right)\mu(\mathbf{l}) = \frac{m}{n}\mu(\mathbf{l})$$

Se ora  $\alpha$  è un qualunque numero irrazionale appartenente a  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ , siano

$$(\#) \quad r_0 \leq r_1 \leq \dots r_i \leq \dots < \alpha < \dots s_i \leq \dots s_1 \leq s_0$$

con  $r_i$  ed  $s_i \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ ,  $i \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ , le due successioni separate e contigue di numeri decimali approssimanti per difetto e per eccesso  $\alpha$ .

Da (#) segue

$$(\#\#) \quad r_0\mathbf{l} \leq r_1\mathbf{l} \leq \dots r_i\mathbf{l} \leq \dots < \alpha\mathbf{l} < \dots s_i\mathbf{l} \leq \dots s_1\mathbf{l} \leq s_0\mathbf{l}.$$

Le due successioni di lunghezze

$$r_i\mathbf{l} \text{ ed } s_i\mathbf{l}, \quad i \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$$

risultano **separate** (ovvio) e **contigue**: infatti si ha

$$s_i\mathbf{l} - r_i\mathbf{l} = (s_i - r_i)\mathbf{l} = \frac{1}{10^i}\mathbf{l},$$

lunghezza quest'ultima che può evidentemente essere resa **piccola ad arbitrio** al crescere di  $i$  in  $\mathbb{N}^+$ .

Allora per la **continuità** di  $\mathcal{L}$  esiste un **unico elemento di separazione** delle due successioni di lunghezze e, per la ( $\#\#$ ), questo **deve coincidere** con  $\alpha\mathbf{l}$ .

Moltiplicando ora tutti i membri della (#) per  $\mu(\mathbf{l})$  si ottiene la

$$(1) \quad r_0\mu(\mathbf{l}) \leq \dots r_i\mu(\mathbf{l}) \leq \dots < \alpha\mu(\mathbf{l}) < \dots s_i\mu(\mathbf{l}) \leq \dots s_1\mu(\mathbf{l}) \leq s_0\mu(\mathbf{l});$$

calcolando d'altra parte la misura dei termini di ( $\#\#$ ) tramite  $\mu$  si ottiene, per la Prop.1.7,

$$\mu(r_0\mathbf{l}) \leq \dots \leq \mu(r_i\mathbf{l}) \leq \dots \leq \mu(\alpha\mathbf{l}) \leq \dots \leq \mu(s_i\mathbf{l}) \leq \dots \leq \mu(s_0\mathbf{l})$$

Ma essendo  $r_i$  ed  $s_i$  numeri razionali si ha, come sopra si è visto,

$$r_i \mu(\mathbf{l}) = \mu(r_i \mathbf{l}) \quad \text{ed} \quad s_i \mu(\mathbf{l}) = \mu(s_i \mathbf{l}), \quad \forall i \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\};$$

ne segue che  $\alpha \mu(\mathbf{l})$  e  $\mu(\alpha \mathbf{l})$  vengono ad essere elementi di separazione di una stessa coppia di successioni di numeri reali ovviamente *separate e contigue* (il lettore lo verifichi): quindi deve essere

$$\alpha \mu(\mathbf{l}) = \mu(\alpha \mathbf{l}), \quad C.V.D.$$

**Proposizione 1.9** *La  $\mu_{\mathbf{l}_0}$  è una corrispondenza biunivoca.*

**DIM.**  $\mu_{\mathbf{l}_0} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  è già stata riconosciuta *iniettiva* in Prop1.7. Resta da vedere che essa è anche *suriettiva*.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  risulta, per la linearità di  $\mu_{\mathbf{l}_0}$  (vedi Prop.1.8),

$$\mu_{\mathbf{l}_0}(\alpha \mathbf{l}_0) = \alpha \mu_{\mathbf{l}_0}(\mathbf{l}_0) = \alpha \cdot 1 = \alpha :$$

$\alpha$  è quindi l'immagine tramite  $\mu_{\mathbf{l}_0}$  della lunghezza  $\mathbf{l} = \alpha \mathbf{l}_0$ :  $\mu_{\mathbf{l}_0}$  è dunque *suriettiva* e quindi

*biunivoca*

## 1.12 La relazione fondamentale tra misure

Date due unità di misura (lunghezze non nulle)

$$\mathbf{l}_1 \quad \text{ed} \quad \mathbf{l}_2$$

siano

$$\mu_{\mathbf{l}_1} \quad \text{e} \quad \mu_{\mathbf{l}_2}$$

le due rispettive funzioni - misura.

Data ora una qualunque lunghezza  $\mathbf{l}$ , possiamo misurare  $\mathbf{l}$  rispetto a  $\mathbf{l}_1$  e rispetto a  $\mathbf{l}_2$ , ottenendo

$$\mu_{\mathbf{l}_1}(\mathbf{l}) \quad \text{e} \quad \mu_{\mathbf{l}_2}(\mathbf{l})$$

Sorge allora spontanea la domanda:

*quale è la relazione tra le due misure di  $l$  ?*

La risposta è contenuta in questa

**Proposizione 1.10**  $\forall l \in \mathcal{L}$  vale l'uguaglianza

$$(*) \quad \mu_{l_2}(l) = \mu_{l_2}(l_1) \cdot \mu_{l_1}(l)$$

*cioè si può dire che*

*la misura di  $l$  rispetto a  $l_2$  si ottiene moltiplicando  
la misura di  $l$  rispetto ad  $l_1$  per la costante*

$$\mu_{l_2}(l_1)$$

*che è*

*la misura della prima delle due unità di misura  $l_1$  rispetto alla seconda  $l_2$ .*

La relazione  $(*)$  prende il nome di

*relazione fondamentale tra misure*

**DIM.** Osserviamo intanto che sussiste la

$$(\#) \quad l = \mu_{l_1}(l) \cdot l_1 :$$

infatti poiché  $\mu_{l_1}$  è **biunivoca** (vedi Prop.1.9, §1.11), risulta **unica** la lunghezza la cui misura rispetto a  $l_1$  è un assegnato numero reale  $\geq 0$ ; quindi

*a misurare  $\mu_{l_1}(l)$  rispetto a  $l_1$  c'è solo  $l$ .*

Ciò ricordato, dalla

$$\mu_{l_1}(\mu_{l_1}(l) \cdot l_1) = \mu_{l_1}(l) \cdot \mu_{l_1}(l_1) = \mu_{l_1}(l) \cdot 1 = \mu_{l_1}(l)$$

segue proprio la (#).

Veniamo ora alla dimostrazione della proposizione:

$$\mu_{l_2}(\mathbf{l}) \stackrel{\text{per } (\#)}{=} \mu_{l_2}(\mu_{l_1}(\mathbf{l}) \cdot \mathbf{l}_1) \stackrel{\text{per } P.1.8, \S 11}{=} \mu_{l_1}(\mathbf{l}) \cdot \mu_{l_2}(\mathbf{l}_1) = \mu_{l_2}(\mathbf{l}_1) \cdot \mu_{l_1}(\mathbf{l}), \quad C.V.D.$$

Appare a questo punto opportuno porre la seguente

**Definizione 1.7** *Date due lunghezze non nulle  $l_1, l_2$ , si definisce il loro rapporto  $\frac{l_1}{l_2}$  ponendo*

$$\frac{l_1}{l_2} \stackrel{DEF.}{=} \mu_{l_2}(\mathbf{l}_1)$$

che quindi è

*la misura di  $l_1$  rispetto a  $l_2$  assunta come unità di misura.*

Vale in proposito la seguente

$$\text{regola per il calcolo del rapporto } \frac{l_1}{l_2}$$

fornita dalla

**Proposizione 1.11** *Per ogni coppia di lunghezze non nulle*

$$(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$$

*essendo  $l_0$  una terza arbitraria unità di misura, cioè lunghezza non nulla, risulta*

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\mu_{l_0}(\mathbf{l}_1)}{\mu_{l_0}(\mathbf{l}_2)}$$

*cioè:*

*il rapporto tra  $l_1$  e  $l_2$  è uguale al rapporto numerico (cioè al quoziente) tra le misure di  $l_1$  ed  $l_2$  rispetto ad una arbitrariamente fissata unità di misura.*

**DIM.** Infatti si ha

$$\mu_{l_0}(\mathbf{l}_1) = \mu_{l_0}(\mu_{l_2}(\mathbf{l}_1) \cdot \mathbf{l}_2) = \mu_{l_2}(\mathbf{l}_1) \cdot \mu_{l_0}(\mathbf{l}_2) \implies \frac{l_1}{l_2} = \mu_{l_2}(\mathbf{l}_1) = \frac{\mu_{l_0}(\mathbf{l}_1)}{\mu_{l_0}(\mathbf{l}_2)}$$

*C.V.D.*

Da quanto precede discende il seguente

**Corollario 1.1** *Risulta*

$$(*) \quad \frac{l_1}{l_2} = \left( \frac{l_2}{l_1} \right)^{-1}$$

*cioè*

*il rapporto tra  $l_1$  e  $l_2$  è il reciproco del rapporto tra  $l_2$  ed  $l_1$ .*

**DIM.** Da Prop.1.11 discende, scelta una arbitraria lunghezza  $l_0 \neq 0$ ,

$$\frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{l_1}{l_2} = \frac{\mu_{l_0}(l_2)}{\mu_{l_0}(l_1)} \cdot \frac{\mu_{l_0}(l_1)}{\mu_{l_0}(l_2)} = 1$$

donde (\*).

**Osservazione 1.6** Alla luce dei fatti esposti e delle nozioni introdotte la

*relazione fondamentale tra misure*

di Prop.1.10

$$\mu_{l_2}(l) = \mu_{l_2}(l_1) \cdot \mu_{l_1}(l)$$

può essere riproposta sotto la seguente forma

$$\frac{\mu_{l_2}(l)}{\mu_{l_1}(l)} = \left( \frac{l_1}{l_2} \right) \left( \frac{l_2}{l_1} \right)^{-1},$$

che si può leggere:

*il rapporto (numerico) tra le misure di una qualunque lunghezza  $l \neq 0$  rispetto a  $l_2$  e a  $l_1$  nell'ordine è il reciproco del rapporto tra  $l_2$  ed  $l_1$  stesse.*

*Esemplificando: se  $l_2$  è il doppio (rispettivamente, la metà) di  $l_1$ , la misura di una lunghezza  $l$  rispetto a  $l_2$  risulta la metà (rispettivamente, il doppio) di quella di  $l$  rispetto a  $l_1$ : ciò in perfetto accordo con l'intuizione comune.*

# Capitolo 2

## LA MISURA DELLE AMPIEZZE

### 2.1 Il concetto di ampiezza

Come per giungere al concetto di *lunghezza* si è partiti dall'insieme dei *segmenti* dello spazio, così per giungere a quello di

*ampiezza*

si parte dall'insieme degli *angoli* dello spazio. Ricordiamo che l'angolo ha una definizione complessa, che distingue anzitutto gli angoli in:

*angoli convessi* e *angoli concavi*

Gli angoli convessi sono le figure ottenute come:

*intersezione di due semipiani di uno stesso piano*

Più precisamente, se si considerano due semirette  $a$ ,  $b$ , con l'origine in uno stesso punto  $O$  e non parallele, restano individuati:

- 1) *il semipiano  $\sigma_a$  di origine la retta sostegno di  $a$  e contenente  $b$ ;*
- 2) *il semipiano  $\sigma_b$  di origine la retta sostegno di  $b$  e contenente  $a$ ;*

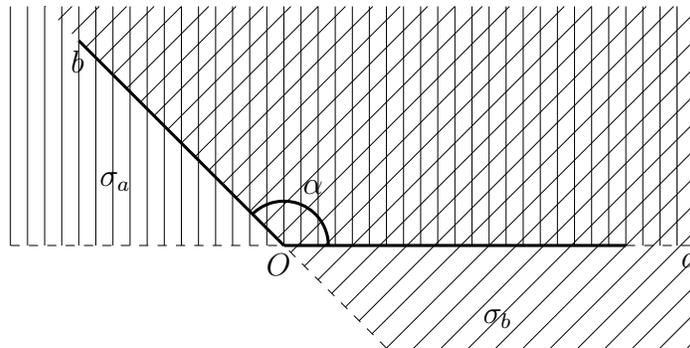
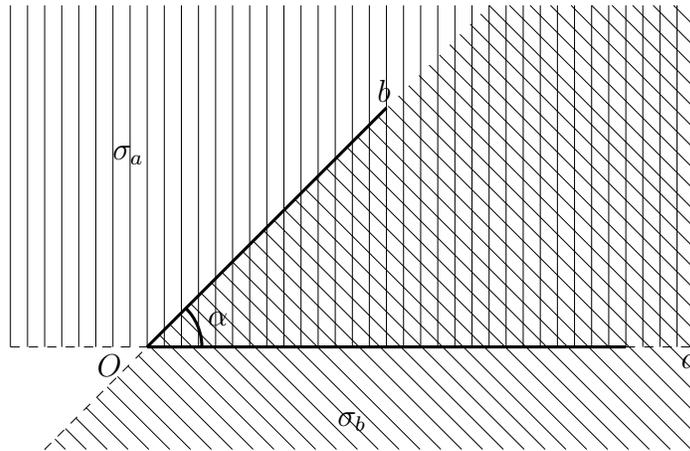
l'insieme:

$$\alpha : \sigma_a \cap \sigma_b$$

*è l'angolo convesso di vertice  $O$  e lati  $a$ ,  $b$ .*

Per ragioni ovvie si aggiungono al novero degli angoli convessi:

- 1) **l'angolo nullo**: figura - limite di un angolo convesso i cui lati finiscono per coincidere;
- 2) **l'angolo piatto**: figura - limite di un angolo convesso i cui lati finiscono per essere semirette opposte.



La ragione dell'attributo **convesso** per questi tipi di angoli viene qui di seguito chiarita

**Definizione 2.1** Una figura **F** dello spazio si dice

**convessa**

se

$$\forall A, B \in \mathbf{F} \text{ si ha } \overline{AB} \subseteq \mathbf{F}$$

cioè se

*non appena due punti  $A, B$  appartengono a  $\mathbf{F}$   
tutto il segmento  $\overline{AB}$  è contenuto in  $\mathbf{F}$ .*

**ESEMPI:** Un segmento, una semiretta, una retta, un semipiano, un piano, un semispazio e tutto lo spazio sono ovviamente figure convesse.

Un disco e una sfera sono figure convesse: la dimostrazione è lasciata per esercizio al lettore.

Una circonferenza o una superficie sferica non sono evidentemente figure convesse.

Sussiste il seguente importante fatto

**Proposizione 2.1** *L'intersezione di due o più figure convesse risulta convessa.*

**DIM.**  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$  siano figure convesse e sia:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 \cap \mathbf{F}_2 \cap \dots \cap \mathbf{F}_n$$

la loro intersezione.

$A, B \in \mathbf{F} \Rightarrow A, B \in \mathbf{F}_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow \overline{AB} \subseteq \mathbf{F}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , perchè  $\mathbf{F}_i$  è convessa  $\Rightarrow \overline{AB} \subseteq \mathbf{F}_1 \cap \mathbf{F}_2 \cap \dots \cap \mathbf{F}_n = \mathbf{F}$ , sicchè  $\mathbf{F}$  risulta convessa.

La Prop.2.1 appena dimostrata si estende anche a figure che sono intersezione di infinite figure convesse. In base alla Prop.2.1 si può stabilire che

*un angolo convesso è una figura convessa*

Inoltre un triangolo, un parallelogramma, un poligono regolare sono facilmente pensabili come intersezioni di semipiani e quindi risultano figure convesse.

Passando agli

*angoli concavi*

si può definirli come

*le figure complementari, rispetto a tutto il piano, degli angoli convessi*

si aggiungono, come parti integranti, i medesimi due lati dell'angolo convesso, che si chiamano ancora lati dell'angolo concavo; anche il vertice  $O$  è detto vertice dell'angolo concavo.

Un angolo convesso e il suo concavo associato, secondo la definizione data, si chiamano

***angoli esplementari***

Chiaramente un angolo concavo ***non è una figura convessa***, tranne il caso in cui si abbia un

***angolo giro***

che, come insieme, è tutto il piano, ed è la figura limite di un angolo concavo quando i suoi lati tendono a coincidere;

oppure un

***angolo piatto***

che, come insieme, è un semipiano, ed è la figura limite di un angolo concavo quando i suoi lati tendono a diventare semirette opposte.

Definendo nell'insieme degli angoli la relazione di congruenza in modo del tutto simile a quanto fatto nel caso dei segmenti si viene a suddividere l'insieme degli angoli in

***classi di congruenza***

che vanno chiamate le

***ampiezze angolari elementari***

dette brevemente ***ampiezze***.

Ovviamente tutti gli angoli nulli costituiscono una classe di congruenza, e così tutti gli angoli piatti e tutti gli angoli giri.

Ogni angolo  $\alpha$  elemento di una ***classe di congruenza di angoli*** o ***ampiezza*** si dirà

***un rappresentante dell'ampiezza***

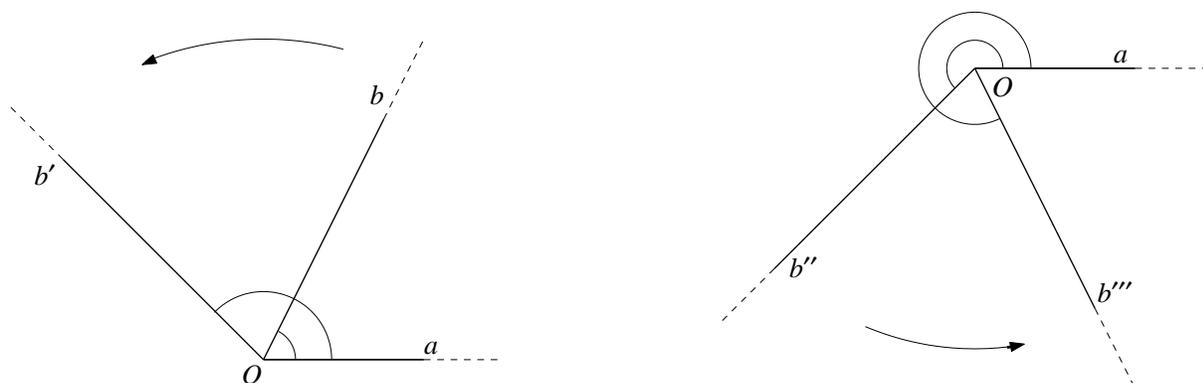
la quale potrà essere denotata con il simbolo

$$[\alpha]$$

Due rappresentanti di una stessa ampiezza si diranno egualmente ampi (molte volte, per abuso, si diranno “angoli uguali”).

Uno schema ben noto per disporre dei rappresentanti di qualunque ampiezza è quello che prevede di fissare in un piano una semiretta di origine un punto  $O$  e inoltre fissare uno dei due versi di rotazione attorno al punto  $O$ , da chiamarsi **positivo**: normalmente quello antiorario o sinistrorso per l’osservatore.

Allora ogni angolo sia convesso che concavo ha un ben preciso angolo ad esso congruente di vertice  $O$  con un lato coincidente con  $a$  e l’altro coincidente con una opportuna semiretta  $b$  di origine  $O$ , essendo convenuto di considerare gli angoli descritti per rotazione del primo lato  $a$  sino al secondo  $b$  nel verso fissato come positivo per le rotazioni.



In figura, per esempio, gli angoli di lati  $a$  e  $b$  o  $a$  e  $b'$  sono **convessi**, ma quelli di lati  $a$  e  $b''$  o  $a$  e  $b'''$  sono **concavi**.

Lo schema qui sopra descritto permette di comprendere chiaramente come l’insieme delle ampiezze possa essere dotato di un

### *ordinamento naturale totale*

con **l’ampiezza nulla** come primo o minimo elemento e **l’ampiezza dell’angolo giro** come elemento finale o massimo.

C’è quindi una diversità tra questo ordinamento e quello delle **lunghezze**, per il quale, se esisteva la lunghezza nulla  $0$  come primo elemento, non esisteva invece un’ultima (o massima) lunghezza.

Appare a questo punto necessario, per non appesantire eccessivamente il discorso, usare il termine **angolo** al posto di **ampiezza**, e porre le varie nozioni di **ampiezza minore di un’altra**, **ampiezza somma di altre due**, ecc., servendosi direttamente degli angoli rappresentanti delle ampiezze in questione, pensati disposti come sopra in un unico fascio di un piano prescelto.

Come apparirà chiaro per l'intuizione geometrica, servendosi di un altro fascio e di angoli congruenti ai precedenti, i vari concetti posti di volta in volta non dipenderanno dai particolari rappresentanti ma solo dalle loro ampiezze.

Senza entrare troppo nei dettagli dimostrativi, possiamo però osservare, in accordo con l'evidenza geometrica, che

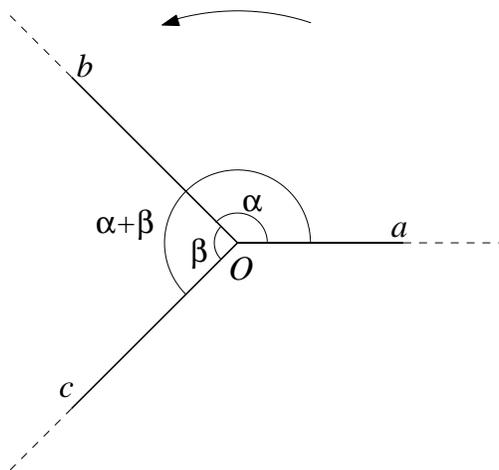
l'insieme degli angoli elementari ordinato secondo l'ordinamento naturale  
risulta un insieme *continuo*

nel senso che

due classi *separate e contigue* di angoli hanno un unico *elemento di separazione*.

## 2.2 Somma di angoli

Due angoli convessi possono essere sempre *sommati* in modo del tutto naturale come illustrato in figura



Un angolo convesso e uno concavo possono ovviamente essere sommati a condizione che uno dei due non sia maggiore dell'esplementare dell'altro.

Quando due angoli  $\alpha$  e  $\beta$  possono essere sommati, risulta ovvio che anche  $\beta$  e  $\alpha$ , nell'ordine, possono essere sommati, e che risulta

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

cioè si può affermare che

***la somma fra angoli, quando esiste, è commutativa.***

La somma fra angoli risulta anche

***associativa***

nel senso che quando esiste la somma

$$(\alpha + \beta) + \gamma$$

esiste anche

$$\alpha + (\beta + \gamma)$$

e risulta

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

Altra proprietà notevole è il fatto che

***la somma fra angoli rispetta l'ordinamento***

il che significa che vale la seguente implicazione

$$\alpha \leq \beta \wedge \gamma \leq \delta \implies \alpha + \gamma \leq \beta + \delta$$

posto che le somme angolari esistano.

Nella formula precedente non appena al primo membro ci sia anche un solo  $<$  al posto di  $\leq$ , nel secondo membro si avrà il segno  $<$  al posto di  $\leq$ .

Segnaliamo infine un'altra proprietà della somma angolare detta

***legge di semplificazione***

consistente nelle seguenti due implicazioni

$$\alpha + \beta \leq \alpha + \gamma \implies \beta \leq \gamma$$

$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma \implies \beta = \gamma$$

Dati due angoli  $\alpha$  e  $\beta$ , se esiste un angolo  $\delta$  tale che

$$\alpha + \delta = \beta$$

si dice che

$\delta$  è la *differenza di  $\alpha$  e  $\beta$*

e si pone per definizione

$$\delta \stackrel{DEF.}{=} \alpha - \beta$$

Si verifica subito che valgono anche le seguenti formule

$$\beta - \alpha \leq \delta - \alpha \implies \beta \leq \delta$$

$$\beta - \alpha = \delta - \alpha \implies \beta = \delta$$

$$\alpha - \beta \leq \alpha - \delta \implies \beta \geq \delta$$

$$\alpha - \beta = \alpha - \delta \implies \beta = \delta$$

## 2.3 Sottomultipli di un angolo

Dato un angolo elementare  $\alpha$  qualsiasi è ben noto il procedimento di

*bisezione*

di  $\alpha$ : esso consente di costruire un angolo  $\beta$ , detto la *metà* di  $\alpha$ , tale che

$$\beta + \beta = 2\beta = \alpha$$

si porrà per definizione

$$\beta = \frac{1}{2} \alpha$$

È chiaro come si possa ottenere di seguito

$$\frac{1}{2} \alpha, \frac{1}{4} \alpha, \frac{1}{8} \alpha, \dots, \frac{1}{2^n} \alpha, \dots$$

Però

*per un angolo generico  $\alpha$   
non si dispone di una costruzione già della sua terza parte:*

insomma

*non si conosce un procedimento di trisezione  
del generico angolo  $\alpha$  mediante riga e compasso.*

Tuttavia l'intuizione suggerisce con estrema chiarezza, per ogni angolo  $\alpha$ , l'esistenza e l'unicità dell'angolo da chiamarsi

$$\frac{1}{3} \alpha$$

e più in generale l'angolo da chiamarsi

$$\frac{1}{n} \alpha$$

ma l'esistenza di tale angolo

*non può essere dedotta come conseguenza  
dagli assiomi della geometria euclidea.*

Occorre quindi formulare il seguente

**Postulato 2.1 (della divisibilità dell'angolo).** *Dato un qualunque angolo  $\alpha$ , e un qualunque numero intero positivo  $n$ , esiste uno ed un solo angolo  $\beta$  tale che*

$$\underbrace{\beta + \beta + \dots + \beta}_{n \text{ addendi}} = n\beta = \alpha$$

Si pone per definizione

$$\beta \stackrel{DEF.}{=} \frac{1}{n} \alpha$$

**Osservazione 2.1** In effetti basterebbe postulare *l'esistenza* di  $\frac{1}{n} \alpha$ , perché la sua *unicità* è facile conseguenza delle proprietà sopra fornite della somma fra angoli.

Un'altra proprietà assai facile da accettare per l'intuizione comune, ma ciò non di meno anch'essa *non deducibile razionalmente* dagli assiomi, è il fatto che l'angolo  $\frac{1}{n} \alpha$  può, al crescere di  $n$ , diventare oltremodo piccolo.

Formuleremo quindi il seguente

**Postulato 2.2** Dato un qualunque angolo  $\alpha$  e un qualunque angolo  $\beta$  non nullo, esiste sempre un intero positivo  $n$  tale che

$$\frac{1}{n} \alpha < \beta$$

È chiaro comunque che, per ottenere un sottomultiplo di  $\alpha$  minore di  $\beta$ , sarà sufficiente scegliere un intero  $r$  tale che

$$\frac{1}{2^r} < \frac{1}{n}$$

per avere

$$\frac{1}{2^r} \alpha < \frac{1}{n} \alpha < \beta$$

## 2.4 Multiplo di un angolo secondo un numero reale

In modo strettamente analogo a quello seguito nel Cap. 1 per le *lunghezze*, si definirà il concetto di

*multiplo di un angolo  $\alpha$  secondo un numero razionale*

Se  $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ , si pone

$$r\alpha = \frac{m}{n} \alpha \stackrel{DEF.}{=} m \left( \frac{1}{n} \alpha \right)$$

La definizione non dipende dalla particolare frazione rappresentante di  $r$ , come è facile vedere. Ovviamente  $r$  dovrà essere **abbastanza piccolo**, finchè si rimane nel campo degli **angoli elementari**: una volta generalizzato il concetto di angolo, non ci sarà alcuna restrizione. Passiamo al concetto di

***multiplo di un angolo  $\alpha$  secondo un numero irrazionale***

Se  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  è un numero irrazionale, si procederà anche qui come per le lunghezze, individuando il multiplo

$$\lambda\alpha \quad \left( \text{ad es. } \sqrt{2}\alpha \right)$$

come

***elemento di separazione di due classi separate e contigue di angoli***

la prima essendo

***la classe dei multipli di  $\alpha$  secondo i numeri razionali  
approssimanti per difetto il numero  $\lambda$***

la seconda essendo

***la classe dei multipli di  $\alpha$  secondo i numeri razionali  
approssimanti per eccesso il numero  $\lambda$***

Ovviamente, sempre per non cader fuori dall'ambito degli angoli elementari, bisognerà che il numero  $\lambda$  non superi un certo valore, dipendente di volta in volta dall'angolo  $\alpha$ .

Le proprietà del prodotto di un numero reale per un angolo sono, quando ogni simbolo ha senso,

- 1)  $\lambda(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2$  ;
- 2)  $(\lambda_1 + \lambda_2)\alpha = \lambda_1\alpha + \lambda_2\alpha$  ;
- 3)  $\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha$  ;
- 4)  $\lambda(\alpha_2 - \alpha_1) = \lambda\alpha_2 - \lambda\alpha_1$  .

con 1), 2), 3) generalizzabili subito per induzione.

## 2.5 Misura degli angoli

Anche per gli angoli si può giungere alla nozione di

*misura degli angoli rispetto ad una unità di misura  $\alpha_0$*

Sorvolando sui particolari, ricordiamo che le unità di misura usate nella pratica sono

$$\begin{aligned} 1) \quad \text{DEG o } \textit{deg} &= \textit{il grado sessagesimale} = \frac{1}{360} (\textit{angolo giro}) \\ &= \frac{1}{90} (\textit{angolo retto}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \text{GRA o } \textit{gra} &= \textit{il grado centesimale} = \frac{1}{400} (\textit{angolo giro}) \\ &= \frac{1}{100} (\textit{angolo retto}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \text{RAD o } \textit{rad} &= \textit{l'angolo radiante} = \\ &= \textit{l'angolo al centro di un arco circolare} \\ &\quad \textit{lungo quanto il raggio dell'arco} \end{aligned}$$

**Osservazione 2.2** La definizione di

*angolo radiante*

non dipende dalla lunghezza dell'arco usato per definirlo: questo dipende dal fatto che

*gli archi circolari di uno dato circolo e gli angoli  
al centro ad essi corrispondenti costituiscono  
due famiglie di grandezze direttamente proporzionali*

Anche per le misure angolari esiste la formula detta

*relazione fondamentale tra misure*

Scelte due unità di misura

$$\alpha_1 \quad \text{e} \quad \alpha_2$$

e dette

$$\mu_{\alpha_1} \quad \text{e} \quad \mu_{\alpha_2}$$

le rispettive funzioni - misura, si ha per ogni angolo  $\alpha$

$$(**) \quad \mu_{\alpha_2}(\alpha) = \mu_{\alpha_2}(\alpha_1) \cdot \mu_{\alpha_1}(\alpha)$$

Poiché la misura dell'angolo giro rispetto al **deg** è chiaramente 360, mentre la sua misura rispetto al **rad** è, come noto,  $2\pi$ , ponendo in (\*\*)

$$\alpha_1 = \mathbf{deg} \quad , \quad \alpha_2 = \mathbf{rad} \quad , \quad \alpha = \mathbf{angolo\ giro}$$

si ottiene

$$2\pi = \mu_{\alpha_2}(\alpha_1) \cdot 360 = (\text{misura in } \mathbf{rad} \text{ del } \mathbf{deg}) \cdot 360.$$

donde

$$\text{misura in } \mathbf{rad} \text{ del } \mathbf{deg} = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} = 0,0174\dots$$

La qual cosa si può anche formulare nel seguente modo

$$\mathbf{deg} = (0,0174\dots) \mathbf{rad}$$

Ponendo invece in (\*\*)

$$\alpha_1 = \mathbf{rad} \quad , \quad \alpha_2 = \mathbf{deg} \quad , \quad \alpha = \mathbf{angolo\ giro}$$

si ottiene

$$360 = \mu_{\alpha_2}(\alpha_1) \cdot 2\pi = (\text{misura in } \mathbf{deg} \text{ del } \mathbf{rad}) \cdot 2\pi$$

donde

$$\text{misura in } \mathbf{deg} \text{ del } \mathbf{rad} = \frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi} = 57.2957\dots$$

la qual cosa si può anche formulare nel seguente modo

$$\mathbf{rad} = (57.2957\dots) \mathbf{deg}$$

Esprimendo in gradi, primi, secondi, ecc. un radiante, si ha poi

$$\mathbf{rad} = 57^\circ 17' 44'' .81\dots$$

A formule analoghe si può giungere, sempre in base alla formula (\*\*), per esprimere

*deg* rispetto a *gra* e viceversa

*rad* rispetto a *gra* e viceversa

Si ottiene (al lettore i dettagli)

$$\begin{aligned} \textit{deg} &= \frac{10}{9} \textit{gra} \quad , \quad \textit{gra} = \frac{9}{10} \textit{deg} \\ \textit{rad} &= \frac{200}{\pi} \textit{gra} \quad , \quad \textit{gra} = \frac{\pi}{200} \textit{rad} \end{aligned}$$

## 2.6 Angoli generalizzati

La somma di angoli elementari risulta assolutamente incompleta e inadatta alla trattazione e allo studio dei fenomeni di rotazione, nei quali non solo un oggetto può ruotare di più angoli giri attorno al proprio centro di rotazione, ma può anche ruotare in entrambi i versi. Risulta pertanto opportuno ampliare la nozione di angolo introducendo gli

*angoli generalizzati*

Prima di tutto si perviene a porre il concetto di

*angolo orientato in un fascio orientato*

il che significa

*fissare nel fascio di centro  $O$  un verso positivo delle rotazioni*

e concepire, per un dato angolo  $\alpha$  di vertice  $O$  e di lati  $a$  e  $b$ , due possibili modi di essere descritto:

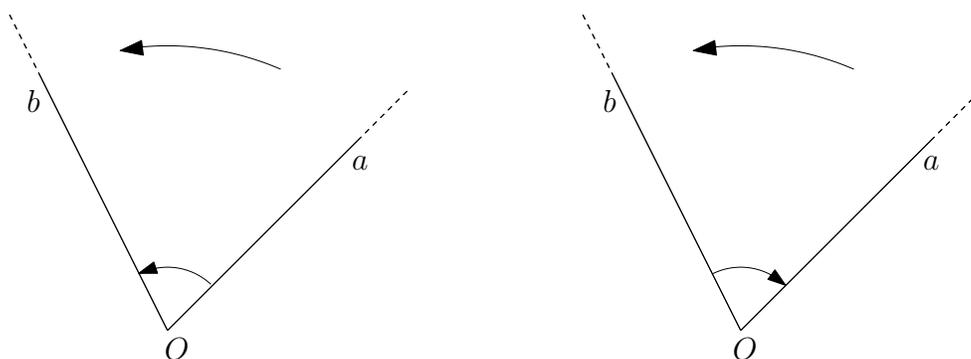


Figura 1

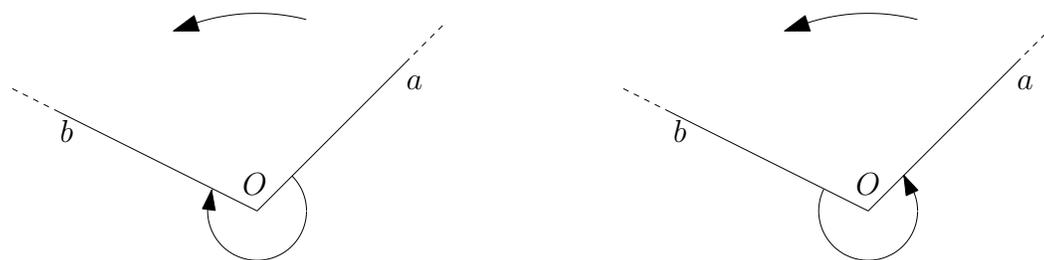


Figura 2

nella Figura 1., ad esempio, l'angolo  $\alpha$  è **l'angolo convesso** di lati  $a, b$  ma in un caso esso è pensato

*descritto dal suo lato  $a$  che ruota sino al suo lato  $b$*

in altre parole i raggi dell'angolo

*sono pensati ordinati da  $a$  a  $b$  :*

questo angolo così orientato verrà denotato con il simbolo

$$(a, \hat{b})$$

Nell'altro caso sempre di Figura 1 l'angolo  $\alpha$  è pensato

*descritto dal suo lato  $b$  che ruota sino al suo lato  $a$*

in altre parole questa volta i raggi dell'angolo

*sono pensati ordinati da b ad a :*

questo angolo così orientato verrà denotato con il simbolo

$$(b, \hat{a})$$

Analogamente si procede per orientare un **angolo concavo** (v. Figura 2)  
Se il **verso** secondo il quale l'origine di un angolo orientato  $\alpha$  deve ruotare

*descrivendo l'angolo stesso*

per giungere al suo estremo è **concorde** con il **verso positivo** fissato nel fascio, l'angolo orientato  $\alpha$  si dirà un

*angolo positivo ;*

nel caso contrario l'angolo orientato  $\alpha$  si dirà un

*angolo negativo ;*

Ad esempio:

In Figura 1.,

l'angolo **convesso orientato**  $(a, \hat{b})$  risulta **positivo**,

mentre

l'angolo **convesso orientato**  $(b, \hat{a})$ , risulta **negativo**.

In Figura 2, d'altra parte,

l'angolo **concavo orientato**  $(a, \hat{b})$  risulta **negativo**,

mentre

l'angolo **concavo orientato**  $(b, \hat{a})$  risulta **positivo**.

Per un angolo orientato  $\alpha$  in un fascio orientato si può parlare della

*misura con segno di  $\alpha$*

rispetto ad una unità di misura degli angoli prefissata, intendendosi con ciò

*la misura del supporto (non orientato) di  $\alpha$ , numero  $\geq 0$ ,  
se  $\alpha$  è un angolo positivo ;*

*l'opposto della misura del supporto (non orientato) di  $\alpha$ , numero  $\leq 0$ ,  
se  $\alpha$  è un angolo negativo .*

La seconda generalizzazione necessaria è dovuta al fatto che, come sopra si è accennato, in un fenomeno di rotazione è ben concepibile che l'oggetto rotante attorno ad  $O$ , schematizzato da un'asta incernierata in  $O$ , compia, partendo da una data posizione iniziale, un certo numero di rotazioni, complete o no, sia in senso positivo sia in senso negativo, in un certo ordine e numero. Al termine del suo moto l'asta si verrà a trovare in una certa posizione individuabile da un certo raggio del fascio.

Risulta pure molto ben corrispondente all'intuizione il fatto che, se le rotazioni considerate vengono compiute in un diverso ordine, il risultato finale, cioè la posizione finale dell'asta, sarà sempre lo stesso, e, anzi, che è sempre possibile pensare di ordinare le predette rotazioni in modo che un certo numero di rotazioni positive sia seguito da un certo numero di rotazioni negative, o viceversa.

Si introducono perciò gli

*angoli generalizzati positivi*

concepiti come costituiti da

*un certo numero di angoli giri descritti nel verso positivo  
seguiti da un angolo elementare positivo*

e gli

*angoli generalizzati negativi*

concepiti come costituiti da

*un certo numero di angoli giri descritti nel verso negativo  
seguiti da un angolo elementare negativo.*

Agli angoli generalizzati **positivi** verrà assegnata come

misura in **deg** (in **rad**)

il numero

$$n \cdot 360 + \phi^{(\circ)} \quad (n \cdot 2\pi + \phi^{(r)})$$

essendo  $n$  il numero di rotazioni (positive) complete, e  $\phi^{(\circ)}$  ( $\phi^{(r)}$ ) la misura in **deg** (**rad**) dell'angolo elementare aggiuntivo.

Agli angoli generalizzati **negativi** verrà assegnata come

misura in **deg** (in **rad**)

il numero

$$(-n) \cdot 360 - \phi^{(\circ)} \quad ((-n) \cdot 2\pi - \phi^{(r)})$$

essendo  $n$  il numero di rotazioni (negative) complete, e  $\phi^{(\circ)}$  ( $\phi^{(r)}$ ) la misura in **deg** (**rad**) del supporto dell'angolo elementare (negativo) aggiuntivo.

**angoli elementari positivi e negativi possono allora essere sommati in ogni caso dando eventualmente come risultato angoli generalizzati.**

Ad esempio, esprimendo gli angoli in gradi,

$$233^{(\circ)} + 172^{(\circ)} = 1 \cdot 360^{(\circ)} + 45^{(\circ)}$$

$$-305^{(\circ)} + (-207^{(\circ)}) = -512^{(\circ)} = (-1) \cdot 360^{(\circ)} - 142^{(\circ)}$$

oppure, esprimendo gli angoli in radianti,

$$3.6^{(r)} + 5.7^{(r)} = 9.3^{(r)} = 1 \cdot (2\pi^{(r)}) + 3.0168\dots^{(r)}$$

$$(-4.3)^{(r)} + (-6.1)^{(r)} = (-10.4)^{(r)} = (-1) \cdot (2\pi^{(r)}) - 4.1168\dots^{(r)}$$

Sommando angoli generalizzati espressi in **deg** (**rad**) è opportuno redigere il risultato in modo **standard**, cioè anche la somma degli angoli aggiuntivi va, sulla base degli esempi qui sopra considerati, espressa come somma di un multiplo intero relativo di 360 **deg** ( $2\pi$  **rad**) e di un angolo, positivo o negativo, di supporto minore di 360 **deg** ( $2\pi$  **deg**).

Si otterrà in questo modo una descrizione semplificata del risultato della sequenza delle rotazioni compiute, elidendo per dir così ogni coppia

*angolo giro positivo - angolo giro negativo*

come compensantisi a vicenda.