

# MATEMATICA FINANZIARIA

1. **Definizioni**
2. **Interesse semplice**
3. **Interesse composto continuo**
4. **Interesse composto discontinuo annuo**
  - **Spostamento dei valori nel tempo**
  - **Annualità**
  - **Periodicità**
5. **Interesse composto discontinuo convertibile**

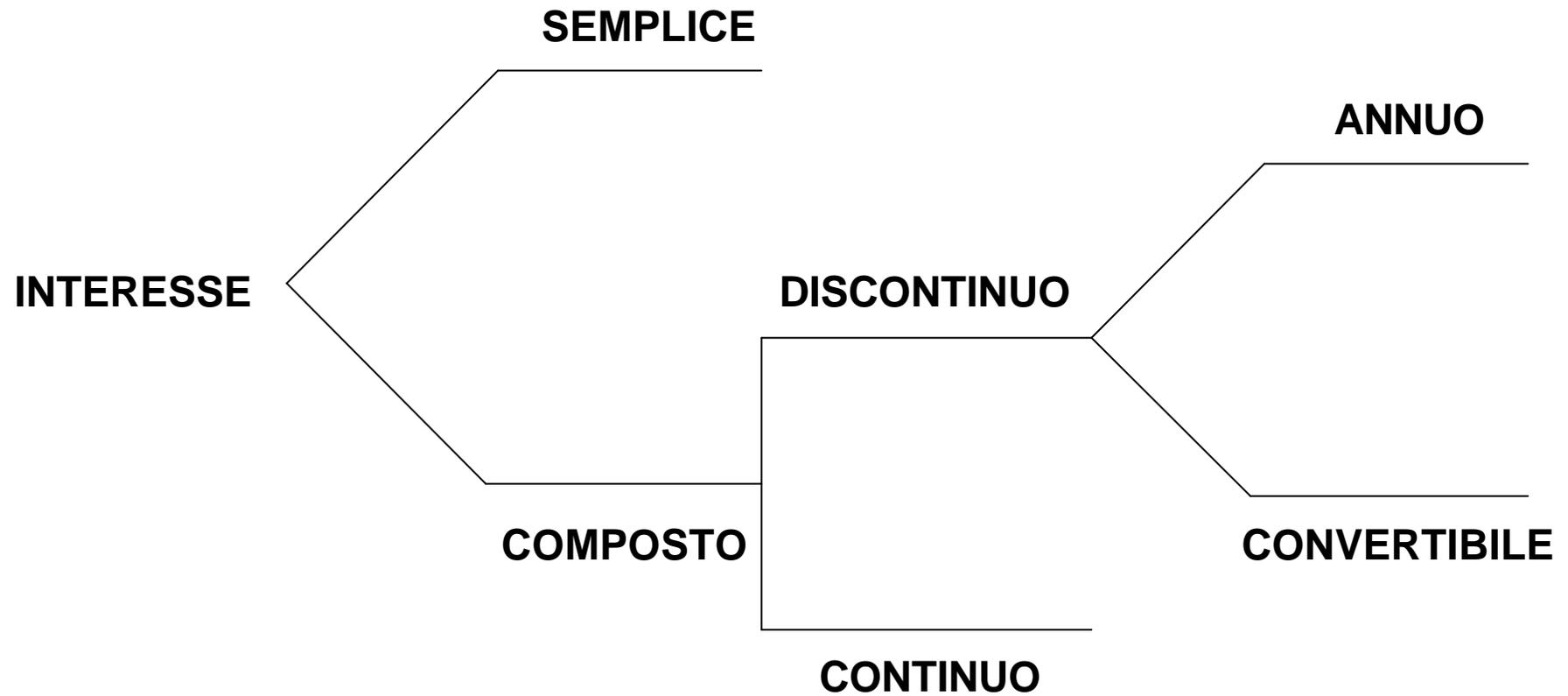
## **DEFINIZIONE DI INTERESSE**

Prezzo d'uso del risparmio sottoforma di capitale indifferenziato (la moneta).

## **DEFINIZIONE DI SAGGIO DI INTERESSE**

Interesse dell'unità di capitale (1 lira) nell'unità di tempo (1 anno)

# MODALITA DI DETERMINAZIONE DELL'INTERESSE



# INTERESSE SEMPLICE

Gli interessi maturati dal capitale in un dato tempo NON si sommano con il capitale, nel calcolo degli interessi del periodo successivo.

In altre parole, sono infruttiferi.

$$I = C_0 \cdot r \cdot n$$

$I$  = Interesse maturato

$C_0$  = Capitale iniziale

$r$  = Saggio di interesse

$n$  = periodo in anni (gg/365 o m/12)

# INTERESSE SEMPLICE

Formule derivate:

$$C_o = \frac{I}{r \cdot n}$$

$$r = \frac{I}{C_o \cdot n}$$

$$n = \frac{I}{C_o \cdot r}$$

# DEFINIZIONE DI MONTANTE

Il montante di un capitale è la somma del capitale e dei relativi interessi maturati in un determinato periodo di tempo

$$M = C + I$$

Il montante unitario è la somma di un capitale di 1 lira e dei relativi interessi maturati in un anno

$$q = 1 + r$$

# INTERESSE SEMPLICE

Calcolo del montante:

$$M = C_o + I = C_o + C_o \cdot r \cdot n = C_o(1 + rn)$$

$$M = C_o(1 + r \cdot n)$$

Formule derivate:

$$C_o = \frac{M}{1 + rn} \quad n = \frac{\frac{M}{C_o} - 1}{r} \quad r = \frac{\frac{M}{C_o} - 1}{n}$$

# SCONTO

E' la somma che si sottrae ad un capitale futuro per renderlo attuale

## Sconto finanziario semplice

$$Sc = M - C_o = M - \frac{M}{1 + rn} = \frac{M \cdot r \cdot n}{1 + rn}$$

## Sconto commerciale

$$Sc = M \cdot r \cdot n$$

# DIFFERENZA TRA SCONTO FINANZIARIO SEMPLICE E SCONTO COMMERCIALE

Lo sconto finanziario è calcolato sul capitale:

$$Sc = \frac{M}{1 + rn} \cdot r \cdot n$$

Lo sconto commerciale è calcolato sul montante, quindi è più elevato:

$$Sc = M \cdot r \cdot n$$

Lo sconto commerciale può essere adottato solo per brevi periodi di tempo.

# INTERESSE COMPOSTO

Gli interessi maturati dal capitale in un dato periodo si sommano al capitale stesso e divengono fruttiferi.

L'interesse composto può essere:

- Continuo
- Discontinuo annuo
- Discontinuo convertibile

# INTERESSE COMPOSTO CONTINUO

Gli interessi si convertono in capitale ad ogni istante.

Seppur teoricamente concepibile, non trova alcuna applicazione nella pratica estimativa.

# INTERESSE COMPOSTO DISCONTINUO ANNUO

Gli interessi vengono aggiunti al capitale che li ha prodotti una volta l'anno

$$I = C_0 (q^n - 1)$$

$I$  = interesse maturato    $r$  = saggio d'interesse    $n$  = periodo di anni

$C_0$  = capitale iniziale    $q = 1 + r$

# INTERESSE COMPOSTO DISCONTINUO ANNUO

Calcolo del montante

Alla fine del primo anno:

$$M_1 = C_0 + I_1 = C_0 + C_0 \cdot r = C_0 \cdot (1 + r)$$

Alla fine del secondo anno:

$$M_2 = M_1 + I_2 = M_1 + M_1 \cdot r = M_1(1 + r) = C_0(1 + r)(1 + r) = C_0(1 + r)^2$$

In generale per l'anno ennesimo "n"

$$M_n = C_0(1 + r)^n = C_0 \cdot q^n$$

Formule derivate

$$C_0 = \frac{M}{q^n} \quad I = M - C_0 = C_0 q^n - C_0 = C_0(q^n - 1)$$

I = interesse maturato    r = saggio d'interesse    n = periodo di anni

C<sub>0</sub> = capitale iniziale    q = 1 + r

## SCONTO FINANZIARIO COMPOSTO

$$\begin{aligned} Sc &= M - C_0 = M - \frac{M}{q^n} = \\ &= \frac{Mq^n - M}{q^n} = M \cdot \frac{q^n - 1}{q^n} \end{aligned}$$

# INTERESSE COMPOSTO DISCONTINUO CONVERTIBILE

Gli interessi maturano più volte all'anno ( $t$ ) ma sempre in periodi definiti. L'interesse composto convertibile viene indicato mediante la fissazione di un saggio annuo nominale a cui corrisponde un saggio convertibile pari al saggio annuo nominale diviso il numero di volte che l'interesse matura nell'anno:

$$r_c = \frac{r_n}{t}$$

Si applicano le formule dell'interesse composto discontinuo annuo con le seguenti modifiche:

$$1) r_c = \frac{r}{t} \quad 2) n_c = n \cdot t$$

Dove:

$r_c$  = saggio convertibile

$t$  = numero di volte in cui l'interesse si converte in un anno

$n_c$  = numero di volte in cui l'interesse convertibile matura nell'intero periodo

# INTERESSE COMPOSTO DISCONTINUO CONVERTIBILE

Calcolo del montante:

$$M = C_0 \left(1 + \frac{r}{t}\right)^{nt}$$

Formule derivate:

$$C_0 = \frac{M}{\left(1 + \frac{r}{t}\right)^{nt}}$$

$$I = M - C_0 = C_0 \left(1 + \frac{r}{t}\right)^{nt} - C_0 = C_0 \cdot \left[ \left(1 + \frac{r}{t}\right)^{nt} - 1 \right]$$

# INTERESSE COMPOSTO DISCONTINUO CONVERTIBILE

Calcolo del saggio di interesse annuo effettivo a partire dal saggio di interesse nominale.

Il saggio effettivo è sempre maggiore rispetto a quello nominale.

$$I = C_0 \left[ \left( 1 + \frac{r}{t} \right)^{nt} - 1 \right]$$

Per  $C_0 = 1$  Lira

$n = 1$  anno

$I = r$

$$r_{\text{effettivo}} = \left( 1 + \frac{r_{\text{nominale}}}{t} \right)^t - 1$$

# SPOSTAMENTO DEI CAPITALI NEL TEMPO:

## POSTICIPAZIONE E ANTICIPAZIONE

VALORE SCONTATO  $\frac{\text{ANTICIPAZIONE}}{\$}$   $\frac{\text{POSTICIPAZIONE}}{\text{MONTANTE}}$

NON SI POSSONO ADDIZIONARE, SOTTRARRE O CONFRONTARE VALORI DIFFERENTI NEL TEMPO

### COEFFICIENTI DI POSTICIPAZIONE

Regime a interesse semplice:  $(1+rn)$

Regime a interesse composto:  $q^n$

### COEFFICIENTI DI ANTICIPAZIONE

Regime a interesse semplice:  $\frac{1}{(1+rn)}$       Regime a interesse composto:  $\frac{1}{q^n}$

# TEMPO IMPIEGATO DA UN CAPITALE PER RADDOPPIARE

$$(q^n = 2)$$

**SAGGIO**

**ANNI**

2%

35 – 36

3%

23 – 24

4%

17 – 18

5%

14 – 15

6%

11 – 12

7%

10 – 11

8%

9 – 10

9%

8 – 9

10%

7 – 8

## SUGGERIMENTI PRATICI DI VERIFICA

1) Attraverso la posticipazione si ottiene sempre un valore superiore al valore dato (poiché il saggio è positivo):

$$C_0 \cdot q^n > C_0 \qquad q^n > 1$$

2) Attraverso l'anticipazione si ottiene sempre un valore inferiore al valore dato:

$$C_0 \cdot \frac{1}{q^n} < C_0 \qquad \frac{1}{q^n} < 1$$

# VALORI PERIODICI

Si definiscono valori periodici quei valori costanti (ricavi o costi) che si verificano ad intervalli di tempo regolari.

Normalmente essi sono distinti in:

## **annualità e periodicità**

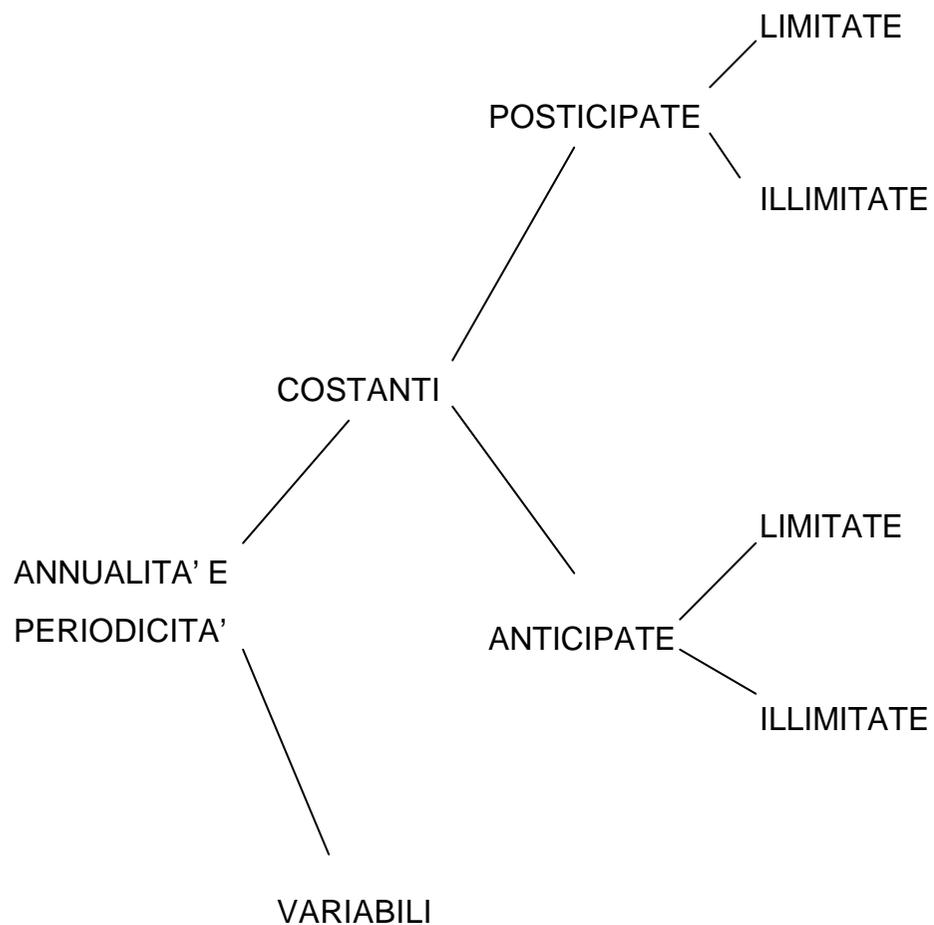
Le annualità sono valori che si ripetono ad intervalli regolari di un anno.

Le periodicità sono valori che si ripetono ogni determinato numero di anni.

I valori periodici possono essere:

- Rispetto alla scadenza, posticipati o anticipati, a seconda che si verifichino alla fine o all'inizio di ogni periodo.
- Rispetto alla durata, limitati o illimitati a seconda che si verifichino per un momento finito o indefinito di anni.

# PROBLEMI



	ACCUMULAZIONE INIZIALE	ACCUMULAZIONE FINALE	ACCUMULAZIONE INTERMEDIA
LIMITATE (POSTICIPATE)	X	X	X
ILLIMITATE (POSTICIPATE)	X		
LIMITATE (ANTICIPATE)	X	X	X
ILLIMITATE (ANTICIPATE)	X		

ACCUMULAZIONE DEI VALORI CON IL METODO DELLO SPOSTAMENTO DEI VALORI NEL TEMPO

# ANNUALITA' COSTANTI POSTICIPATE LIMITATE

Sono rendite (o costi) di uguale valore, che si realizzano alla fine di ogni anno per un determinato numero di anni.

Tre sono i problemi relativi alle annualità costanti posticipate limitate:

## -Accumulazione Finale

Si ottiene posticipando alla fine del del periodo le varie annualità e sommandole assieme

$$A_n = \frac{q^n - 1}{r} \quad A = \text{annualità} \quad n = \text{numero anni}$$

## -Accumulazione iniziale

Si ottiene riferendo le annualità all'anno zero del periodo e sommandole assieme

$$A_0 = a \frac{q^n - 1}{rq^n} \quad \text{Si può ricavare dall' } A_n \text{ scontandolo a all'attualità con il coefficiente } \frac{1}{q^n}$$

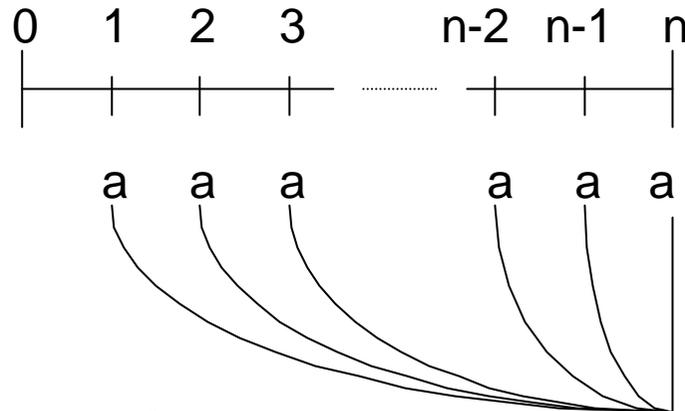
## -Accumulazione intermedia

Si ottiene riferendo le annualità ad un anno intermedio  $m$  del periodo

$$A_m = A_0 \cdot q^m \quad \text{oppure} \quad A_m = A_n \frac{1}{q^{n-m}}$$

# ANNUALITA' COSTANTI POSTICIPATE LIMITATE

Determinazione dell'accumulazione finale



$$A_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

$$A_n = a(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1})$$

[si tratta di una progressione geometrica con ragione\* q, si risolve moltiplicando l'ultimo termine per la ragione meno il primo termine e dividendo tutto per la ragione meno uno]

$$A_n = a \frac{q^{n-1} \cdot q - 1}{q - 1} = a \frac{q^n - 1}{1 + r - 1} = a \frac{q^n - 1}{r} \qquad A_n = a \frac{q^n - 1}{r}$$

\* La ragione in una progressione geometrica è data dal rapporto tra un termine e quello successivo

# ANNUALITA' COSTANTI ANTICIPATE LIMITATE

Sono rendite (o costi) di uguale valore, che si realizzano all'inizio di ogni anno per un determinato numero di anni.

Anche per le annualità costanti anticipate limitate tre sono i problemi:

-Accumulazione finale

Si ottiene posticipando alla fine del periodo le varie annualità e sommandole assieme

$$A_n = aq \frac{q^n - 1}{r}$$

-Accumulazione iniziale

Si ottiene riferendo le annualità dell'anno zero del periodo e sommandole assieme

$$A_0 = aq \frac{q^n - 1}{r \cdot q^n}$$

-Accumulazione intermedia

Si ottiene riferendo le annualità ad un anno intermedio del periodo

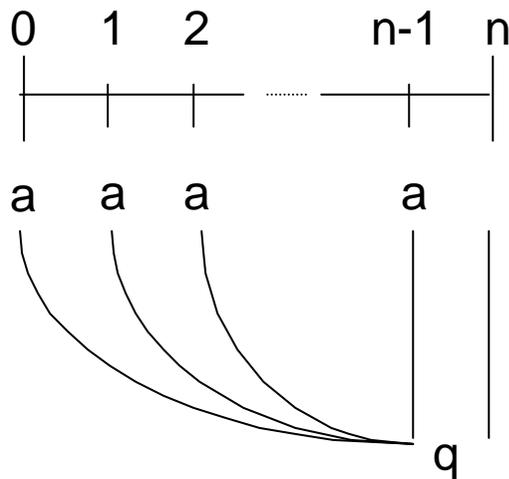
$$A_m = A_0 \cdot q^m \quad \text{oppure} \quad A_m = A_n \frac{1}{q^{n-m}}$$

# ANNUALITA' COSTANTI ANTICIPATE LIMITATE

Determinazione dell'accumulazione finale: Si ricava con un procedimento matematico analogo a quello utilizzato per le annualità posticipate.

Più facilmente si può osservare che le annualità anticipate si verificano un anno prima di quelle posticipate.

Basterà, quindi, posticipare di un anno l'annualità mediante il coefficiente  $q$  e applicare il coefficiente di accumulazione già utilizzato per le annualità posticipate.



$$A_n = a \frac{q^n - 1}{r} q$$

# ANNUALITA' COSTANTI POSTICIPATE ILLIMITATE

Sono rendite (o costi) di uguale valore, che si realizzano alla fine di ogni anno per un tempo infinitamente lungo.

Per le annualità costanti posticipate illimitate sussiste solo un problema:

- Accumulazione iniziale

$$A_0 = \frac{a}{r}$$

La formula è analoga alla  $C_0 = \frac{I}{r}$

Tali formule sono chiamate formule di capitalizzazione dei redditi annui, costanti, posticipati, illimitati (ogni volta che si divide il reddito medio annuo costante posticipato di un capitale per il suo saggio di interesse, si ottiene il valore del capitale capace di generare tale reddito).

# ANNUALITA' COSTANTI POSTICIPATE ILLIMITATE

Determinazione dell'accumulazione iniziale

$$\begin{aligned} A_0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cdot a \frac{q^n - 1}{r \cdot q^n} = \frac{a}{r} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n - 1}{q^n} = \\ &= \frac{a}{r} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{q^n}{q^n} - \frac{1}{q^n} \right) = \frac{a}{r} \end{aligned}$$

# ANNUALITA' COSTANTI ANTICIPATE ILLIMITATE

Sono rendite (o costi) di uguale valore, che si realizzano all'inizio di ogni anno per un tempo infinitamente lungo.

Anche per le annualità costanti anticipate illimitate si può parlare solo di:

- Accumulazione iniziale

$$A_0 = \frac{aq}{r}$$

Si ottiene facilmente dall' analoga formula relativa alle annualità posticipate illimitate, tenendo conto che le annualità anticipate si verificano un anno prima di quelle posticipate. E' sufficiente, quindi, posticipare di un anno l'annualità anticipata.

# PERIODICITA' (O POLIANNUALITA')

Simboli:

n=numero anni del periodo (intervallo di tempo che intercorre tra il verificarsi di due successivi valori periodici)

t = numero dei periodi

Periodicità costanti posticipate limitate: accumulazione finale

$$A_{tn} = p \frac{q^{tn} - 1}{q^n - 1}$$

Periodicità costanti posticipate limitate: accumulazione iniziale

$$A_0 = p \frac{q^{tn} - 1}{q^n - 1} \frac{1}{q^{tn}}$$

Periodicità costanti anticipate limitate: accumulazione finale

$$A_{tn} = p \frac{q^{tn} - 1}{q^n - 1} q^n$$

## PERIODICITA' (O POLIANNUALITA') 2

Periodicità costanti anticipate limitate: accumulazione iniziale

$$A_0 = p \frac{q^{tn} - 1}{q^n - 1} \frac{1}{q^{tn}} q^n$$

Periodicità costanti posticipate illimitate: accumulazione iniziale

$$A_0 = p \frac{1}{q^n - 1}$$

Periodicità costanti anticipate illimitate: accumulazione iniziale

$$A_0 = p \frac{1}{q^n - 1} q^n$$

# CALCOLO DELL'INTERESSE REALE

## IN PRESENZA DI INFLAZIONE

Il rendimento reale degli investimenti finanziari si ottiene nel seguente modo:

$$r_r = \frac{r_n - r_i}{1 + r_i}$$

Dove:

$r_r$  = tasso di rendimento reale

$r_n$  = tasso di rendimento nominale

$r_i$  = tasso di inflazione

Correntemente si usa anche la formula:

$$r_r = r_n - r_i$$

Tale formula è scorretta ma fornisce risultati approssimativamente simili alla precedente se usata per tassi d'inflazione bassi e periodi brevi

# CALCOLO DELL'INTERESSE REALE

## DIMOSTRAZIONE

La formula per il calcolo di rendimento reale può essere ricavata da quella per il calcolo del montante reale:

$$M_r = \frac{M_n}{(1+r_i)^n} \quad \text{Poiché:} \quad M_r = C_0(1+r_r)^n; M_n = C_0(1+r_n)^n$$

$$\text{Possiamo scrivere: } C_0(1+r_r)^n = \frac{C_0(1+r_n)^n}{(1+r_i)^n}$$

Dividendo entrambi i membri per  $C_0$  e facendo la radice n-esima

$$1+r_r = \frac{1+r_n}{1+r_i} \Rightarrow r_r = \frac{1+r_n}{1+r_i} - 1 \Rightarrow r_r = \frac{1+r_n - 1 - r_i}{1+r_i} \Rightarrow r_r = \frac{r_n - r_i}{1+r_i}$$

Con:  $r_r$ = tasso reale;  $r_n$ = tasso nominale;  $r_i$ = tasso d'inflazione;  $M_n$ = montante nominale;  $M_r$ = montante reale

# STRUMENTI PRATICI DI CALCOLO

Il tradizionale supporto per il calcolo finanziario sono le tavole finanziarie.

Le tavole finanziarie contengono i valori calcolati, per diversi valori di  $n$  ed  $r$ , dei principali coefficienti usati nel calcolo finanziario (vedi tavole).

Uno strumento più avanzato sono le calcolatrici finanziarie.

Le calcolatrici finanziarie contengono le principali funzioni finanziarie. Permettono la ricerca rapida del valore di parametri che richiederebbero lunghi calcoli manuali. Ad esempio il valore di  $r$  dati  $a$ ,  $n$  ed  $A_0$  nelle formule delle annualità, che può essere trovato solo per tentativi.

I fogli elettronici (Excel) permettono l'esecuzione delle più comuni operazioni finanziarie, mediante la scrittura delle relative formule o l'uso delle funzioni finanziarie (vedi elenco funzioni finanziarie di Excel)