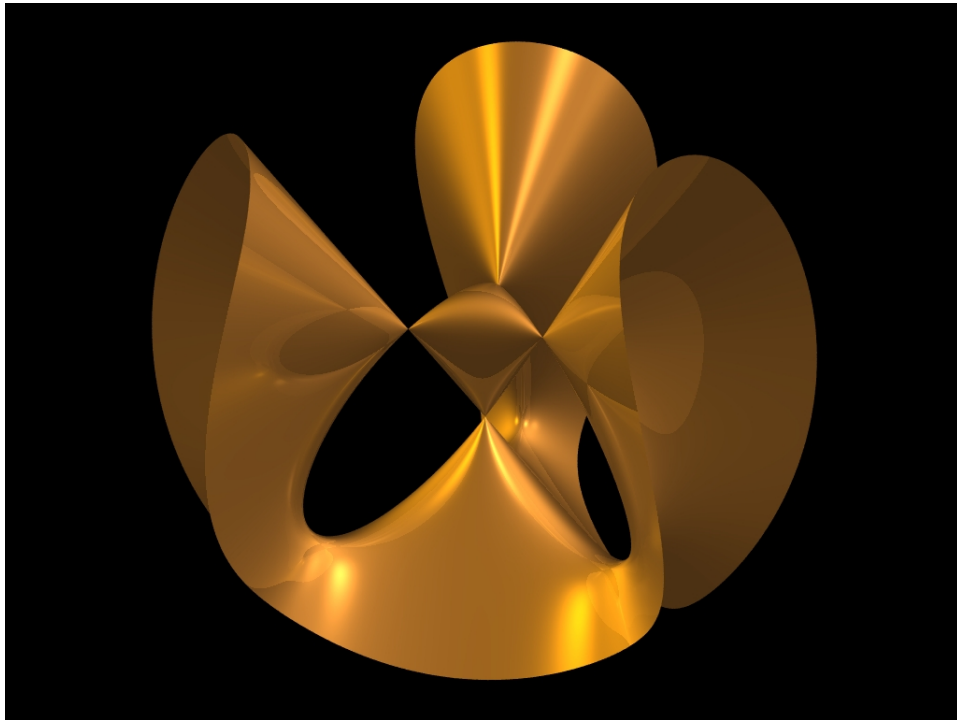

Università degli Studi di Salerno



**Introduzione alla
GEOMETRIA ALGEBRICA**

Francesco Bottacin

A.A. 2006/07

Indice

1	Varietà	1
1.1	Varietà Affini	1
1.1.1	Insiemi algebrici	2
1.1.2	Insiemi algebrici irriducibili	6
1.1.3	L'anello delle coordinate affini	11
1.1.4	Funzioni regolari	12
1.1.5	Dimensione di una varietà affine	14
1.2	Varietà Proiettive	19
1.2.1	Relazioni tra \mathbb{A}_k^n e \mathbb{P}_k^n	23
1.3	Morfismi di varietà	24
1.4	Anelli di funzioni associati alle varietà	26
1.5	Un'equivalenza di categorie	32
1.5.1	Confronto tra il caso affine e il caso proiettivo	37
1.5.2	Prodotto di due varietà affini	39
1.5.3	Prodotto di due varietà proiettive	41
1.6	Mappe razionali, equivalenza birazionale	43
1.7	Varietà nonsingolari	47
2	Schemi	53
2.1	Fasce	53
2.1.1	Morfismi di fasce	56
2.1.2	Fascio associato a un prefascio	58
2.1.3	Nuclei, conuclei e immagini	59
2.1.4	Immagini dirette e immagini inverse	61
2.2	Spazi anellati	63
2.2.1	Spazi localmente anellati	64
2.2.2	Lo spettro di un anello	65
2.3	Schemi	72
2.3.1	Incollamento di schemi	75
2.3.2	Schemi proiettivi	76
2.3.3	Schemi e varietà	78
2.3.4	Sottoschemi	80

2.3.5	Alcune proprietà degli schemi	82
2.3.6	Prodotto fibrato di schemi	85
2.3.7	Fibre di un morfismo di schemi	86
2.3.8	Morfismi separati	87
2.3.9	Morfismi propri	91
2.3.10	Morfismi proiettivi	94
Bibliografia		97

Capitolo 1

Varietà

1.1 Varietà Affini

Sia k un campo qualunque, che consideriamo fissato. Per il momento non facciamo alcuna ipotesi su k , in particolare non richiediamo che k sia algebricamente chiuso.

Definizione 1.1.1. Lo spazio affine n -dimensionale sul campo k è

$$\mathbb{A}_k^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in k, 1 \leq i \leq n\}.$$

Qualora sia chiaro dal contesto chi è il campo k , scriveremo semplicemente \mathbb{A}^n per indicare \mathbb{A}_k^n .

Osservazione 1.1.2. Naturalmente è $\mathbb{A}_k^n \cong k^n$. Useremo tuttavia la notazione k^n per indicare l'insieme k^n dotato della struttura naturale di *spazio vettoriale*, mentre con il simbolo \mathbb{A}_k^n indicheremo l'*insieme* (di punti) k^n .

Dato il campo k , indicheremo con $A = k[x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi su k nelle indeterminate x_1, \dots, x_n . Notiamo che un polinomio $f \in A$ definisce una funzione (che indicheremo con il simbolo \tilde{f})

$$\tilde{f} : \mathbb{A}_k^n \rightarrow k, \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto f(a_1, \dots, a_n).$$

Se k è un campo algebricamente chiuso un polinomio $f \in A$ è univocamente determinato¹ dai valori assunti dalla corrispondente funzione \tilde{f} , cioè, per ogni $f, g \in A$, si ha

$$f = g \Leftrightarrow \tilde{f} = \tilde{g} \Leftrightarrow f(a_1, \dots, a_n) = g(a_1, \dots, a_n), \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_k^n.$$

¹In generale non è vero che la funzione \tilde{f} associata a un polinomio f lo determina in modo unico. Consideriamo, ad esempio, la retta affine \mathbb{A}_k^1 , con $k = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (il quale non è algebricamente chiuso). Tale retta affine ha solo tre punti, 0, 1 e 2. I due polinomi $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^4 + 1$ sono diversi, tuttavia si ha $f(a) = g(a)$ per ogni $a \in \mathbb{A}_k^1$, il che significa che le funzioni \tilde{f} e \tilde{g} sono uguali.

In tal caso potremo quindi identificare un polinomio $f \in A$ con la corrispondente funzione \tilde{f} e usare lo stesso simbolo per entrambi.

Osservazione 1.1.3. In geometria (e non solo) è del tutto naturale considerare come oggetto di studio, non tanto uno “spazio” (di un qualche tipo), ma una coppia costituita da uno “spazio” e dalle “funzioni” definite su di esso. Naturalmente la scelta di quali “funzioni” considerare dipende da quale tipo di “spazio” vogliamo studiare e in quale contesto. A titolo di esempio, se il nostro “spazio” X è uno spazio topologico, sarà naturale considerare le funzioni continue definite su X (a valori in \mathbb{R} , oppure in \mathbb{C}). In geometria differenziale, X sarà una varietà differenziabile (reale); in questo caso sarà naturale scegliere come “funzioni” su X le funzioni da X in \mathbb{R} di classe C^∞ . Se invece X è una varietà analitica complessa, la scelta naturale delle “funzioni” su X sarà data dalle funzioni analitiche da X a \mathbb{C} . Nell’ambito della geometria algebrica, le funzioni naturali da considerare saranno quelle di natura “algebrica,” cioè costruibili usando le operazioni definite su un campo (somme, prodotti, quozienti, ...). Le funzioni che si ottengono in questo modo sono essenzialmente dei polinomi, o dei rapporti di polinomi, del tipo $f(x_1, \dots, x_n)/g(x_1, \dots, x_n)$, dove naturalmente si deve avere $g(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ per ogni punto (a_1, \dots, a_n) dell’insieme di definizione della funzione in questione.

1.1.1 Insiemi algebrici

L’oggetto di studio classico della geometria algebrica è l’insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni polinomiali, del tipo

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_r(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

dove $f_1, \dots, f_r \in A$.

Se tutti i polinomi f_i hanno grado 1, si ottiene un sistema di equazioni lineari la cui soluzione non presenta alcun problema (lo studio di tali sistemi rientra più nell’Algebra Lineare che nella Geometria). La situazione si complica notevolmente nel caso di polinomi di grado ≥ 2 .

Consideriamo, ad esempio, il caso dei polinomi in due indeterminate. Intuitivamente noi vorremmo pensare al luogo delle soluzioni di una equazione del tipo $f(x, y) = 0$ come a una “curva” nel piano affine \mathbb{A}_k^2 . Se k è il campo reale, infatti, è del tutto naturale chiamare “curva” l’insieme dei punti del piano che soddisfano equazioni come $y - x^2 = 0$, oppure $y^2 - x^3 = 0$, oppure

ancora $x^2 + y^2 - 4 = 0$. Tuttavia non sempre le cose vanno così bene: l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x^2 + y^2 = 0$ è costituito dal solo punto $(0, 0)$, e chiamare “curva” tale insieme non appare molto appropriato! Come se non bastasse, ci sono delle equazioni il cui insieme delle soluzioni è l'insieme vuoto, ad esempio $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Anche in questo caso non si può certamente dire che questa equazione rappresenti una “curva” nel piano.

La situazione appena descritta migliora notevolmente se si passa dal piano affine reale $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ al piano affine complesso $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$, cioè se si sostituisce il campo di base \mathbb{R} con il campo complesso \mathbb{C} , il quale è *algebricamente chiuso*. In questo caso infatti, ogni polinomio di grado positivo ha un insieme non vuoto di zeri. Per questa ragione, classicamente, nello studio geometrico dei sistemi di equazioni polinomiali (di grado ≥ 2) si suppone che il campo di base k sia algebricamente chiuso.

A partire da questo momento supporremo quindi che k sia un campo algebricamente chiuso.

Ritorniamo al problema dello studio dell'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni polinomiali. Ci possiamo chiedere se siano veramente le *equazioni* l'oggetto giusto da considerare. Il fatto è che sistemi di equazioni diversi possono avere lo stesso insieme di soluzioni: ad esempio, i tre sistemi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ x^2(y^3 - 2y + 1) + y = 0 \end{cases}$$

hanno come unica soluzione il solo punto di coordinate $(0, 0)$ (nel caso del secondo sistema questo è vero se la caratteristica del campo è diversa da 2).

In effetti, se un insieme $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ è definito dalle equazioni

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_r(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

ogni polinomio del tipo

$$g = h_1 f_1 + h_2 f_2 + \dots + h_r f_r,$$

per ogni $h_1, \dots, h_r \in A$, si annulla in tutti i punti di X . L'insieme dei polinomi g di questo tipo è un ideale \mathfrak{a} generato dai polinomi f_1, \dots, f_r e indicato con $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$. Questo ragionamento ci fa capire che, in realtà, gli oggetti algebrici fondamentali da considerare non sono tanto le equazioni, quanto piuttosto gli ideali. Diamo quindi la seguente definizione di insieme algebrico:

Definizione 1.1.4. Sia \mathfrak{a} un ideale dell'anello $A = k[x_1, \dots, x_n]$. L'insieme degli zeri di \mathfrak{a} è

$$Z(\mathfrak{a}) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_k^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall f \in \mathfrak{a}\}.$$

Chiameremo insiemi algebrici di \mathbb{A}_k^n gli insiemi del tipo $Z(\mathfrak{a})$, al variare di \mathfrak{a} fra gli ideali di A .

Osservazione 1.1.5. Si potrebbe pensare di generalizzare ulteriormente la definizione di insieme algebrico considerando l'insieme degli zeri di un *sottoinsieme* qualunque T di A :

$$Z(T) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_k^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall f \in T\}.$$

Tuttavia è immediato verificare che, se indichiamo con $I(T)$ l'ideale generato da T (il più piccolo ideale di A che contiene T), si ha $Z(T) = Z(I(T))$. Non si troverebbe quindi nulla di nuovo considerando insiemi degli zeri di sottoinsiemi qualunque di A piuttosto che insiemi degli zeri di ideali.

Nel passare da insiemi degli zeri di un numero finito di polinomi a insiemi degli zeri di ideali potrebbe, a prima vista, sembrare che la situazione si sia notevolmente complicata: abbiamo sostituito un numero finito di equazioni con un numero infinito di esse! L'algebra però ci viene in aiuto: in effetti, gli anelli di polinomi del tipo $k[x_1, \dots, x_n]$ sono noetheriani, quindi ogni loro ideale è finitamente generato. Per ogni ideale \mathfrak{a} di A esistono dunque dei polinomi $f_1, \dots, f_r \in A$ tali che $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$. Di conseguenza, si ha:

$$Z(\mathfrak{a}) = Z(f_1, \dots, f_r) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_k^n \mid f_i(a_1, \dots, a_n) = 0, 1 \leq i \leq r\}.$$

In altre parole, ogni insieme algebrico può sempre essere descritto da un numero finito di equazioni.

Vediamo ora alcune proprietà degli insiemi algebrici.

Proposizione 1.1.6. (i) *L'unione di due insiemi algebrici è un insieme algebrico (di conseguenza, anche l'unione di una famiglia finita di insiemi algebrici è un insieme algebrico).*

(ii) *L'intersezione di una famiglia qualsiasi di insiemi algebrici è un insieme algebrico.*

(iii) *L'insieme vuoto e tutto lo spazio \mathbb{A}_k^n sono degli insiemi algebrici.*

Dimostrazione. (i) Se $X_1 = Z(\mathfrak{a}_1)$ e $X_2 = Z(\mathfrak{a}_2)$, allora $X_1 \cup X_2 = Z(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)$.

(ii) Se $X_\alpha = Z(\mathfrak{a}_\alpha)$ è una famiglia di insiemi algebrici, si ha

$$\bigcap_{\alpha} X_{\alpha} = Z\left(\sum_{\alpha} \mathfrak{a}_{\alpha}\right).$$

(iii) $\emptyset = Z(1)$ e $\mathbb{A}_k^n = Z(0)$. □

Notiamo che, in base a questo risultato, gli insiemi algebrici soddisfano alle stesse proprietà degli insiemi *chiusi* di una topologia. Possiamo quindi usarli per definire una topologia sullo spazio affine \mathbb{A}_k^n .

Definizione 1.1.7. La *topologia di Zariski* su \mathbb{A}_k^n è la topologia i cui insiemi chiusi sono i sottoinsiemi algebrici di \mathbb{A}_k^n . Se $X \subset \mathbb{A}_k^n$, la topologia di Zariski su X è la topologia indotta dalla topologia di Zariski di \mathbb{A}_k^n .

Esempio 1.1.8. Sia k un campo algebricamente chiuso e consideriamo la retta affine \mathbb{A}_k^1 . Il corrispondente anello dei polinomi è $A = k[x]$, che è un dominio di integrità a ideali principali. Quindi ogni ideale \mathfrak{a} di A è generato da un polinomio $f(x) \in A$. Poiché k è algebricamente chiuso, ogni polinomio $f(x)$ di grado r si scompone come prodotto di r fattori lineari

$$f(x) = c(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_r),$$

con $c, a_1, \dots, a_r \in k$, e si ha quindi

$$Z(\mathfrak{a}) = Z(f) = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}.$$

Si conclude così che i sottoinsiemi chiusi di \mathbb{A}_k^1 sono, oltre all'insieme vuoto e a tutto lo spazio \mathbb{A}_k^1 , solo gli insiemi finiti di punti. I sottoinsiemi aperti, essendo i complementari dei chiusi, sono pertanto i complementari dei sottoinsiemi finiti di \mathbb{A}_k^1 (oltre naturalmente all'insieme vuoto e a tutto lo spazio). Dato che k è algebricamente chiuso, esso contiene infiniti elementi² e, di conseguenza, tutti i sottoinsiemi aperti di \mathbb{A}_k^1 (tranne il sottoinsieme vuoto) hanno infiniti elementi. In particolare, due qualsiasi aperti non-vuoti hanno sempre intersezione diversa dal vuoto e ogni aperto non-vuoto è denso. Questa topologia non è quindi una topologia di Hausdorff.

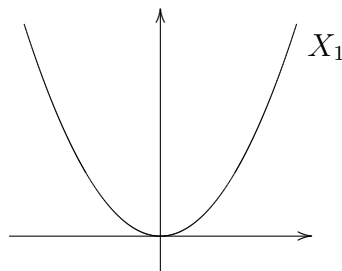
Esempio 1.1.9. Nell'esempio precedente abbiamo analizzato la topologia di Zariski di \mathbb{A}_k^1 . Utilizzando questo risultato, e la descrizione della topologia di Zariski di \mathbb{A}_k^2 , è facile dimostrare che la topologia di Zariski di $\mathbb{A}_k^2 = \mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{A}_k^1$ non è la topologia prodotto delle topologie di Zariski di \mathbb{A}_k^1 .

Osservazione 1.1.10. Se k è il campo complesso \mathbb{C} , nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ c'è, oltre alla topologia di Zariski, anche la classica topologia complessa, la quale è molto più fine di quella di Zariski. La topologia di Zariski, tuttavia, ha il vantaggio di poter essere definita per qualunque campo di base (anche di caratteristica positiva).

²Chi non lo sa, provi a dimostrarlo per esercizio.

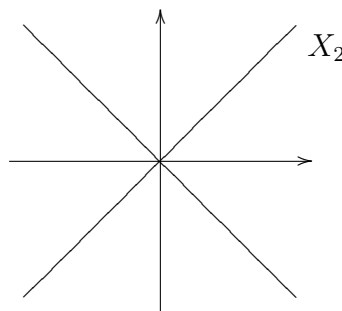
1.1.2 Insiemi algebrici irriducibili

Gli insiemi algebrici possono, a volte, essere realizzati come unione di insiemi algebrici più piccoli. Consideriamo i seguenti esempi in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$. Sia $X_1 = Z(y - x^2)$, cioè X_1 è la curva di equazione $y - x^2 = 0$. Nella figura seguente è rappresentata la parte reale di X_1 :



Il polinomio $y - x^2$ è irriducibile, cioè non può essere espresso come prodotto di due polinomi di grado strettamente minore di 2. Dal punto di vista geometrico questo si traduce nel fatto che la curva X_1 è costituita da una unica “componente,” cioè non può essere decomposta come unione di due insiemi algebrici più piccoli. X_1 è quindi un insieme algebrico *irriducibile*.

Diverso invece è il caso dell’insieme algebrico $X_2 = Z(x^2 - y^2)$. Infatti il polinomio $x^2 - y^2$ si scompone nel prodotto di due fattori di primo grado $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, e quindi la curva X_2 di equazione $x^2 - y^2 = 0$ è l’unione delle due curve (rette) di equazioni $x + y = 0$ e $x - y = 0$, rispettivamente. Nella figura seguente è rappresentata la parte reale di X_2 .



Le due rette in questione sono quindi due “componenti irriducibili” dell’insieme algebrico X_2 , che verrà quindi detto *riducibile*. In un certo senso quindi, gli insiemi algebrici irriducibili sono i “pezzi elementari” di costruzione di tutti gli insiemi algebrici.

Possiamo ora dare le definizioni precise di insieme riducibile e di insieme irriducibile, che in realtà sono delle nozioni puramente topologiche. Definiremo quindi questi concetti in generale, per ogni spazio topologico, anche se poi li useremo solo nel caso della topologia di Zariski.

Definizione 1.1.11. Sia X uno spazio topologico. Un sottoinsieme non vuoto Y di X è *irriducibile* se non è unione di due sottoinsiemi propri, ciascuno dei quali è chiuso in Y . Un sottoinsieme di X è detto *riducibile* se non è irriducibile. Ogni sottoinsieme non vuoto Y di X può quindi essere espresso come unione di sottoinsiemi irriducibili

$$Y = \bigcup Y_i,$$

i quali sono detti le *componenti irriducibili* di Y .

Esempio 1.1.12. Consideriamo la retta affine \mathbb{A}_k^1 su un campo algebricamente chiuso k (con la topologia di Zariski). Dato che ogni sottoinsieme chiuso proprio è finito, mentre \mathbb{A}_k^1 è infinito (perché k è algebricamente chiuso), si conclude che \mathbb{A}_k^1 è irriducibile.

Si può facilmente dimostrare che se Y è un sottoinsieme irriducibile di uno spazio topologico X , anche la sua chiusura \bar{Y} è irriducibile (farlo per esercizio).

Data l'importanza degli insiemi algebrici irriducibili, diamo la seguente definizione:

Definizione 1.1.13. Una *varietà affine* sul campo k è un sottoinsieme chiuso irriducibile di \mathbb{A}_k^n , dotato della topologia di Zariski. Un sottoinsieme aperto di una varietà affine è detto *varietà quasi-affine*.

Vale il seguente risultato:

Proposizione 1.1.14. Ogni insieme algebrico $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ può essere espresso in modo unico come unione finita di varietà (le quali sono chiamate le *componenti irriducibili* di X), nessuna delle quali ne contiene un'altra.

La dimostrazione di questo risultato verrà ora data in un ambito un po' più generale. Premettiamo la seguente definizione:

Definizione 1.1.15. Uno spazio topologico X è detto *noetheriano* se soddisfa la *condizione catenaria discendente* per i sottoinsiemi chiusi, cioè se per ogni sequenza $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots$ di sottoinsiemi chiusi, esiste un intero r tale che $Y_r = Y_{r+1} = \dots$.

La definizione di spazio topologico noetheriano corrisponde alla nozione di anello noetheriano. Questo fatto è bene illustrato dall'esempio seguente:

Esempio 1.1.16. Lo spazio affine \mathbb{A}_k^n è uno spazio topologico noetheriano. Infatti, data una catena discendente $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots$ di sottoinsiemi chiusi, si ha una catena ascendente di ideali $I(Y_1) \subseteq I(Y_2) \subseteq \dots$ nell'anello dei polinomi $A = k[x_1, \dots, x_n]$ (per la definizione degli ideali $I(Y)$ si veda la Definizione 1.1.18) e, dato che l'anello A è noetheriano, questa catena ascendente di ideali è stazionaria. Dato che, per ogni i , $Y_i = Z(I(Y_i))$, da ciò segue che anche la catena di sottoinsiemi chiusi Y_i è stazionaria.

Dimostriamo ora il seguente risultato, da cui segue immediatamente la Proposizione 1.1.14.

Proposizione 1.1.17. *Sia X uno spazio topologico noetheriano. Ogni sottoinsieme chiuso non-vuoto Y di X può essere espresso come unione finita $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$ di sottoinsiemi chiusi irriducibili $Y_i \subset X$. Se si richiede che $Y_i \not\subseteq Y_j$ per $i \neq j$, allora gli Y_i sono univocamente determinati; essi sono chiamati le componenti irriducibili di Y .*

Dimostrazione. Iniziamo col dimostrare l'esistenza di una tale decomposizione di Y . Indichiamo con \mathfrak{S} l'insieme di tutti i sottoinsiemi chiusi non-vuoti di X che non possono essere scritti come unione finita di sottoinsiemi chiusi irriducibili. Naturalmente, vogliamo dimostrare che $\mathfrak{S} = \emptyset$. Se \mathfrak{S} è diverso dall'insieme vuoto, allora, dato che X è noetheriano, esso deve contenere un elemento minimale, che indicheremo con Y (altrimenti si otterrebbe una catena discendente non stazionaria di sottoinsiemi chiusi di X). Questo insieme Y non può essere irriducibile, per costruzione di \mathfrak{S} , quindi possiamo scrivere $Y = Y' \cup Y''$, dove Y' e Y'' sono sottoinsiemi chiusi propri di Y . In base alla minimalità di Y , gli insiemi Y' e Y'' non appartengono a \mathfrak{S} e quindi possono essere espressi come unione finita di sottoinsiemi chiusi irriducibili di X . Ma allora lo stesso vale per Y , il che contraddice il fatto che $Y \in \mathfrak{S}$. Si conclude pertanto che ogni sottoinsieme chiuso Y di X può essere scritto come unione $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$ di sottoinsiemi chiusi irriducibili. Eliminando alcuni di questi insiemi, se necessario, possiamo supporre che $Y_i \not\subseteq Y_j$, per $i \neq j$. Supponiamo ora che esista un'altra rappresentazione $Y = Y'_1 \cup \dots \cup Y'_s$ come sopra. Allora si ha $Y'_1 \subseteq Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$, da cui segue che

$$Y'_1 = \bigcup_i (Y'_1 \cap Y_i).$$

Ma, dato che Y'_1 è irriducibile, si deve avere $Y'_1 \subseteq Y_i$, per qualche i , e possiamo anche supporre che sia $i = 1$ (a meno di un riordinamento degli indici). In modo del tutto analogo, si deve avere $Y_1 \subseteq Y'_j$, per qualche j . Allora si ha anche $Y'_1 \subseteq Y'_j$, da cui si deduce che $j = 1$ e che $Y_1 = Y'_1$. Sia ora $Z = \overline{Y} \setminus \overline{Y_1}$. Allora $Z = Y_2 \cup \dots \cup Y_r$, e anche $Z = Y'_2 \cup \dots \cup Y'_s$. In questo modo, procedendo per induzione su r , si dimostra l'unicità degli Y_i . \square

Riprendendo il discorso generale, abbiamo visto che a ogni ideale \mathfrak{a} (o, più in generale, a ogni sottoinsieme T) dell'anello dei polinomi $A = k[x_1, \dots, x_n]$ è possibile associare un particolare tipo di sottoinsieme di \mathbb{A}_k^n chiamato insieme algebrico, $Z(\mathfrak{a})$ (o $Z(T)$).

Cerchiamo ora di costruire una sorta di “inversa” di questa corrispondenza, cioè di associare a un sottoinsieme Y di \mathbb{A}_k^n un ideale di A .

Definizione 1.1.18. Sia $Y \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un sottoinsieme qualsiasi. L'ideale di Y è definito ponendo

$$I(Y) = \{f \in A \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall (a_1, \dots, a_n) \in Y\}.$$

Si verifica facilmente che $I(Y)$ è effettivamente un ideale di A . Valgono inoltre le seguenti proprietà, la cui facile dimostrazione è lasciata per esercizio:

Proposizione 1.1.19. (i) Se $Y_1 \subseteq Y_2$ sono due sottoinsiemi di \mathbb{A}_k^n , allora $I(Y_1) \supseteq I(Y_2)$.

(ii) Per ogni $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{A}_k^n$, si ha $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.

Si potrebbe ora sperare che le due mappe

$$\{\text{ideali di } A\} \begin{matrix} \xrightarrow{Z} \\ \xleftarrow{I} \end{matrix} \{\text{sottoinsiemi algebrici di } \mathbb{A}_k^n\}$$

siano inverse l'una dell'altra. Il seguente esempio mostra che ciò non è vero.

Esempio 1.1.20. Sia $A = k[x]$ e consideriamo l'ideale $\mathfrak{a} = (x^n)$, con $n \geq 2$. L'insieme degli zeri di \mathfrak{a} è $Y = Z(\mathfrak{a}) = \{0\} \subset \mathbb{A}_k^1$. Di conseguenza, l'ideale di Y è $I(Y) = (x)$. Si ha pertanto

$$\mathfrak{a} \subset I(Z(\mathfrak{a})).$$

Notiamo tuttavia che, in questo esempio, si ha:

$$f \in I(Z(\mathfrak{a})) \Rightarrow f^r \in \mathfrak{a}, \text{ per } r \gg 0.$$

Il prossimo teorema mostra che, se il campo k è algebricamente chiuso, questo è proprio quello che succede in generale (per una dimostrazione si veda [AM, Cap. 7, pag. 129]).

Teorema 1.1.21 (Teorema degli zeri di Hilbert). *Sia k un campo algebricamente chiuso e sia \mathfrak{a} un ideale dell'anello dei polinomi $k[x_1, \dots, x_n]$. Allora $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$,³ cioè $f \in I(Z(\mathfrak{a}))$ se e solo se $f^r \in \mathfrak{a}$, per qualche intero $r \geq 1$.*

³Se \mathfrak{a} è un ideale di un anello A , si indica con $\sqrt{\mathfrak{a}}$ (o anche con $r(\mathfrak{a})$) il *radicale* di \mathfrak{a} , definito da

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in A \mid f^r \in \mathfrak{a} \text{ per qualche } r > 0\}.$$

Osservazione 1.1.22. Il teorema degli zeri di Hilbert vale solo se il campo k è algebricamente chiuso. Questa è un'altra delle ragioni per cui, classicamente, si assume sempre che il campo di base k sia algebricamente chiuso.

Dimostriamo ora il risultato seguente:

Proposizione 1.1.23. *Per ogni sottoinsieme Y di \mathbb{A}_k^n si ha $Z(I(Y)) = \overline{Y}$, cioè $Z(I(Y))$ è il più piccolo sottoinsieme algebrico di \mathbb{A}_k^n che contiene Y .*

Dimostrazione. Si ha certamente $Y \subseteq Z(I(Y))$, e quindi $\overline{Y} \subseteq Z(I(Y))$, dato che $Z(I(Y))$ è un chiuso (per definizione) e contiene Y . Sia ora W un chiuso contenente Y . Poiché W è chiuso, esiste un ideale \mathfrak{a} tale che $W = Z(\mathfrak{a})$. Da $W = Z(\mathfrak{a}) \supseteq Y$ si deduce che $I(Z(\mathfrak{a})) = I(W) \subseteq I(Y)$. Poiché $\mathfrak{a} \subseteq I(Z(\mathfrak{a}))$, si ha $\mathfrak{a} \subseteq I(Y)$, da cui segue che $W = Z(\mathfrak{a}) \supseteq Z(I(Y))$. Abbiamo così dimostrato che ogni chiuso che contiene Y contiene anche $Z(I(Y))$, cioè che $Z(I(Y)) = \overline{Y}$. \square

In base a quanto visto, possiamo affermare che la corrispondenza tra ideali di $A = k[x_1, \dots, x_n]$ e sottoinsiemi algebrici di \mathbb{A}_k^n non è biunivoca, ma lo diventa se ci restringiamo a considerare ideali radicali (cioè ideali che coincidono con il proprio radicale). Si ottiene così una biiezione

$$\{\text{ideali radicali di } A\} \leftrightarrow \{\text{sottoinsiemi algebrici di } \mathbb{A}_k^n\}.$$

Data l'importanza della nozione geometrica di irriducibilità, vediamo ora qual è il suo corrispondente algebrico.

Proposizione 1.1.24. *Un insieme algebrico $Y \subseteq \mathbb{A}_k^n$ è irriducibile se e solo se il suo ideale $I(Y)$ è primo.*

Dimostrazione. Ricordiamo che un ideale \mathfrak{p} di un anello A si dice *ideale primo* se $\mathfrak{p} \neq A$ e se, dati $f, g \in A$ con $fg \in \mathfrak{p}$, si ha necessariamente $f \in \mathfrak{p}$ oppure $g \in \mathfrak{p}$.

Sia dunque $Y \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un insieme algebrico irriducibile e $I(Y)$ il suo ideale. Se $fg \in I(Y)$, allora $Y \subseteq Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$. Da ciò segue che

$$Y = (Y \cap Z(f)) \cup (Y \cap Z(g)),$$

ma essendo Y irriducibile, si deve avere $Y = Y \cap Z(f)$ oppure $Y = Y \cap Z(g)$. Nel primo caso si ha $Y \subseteq Z(f)$, mentre nel secondo si ha $Y \subseteq Z(g)$. Ciò significa che $f \in I(Y)$, oppure $g \in I(Y)$, e quindi $I(Y)$ è un ideale primo.

Viceversa, sia \mathfrak{p} un ideale primo e poniamo $Y = Z(\mathfrak{p})$. Supponiamo che $Y = Y_1 \cup Y_2$, con Y_1 e Y_2 sottoinsiemi algebrici di \mathbb{A}_k^n . Allora $I(Y) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$, e quindi $\mathfrak{p} = I(Y_1) \cap I(Y_2)$, dato che un ideale primo coincide con il

proprio radicale. Sempre dall'ipotesi che \mathfrak{p} è primo, segue che $\mathfrak{p} = I(Y_1)$, oppure $\mathfrak{p} = I(Y_2)$,⁴ il che equivale a dire che $Y = Y_1$ oppure $Y = Y_2$. Y è dunque irriducibile. \square

Possiamo riassumere quanto dimostrato finora con il seguente teorema:

Teorema 1.1.25. *Sia k un campo algebricamente chiuso. Esiste una corrispondenza biunivoca, che rovescia le inclusioni, tra i sottoinsiemi algebrici di \mathbb{A}_k^n e gli ideali radicali di $A = k[x_1, \dots, x_n]$, data da $Y \mapsto I(Y)$ e da $\mathfrak{a} \mapsto Z(\mathfrak{a})$. Un insieme algebrico è irriducibile se e solo se il suo ideale è primo.*

Osservazione 1.1.26. Usando la corrispondenza appena descritta tra sottoinsiemi algebrici di \mathbb{A}_k^n e ideali radicali di $A = k[x_1, \dots, x_n]$, l'analogo algebrico della decomposizione di un insieme algebrico come unione finita di insiemi algebrici irriducibili è l'espressione di un ideale radicale come intersezione di un numero finito di ideali primi. Questo risultato rientra nella cosiddetta "Teoria della decomposizione primaria degli ideali" (vedi [AM, Cap. 4]). In sostanza si tratta di un tentativo di generalizzare al caso di anelli commutativi con unità qualunque il classico risultato che stabilisce che ogni intero si può esprimere, in modo essenzialmente unico, come prodotto di potenze di numeri primi distinti (l'analogia è data dalla corrispondenza "ideale" \leftrightarrow "numero intero", "ideale primo" \leftrightarrow "numero primo", "ideale primario" \leftrightarrow "potenza di un numero primo").

1.1.3 L'anello delle coordinate affini

Abbiamo visto che, nel caso dello spazio affine \mathbb{A}_k^n , gli elementi dell'anello dei polinomi $A = k[x_1, \dots, x_n]$ definiscono delle funzioni su \mathbb{A}_k^n a valori nel campo di base k .

Sia ora $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un insieme algebrico. Le funzioni definite su \mathbb{A}_k^n definiscono, per restrizione, delle analoghe funzioni su X . Ci possiamo allora chiedere quando due polinomi $f, g \in A$ definiscano la stessa funzione su X . Naturalmente questo succederà quando $f(a_1, \dots, a_n) - g(a_1, \dots, a_n) = 0$, per ogni $(a_1, \dots, a_n) \in X$. Ma ciò equivale a dire che $f - g \in I(X)$. Si vede così che gli elementi dell'anello quoziente $A/I(X)$ definiscono delle funzioni su X , a valori in k , ottenute per restrizione da \mathbb{A}_k^n a X .

Definizione 1.1.27. Per ogni insieme algebrico $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$, indicheremo con $A(X)$ l'anello $k[x_1, \dots, x_n]/I(X)$. L'anello $A(X)$ è detto *l'anello delle coordinate affini* su X .

⁴Infatti, se fosse $\mathfrak{p} \neq I(Y_1)$ e $\mathfrak{p} \neq I(Y_2)$, esisterebbero $f_1 \in I(Y_1) \setminus \mathfrak{p}$ e $f_2 \in I(Y_2) \setminus \mathfrak{p}$. In questo caso si avrebbe $f_1 f_2 \in I(Y_1) \cap I(Y_2) = \mathfrak{p}$ e, dato che \mathfrak{p} è primo, si dovrebbe avere necessariamente $f_1 \in \mathfrak{p}$ oppure $f_2 \in \mathfrak{p}$, contro l'ipotesi.

Si ha $A(\mathbb{A}_k^n) = k[x_1, \dots, x_n]$ e, se $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ è un insieme algebrico e $I(X)$ è l'ideale corrispondente, la proiezione canonica

$$k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n]/I(X)$$

corrisponde alla restrizione delle funzioni da \mathbb{A}_k^n a X .

Osservazione 1.1.28. Naturalmente le funzioni che si ottengono in questo modo su un insieme algebrico X (quelle cioè definite da elementi dell'anello $A(X)$) sono funzioni polinomiali. Con metodi algebrici si possono costruire non solo polinomi, ma anche rapporti di polinomi, cioè funzioni del tipo $f(x_1, \dots, x_n)/g(x_1, \dots, x_n)$, con $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$. In questo caso però è necessario che il denominatore non si annulli in alcun punto di X .

1.1.4 Funzioni regolari

Come abbiamo visto in precedenza, gli elementi dell'anello delle coordinate affini $A(X)$ definiscono in modo naturale delle funzioni polinomiali globali su X , ottenute per restrizione da funzioni polinomiali definite su tutto lo spazio affine \mathbb{A}_k^n . Tuttavia non è affatto chiaro che queste siano tutte quelle che vorremmo chiamare “funzioni algebriche” su X .

Esempio 1.1.29. A titolo di esempio, consideriamo un polinomio $g \in A = k[x_1, \dots, x_n]$ e poniamo

$$X = \mathbb{A}_k^n \setminus Z(g) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_k^n \mid g(a_1, \dots, a_n) \neq 0\}.$$

X è un aperto di una varietà affine (è una varietà quasi-affine). In questo caso sarà del tutto naturale annoverare, tra le “funzioni algebriche” su X , non solo le funzioni polinomiali, ma anche funzioni del tipo

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto \frac{f(a_1, \dots, a_n)}{g(a_1, \dots, a_n)^r},$$

per ogni $f \in A$ e ogni $r \geq 0$ (in questo caso, infatti, il denominatore sarà sicuramente diverso da zero, proprio per come X è stato definito).

Per cercare quindi di costruire “funzioni algebriche” su un insieme algebrico X , oltre all'approccio “globale” seguito finora per costruire l'anello delle coordinate affini $A(X)$ (quello cioè secondo il quale le funzioni su X si ottengono per restrizione di funzioni definite su tutto lo spazio ambiente \mathbb{A}_k^n) potremmo anche seguire un approccio di tipo “locale”: in generale, se X è uno spazio topologico e $\{U_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di X , una funzione su X può anche essere costruita fornendo una famiglia di funzioni f_i , definite su ciascuno degli aperti U_i , e tali che $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$, per ogni

$i, j \in I$ (se tutte le f_i sono continue anche la funzione f ottenuta “incollando” le f_i risulterà continua). Il vantaggio di questo approccio locale è che la descrizione delle funzioni locali sugli aperti U_i potrebbe essere più semplice della descrizione delle funzioni definite globalmente su tutto lo spazio X .

Esempio 1.1.30. Un esempio classico proviene dalla geometria differenziale. Se X è una varietà differenziabile reale e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione, come si può stabilire se f può essere chiamata “di classe C^∞ ,” oppure no? L’essere “di classe C^∞ ” è chiaramente una proprietà locale. D’altra parte la varietà X è costruita “incollando” tra loro degli aperti di \mathbb{R}^n , più precisamente identificando dei sottoinsiemi aperti U dello spazio topologico X con degli aperti $V = \phi(U)$ di \mathbb{R}^n attraverso delle “carte” $\phi : X \supseteq U \rightarrow \phi(U) = V \subseteq \mathbb{R}^n$. Localmente su un aperto U di X , la funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ può quindi essere identificata con la funzione $f|_U \circ \phi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}$, detta l’espressione di f nella carta ϕ , e per queste espressioni locali la proprietà di essere di classe C^∞ è ben definita, dato che ora queste funzioni sono definite su dei sottoinsiemi aperti di \mathbb{R}^n . Potremo quindi dire che una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^∞ se tutte le sue espressioni locali sono di classe C^∞ .

Sia dunque $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un insieme algebrico e sia U un sottoinsieme aperto di X .

Definizione 1.1.31. Una funzione $f : U \rightarrow k$ è detta *regolare* in un punto $P \in U$ se esistono un intorno aperto V di P in U e due polinomi $g, h \in A$, con $h \neq 0$ in tutto l’aperto V , tali che $f|_V = g/h$. La funzione f è detta regolare in U se essa è regolare in ogni punto di U .

Per ogni aperto $U \subseteq X$, indicheremo con $\mathcal{O}_X(U)$ (o anche semplicemente con $\mathcal{O}(U)$) l’insieme delle funzioni regolari in U . Dato che somme e prodotti di funzioni regolari sono ancora funzioni regolari, l’insieme $\mathcal{O}_X(U)$ è in realtà un anello, anzi, una k -algebra.

Osservazione 1.1.32. Il simbolo \mathcal{O}_X può essere pensato come una mappa che a ogni aperto U di un insieme algebrico X associa un particolare anello, l’anello $\mathcal{O}_X(U)$ delle funzioni regolari su U . Inoltre, per ogni inclusione $V \subseteq U$ di aperti di X , c’è una mappa naturale

$$\rho_{UV} : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$$

che a ogni funzione $f \in \mathcal{O}_X(U)$ associa la sua restrizione a V , $f|_V \in \mathcal{O}_X(V)$. Queste mappe di restrizione godono di alcune ovvie proprietà: si ha infatti $\rho_{UU} = \text{id}_U$ per ogni aperto U e $\rho_{VW} \circ \rho_{UV} = \rho_{UW}$, per ogni inclusione di aperti $W \subseteq V \subseteq U$. Inoltre le mappe ρ_{UV} sono degli omomorfismi di anelli. Questo tipo di struttura è un esempio di *fascio*, per la precisione diremo che \mathcal{O}_X è un *fascio di anelli* su X .

È facile trovare altri esempi naturali di fasci di anelli (di funzioni): se X è uno spazio topologico, a ogni aperto U di X possiamo associare l'anello $C(U)$ delle funzioni continue $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, con le mappe di restrizione naturali. L'associazione

$$U \mapsto C(U)$$

è il *fascio delle funzioni continue* su X .

Se X è una varietà differenziabile reale il fascio delle funzioni di classe C^∞ su X è definito associando a ogni aperto $U \subseteq X$ l'anello $C^\infty(U)$ delle funzioni $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ .

Data una varietà affine X , disponiamo ora di due anelli di funzioni su X ; l'anello delle coordinate affini $A(X)$ (i.e., funzioni su X definite in modo “globale”) e l'anello delle funzioni regolari $\mathcal{O}_X(X)$ (i.e., funzioni su X definite in modo “locale”). È naturale chiedersi che relazioni ci siano tra questi due anelli. In effetti, essi coincidono: per ogni varietà affine $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$, si ha $A(X) \cong \mathcal{O}_X(X)$. Questo risultato verrà dimostrato in seguito. Per il momento osserviamo solo che c'è una mappa naturale

$$k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$$

che invia un polinomio f nella funzione regolare su X

$$X \ni (a_1, \dots, a_n) \mapsto f(a_1, \dots, a_n).$$

Dato che il nucleo di questa mappa è l'ideale $I(X)$, si ottiene un omomorfismo iniettivo di anelli

$$A(X) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(X).$$

La parte più difficile consiste nel dimostrare che questa mappa è anche suriettiva.

1.1.5 Dimensione di una varietà affine

Vediamo ora come si possa definire il concetto geometrico di dimensione di una varietà affine e quale sia il suo analogo algebrico. Qualunque sia la nostra definizione di “dimensione,” certamente vorremmo che la dimensione di un punto fosse 0, che la dimensione di una retta fosse 1 e, più in generale, che la dimensione di \mathbb{A}_k^n fosse n . Possiamo osservare che uno spazio come \mathbb{A}_k^n , di dimensione n , contiene dei sottospazi di dimensione $n - 1$ ($\mathbb{A}_k^{n-1} \subset \mathbb{A}_k^n$), che a loro volta contengono dei sottospazi di dimensione $n - 2$, e così via fino a arrivare a dei sottospazi di dimensione 0. Se richiediamo che tutti questi sottospazi siano irriducibili, scopriamo che la massima lunghezza di una catena di inclusioni di tali sottospazi di \mathbb{A}_k^n coincide proprio con il numero n , cioè con la dimensione del nostro spazio (intuitivamente è chiaro

che ad ogni inclusione propria di spazi irriducibili del tipo $X_i \subset X_{i+1}$, la dimensione aumenta di 1).

Possiamo quindi usare questo fatto per dare una definizione puramente topologica di dimensione.

Definizione 1.1.33. Sia X uno spazio topologico. La dimensione di X , indicata con $\dim X$, è l'estremo superiore dell'insieme di tutti gli interi n per i quali esiste una catena di inclusioni proprie

$$Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_{n-1} \subset Z_n$$

di sottoinsiemi chiusi irriducibili distinti di X .

Definiremo quindi la dimensione di una varietà affine, o quasi-affine (o, più in generale, di un qualsiasi insieme algebrico) come la sua dimensione in quanto spazio topologico, dotato della topologia di Zariski.

Osservazione 1.1.34. Si osservi che, anche se questa definizione di dimensione si applica a un qualsiasi spazio topologico, essa è stata pensata per gli insiemi algebrici dotati della topologia di Zariski. Applicata ad altri spazi topologici (come ad esempio \mathbb{R}^n con la sua topologia classica) potrebbe non dare i risultati voluti.

Esempio 1.1.35. Consideriamo la retta affine \mathbb{A}_k^1 su un campo algebricamente chiuso k . Sappiamo che i suoi unici sottoinsiemi chiusi irriducibili sono i punti e tutto lo spazio. Quindi le più lunghe catene di inclusioni di sottoinsiemi chiusi irriducibili di \mathbb{A}_k^1 sono del tipo

$$\{P\} \subset \mathbb{A}_k^1,$$

dove P è un punto. Questo equivale a dire che la dimensione di \mathbb{A}_k^1 è 1.

In generale, si può dimostrare (vedi Proposizione 1.1.40) che la dimensione di \mathbb{A}_k^n è proprio n , quindi la nostra definizione di dimensione fornisce i risultati voluti.

Vediamo ora quale può essere un analogo algebrico della precedente definizione topologica di dimensione. A tal fine basta osservare che, se X è una varietà affine con anello delle coordinate $A(X)$, una catena di inclusioni di sottoinsiemi chiusi irriducibili di X

$$Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_{n-1} \subset Z_n = X$$

corrisponde a una catena di inclusioni (rovesciate) di ideali primi di $A(X)$

$$\mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{a}_{n-1} \supset \mathfrak{a}_n = (0),$$

ove $Z_i = Z(\mathfrak{a}_i)$, per ogni $i = 0, \dots, n$.

L'idea di considerare delle catene di inclusioni proprie di ideali primi può naturalmente essere applicata ad anelli commutativi (con unità) qualunque, e non solo agli anelli di coordinate delle varietà affini. Si arriva così, in modo del tutto naturale, alle seguenti definizioni:

Definizione 1.1.36. Sia A un anello commutativo con unità e sia \mathfrak{p} un ideale primo di A . L'altezza di \mathfrak{p} , indicata con $\text{ht}(\mathfrak{p})$, è l'estremo superiore dell'insieme di tutti gli interi n per i quali esiste una catena di inclusioni di ideali primi distinti di A

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_{n-1} \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}.$$

Definizione 1.1.37. La dimensione (di Krull) di un anello A (commutativo con unità) è l'estremo superiore delle altezze di tutti gli ideali primi di A .

Naturalmente, nel caso in cui $A = A(X)$ è l'anello delle coordinate di una varietà affine X , le definizioni sono state date in modo che i due concetti di dimensione coincidano.

Proposizione 1.1.38. *Se X è un insieme algebrico affine, la dimensione di X coincide con la dimensione del suo anello delle coordinate affini $A(X)$.*

Dimostrazione. Sia $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un insieme algebrico affine e sia $I(X) \subset A$ il suo ideale. Sia dunque $A(X) = A/I(X)$, e i sottoinsiemi chiusi irriducibili di X corrispondono agli ideali primi di A contenenti $I(X)$, che a loro volta corrispondono agli ideali primi di $A(X)$. Di conseguenza la dimensione di X in quanto spazio topologico coincide con la massima lunghezza di una catena di inclusioni di ideali primi distinti di $A(X)$, che è esattamente la dimensione di Krull di $A(X)$. \square

Vediamo ora alcune proprietà della nozione algebrica di dimensione di un anello.

Teorema 1.1.39. *Sia k un campo e sia B una k -algebra integra e finitamente generata. Allora:*

(i) *la dimensione di B coincide con il grado di trascendenza su k del campo delle frazioni di B ;*

(ii) *per ogni ideale primo \mathfrak{p} di B , si ha*

$$\text{ht}(\mathfrak{p}) + \dim(B/\mathfrak{p}) = \dim B.$$

Usando questi risultati algebrici, possiamo dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 1.1.40. *Si ha $\dim \mathbb{A}_k^n = n$, per ogni campo k algebricamente chiuso.*

Dimostrazione. L'anello delle coordinate affini di \mathbb{A}_k^n è $A = k[x_1, \dots, x_n]$. Si ha dunque

$$\dim \mathbb{A}_k^n = \dim k[x_1, \dots, x_n].$$

In base al punto (i) del teorema precedente, la dimensione di $k[x_1, \dots, x_n]$ è uguale al grado di trascendenza su k del campo $k(x_1, \dots, x_n)$. Ma quest'ultimo è una estensione puramente trascendente, di grado di trascendenza n , di k , e quindi $\dim \mathbb{A}_k^n = n$. \square

Per quanto riguarda la dimensione delle varietà quasi-affini, si ha:

Proposizione 1.1.41. *Se Y è una varietà quasi-affine, allora $\dim Y = \dim \bar{Y}$, dove \bar{Y} è la chiusura di Y (per la topologia di Zariski).*

Dimostrazione. Se $Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_n$ è una catena di inclusioni di sottoinsiemi chiusi irriducibili distinti di Y , allora $\bar{Z}_0 \subset \bar{Z}_1 \subset \dots \subset \bar{Z}_n$ è una catena di inclusioni di sottoinsiemi chiusi irriducibili distinti di \bar{Y} (perché la chiusura di un sottoinsieme irriducibile è ancora irriducibile). Ciò dimostra che $\dim Y \leq \dim \bar{Y}$. In particolare, Y deve avere dimensione finita, quindi possiamo trovare una catena massimale di tali inclusioni, sia essa $Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_n$, con $n = \dim Y$. In tal caso, Z_0 deve necessariamente essere un punto P , e anche la catena $P = \bar{Z}_0 \subset \bar{Z}_1 \subset \dots \subset \bar{Z}_n$ sarà massimale (perché ogni sottoinsieme aperto non-vuoto di uno spazio topologico irriducibile è irriducibile e denso). Il punto P corrisponde a un ideale massimale \mathfrak{m} dell'anello delle coordinate affini $A(\bar{Y})$, mentre gli \bar{Z}_i corrispondono a degli ideali primi contenuti in \mathfrak{m} ; da ciò deriva che $\text{ht}(\mathfrak{m}) = n$. D'altra parte, dato che P è un punto di uno spazio affine, si ha $A(\bar{Y})/\mathfrak{m} \cong k$. Dalla formula al punto (ii) del Teorema 1.1.39, si ricava quindi $n = \dim A(\bar{Y}) = \dim \bar{Y}$. Questo dimostra che $\dim Y = \dim \bar{Y}$. \square

Passiamo ora ad analizzare le relazioni che intercorrono tra la dimensione di una varietà $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ e il numero di equazioni necessarie a definire la varietà stessa. Intuitivamente ci aspettiamo che ogni equazione aggiuntiva faccia abbassare di 1 la dimensione, purché questa equazione sia “indipendente” dalle equazioni precedenti. In realtà le cose sono un po' più complicate e, ancora una volta, l'algebra ci viene in aiuto. Richiamiamo, senza dimostrazione, i seguenti risultati:

Teorema 1.1.42 (Teorema dell'ideale principale di Krull). *Sia A un anello noetheriano e sia $f \in A$ un elemento che non è né un divisore dello zero, né una unità (cioè non è invertibile). Allora ogni ideale primo minimale contenente f ha altezza 1.*

Dimostrazione. Si veda [AM, Corollario 11.17, pag. 177]. \square

Teorema 1.1.43. *Un dominio di integrità noetheriano è un UFD se e solo se ogni ideale primo di altezza 1 è principale.*

Dimostrazione. Si veda [M, 2, pag. 141], oppure [B, 1, Ch. 7, §3]. \square

Osservazione 1.1.44. Ricordiamo che un dominio di integrità a ideali principali è anche un UFD, mentre il viceversa è falso (ad esempio, un anello di polinomi in due indeterminate $k[x, y]$ è un UFD ma non è un PID). Il teorema precedente può essere visto come una sorta di “viceversa parziale” del fatto che $\text{PID} \Rightarrow \text{UDF}$.

Usando questi due risultati algebrici possiamo dimostrare la proposizione seguente:

Proposizione 1.1.45. *Una varietà $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ ha dimensione $n - 1$ se e solo se essa è l'insieme degli zeri di un solo polinomio irriducibile non costante $f \in A = k[x_1, \dots, x_n]$. In altre parole, X è una ipersuperficie se e solo se essa è definita da una sola equazione.*

Dimostrazione. Sia $f \in A = k[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio irriducibile e sia $X = Z(f)$. X è dunque una sottovarietà di \mathbb{A}_k^n e il suo ideale è $I(X) = (f)$, che è un ideale primo (dato che f è irriducibile). Per il teorema dell'ideale principale di Krull, $I(X)$ ha altezza 1 e, di conseguenza, si ha

$$\dim A(X) = \dim A/I(X) = \dim A - 1 = n - 1.$$

Si conclude quindi che $\dim X = \dim A(X) = n - 1$, cioè X è una ipersuperficie di \mathbb{A}_k^n .

Viceversa, sia $X \subset \mathbb{A}_k^n$ una varietà di dimensione $n - 1$. Il suo ideale $I(X)$ è dunque primo e di altezza 1. Dato che l'anello A è un UFD, in base al Teorema 1.1.43 si conclude che $I(X)$ è un ideale principale, quindi esiste $f \in A$ tale che $I(X) = (f)$, inoltre tale f deve essere irriducibile, visto che l'ideale $I(X)$ è primo. Abbiamo così concluso che $X = Z(f)$. \square

Facciamo notare che un risultato di questo tipo non si può generalizzare al caso di sottovarietà di \mathbb{A}_k^n di dimensione $\leq n - 2$. Ad esempio, è noto che esistono degli ideali primi di altezza 2 in un anello di polinomi che non possono essere generati da due soli elementi. In termini geometrici questo significa che esistono delle sottovarietà di \mathbb{A}_k^n di dimensione $n - 2$ che non possono essere definite da due sole equazioni.

Esempio 1.1.46. Consideriamo la sottovarietà (curva) X di \mathbb{A}_k^3 definita in modo parametrico dalle equazioni $x = t^3$, $y = t^4$, $z = t^5$, al variare di $t \in k$. Si dimostra (farlo per esercizio, ma non è molto facile) che l'ideale $I(X)$ è

generato dai polinomi $xz - y^2$, $yz - x^3$ e $x^2y - z^2$. Inoltre $I(X)$ è un ideale primo di altezza 2 nell'anello $A = k[x, y, z]$, ma esso non può essere generato da due soli polinomi!

1.2 Varietà Proiettive

Le definizioni date nella sezione precedente di insieme algebrico e varietà affine si possono estendere in modo naturale al caso dello spazio proiettivo.

Definizione 1.2.1. Lo spazio proiettivo n -dimensionale sul campo k è

$$\mathbb{P}_k^n = (k^{n+1} \setminus (0, \dots, 0)) / \sim,$$

ove \sim è la relazione di equivalenza definita ponendo

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) \sim (\lambda a_0, \lambda a_1, \dots, \lambda a_n), \quad \forall \lambda \in k^* = k \setminus \{0\}.$$

Lo spazio proiettivo \mathbb{P}_k^n è quindi l'insieme dei “punti” costituiti dalle $n+1$ -uple (a_0, a_1, \dots, a_n) di elementi di k , non tutti nulli, dove però due $n+1$ -uple rappresentano lo stesso punto se differiscono per la moltiplicazione per un fattore non nullo $\lambda \in k^*$. Se un punto $P \in \mathbb{P}_k^n$ è rappresentato da $P = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, gli elementi a_0, a_1, \dots, a_n sono detti le *coordinate omogenee* del punto P .

Osservazione 1.2.2. Lo spazio proiettivo \mathbb{P}_k^n può essere considerato come una “estensione” dello spazio affine \mathbb{A}_k^n , ad esempio tramite la seguente immersione

$$\mathbb{A}_k^n \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n, \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto (1, a_1, \dots, a_n).$$

In questa situazione i punti di \mathbb{P}_k^n che non appartengono a \mathbb{A}_k^n (cioè i punti le cui coordinate omogenee sono del tipo $(0, a_1, \dots, a_n)$) sono detti “punti impropri” o “punti all'infinito” e corrispondono ai “punti di intersezione” di coppie di rette parallele.

Fissiamo dunque un campo (algebricamente chiuso) k e consideriamo lo spazio proiettivo \mathbb{P}_k^n . Indichiamo con $R = k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi in $n+1$ indeterminate. È a questo punto che incontriamo la prima grande differenza tra gli spazi affini e gli spazi proiettivi. Infatti, un polinomio $f \in R$ (non costante) non definisce una funzione $\tilde{f} : \mathbb{P}_k^n \rightarrow k$. Se $P \in \mathbb{P}_k^n$ è un punto di coordinate omogenee (a_0, a_1, \dots, a_n) , si ha anche $P = (\lambda a_0, \lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$, per ogni $\lambda \neq 0$, ma se f è un polinomio di grado ≥ 1 , si ha, in generale,

$$f(\lambda a_0, \lambda a_1, \dots, \lambda a_n) \neq f(a_0, a_1, \dots, a_n).$$

In conclusione, il “valore” di un polinomio in un punto di uno spazio proiettivo non è definito.

Tuttavia se, come nel caso affine, vogliamo definire gli insiemi algebrici come luogo degli zeri di un sistema di equazioni polinomiali, non abbiamo bisogno di conoscere il valore di un polinomio in un punto, ma solo di sapere se un polinomio si annulla oppure no in un dato punto di \mathbb{P}_k^n . Naturalmente, se f è un polinomio qualsiasi, può benissimo succedere che $f(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0$ ma $f(\lambda a_0, \lambda a_1, \dots, \lambda a_n) \neq 0$, quindi anche il fatto di chiedersi se un polinomio si annulli oppure no in un dato punto non ha senso. Se però ci restringiamo a considerare polinomi omogenei (somma di monomi dello stesso grado) la situazione migliora notevolmente. Infatti, se f è un polinomio omogeneo di grado d , si ha

$$f(\lambda a_0, \lambda a_1, \dots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Quindi, anche se continua a non avere senso parlare del valore di un polinomio omogeneo in un punto dello spazio proiettivo, ha perfettamente senso chiedersi se tale valore sia nullo oppure no: infatti, poiché $\lambda \neq 0$, si ha

$$f(\lambda a_0, \lambda a_1, \dots, \lambda a_n) = 0 \Leftrightarrow f(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0.$$

Potremo quindi definire i sottoinsiemi algebrici di uno spazio proiettivo \mathbb{P}_k^n come gli insiemi degli zeri di un certo numero di polinomi omogenei. Esattamente come nel caso degli spazi affini, sarà poi del tutto naturale sostituire tali polinomi omogenei con l'ideale da essi generato e parlare quindi di insieme degli zeri di un ideale generato da polinomi omogenei (ideale omogeneo).

Riteniamo opportuno, a questo punto, richiamare alcune nozioni di algebra commutativa, relative agli anelli graduati e agli ideali omogenei.

Definizione 1.2.3. Un *anello graduato* R è un anello (commutativo con unità, come al solito) con una decomposizione

$$R = \bigoplus_{d \geq 0} R_d,$$

dove gli R_i sono dei gruppi abeliani, con la proprietà che $R_i \cdot R_j \subseteq R_{i+j}$, per ogni $i, j \geq 0$.

Dato che stiamo parlando degli spazi proiettivi, l'esempio naturale di anello graduto, in questo contesto, è l'anello dei polinomi $R = k[x_0, \dots, x_n]$. La sua graduazione naturale è quella in cui R_d è il sottoinsieme costituito dai polinomi omogenei di grado d (e dallo 0, che è considerato omogeneo di qualunque grado).

In generale, se $R = \bigoplus_{d \geq 0} R_d$ è un anello graduato, gli elementi di R_d sono detti *omogenei di grado d* . Quindi ogni elemento di R può essere espresso in modo unico come somma di un numero finito di elementi omogenei.

Definizione 1.2.4. Sia R un anello graduato. Un ideale \mathfrak{a} di R è detto *ideale omogeneo* se può essere generato da elementi omogenei.

Osservazione 1.2.5. Una definizione equivalente di ideale omogeneo è la seguente: un ideale \mathfrak{a} di R è detto omogeneo se

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{d \geq 0} (\mathfrak{a} \cap R_d),$$

cioè se, per ogni $f \in \mathfrak{a}$, tutte le componenti omogenee di f stanno in \mathfrak{a} . Si dimostri, come esercizio, che questa definizione di ideale omogeneo è equivalente alla precedente.

Osservazione 1.2.6. Per gli ideali omogenei valgono molte delle proprietà degli ideali ordinari. Ad esempio:

- somme, prodotti e intersezioni di ideali omogenei sono ancora ideali omogenei;
- il radicale di un ideale omogeneo è un ideale omogeneo;
- un ideale omogeneo \mathfrak{a} è primo se e solo se per ogni coppia di elementi omogenei f e g tali che $fg \in \mathfrak{a}$, si ha $f \in \mathfrak{a}$ oppure $g \in \mathfrak{a}$.

Ritornando alla discussione sugli spazi proiettivi, prendiamo come anello R l'anello dei polinomi $k[x_0, \dots, x_n]$, graduato nel modo usuale (R_d è l'insieme dei polinomi omogenei di grado d e del polinomio nullo). Se $T \subset R$ è un insieme di polinomi omogenei, si pone

$$Z(T) = \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{P}_k^n \mid f(a_0, \dots, a_n) = 0, \forall f \in T\}.$$

Se \mathfrak{a} è un ideale omogeneo, si pone

$$Z(\mathfrak{a}) = \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{P}_k^n \mid f(a_0, \dots, a_n) = 0, \forall f \in \mathfrak{a}, f \text{ omogeneo}\}.$$

Si dimostra facilmente che, per ogni insieme di polinomi omogenei $T \subset R$, si ha $Z(T) = Z(\mathfrak{a})$, se \mathfrak{a} è l'ideale omogeneo generato da T , quindi non è restrittivo considerare solo insiemi degli zeri di ideali omogenei.

Definizione 1.2.7. Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ è un *insieme algebrico* se esiste un ideale omogeneo \mathfrak{a} di $R = k[x_0, \dots, x_n]$ tale che $X = Z(\mathfrak{a})$.

La teoria si sviluppa ora in modo del tutto analogo al caso dei sottoinsiemi algebrici di uno spazio affine. Si dimostra infatti che:

Proposizione 1.2.8. *L'unione di due insiemi algebrici di \mathbb{P}_k^n è un insieme algebrico. L'intersezione di una qualunque famiglia di insiemi algebrici di \mathbb{P}_k^n è un insieme algebrico. L'insieme vuoto e tutto lo spazio \mathbb{P}_k^n sono degli insiemi algebrici.*

Si definisce quindi la topologia di Zariski su \mathbb{P}_k^n prendendo come chiusi i sottoinsiemi algebrici. Una volta definita la topologia di Zariski, le definizioni di insieme algebrico irriducibile e di dimensione di un insieme algebrico sono analoghe a quelle date nel caso affine (in effetti sono delle nozioni puramente topologiche).

Definizione 1.2.9. Una *varietà proiettiva* è un sottoinsieme algebrico irriducibile di \mathbb{P}_k^n , con la topologia indotta da quella di Zariski. Una *varietà quasi-proiettiva* è un sottoinsieme aperto di una varietà proiettiva.

Sia ora $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ un sottoinsieme qualsiasi. Definiamo l'*ideale omogeneo* di X come l'ideale $I(X)$ generato da tutti i polinomi omogenei $f \in R = k[x_0, \dots, x_n]$ tali che $f(a_0, \dots, a_n) = 0$, per ogni $(a_0, \dots, a_n) \in X$. Per gli ideali omogenei c'è un analogo (omogeneo) del teorema degli zeri di Hilbert:

Teorema 1.2.10. *Sia k un campo algebricamente chiuso. Indichiamo con R l'anello dei polinomi $k[x_0, \dots, x_n]$. Per ogni ideale omogeneo \mathfrak{a} di R , si ha $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$.*

C'è tuttavia una differenza sostanziale tra lo spazio affine e lo spazio proiettivo: mentre in \mathbb{A}_k^n l'ideale (x_1, \dots, x_n) corrisponde al punto di coordinate $(0, \dots, 0)$, in \mathbb{P}_k^n l'ideale (x_0, \dots, x_n) corrisponde all'insieme vuoto, dato che la $n+1$ -upla $(0, \dots, 0)$ non rappresenta un punto di \mathbb{P}_k^n .

In generale, se $R = \bigoplus_{d \geq 0} R_d$ è un anello graduato, l'ideale $R_+ = \bigoplus_{d > 0} R_d$ è detto l'*ideale irrilevante*. Se $R = k[x_0, \dots, x_n]$, si ha $R_+ = (x_0, \dots, x_n)$. Quanto detto in precedenza mostra quindi che:

Proposizione 1.2.11. *Sia \mathfrak{a} un ideale omogeneo di R . Allora $Z(\mathfrak{a}) = \emptyset$ se e solo se $\sqrt{\mathfrak{a}} = R$ oppure $\sqrt{\mathfrak{a}} = R_+$.*

Si ha quindi:

Teorema 1.2.12. *Esiste una corrispondenza biunivoca, che rovescia le inclusioni, tra insiemi algebrici di \mathbb{P}_k^n e ideali radicali omogenei di $R = k[x_0, \dots, x_n]$ diversi da R_+ , data da $X \mapsto I(X)$ e da $\mathfrak{a} \mapsto Z(\mathfrak{a})$.*

Osservazione 1.2.13. Se $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ è un insieme algebrico corrispondente all'ideale omogeneo $I(X)$ di $R = k[x_0, \dots, x_n]$, possiamo considerare l'anello $R(X) = R/I(X)$. Questo è l'analogo, nel caso proiettivo, dell'anello delle coordinate affini $A(X)$ di un insieme algebrico affine $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$. Notiamo però che, a differenza del caso affine, gli elementi di $R(X)$ non definiscono delle funzioni su X !

1.2.1 Relazioni tra \mathbb{A}_k^n e \mathbb{P}_k^n

In questa sezione vogliamo dimostrare che \mathbb{P}_k^n può essere ricoperto da $n+1$ aperti che possono essere identificati in modo naturale con lo spazio affine \mathbb{A}_k^n .

Sia quindi $R = k[x_0, \dots, x_n]$ e, per ogni $i = 0, \dots, n$, consideriamo l'iperpiano $H_i \subset \mathbb{P}_k^n$ di equazione $x_i = 0$ (cioè $H_i = Z(x_i)$). Indichiamo con U_i il complementare di H_i : U_i è un aperto e si ha $\mathbb{P}_k^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$, infatti, se $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{P}_k^n$, deve esistere almeno un indice i con $a_i \neq 0$ e, di conseguenza, $(a_0, \dots, a_n) \in U_i$. Definiamo ora, per ogni $i = 0, \dots, n$, una funzione $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{A}_k^n$, ponendo

$$\phi_i(a_0, \dots, a_n) = \left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i} \right).$$

Si noti che l' i -esimo termine a_i/a_i è mancante.

Proposizione 1.2.14. *La mappa ϕ_i è un omeomorfismo di U_i (con la topologia indotta dalla topologia di Zariski di \mathbb{P}_k^n) in \mathbb{A}_k^n .*

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che ϕ_i è biettiva, continua e che anche la sua inversa è continua. Che ϕ_i sia biettiva è molto facile da verificare. Per dimostrare che sia ϕ_i che la sua inversa sono continue basta dimostrare che, tramite ϕ_i , i sottoinsiemi chiusi di U_i sono identificati con i sottoinsiemi chiusi di \mathbb{A}_k^n . Lo dimostreremo nel caso $i = 0$ (negli altri casi la dimostrazione è analoga). Poniamo dunque $\phi = \phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{A}_k^n$,

$$\phi(a_0, \dots, a_n) = \left(\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0} \right).$$

Consideriamo l'anello di polinomi $A = k[y_1, \dots, y_n]$ e definiamo una funzione α che a ogni polinomio omogeneo $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ associa il polinomio (non omogeneo, in generale) $\alpha(f) \in A$ definito ponendo $\alpha(f) = f(1, y_1, \dots, y_n)$. Possiamo anche definire una funzione β che trasforma i polinomi nelle indeterminate y_1, \dots, y_n in polinomi omogenei in x_0, \dots, x_n : per ogni polinomio $g \in A$ poniamo

$$\beta(g)(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0^d g\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right),$$

ove d è il grado di g .

L'idea alla base dell'identificazione tra i sottoinsiemi chiusi di U_0 e i sottoinsiemi chiusi di \mathbb{A}_k^n può essere descritta come segue. Consideriamo un sottoinsieme algebrico $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ di equazione $f(x_0, \dots, x_n) = 0$, per qualche polinomio omogeneo f . Dalle definizioni date è immediato verificare che $\alpha(f) = 0$, cioè $f(1, y_1, \dots, y_n) = 0$ è l'equazione di $X \cap U_0$. Viceversa, se $Y \subseteq \mathbb{A}_k^n$ è un insieme algebrico di equazione $g(y_1, \dots, y_n) = 0$, allora $\beta(g) = 0$, cioè

$$x_0^d g\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) = 0,$$

e l'equazione della chiusura \bar{Y} di Y in \mathbb{P}_k^n .

Usando quanto appena visto possiamo dimostrare il caso generale. Sia $X \subseteq U_0$ un insieme algebrico, e sia \bar{X} la sua chiusura in \mathbb{P}_k^n . Si ha quindi $\bar{X} = Z(T)$, per qualche insieme di polinomi omogenei T . Sia $T' = \alpha(T)$. Allora è $\phi(X) = Z(T')$, quindi $\phi(X)$ è un sottoinsieme chiuso di \mathbb{A}_k^n .

Viceversa, sia $Y \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un sottoinsieme chiuso. Si ha quindi $Y = Z(T'')$, per un qualche insieme di polinomi (non omogenei) T'' . Allora è $\phi^{-1}(Y) = Z(\beta(T'')) \cap U_0$, quindi $\phi^{-1}(Y)$ è un sottoinsieme chiuso di U_0 .

Abbiamo così dimostrato che sia ϕ che ϕ^{-1} sono delle mappe chiuse, quindi ϕ è un omeomorfismo. \square

Corollario 1.2.15. *Se X è una varietà proiettiva (o quasi-proiettiva) allora si ha*

$$X = \bigcup_{i=0}^n (X \cap U_i),$$

cioè X può essere ricoperta con degli aperti $X \cap U_i$ che sono identificati, tramite le mappe ϕ_i , con delle varietà affini (o quasi-affini).

1.3 Morfismi di varietà

Avendo definito le varietà algebriche (affini, quasi-affini, proiettive o quasi-proiettive), sarà ora naturale considerare anche le funzioni tra due varietà X e Y . Dato che X e Y sono degli spazi topologici (con la topologia di Zariski), sarà altrettanto naturale richiedere che le funzioni $f : X \rightarrow Y$ siano continue. Ma ciò non è abbastanza: le nostre varietà non sono semplicemente degli spazi topologici, esse sono dotate di una particolare struttura, derivante dal fatto che esse sono luogo degli zeri di un insieme di *polinomi*. Nell'ambito della geometria algebrica sarà quindi naturale considerare delle funzioni tra due varietà che siano definibili "in modo algebrico". Naturalmente rimane da capire che cosa sia ragionevole intendere per *definibili in modo algebrico*. Cerchiamo di capirlo attraverso degli esempi.

Sia $X = \mathbb{A}_k^n$ e $Y = \mathbb{A}_k^m$. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è descritta da

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

dove le $f_i : \mathbb{A}_k^n \rightarrow k$ (per $i = 1, \dots, m$) sono le componenti di f . Richiedere che la funzione $f : X \rightarrow Y$ sia *definibile in modo algebrico* equivale quindi a richiedere che lo siano tutte le sue componenti $f_i : \mathbb{A}_k^n \rightarrow k$. Ma, in base a quanto abbiamo già visto, le “funzioni algebriche” da \mathbb{A}_k^n in k non sono altro che i polinomi nelle n indeterminate x_1, \dots, x_n . In conclusione, la definizione naturale di “funzione algebrica” tra due spazi affini è quella di una funzione polinomiale, cioè una funzione le cui componenti siano dei polinomi (rimane naturalmente da verificare che una tale funzione è continua, per la topologia di Zariski, ma questo è piuttosto facile).

Consideriamo ora il caso di una varietà $X \subset \mathbb{A}_k^n$ e di una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{A}_k^m$. Potremmo dire che una tale funzione è “algebrica” se essa è la restrizione a X di una funzione polinomiale $\tilde{f} : \mathbb{A}_k^n \rightarrow \mathbb{A}_k^m$, cioè se esistono dei polinomi $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$ tali che

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

per ogni $(x_1, \dots, x_n) \in X$. (Ma perché *ogni* funzione $X \rightarrow \mathbb{A}_k^m$ dovrebbe essere la restrizione di una funzione $\mathbb{A}_k^n \rightarrow \mathbb{A}_k^m$?)

Infine, date due varietà affini $X \subset \mathbb{A}_k^n$ e $Y \subset \mathbb{A}_k^m$, una funzione “algebrica” $f : X \rightarrow Y$ sarà semplicemente una funzione polinomiale $f : X \rightarrow \mathbb{A}_k^m$ tale che la sua immagine sia contenuta in Y .

Questo tipo di definizione di “funzione algebriche” può poi essere estesa al caso di due varietà proiettive (o quasi-proiettive), ricoprendole in modo opportuno con degli aperti affini (o quasi-affini) e richiedendo che le restrizioni di tali funzioni a tutti gli aperti affini siano delle “funzioni algebriche” nel senso definito in precedenza.

Questo modo di procedere, pur sostanzialmente corretto, non è tuttavia molto soddisfacente (né molto elegante!). Ad esempio, ci si può legittimamente chiedere perché le uniche funzioni che vogliamo considerare da una varietà affine $X \subset \mathbb{A}_k^n$ a uno spazio affine \mathbb{A}_k^m debbano essere la restrizione di analoghe funzioni definite globalmente su tutto lo spazio \mathbb{A}_k^n . Non ci potrebbero essere delle funzioni $f : X \rightarrow \mathbb{A}_k^m$ che sarebbe sensato definire “algebriche” e che tuttavia non possono essere estese a delle funzioni $\tilde{f} : \mathbb{A}_k^n \rightarrow \mathbb{A}_k^m$?

Ci proponiamo quindi di cercare una caratterizzazione più intrinseca di tali “funzioni algebriche” tra varietà, che chiameremo *morfismi di varietà*. Per fare ciò procederemo per analogia con il caso delle varietà differenziabili.

Sia dunque X una varietà differenziabile reale e, per ogni aperto $U \subseteq X$ indichiamo con $C^\infty(U)$ l’anello delle funzioni $U \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ . Consideriamo una funzione continua $f : X \rightarrow Y$ tra due varietà differenziabili. Dire

che la funzione $f : X \rightarrow Y$ è di classe C^∞ equivale a dire che per ogni aperto $V \subseteq Y$ e per ogni $g \in C^\infty(V)$, la funzione composta $g \circ f : f^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^∞ . Un *morfismo* di varietà differenziabili (inteso come un'applicazione di classe C^∞) può quindi essere definito come un'applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ che, per ogni aperto $V \subseteq Y$, induce un omomorfismo di anelli $f^* : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(f^{-1}(V))$.

Tornando al caso delle varietà algebriche, ricordiamo che, per ogni aperto U di una varietà algebrica X , abbiamo definito l'anello $\mathcal{O}_X(U)$ delle funzioni regolari su U . Possiamo quindi dare la seguente definizione di morfismo di varietà algebriche.

Definizione 1.3.1. Siano X e Y due varietà algebriche (affini, quasi-affini, proiettive o quasi-proiettive). Un *morfismo* di varietà è una funzione continua $f : X \rightarrow Y$ (per le topologie di Zariski) tale che, per ogni aperto $V \subseteq Y$, la composizione con f induce un omomorfismo di anelli

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{O}_Y(V) &\rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \\ g &\mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

Osservazione 1.3.2. È del tutto evidente che una “funzione algebrica” tra due varietà, definita come nella discussione precedente, è un morfismo di varietà, nel senso appena definito.

Poiché la composizione di due morfismi di varietà è ancora un morfismo, possiamo considerare la categoria delle varietà, i cui oggetti sono le varietà e i cui morfismi tra oggetti sono i morfismi di varietà. Un *isomorfismo* di due varietà X e Y è quindi un isomorfismo nella categoria delle varietà. In altri termini, un isomorfismo tra due varietà X e Y è un morfismo $f : X \rightarrow Y$ per cui esiste un morfismo $g : Y \rightarrow X$ tale che $g \circ f = \text{id}_X$ e $f \circ g = \text{id}_Y$.

Osservazione 1.3.3. Un isomorfismo di varietà è necessariamente una mappa biiettiva e bicontinua. Il viceversa può non essere vero. Ad esempio, la mappa $\phi : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{A}_k^2$, definita da $\phi(t) = (t^2, t^3)$, è un morfismo biiettivo e bicontinuo di \mathbb{A}_k^1 sulla curva \mathcal{C} di equazione $y^2 = x^3$. Tuttavia ϕ non è un isomorfismo, poiché la sua funzione inversa, pur essendo continua, non è un morfismo di varietà!

1.4 Anelli di funzioni associati alle varietà

Sia X una varietà. Per ogni aperto $U \subseteq X$ abbiamo definito l'anello delle funzioni regolari $\mathcal{O}_X(U)$. In questa sezione definiremo altri anelli di funzioni associati a una varietà e studieremo le relazioni esistenti tra questi e gli anelli delle coordinate affini o proiettive.

Sia P un punto di X . Indichiamo con $\mathcal{O}_{X,P}$ l'anello dei *germi di funzioni regolari* su X , definite all'intorno di P . Intuitivamente, gli elementi di $\mathcal{O}_{X,P}$ sono delle funzioni regolari definite in un qualche intorno aperto del punto P , dove tuttavia non ha importanza quale sia questo intorno. Tecnicamente, la definizione è la seguente:

Definizione 1.4.1. L'anello $\mathcal{O}_{X,P}$ è l'insieme delle classi di equivalenza di coppie del tipo (U, f) , dove U è un intorno aperto di P in X e $f \in \mathcal{O}_X(U)$ è una funzione regolare su U . Due coppie (U, f) e (V, g) sono equivalenti se $f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}$.

Osservazione 1.4.2. L'anello $\mathcal{O}_{X,P}$ è anche detto l'*anello locale* di X in P . In effetti esso è proprio un anello locale (cioè un anello avente un unico ideale massimale). L'ideale massimale \mathfrak{m}_P di $\mathcal{O}_{X,P}$ è costituito da tutti i germi di funzioni regolari che si annullano in P . Infatti, se $(U, f) \in \mathcal{O}_{X,P}$ e $f(P) \neq 0$, allora la funzione $1/f$ è regolare in un qualche intorno di P , quindi definisce un elemento di $\mathcal{O}_{X,P}$ che è l'inverso di (U, f) . Abbiamo così dimostrato che ogni $(U, f) \in \mathcal{O}_{X,P}$ con $f(P) \neq 0$ è invertibile, il che implica che $\mathfrak{m}_P = \{(U, f) \mid f(P) = 0\}$ è l'unico ideale massimale di $\mathcal{O}_{X,P}$. Il quoziente $\kappa(P) = \mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P$ è un campo, detto il *campo residuo* di P .

Osservazione 1.4.3. Se A è un anello commutativo con unità e \mathfrak{p} e \mathfrak{q} sono due ideali primi con $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}$, c'è un isomorfismo naturale

$$(A/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$$

(basta applicare il funtore “localizzare in \mathfrak{p} ” alla sequenza esatta

$$0 \rightarrow \mathfrak{q} \rightarrow A \rightarrow A/\mathfrak{q} \rightarrow 0$$

e ricordare che “localizzare” è un funtore esatto, vedi [AM, Proposizione 3.3]). In particolare, se $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, si ottiene l'anello $(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, che è un campo, detto il campo residuo in \mathfrak{p} : esso può quindi essere ottenuto sia come campo delle frazioni del dominio di integrità A/\mathfrak{p} che come campo residuo dell'anello locale $A_{\mathfrak{p}}$.

Se inoltre A è una k -algebra finitamente generata e \mathfrak{m} è un ideale massimale di A , l'anello A/\mathfrak{m} non è altro che il campo residuo in \mathfrak{m} ,

$$A/\mathfrak{m} = (A/\mathfrak{m})_{\mathfrak{m}} \cong A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}},$$

il quale è una estensione algebrica finita di k ([AM, Corollario 7.10]). In particolare, se k è algebricamente chiuso, si ha $A/\mathfrak{m} \cong k$.

Nel caso degli anelli locali dei punti di una varietà algebrica X , definita su un campo algebricamente chiuso k , questo risultato implica che, per ogni $P \in X$, il campo residuo $\kappa(P)$ è una estensione algebrica finita di k e quindi è isomorfo a k stesso.

Osservazione 1.4.4. Per chi conosce i limiti diretti, l'anello $\mathcal{O}_{X,P}$ può essere definito come segue:

$$\mathcal{O}_{X,P} = \varinjlim_{U \ni P} \mathcal{O}_X(U),$$

ove il limite diretto è preso rispetto al sistema diretto degli intorno aperti di P in X , con la relazione d'ordine data da $U \preceq V$ se $U \supseteq V$.

L'ultimo anello di funzioni che vogliamo definire è in realtà un campo, il campo $K(X)$ delle funzioni razionali su X .

Definizione 1.4.5. $K(X)$ è l'insieme delle classi di equivalenza di coppie del tipo (U, f) , dove U è un sottoinsieme aperto non vuoto di X e $f \in \mathcal{O}_X(U)$ è una funzione regolare su U . Due coppie (U, f) e (V, g) sono equivalenti se $f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}$. Gli elementi di $K(X)$ sono detti *funzioni razionali* su X .

Osservazione 1.4.6. Una funzione razionale su X è quindi una funzione, definita in qualche sottoinsieme aperto di X (dove, come al solito, non ha importanza l'esatto insieme di definizione di tale funzione), che può essere espressa localmente come rapporto di due polinomi. In particolare si noti che una funzione razionale su X *non* è definita su tutto X , in generale.

L'insieme $K(X)$ è effettivamente un campo. Infatti, dato che X è irriducibile, l'intersezione di due aperti non vuoti è sempre un aperto non vuoto. Quindi se (U, f) e (V, g) sono due (rappresentanti di due) funzioni razionali, possiamo definire la loro somma e il loro prodotto come segue:

$$(U, f) + (V, g) = (U \cap V, f + g), \quad (U, f) \cdot (V, g) = (U \cap V, fg).$$

Infine, se (U, f) è una funzione razionale non identicamente nulla, essa è invertibile, e la sua inversa è la funzione razionale rappresentata da $(V, 1/f)$, ove $V = U \setminus Z(f) = \{P \in U \mid f(P) \neq 0\}$.

Osservazione 1.4.7. Associando a una funzione le sue restrizioni a degli opportuni aperti di X , si ottengono le seguenti mappe iniettive:

$$\mathcal{O}_X(X) \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,P} \hookrightarrow K(X),$$

per ogni punto $P \in X$. Gli anelli $\mathcal{O}_X(X)$ e $\mathcal{O}_{X,P}$ possono quindi essere considerati come dei sottoanelli di $K(X)$.

La domanda naturale che ora si pone è la seguente: che relazioni ci sono tra gli anelli $\mathcal{O}_X(X)$, $\mathcal{O}_{X,P}$, $K(X)$ e l'anello delle coordinate affini $A(X)$, nel caso X sia una varietà affine, o l'anello delle coordinate omogenee $R(X)$, nel caso X sia una varietà proiettiva?

Nel caso affine la risposta è data dal seguente teorema:

Teorema 1.4.8. *Sia $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una varietà affine con anello delle coordinate affini $A(X)$. Allora:*

- (a) $\mathcal{O}_X(X) \cong A(X)$;
- (b) *Per ogni punto $P \in X$, sia $\mathfrak{m}_P \subseteq A(X)$ l'ideale delle funzioni che si annullano in P . Allora $P \mapsto \mathfrak{m}_P$ è una corrispondenza biunivoca tra i punti di X e gli ideali massimali di $A(X)$;*
- (c) *Per ogni punto $P \in X$, si ha $\mathcal{O}_{X,P} \cong A(X)_{\mathfrak{m}_P}$, e $\dim \mathcal{O}_{X,P} = \dim X$;*
- (d) *$K(X)$ è isomorfo al campo delle frazioni di $A(X)$, quindi $K(X)$ è una estensione finitamente generata di k , di grado di trascendenza pari alla dimensione di X .*

Dimostrazione. Iniziamo col definire una mappa $\alpha : A(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$. Ogni polinomio $f \in A = k[x_1, \dots, x_n]$ definisce una funzione regolare su \mathbb{A}_k^n e quindi anche su X . Si ha così un omomorfismo $A \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$, il cui nucleo è l'ideale $I(X)$. Passando al quoziente per $I(X)$ si ottiene quindi un omomorfismo iniettivo $A(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$. Dal Teorema 1.1.25 sappiamo che esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti di X (che sono i sottoinsiemi algebrici minimali di X) e gli ideali massimali di A che contengono $I(X)$ che, a loro volta, corrispondono agli ideali massimali di $A(X) = A/I(X)$. Inoltre, usando α per identificare gli elementi di $A(X)$ con delle funzioni regolari su X , l'ideale massimale corrispondente a un punto P coincide con l'ideale $\mathfrak{m}_P = \{f \in A(X) \mid f(P) = 0\}$. Questo dimostra il punto (b).

Per ogni $P \in X$ c'è una mappa naturale $A(X)_{\mathfrak{m}_P} \rightarrow \mathcal{O}_{X,P}$, la quale è iniettiva perché α è iniettiva. Questa mappa inoltre è anche suriettiva, per la definizione stessa dell'anello $\mathcal{O}_{X,P}$. Questo prova che $\mathcal{O}_{X,P} \cong A(X)_{\mathfrak{m}_P}$. Ora, $\dim \mathcal{O}_{X,P} = \text{ht}(\mathfrak{m}_P)$ e, dal Teorema 1.1.39, si deduce che $\text{ht}(\mathfrak{m}_P) = \dim A(X)$, dato che $A(X)/\mathfrak{m}_P \cong k$. Infine, per la Proposizione 1.1.38, si ha $\dim A(X) = \dim X$. Questo prova che $\dim \mathcal{O}_{X,P} = \dim X$, e conclude la dimostrazione del punto (c).

Dal punto (c) segue che il campo delle frazioni di $A(X)$ è isomorfo al campo delle frazioni di $\mathcal{O}_{X,P}$, per ogni $P \in X$, e questo è uguale a $K(X)$, perché ogni funzione razionale su X appartiene a qualche $\mathcal{O}_{X,P}$. Dato che $A(X)$ è una k -algebra finitamente generata, il campo $K(X)$ è una estensione finitamente generata di k . Inoltre, sempre dalla Proposizione 1.1.38 e dal Teorema 1.1.39, segue che il grado di trascendenza di $K(X)$ su k coincide con la dimensione di X . Questo dimostra il punto (d).

Rimane ora solo da dimostrare il punto (a). A tal fine osserviamo che $\mathcal{O}_X(X) \subseteq \bigcap_{P \in X} \mathcal{O}_{X,P}$, dove tutti questi anelli sono considerati come

sottoanelli di $K(X)$. Dai punti (b) e (c) si deduce che

$$A(X) \subseteq \mathcal{O}_X(X) \subseteq \bigcap_{\mathfrak{m}} A(X)_{\mathfrak{m}},$$

dove l'intersezione è presa su tutti gli ideali massimali \mathfrak{m} di $A(X)$. L'uguaglianza discende ora dal semplice fatto algebrico per cui, se B è un dominio di integrità, allora B è uguale all'intersezione (dentro il suo campo delle frazioni) dei suoi localizzati in tutti i suoi ideali massimali. \square

Enuncieremo ora la versione proiettiva del teorema precedente. Prima però, dovremo introdurre alcune notazioni. Se R è un anello graduato e \mathfrak{p} è un ideale primo omogeneo di R , indicheremo con $R_{(\mathfrak{p})}$ il sottoanello degli elementi di grado 0 nel localizzato di R rispetto al sottoinsieme moltiplicativo T che consiste di tutti gli elementi omogenei di R non appartenenti a \mathfrak{p} . Si noti che $T^{-1}R$ ha una graduazione naturale data da $\deg(f/g) = \deg f - \deg g$, dove f è un polinomio omogeneo di R e g appartiene a T . L'anello *localizzato omogeneo* $R_{(\mathfrak{p})}$ è un anello locale, con ideale massimale $(\mathfrak{p} \cdot T^{-1}R) \cap R_{(\mathfrak{p})}$. In particolare, se R è un dominio di integrità, allora per $\mathfrak{p} = (0)$ si ottiene un campo $R_{((0))}$. In modo del tutto analogo, se $f \in R$ è un elemento omogeneo, indicheremo con $R_{(f)}$ il sottoanello degli elementi di grado 0 nel localizzato R_f .

Teorema 1.4.9. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ una varietà proiettiva con anello delle coordinate omogenee $R(X)$. Allora:*

- (a) $\mathcal{O}_X(X) \cong k$;
- (b) *Per ogni punto $P \in X$, sia $\mathfrak{m}_P \subseteq R(X)$ l'ideale generato da tutti gli elementi omogenei $f \in R(X)$ tali che $f(P) = 0$. Allora $\mathcal{O}_{X,P} \cong R(X)_{(\mathfrak{m}_P)}$;*
- (c) $K(X) \cong R(X)_{((0))}$.

Dimostrazione. Per cominciare, sia $U_i \subset \mathbb{P}_k^n$ l'aperto definito da $x_i \neq 0$, e sia $X_i = X \cap U_i$. L'aperto U_i è isomorfo a \mathbb{A}_k^n , attraverso l'isomorfismo $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{A}_k^n$ della Proposizione 1.2.14 (verificarlo per esercizio). In questo modo possiamo considerare X_i come una varietà affine. Esiste quindi un isomorfismo naturale ϕ_i^* dell'anello delle coordinate affini $A(X_i)$ con la localizzazione $R(X)_{(x_i)}$ dell'anello delle coordinate omogenee di X . Per costruirlo, iniziamo costruendo un isomorfismo di $k[y_1, \dots, y_n]$ con $k[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i]_{(x_i)}$, definito inviando un polinomio $f(y_1, \dots, y_n)$ in $f(x_0/x_i, \dots, x_n/x_i)$, dove in questa espressione abbiamo ommesso il termine x_i/x_i . Questo isomorfismo manda l'ideale $I(X_i)$ in $I(X)R_{(x_i)}$ quindi, passando al quoziente, si ottiene l'isomorfismo desiderato $\phi_i^* : A(X_i) \xrightarrow{\sim} R(X)_{(x_i)}$.

Ora, per dimostrare il punto (b), consideriamo un punto qualunque $P \in X$ e scegliamo un indice i in modo tale che $P \in X_i$. Per il Teorema 1.4.8, si ha $\mathcal{O}_{X,P} \cong A(X_i)_{\mathfrak{m}'_P}$, dove \mathfrak{m}'_P è l'ideale massimale di $A(X_i)$ corrispondente al punto P . Si può verificare facilmente che $\phi_i^*(\mathfrak{m}'_P) = \mathfrak{m}_P \cdot R(X)_{(x_i)}$. Ora, dato che $x_i \notin \mathfrak{m}_P$ e che la localizzazione è transitiva, si deduce che $A(X_i)_{\mathfrak{m}'_P} \cong R(X)_{(\mathfrak{m}_P)}$, il che dimostra il punto (b).

Per dimostrare il punto (c), usiamo ancora il Teorema 1.4.8, secondo il quale $K(X)$, che è uguale a $K(X_i)$, è isomorfo al campo delle frazioni di $A(X_i)$ il quale, a sua volta, è isomorfo, attraverso l'isomorfismo ϕ_i^* , a $R(X)_{((0))}$:

$$K(X) = K(X_i) \cong A(X_i)_{(0)} \cong R(X)_{((0))}.$$

La dimostrazione del punto (a) è un po' più laboriosa. Sia $f \in \mathcal{O}_X(X)$ una funzione regolare globale su X . Allora, per ogni i , f è regolare su X_i e quindi, in base al Teorema 1.4.8, $f \in A(X_i)$. Ma abbiamo appena visto che $A(X_i) \cong R(X)_{(x_i)}$, quindi, per ogni i , f può essere scritta nella forma $g_i/x_i^{N_i}$, dove $g_i \in R(X)$ è un polinomio omogeneo di grado N_i . Considerando $\mathcal{O}_X(X)$, $K(X)$ e $R(X)$ come sottoanelli del campo delle frazioni L di $R(X)$, ciò significa che $x_i^{N_i}f \in R(X)_{N_i}$, per ogni i . Scegliamo ora un intero $N \geq \sum N_i$. Allora $R(X)_N$ è generato, come spazio vettoriale su k , da monomi di grado N in x_0, \dots, x_n , e in ognuno di questi monomi almeno una delle x_i compare a una potenza $\geq N_i$. Abbiamo perciò $R(X)_N \cdot f \subseteq R(X)_N$. Iterando, si trova che $R(X)_N \cdot f^q \subseteq R(X)_N$, per ogni $q > 0$. In particolare, $x_0^N f^q \in R(X)$, per ogni $q > 0$. Questo prova che il sottoanello $R(X)[f]$ di L è contenuto in $x_0^{-N}R(X)$, il quale è un $R(X)$ -modulo finitamente generato. Dato che $R(X)$ è un anello noetheriano, $R(X)[f]$ è un $R(X)$ -modulo finitamente generato, e quindi f è intero su $R(X)$ (vedi [AM, Proposizione 5.1, pag. 94]). Ciò significa che esistono degli elementi $a_1, \dots, a_m \in R(X)$ tali che

$$f^m + a_1 f^{m-1} + \dots + a_m = 0.$$

Poiché f ha grado 0, possiamo sostituire gli a_i con le loro componenti omogenee di grado 0 ottenendo sempre un'equazione valida. Ma $R(X)_0 = k$, quindi gli a_i sono elementi di k e quindi f è algebrico su k . Dato che k è algebricamente chiuso, si conclude finalmente che $f \in k$, il che termina la dimostrazione. \square

Osservazione 1.4.10. Notiamo in particolare il punto (a) del teorema precedente: esso afferma che le uniche funzioni regolari definite globalmente su una varietà proiettiva sono solo le costanti. Questo è profondamente diverso da quanto accade per le varietà affini, in cui si ha $\mathcal{O}_X(X) \cong A(X) = k[x_1, \dots, x_n]/I(X)$. Questo risultato è l'analogo (nel caso algebrico) del

classico risultato di analisi complessa che afferma che le uniche funzioni olo-morfe definite su una varietà complessa *compatta* sono solo le costanti (il quale a sua volta è una conseguenza del principio del massimo modulo⁵).

Osservazione 1.4.11. A titolo di esempio, possiamo dare una semplice dimostrazione del fatto che $\mathcal{O}(\mathbb{P}_k^1) = k$. Consideriamo dunque la retta proiettiva \mathbb{P}_k^1 con coordinate omogenee (x_0, x_1) . Sia U_i l'aperto di \mathbb{P}_k^1 dato da $x_i \neq 0$, per $i = 0, 1$. La retta proiettiva \mathbb{P}_k^1 è ricoperta dai due aperti U_0 e U_1 i quali possono essere identificati con la retta affine \mathbb{A}_k^1 nel modo seguente:

$$U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_k^1, \quad (x_0, x_1) \mapsto X = x_1/x_0,$$

e

$$U_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_k^1, \quad (x_0, x_1) \mapsto Y = x_0/x_1.$$

Nell'intersezione $U_0 \cap U_1$ le due coordinate affini X e Y sono collegate dalla relazione $Y = 1/X$.

Se $f \in \mathcal{O}(\mathbb{P}_k^1)$ è una funzione regolare, le sue restrizioni $f_0 = f|_{U_0}$ e $f_1 = f|_{U_1}$ sono delle funzioni regolari su $U_0 \cong \mathbb{A}_k^1$ e $U_1 \cong \mathbb{A}_k^1$ rispettivamente e quindi possono essere identificate con dei polinomi nelle variabili X e Y : $f_0 = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ e $f_1 = b_0 + b_1Y + b_2Y^2 + \cdots + b_mY^m$. Naturalmente, nell'intersezione $U_0 \cap U_1$ si deve avere $Y = 1/X$ e quindi

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = b_0 + \frac{b_1}{X} + \frac{b_2}{X^2} + \cdots + \frac{b_m}{X^m}.$$

Questo è possibile solo se $a_0 = b_0$ e $a_i = b_j = 0$ per ogni $i, j \geq 1$. Si conclude quindi che $f = a_0 \in k$.

1.5 Un'equivalenza di categorie

A ogni varietà affine $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ abbiamo associato un anello $A(X)$, che è in realtà una k -algebra finitamente generata e priva di divisori dello zero; inoltre abbiamo visto che $A(X) \cong \mathcal{O}_X(X)$, cioè gli elementi di $A(X)$ possono essere identificati con le funzioni regolari su X .

Se ora Y è un'altra varietà affine definita sullo stesso campo di base k , a un morfismo di varietà

$$\phi : X \rightarrow Y$$

corrisponde una funzione

$$\phi^* : A(Y) \rightarrow A(X), \quad f \mapsto f \circ \phi.$$

⁵Il principio del massimo modulo è il seguente teorema: sia U un aperto connesso di \mathbb{C} e sia f una funzione olomorfa in U . Se $z_0 \in U$ è un punto di massimo per $|f|$, allora f è costante in U .

La situazione è illustrata dal seguente diagramma.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ & \searrow f \circ \phi & \swarrow f \\ & k & \end{array}$$

Si verifica immediatamente che $\phi^* : A(Y) \rightarrow A(X)$ è in effetti un omomorfismo di k -algebre. Questa costruzione fornisce quindi una mappa di insiemi

$$\alpha : \text{Mor}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{k\text{-alg}}(A(Y), A(X)), \quad \phi \mapsto \phi^*,$$

dove con $\text{Mor}(X, Y)$ indichiamo l'insieme dei morfismi di varietà da X in Y .

Quello che vorremmo dimostrare è che α è una biiezione! Ciò significherebbe che studiare le varietà affini definite su k , e i loro morfismi, è “la stessa cosa” che studiare le k -algebre finitamente generate e prive di divisori dello zero, con gli omomorfismi di k -algebre.

Cerchiamo allora di capire come, a un omomorfismo di k -algebre $\psi : A(Y) \rightarrow A(X)$ si possa associare un morfismo di varietà $\phi : X \rightarrow Y$ in modo tale che $\psi = \phi^*$. Per definire ϕ come funzione tra gli insiemi dei punti di X e Y si potrebbe procedere nel modo seguente: sia P un punto di X , esso corrisponde a un ideale massimale \mathfrak{m}_P di $A(X)$. Se consideriamo l'ideale $\psi^{-1}(\mathfrak{m}_P)$ otteniamo un ideale di $A(Y)$. In generale, se $f : A \rightarrow B$ è un omomorfismo di anelli e se $\mathfrak{m} \subset B$ è un ideale massimale, la sua antiimmagine $f^{-1}(\mathfrak{m})$ è un ideale di A , ma non è necessariamente massimale. Nella nostra situazione tuttavia non è difficile dimostrare che $\psi^{-1}(\mathfrak{m}_P)$ è effettivamente un ideale massimale di $A(Y)$ e quindi corrisponde a un punto Q di Y . Possiamo quindi porre $\phi(P) = Q$. Questa idea è corretta, ma bisogna poi dimostrare che la funzione ϕ così definita è un morfismo di varietà. Cerchiamo invece di trovare un'altra strada per definire la funzione ϕ .

Iniziamo con la seguente osservazione: siano $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}_k^m$ due varietà affini e $\phi : X \rightarrow Y$ un morfismo di varietà. Esplicitamente sarà

$$\phi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_m),$$

dove $y_i = \phi_i(x_1, \dots, x_n)$, per $i = 1, \dots, m$, sono le componenti di ϕ .

Se indichiamo con $y_i : Y \rightarrow k$, per $i = 1, \dots, m$, le funzioni coordinate su Y ,

$$y_i : (y_1, \dots, y_m) \mapsto y_i,$$

si ha $\phi_i = \phi^*(y_i)$, dove

$$\phi^* : A(Y) \rightarrow A(X)$$

è l'omomorfismo di k -algebre indotto da ϕ . La situazione è illustrata dal seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ & \searrow \phi_i \quad \swarrow y_i & \\ & k & \end{array}$$

In sostanza, le componenti ϕ_i di ϕ sono le immagini tramite ϕ^* delle “coordinate” y_i in $A(Y)$.

Questa osservazione ci fa capire come possiamo definire ϕ partendo da un omomorfismo di k -algebre $\psi : A(Y) \rightarrow A(X)$. Se scriviamo $A(Y) = k[y_1, \dots, y_m]/I(Y)$, dovremo considerare le “coordinate” \bar{y}_i immagini delle indeterminate y_i tramite la proiezione canonica $k[y_1, \dots, y_m] \rightarrow A(Y)$ e porre $\bar{\phi}_i = \psi(\bar{y}_i) \in A(X)$. Per ogni $\bar{\phi}_i \in A(X) = k[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ dovremo poi scegliere un suo rappresentante $\phi_i \in k[x_1, \dots, x_n]$, ottenendo così m polinomi ϕ_1, \dots, ϕ_m . Questi m polinomi saranno le componenti di un morfismo $\phi : \mathbb{A}_k^n \rightarrow \mathbb{A}_k^m$. L'unica cosa che rimane da dimostrare è che si ha proprio $\phi(X) \subseteq Y$, e quindi ϕ definisce un morfismo da X in Y . Dalla costruzione di ϕ sarà poi del tutto evidente che $\psi = \phi^*$.

Usando questa idea siamo, in realtà, in grado di dimostrare un risultato un po' più forte:

Teorema 1.5.1. *Sia X una varietà qualsiasi (definita su k) e sia Y una varietà affine. Allora esiste una biiezione naturale di insiemi*

$$\alpha : \text{Mor}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{k\text{-alg}}(A(Y), \mathcal{O}_X(X)).$$

Dimostrazione. Sia $\phi \in \text{Mor}(X, Y)$, la mappa α è definita nel modo ovvio, ponendo $\alpha(\phi) = \phi^* : A(Y) \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$. Costruiamo ora la funzione inversa di α .

Sia dunque $\psi : A(Y) \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$ un omomorfismo di k -algebre. Supponiamo, per fissare le idee, che Y sia contenuta in uno spazio affine \mathbb{A}_k^m e poniamo $A(Y) = k[y_1, \dots, y_m]/I(Y)$. Per ogni $y_i \in k[y_1, \dots, y_m]$ indichiamo con \bar{y}_i la sua immagine in $A(Y)$. Poniamo $\xi_i = \psi(\bar{y}_i) \in \mathcal{O}_X(X)$. In questo modo otteniamo m funzioni regolari ξ_1, \dots, ξ_m su X che ci permettono di definire una funzione $\phi : X \rightarrow \mathbb{A}_k^m$, $P \mapsto (\xi_1(P), \dots, \xi_m(P))$. Bisogna ora dimostrare che $\phi(X) \subseteq Y \subseteq \mathbb{A}_k^m$. Per fare ciò è necessario dimostrare che $f(\phi(P)) = 0$, per ogni $P \in X$ e per ogni $f \in I(Y)$ (dato che $Y = Z(I(Y))$). Dalla costruzione di ϕ si ha $f(\phi(P)) = f(\xi_1(P), \dots, \xi_m(P))$ e, poiché f è un polinomio e ψ è un omomorfismo di k -algebre, si ha:

$$\begin{aligned} f(\xi_1(P), \dots, \xi_m(P)) &= f(\psi(\bar{y}_1)(P), \dots, \psi(\bar{y}_m)(P)) \\ &= \psi(f(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m))(P) = 0, \end{aligned}$$

dato che $f(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m) = 0$ (infatti $f(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m)$ è l'immagine del polinomio $f(y_1, \dots, y_m)$ in $A(Y)$, la quale è zero dato che $f(y_1, \dots, y_m) \in I(Y)$).

Questo dimostra che ϕ definisce una mappa da X in Y ; inoltre, dalla sua costruzione, segue immediatamente che $\psi = \phi^*$.

L'ultima cosa che rimane da dimostrare è che $\phi : X \rightarrow Y$ è un morfismo di varietà. Questo fatto però è una conseguenza del lemma seguente. \square

Lemma 1.5.2. *Sia X una varietà qualunque e $Y \subseteq \mathbb{A}_k^m$ una varietà affine. Una mappa insiemistica $\phi : X \rightarrow Y$ è un morfismo di varietà se e solo se, per ogni $i = 1, \dots, m$, la funzione $y_i \circ \phi$ è una funzione regolare su X , dove y_1, \dots, y_m sono le funzioni coordinate su \mathbb{A}_k^m .*

Dimostrazione. Se ϕ è un morfismo di varietà, allora le $y_i \circ \phi$ sono funzioni regolari su X , proprio in base alla definizione di morfismo.

Viceversa, supponiamo che tutte le $y_i \circ \phi$ siano funzioni regolari su X . Allora, per ogni polinomio $f(y_1, \dots, y_m)$, $f \circ \phi$ è ancora una funzione regolare su X . Dato che i sottoinsiemi chiusi di Y sono definiti dall'annullamento di funzioni polinomiali, e dato che le funzioni regolari sono continue, si deduce che ϕ^{-1} trasforma sottoinsiemi chiusi di Y in sottoinsiemi chiusi di X , quindi ϕ è una funzione continua. Infine, dato che le funzioni regolari sui sottoinsiemi aperti di Y sono localmente quozienti di due polinomi, da quanto visto sopra risulta evidente che, per ogni funzione regolare g su un aperto di Y , la funzione $g \circ \phi$ è regolare su un aperto di X . Questo dimostra che ϕ è un morfismo di varietà. \square

Dal teorema precedente segue subito il seguente risultato:

Corollario 1.5.3. *Due varietà affini X e Y su k sono isomorfe se e solo se i loro anelli di coordinate $A(X)$ e $A(Y)$ sono isomorfi, come k -algebre,*

Nel linguaggio delle categorie, quanto appena visto può essere espresso nel modo seguente:

Corollario 1.5.4. *Il funtore $X \mapsto A(X)$ determina una equivalenza di categorie, che rovescia le frecce⁶, tra la categoria delle varietà affini su k e la categoria delle k -algebre finitamente generate e prive di divisori dello zero.*

Esempio 1.5.5. Vogliamo dimostrare che la varietà quasi-affine $X = \mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\}$ è affine, cioè è isomorfa a una varietà affine.

⁶Si tratta quindi di una anti-equivalenza di categorie, cioè di una equivalenza di categorie tra la categoria delle varietà affini su k e la categoria opposta della categoria delle k -algebre finitamente generate e prive di divisori dello zero.

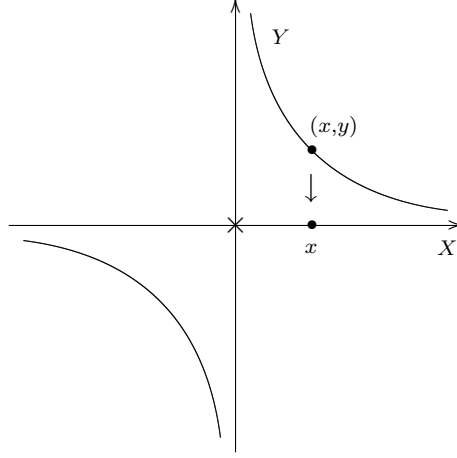


Figura 1.1: Isomorfismo di varietà

Se consideriamo l'anello delle funzioni regolari su X , è facile dimostrare che $\mathcal{O}_X(X) \cong k[x]_x = \{f(x)/x^n \mid f(x) \in k[x], n \geq 0\} \cong k[x, x^{-1}] \cong k[x, y]/(xy - 1)$. Esplicitamente, consideriamo la varietà affine $Y \subset \mathbb{A}_k^2$ di equazione $xy - 1 = 0$. Allora la proiezione sull'asse delle x ,

$$\pi : Y \rightarrow X, \quad (x, y) \mapsto x,$$

determina un isomorfismo tra Y e X (vedi figura 1.1).

Esempio 1.5.6. Ora vogliamo invece dimostrare che la varietà quasi-affine $X = \mathbb{A}_k^2 \setminus \{(0, 0)\}$ non è isomorfa a una varietà affine (quindi esistono varietà quasi-affini che non sono affini).

Osserviamo che X può essere ricoperta dai due aperti $U_1 = \mathbb{A}_k^2 \setminus Z_1$ e $U_2 = \mathbb{A}_k^2 \setminus Z_2$, dove Z_1 e Z_2 sono i due sottoinsiemi chiusi di equazioni $x = 0$ e $y = 0$ rispettivamente. Si dimostra facilmente che $\mathcal{O}_X(U_1) = k[x, y]_x$ e $\mathcal{O}_X(U_2) = k[x, y]_y$. Sia ora $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Si ha $f|_{U_1} \in \mathcal{O}_X(U_1) = k[x, y]_x$ e $f|_{U_2} \in \mathcal{O}_X(U_2) = k[x, y]_y$, quindi

$$f|_{U_1} = \frac{p(x, y)}{x^n}, \quad f|_{U_2} = \frac{q(x, y)}{y^m},$$

per qualche $n, m \geq 0$ e per due opportuni polinomi $p, q \in k[x, y]$.

Dato che queste due espressioni devono coincidere nell'intersezione $U_1 \cap U_2$, si deve avere

$$\frac{p(x, y)}{x^n} = \frac{q(x, y)}{y^m},$$

per ogni $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Tuttavia questa uguaglianza è possibile solo se $m = n = 0$, da cui segue che f deve essere un polinomio. Abbiamo così dimostrato che $\mathcal{O}_X(X) = k[x, y]$.

Se, per assurdo, X fosse affine, dato che $\mathcal{O}_X(X) = k[x, y]$, si dovrebbe avere un isomorfismo $X \cong \mathbb{A}_k^2$ ma, naturalmente, $\mathbb{A}_k^2 \setminus \{(0, 0)\}$ non è isomorfo a \mathbb{A}_k^2 . Quindi X non è una varietà affine.

Esempio 1.5.7. Siano ora X una varietà proiettiva e Y una varietà affine sul campo k . Ricordando che $\mathcal{O}_X(X) = k$, si ha:

$$\text{Mor}(X, Y) \cong \text{Hom}_{k\text{-alg}}(A(Y), \mathcal{O}_X(X)) \cong \text{Hom}_{k\text{-alg}}(A(Y), k).$$

Se P è una varietà affine consistente in un unico punto, si ha $A(P) = k$ e quindi

$$\text{Hom}_{k\text{-alg}}(A(Y), k) \cong \text{Hom}_{k\text{-alg}}(A(Y), A(P)) \cong \text{Mor}(P, Y).$$

In conclusione, i morfismi da una varietà proiettiva X a una varietà affine Y sono la stessa cosa dei morfismi da un punto P a Y , e quindi la loro immagine è un punto di Y . Abbiamo così dimostrato che ogni morfismo da una varietà proiettiva a una varietà affine è costante.

1.5.1 Confronto tra il caso affine e il caso proiettivo

Abbiamo visto che l'anello delle coordinate affini $A(X)$ di una varietà affine X è un invariante per isomorfismo, cioè due varietà affini sono isomorfe se e solo se lo sono i loro anelli delle coordinate affini. Diciamo subito che un risultato analogo non vale nel caso delle varietà proiettive e dei loro anelli delle coordinate omogenee (e non vale nemmeno se consideriamo i loro anelli delle funzioni regolari). Vediamo ora in dettaglio cosa succede nel caso delle varietà proiettive.

Per quanto riguarda gli anelli delle funzioni regolari essi non sono certo invarianti per isomorfismo, dato che $\mathcal{O}_X(X) = k$ per ogni varietà proiettiva X su k . Consideriamo allora l'anello $R(X)$ delle coordinate omogenee di una varietà proiettiva X . A differenza del caso affine, gli elementi di $R(X)$ non definiscono delle funzioni su X . Di conseguenza, se $\phi : X \rightarrow Y$ è un morfismo di varietà proiettive, non è possibile definire un omomorfismo di anelli $\phi^* : R(Y) \rightarrow R(X)$ come nel caso affine.

Supponiamo ora che sia dato un omomorfismo di k -algebre graduate $\psi : R(Y) \rightarrow R(X)$ (ψ è un omomorfismo di k -algebre tale che $\psi(R(Y)_d) \subseteq R(X)_d$, per ogni $d \geq 0$). Anche in questo caso, partendo da ψ non si ottiene un morfismo di varietà $\phi : X \rightarrow Y$. La ragione di ciò è essenzialmente dovuta alla presenza dell'ideale irrilevante. Infatti si potrebbe cercare di definire la mappa ϕ , almeno a livello dei punti, in un modo analogo a quanto fatto nel caso delle varietà affini: un punto $P \in X$ corrisponde a un ideale omogeneo massimale \mathfrak{m}_P di $R(X)$, si prenda quindi l'ideale $\psi^{-1}(\mathfrak{m}_P)$ di $R(Y)$

e si cerchi di vedere se questo determina un punto di Y . Può benissimo accadere però che, mentre l'ideale \mathfrak{m}_P del punto P non contiene l'ideale irrilevante (x_0, x_1, \dots, x_n) di $R(X)$, la sua antiimmagine $\psi^{-1}(\mathfrak{m}_P)$ contenga l'ideale irrilevante di $R(Y)$ e quindi corrisponda all'insieme vuoto. Questo corrisponde alla situazione seguente: sia

$$\psi : k[y_0, \dots, y_m] \rightarrow k[x_0, \dots, x_n]$$

un omomorfismo di k -algebre definito da $y_i \mapsto \phi_i(x_0, \dots, x_n)$. Se utilizziamo i polinomi ϕ_i per definire una mappa

$$\phi : \mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^m, \quad (x_0, \dots, x_n) \mapsto (\phi_0(x_0, \dots, x_n), \dots, \phi_m(x_0, \dots, x_n)),$$

tale mappa non è definita nei punti corrispondenti alle $n+1$ -uple $(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n)$ per le quali si ha $\phi_i(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n) = 0$, per $i = 0, \dots, m$. In corrispondenza a un tale ψ , si ottiene quindi una mappa ϕ che è definita non su tutto \mathbb{P}_k^n ma solo sull'aperto complementare del luogo degli zeri di tutti i polinomi ϕ_i .

In generale, dato un omomorfismo $\psi : R(Y) \rightarrow R(X)$ come sopra, si può definire un morfismo $\phi : U \rightarrow Y$, dove $U \subseteq X$ è l'aperto contenente i punti $P \in X$ che corrispondono a un ideale massimale $\mathfrak{m}_P \subset R(X)$ tale che $\psi^{-1}(\mathfrak{m}_P)$ non contiene l'ideale irrilevante di $R(Y)$.

Notiamo infine che, date due varietà proiettive X e Y su k è possibile che X e Y siano isomorfe ma che le k -algebre $R(X)$ e $R(Y)$ non lo siano! Ad esempio, è sufficiente che si abbia $R(X)_d \cong R(Y)_d$ per ogni $d \geq d_0$ (per qualche $d_0 \geq 0$), per avere $X \cong Y$.

Un altro caso in cui si hanno due varietà proiettive isomorfe corrispondenti a due k -algebre non isomorfe è il seguente: sia X una varietà proiettiva su k e sia $R(X) = \bigoplus_{d \geq 0} R(X)_d$ la k -algebra graduata corrispondente. Per ogni $n \geq 1$ definiamo la k -algebra graduata $R(X)^{(n)} = \bigoplus_{d \geq 0} R(X)_d^{(n)}$ ponendo $R(X)_d^{(n)} = R(X)_{nd}$. Le k -algebre $R(X)$ e $R(X)^{(n)}$ non sono isomorfe (se $n \geq 2$), ma “corrispondono” entrambe alla stessa varietà proiettiva X .

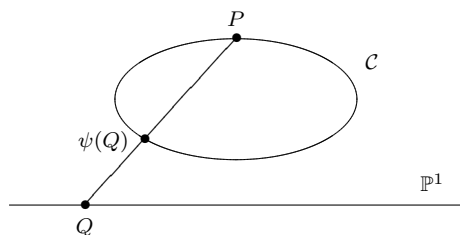
In effetti si può dimostrare che l'anello delle coordinate omogenee $R(X)$ di una varietà proiettiva X è un invariante della varietà X considerata assieme a una sua immersione in un qualche spazio proiettivo; quindi, nel caso descritto in precedenza, le due k -algebre $R(X)$ e $R(X)^{(n)}$ corrispondono entrambe alla stessa varietà proiettiva X , ma immersa in due spazi proiettivi diversi.

Esempio 1.5.8. Consideriamo l'immersione (detta *di Veronese*) di \mathbb{P}_k^1 in \mathbb{P}_k^2 data da

$$\psi : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^2, \quad (x_0, x_1) \mapsto (x_0^2, x_0x_1, x_1^2).$$

Se indichiamo con (z_0, z_1, z_2) le coordinate omogenee di \mathbb{P}_k^2 , l'immagine di ψ è la conica di equazione $z_0z_2 = z_1^2$ e ψ determina un isomorfismo tra \mathbb{P}_k^1 e la sua immagine in \mathbb{P}_k^2 .

Geometricamente questo isomorfismo tra la retta proiettiva \mathbb{P}_k^1 e una conica \mathcal{C} del piano proiettivo può essere descritto come segue: sia \mathcal{C} una conica e identifichiamo \mathbb{P}_k^1 con una retta proiettiva r immersa nel piano proiettivo; fissiamo un punto P sulla conica \mathcal{C} (in modo che P non stia sulla retta r) e consideriamo la proiezione ψ di centro P della retta r sulla conica \mathcal{C} . Per ogni punto $Q \in r$, il punto $\psi(Q) \in \mathcal{C}$ è il punto determinato in modo tale che la retta per P e Q intersechi la conica \mathcal{C} nella coppia di punti P e $\psi(Q)$ (con la convenzione che $\psi(Q) = P$ se la retta per P e Q è tangente a \mathcal{C} nel punto P).



Se introduciamo delle coordinate affini $X = \frac{x_1}{x_0}$ su \mathbb{P}^1 e $Z_1 = \frac{z_1}{z_0}$, $Z_2 = \frac{z_2}{z_0}$ su \mathbb{P}^2 , l'immersione ψ è data da $\psi(X) = (X, X^2)$, che è un isomorfismo tra la retta affine e la parabola di equazione $Z_2 = Z_1^2$.

Passando a considerare gli anelli delle coordinate omogenee, si ha

$$R(\mathbb{P}^1) = k[x_0, x_1], \quad R(\mathcal{C}) = \frac{k[z_0, z_1, z_2]}{(z_0 z_2 - z_1^2)},$$

i quali non sono isomorfi.

Poniamo dunque $R = k[x_0, x_1] = \bigoplus_{d \geq 0} R_d$ e $S = \frac{k[z_0, z_1, z_2]}{(z_0 z_2 - z_1^2)} = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$. Considerando i generatori x_0^2 , $x_0 x_1$ e x_1^2 di $R_2 = R_1^{(2)}$, e ponendo $z_0 = x_0^2$, $z_1 = x_0 x_1$ e $z_2 = x_1^2$, si trova che questi sono dei generatori di S_1 e, di conseguenza, $S_1 \cong R_1^{(2)} = R_2$. In modo analogo si dimostra che $S_d \cong R_d^{(2)} = R_{2d}$, per ogni $d \geq 2$. In conclusione, le k -algebre R e S non sono isomorfe, ma $S \cong R^{(2)}$. Notiamo così che le due k -algebre graduate R e $R^{(2)}$ corrispondono entrambe alla retta proiettiva ma, mentre R corrisponde a \mathbb{P}^1 , $R^{(2)}$ corrisponde alla retta proiettiva immersa in \mathbb{P}^2 tramite l'immersione di Veronese ψ .

Più in generale, si può dimostrare, in modo del tutto analogo, che per ogni intero $d \geq 1$, la k -algebra graduata $R^{(d)}$ corrisponde alla retta proiettiva immersa in \mathbb{P}^d tramite la seguente immersione:

$$\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^d, \quad (x_0, x_1) \mapsto (x_0^d, x_0^{d-1}x_1, x_0^{d-2}x_1^2, \dots, x_0x_1^{d-1}, x_1^d).$$

1.5.2 Prodotto di due varietà affini

Usando la corrispondenza tra le varietà affini e i loro anelli delle coordinate, studiamo la costruzione del prodotto di due varietà affini.

Siano $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}_k^m$ due varietà affini. Il loro prodotto è una varietà affine $X \times Y \subseteq \mathbb{A}_k^n \times \mathbb{A}_k^m \cong \mathbb{A}_k^{n+m}$, il cui insieme di punti è il prodotto insiemistico degli insiemi di punti delle due varietà X e Y . Vedremo ora come si potrà dimostrare che il prodotto insiemistico $X \times Y$ è, in effetti, una varietà affine e quale sarà il suo anello delle coordinate.

Consideriamo innanzitutto il prodotto $X \times \mathbb{A}_k^m$. Se $I(X) \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ è l'ideale di $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$, allora l'ideale

$$I(X) \otimes_k k[y_1, \dots, y_m] \subseteq k[x_1, \dots, x_n] \otimes_k k[y_1, \dots, y_m] \cong k[z_1, \dots, z_{n+m}]$$

è l'ideale di $X \times \mathbb{A}_k^m \subseteq \mathbb{A}_k^n \times \mathbb{A}_k^m \cong \mathbb{A}_k^{n+m}$, quindi $X \times \mathbb{A}_k^m$ è una varietà affine. In modo del tutto analogo si dimostra che $\mathbb{A}_k^n \times Y$ è una varietà affine in \mathbb{A}_k^{n+m} , il cui ideale è $k[x_1, \dots, x_n] \otimes_k I(Y)$. Ora basta usare l'uguaglianza

$$X \times Y = (X \times \mathbb{A}_k^m) \cap (\mathbb{A}_k^n \times Y)$$

per concludere che $X \times Y \subset \mathbb{A}_k^{n+m}$ è una varietà affine il cui ideale è

$$I(X \times Y) = I(X) \otimes_k k[y_1, \dots, y_m] + k[x_1, \dots, x_n] \otimes_k I(Y).$$

Possiamo ora determinare l'anello delle coordinate affini di $X \times Y$:

$$\begin{aligned} A(X \times Y) &= \frac{k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]}{I(X \times Y)} \\ &\cong \frac{k[x_1, \dots, x_n] \otimes_k k[y_1, \dots, y_m]}{I(X) \otimes_k k[y_1, \dots, y_m] + k[x_1, \dots, x_n] \otimes_k I(Y)} \\ &\cong \frac{k[x_1, \dots, x_n]}{I(X)} \otimes_k \frac{k[y_1, \dots, y_m]}{I(Y)} \\ &\cong A(X) \otimes_k A(Y). \end{aligned}$$

Si può anche dimostrare che il prodotto di due varietà affini che abbiamo appena definito è anche un “prodotto” (inteso in senso categorico) nella categoria delle varietà affini: ciò significa che $X \times Y$ è una varietà affine, che le due proiezioni naturali $X \times Y \rightarrow X$ e $X \times Y \rightarrow Y$ sono morfismi di varietà e che per ogni varietà affine Z su k dotata di due morfismi $Z \rightarrow X$ e $Z \rightarrow Y$, esiste un unico morfismo $\gamma : Z \rightarrow X \times Y$ che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & X \times Y & \\ \swarrow & \uparrow & \searrow \\ X & \gamma & Y \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ & Z & \end{array}$$

In base alla anti-equivalenza di categorie stabilita nel Corollario 1.5.4, questo diagramma si traduce nella ben nota proprietà universale del prodotto tensoriale: esistono due omomorfismi naturali $A(X) \rightarrow A(X) \otimes_k A(Y)$ e $A(Y) \rightarrow A(X) \otimes_k A(Y)$ tali che, per ogni coppia di omomorfismi di k -algebre $A(X) \rightarrow A(Z)$ e $A(Y) \rightarrow A(Z)$ esiste un unico omomorfismo $\delta : A(X) \otimes_k A(Y) \rightarrow A(Z)$ che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 & A(X) \otimes_k A(Y) & \\
 \nearrow & \vdots \delta & \nwarrow \\
 A(X) & & A(Y) \\
 \searrow & \downarrow & \swarrow \\
 & A(Z) &
 \end{array}$$

1.5.3 Prodotto di due varietà proiettive

Un'altra costruzione importante è quella del prodotto di due varietà proiettive o, più in generale, di due varietà quasi-proiettive.

Iniziamo considerando il prodotto di due spazi proiettivi \mathbb{P}^r e \mathbb{P}^s : osserviamo subito che, a differenza del prodotto di due spazi affini, si ha $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \neq \mathbb{P}^{r+s}$.

Per definire una struttura di varietà proiettiva sul prodotto $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s$, consideriamo la seguente mappa, nota col nome di *immersione di Segre*:

$$\psi : \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \rightarrow \mathbb{P}^N,$$

ove $N = rs + r + s$, definita inviando la coppia di punti $(a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{P}^r$ e $(b_0, \dots, b_s) \in \mathbb{P}^s$ nel punto di \mathbb{P}^N di coordinate omogenee $(\dots, a_i b_j, \dots)$, disposte in ordine lessicografico. Si verifica facilmente che ψ è ben definita e che è iniettiva, quindi possiamo identificare $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s$ con la sua immagine in \mathbb{P}^N . Per dimostrare che $\text{Im}(\psi)$ è una varietà proiettiva, consideriamo l'omomorfismo

$$\alpha : k[\{z_{ij}\}] \rightarrow k[x_0, \dots, x_r, y_0, \dots, y_s]$$

definito da $\alpha(z_{ij}) = x_i y_j$. Sia $\mathfrak{a} = \text{Ker}(\alpha)$ (è un ideale omogeneo) e consideriamo l'insieme degli zeri $Z(\mathfrak{a})$. Notiamo subito che $k[\{z_{ij}\}]/\mathfrak{a}$ si identifica con un sottoanello di $k[x_0, \dots, x_r, y_0, \dots, y_s]$, quindi è privo di divisori dello zero. Ciò significa che \mathfrak{a} è un ideale primo e dunque $Z(\mathfrak{a})$ è una varietà proiettiva. Se $f(\dots, z_{ij}, \dots)$ è un polinomio omogeneo in \mathfrak{a} , si ha $f(\dots, x_i y_j, \dots) = 0$ e quindi $f|_{\text{Im}(\psi)} = 0$. Si ha pertanto $\mathfrak{a} \subseteq I(\text{Im}(\psi))$ e quindi l'immagine di ψ è contenuta nella varietà proiettiva $Z(\mathfrak{a})$. Per dimostrare l'uguaglianza rimane solo da provare che $Z(\mathfrak{a}) \subseteq \text{Im}(\psi)$. A tal

fine osserviamo che tutti i polinomi quadratici del tipo $z_{ij}z_{hk} - z_{ik}z_{hj}$, per ogni i, j, h, k , sono elementi di \mathfrak{a} (in realtà, questi polinomi sono proprio un sistema di generatori di \mathfrak{a}). Se $P = (\dots, p_{ij}, \dots) \in Z(\mathfrak{a})$, allora dalle equazioni $p_{ii}a_j = p_{ji}a_i$ e $p_{ii}b_j = p_{ij}b_i$ è possibile determinare due punti $A = (a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{P}^r$ e $B = (b_0, \dots, b_s) \in \mathbb{P}^s$ in modo tale che $P = \psi(A, B)$ (le equazioni $p_{ij}p_{hk} - p_{ik}p_{hj} = 0$ sono proprio le condizioni di compatibilità che rendono possibile risolvere il sistema di equazioni appena descritto). Abbiamo così dimostrato che $P \in \text{Im}(\psi)$, il che permette di concludere che $\text{Im}(\psi) = Z(\mathfrak{a})$.

Riassumendo: l'identificazione tra $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s$ e $Z(\mathfrak{a})$ determinata dalla immersione di Segre permette di attribuire al prodotto $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s$ la struttura di varietà proiettiva.

Esempio 1.5.9. Consideriamo l'immersione di Segre di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in \mathbb{P}^3 ,

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^3 \\ ((x_0, x_1), (y_0, y_1)) &\mapsto (x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1). \end{aligned}$$

Se indichiamo con (z_0, z_1, z_2, z_3) le coordinate omogenee in \mathbb{P}^3 , l'immagine di ψ è la sottovarietà di \mathbb{P}^3 di equazione $z_0z_3 = z_1z_2$, che è una superficie quadrica Q . Le immagini di $\mathbb{P}^1 \times \{a\}$ e di $\{b\} \times \mathbb{P}^1$ tramite ψ determinano, al variare di a e b in \mathbb{P}^1 , due famiglie di rette nella quadrica Q . Nella figura 1.2 sono illustrate due diverse rappresentazioni della quadrica Q : nella figura di sinistra è evidenziata solo una delle due famiglie di rette, mentre in quella di destra sono visibili entrambe.

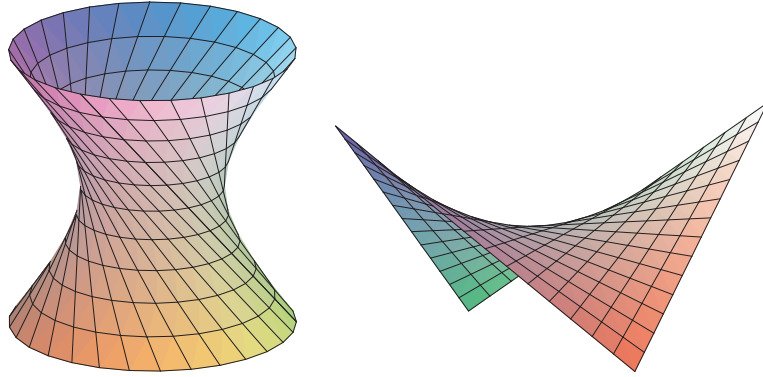


Figura 1.2: La quadrica Q con le due famiglie di rette.

Veniamo ora al caso generale. Siano dunque $X \subseteq \mathbb{P}^r$ e $Y \subseteq \mathbb{P}^s$ due varietà quasi-proiettive e consideriamo il loro prodotto insiemistico $X \times Y \subseteq \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s$. Usando l'immersione di Segre $\psi : \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \rightarrow \mathbb{P}^N$, possiamo identificare $X \times Y$ con la sua immagine $\psi(X \times Y)$, che è un sottoinsieme della

varietà proiettiva $\text{Im}(\psi)$. Si può ora dimostrare che $\psi(X \times Y)$ è una varietà quasi-proiettiva, il che permette di definire una struttura di varietà quasi-proiettiva sul prodotto $X \times Y$. Risulta inoltre che, se X e Y sono entrambe delle varietà proiettive, allora anche $X \times Y$ è una varietà proiettiva.

Osservazione 1.5.10. Si potrebbe anche dimostrare che l'operazione di prodotto di due varietà appena definita coincide con l'operazione di prodotto nella categoria delle varietà.

1.6 Mappe razionali, equivalenza birazionale

Abbiamo già discusso di morfismi e isomorfismi di varietà. In effetti, la nozione ideale di equivalenza tra varietà è quella di isomorfismo, tuttavia la classificazione delle varietà a meno di isomorfismo si rivela particolarmente (o eccessivamente) difficile. Al fine di rendere il problema della classificazione un po' più trattabile è utile introdurre un'altra nozione di equivalenza, più debole dell'isomorfismo. Questo nuovo tipo di equivalenza verrà chiamato "equivalenza birazionale."

Si potrà quindi cercare di classificare le varietà a meno di equivalenza birazionale; una volta terminata questa classificazione sarà poi sempre possibile cercare di classificare le varietà, all'interno di una stessa classe di equivalenza birazionale, a meno di isomorfismo.

Ad esempio, nel caso delle varietà di dimensione due (superficie), la loro classificazione birazionale è stata portata a termine con successo. Molto più complicato invece è il problema di classificare le varietà di dimensione ≥ 3 .

Iniziamo quindi con l'introduzione di quella che sarà chiamata una "mappa razionale" (o morfismo razionale) tra due varietà: l'idea è semplicemente quella di sostituire un morfismo tra due varietà X e Y (che è una funzione definita su tutta X) con un analogo morfismo definito però solo su un qualche sottoinsieme aperto di X . Dato che, nel caso della topologia di Zariski, gli aperti sono, in genere, densi, una funzione definita solo su un aperto della varietà X contiene comunque delle informazioni su tutta la varietà X . A titolo di esempio si può infatti dimostrare il seguente risultato:

Proposizione 1.6.1. *Siano X e Y due varietà e siano $\phi, \psi : X \rightarrow Y$ due morfismi. Supponiamo che esista un aperto non vuoto $U \subset X$ tale che $\phi|_U = \psi|_U$. Allora $\phi = \psi$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che $Y \subseteq \mathbb{P}^n$, per qualche n . Allora, componendo con l'inclusione $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, ci possiamo ridurre al caso in cui $Y = \mathbb{P}^n$. Consideriamo il prodotto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$, con la sua struttura di varietà proiettiva data dall'immersione di Segre. I due morfismi $\phi, \psi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ definiscono un morfismo $\phi \times \psi : X \rightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ (verificarlo per esercizio). Sia

$\Delta = \{(P, P) \mid P \in \mathbb{P}^n\}$ il sottoinsieme diagonale di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$. Esso è definito dalle equazioni $x_i y_j = x_j y_i$, per $i, j = 0, \dots, n$, e quindi è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$. Per ipotesi si ha $(\phi \times \psi)(U) \subseteq \Delta$. Ma U è denso in X e Δ è chiuso, quindi si ha necessariamente $(\phi \times \psi)(X) \subseteq \Delta$, ma ciò significa che $\phi = \psi$. \square

Passiamo quindi a dare la definizione formale di una mappa razionale.

Definizione 1.6.2. Siano X e Y due varietà. Una *mappa razionale* $\phi : X \dashrightarrow Y$ è una classe di equivalenza di coppie (U, ϕ_U) , dove U è un aperto non vuoto di X e $\phi_U : U \rightarrow Y$ è un morfismo. Due coppie (U, ϕ_U) e (V, ϕ_V) sono equivalenti se $\phi_U|_{U \cap V} = \phi_V|_{U \cap V}$. Una mappa razionale ϕ è detta *dominante* se per qualche (e quindi, per ogni) coppia (U, ϕ_U) l'immagine di ϕ_U è densa in Y .

Osservazione 1.6.3. Una mappa razionale $\phi : X \dashrightarrow Y$ è quindi un morfismo definito in qualche sottoinsieme aperto non vuoto di X , dove però quale sia effettivamente l'aperto di definizione non è importante. In particolare osserviamo che una mappa razionale da X in Y , in generale, *non* è una funzione da X in Y !

Osservazione 1.6.4. In generale non è detto che due mappe razionali $\phi : X \dashrightarrow Y$ e $\psi : Y \dashrightarrow Z$ si possano comporre (l'immagine di ϕ potrebbe infatti avere intersezione vuota con un aperto di definizione di ψ). Il concetto di mappa razionale dominante è stato introdotto proprio per ovviare a questo inconveniente: se $\phi : X \dashrightarrow Y$ è una mappa razionale dominante allora è ben definita una mappa razionale composta $\psi \circ \phi : X \dashrightarrow Z$. Se ci restringiamo a considerare solo mappe razionali dominanti è quindi possibile definire una categoria i cui oggetti sono le varietà e i cui morfismi sono le mappe razionali dominanti tra varietà. Un isomorfismo in questa categoria è detto una mappa birazionale.

Definizione 1.6.5. Siano X e Y due varietà. Una *mappa birazionale* $\phi : X \dashrightarrow Y$ è una mappa razionale dominante che ammette un'inversa, cioè tale che esiste una mappa razionale dominante $\psi : Y \dashrightarrow X$ per cui si abbia $\psi \circ \phi = \text{id}_X$ e $\phi \circ \psi = \text{id}_Y$, in quanto mappe razionali (cioè le uguaglianze valgono sull'aperto dove ambo i membri sono definiti).

Definizione 1.6.6. Due varietà X e Y si dicono *birazionalmente equivalenti* (o *birazionali*) se esiste una mappa birazionale da X in Y .

Parlando di morfismi tra varietà abbiamo visto che un morfismo $\phi : X \rightarrow Y$ induce un omomorfismo $\phi^* : \mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$ tra gli anelli delle funzioni regolari. In modo del tutto analogo, un'applicazione razionale dominante $\phi : X \dashrightarrow Y$ induce un omomorfismo di k -algebre tra gli anelli delle

funzioni razionali $\phi^* : K(Y) \rightarrow K(X)$. Infatti, se consideriamo una coppia (U, ϕ_U) che rappresenta la mappa ϕ , e se $f \in K(Y)$ è una funzione razionale rappresentata da una coppia (V, f_V) , dove $V \subseteq Y$ è un aperto e $f_V : V \rightarrow k$ è una funzione regolare, allora $\phi_U^{-1}(V)$ è un aperto non vuoto di X (perché ϕ è dominante) e quindi $f_V \circ \phi_U$ è una funzione regolare definita su $\phi_U^{-1}(V)$. Si ottiene in questo modo una funzione razionale su X , rappresentata dalla coppia $(\phi_U^{-1}(V), f_V \circ \phi_U)$, che indicheremo con $\phi^*(f)$.

Vale allora il seguente risultato, che è l'analogo, nel contesto delle applicazioni razionali, del Teorema 1.5.1:

Teorema 1.6.7. *Date due varietà X e Y , la corrispondenza tra applicazioni razionali dominanti $\phi : X \dashrightarrow Y$ e omomorfismi di k -algebre $\phi^* : K(Y) \rightarrow K(X)$ fornisce una biiezione tra l'insieme delle mappe razionali dominanti da X a Y e l'insieme degli omomorfismi di k -algebre da $K(Y)$ a $K(X)$. Questa corrispondenza determina un'equivalenza di categorie, che rovescia le frecce, tra la categoria delle varietà con le mappe razionali dominanti e la categoria delle estensioni di corpi, finitamente generate, del campo di base k .*

Prima di dimostrare questo teorema dobbiamo dimostrare alcuni risultati.

Lemma 1.6.8. *Sia X un'ipersuperficie in \mathbb{A}^n di equazione $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Allora $\mathbb{A}^n \setminus X$ è isomorfo all'ipersuperficie H in \mathbb{A}^{n+1} definita dall'equazione $x_{n+1}f = 1$. In particolare, $\mathbb{A}^n \setminus X$ è una varietà affine e il suo anello delle coordinate affini è $k[x_1, \dots, x_n]_f$.*

Dimostrazione. Definiamo una mappa $\phi : H \rightarrow \mathbb{A}^n$ ponendo, per ogni $P = (a_1, \dots, a_{n+1}) \in H$, $\phi(P) = (a_1, \dots, a_n)$. La mappa ϕ così definita è in effetti un morfismo di varietà, il quale corrisponde all'omomorfismo di anelli $A \rightarrow A_f$, dove $A = k[x_1, \dots, x_n]$. È inoltre evidente che ϕ definisce una biiezione tra H e la sua immagine, che è $\mathbb{A}^n \setminus X$. Per dimostrare che $\phi : H \rightarrow \mathbb{A}^n \setminus X$ è un isomorfismo è dunque sufficiente mostrare che anche la sua inversa è un morfismo. Ma $\phi^{-1}(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n, 1/f(a_1, \dots, a_n))$, quindi il fatto che ϕ^{-1} sia un morfismo su $\mathbb{A}^n \setminus X$, deriva dal Lemma 1.5.2. \square

Lemma 1.6.9. *Su ogni varietà X c'è una base per la topologia di Zariski costituita da sottoinsiemi aperti affini.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che, per ogni punto $P \in X$ e ogni intorno aperto U di P , esiste un sottoinsieme aperto affine $V \subset X$ tale che $P \in V \subseteq U$. Innanzitutto, dato che U è esso stesso una varietà, possiamo supporre $U = X$. Poi, dato che ogni varietà può essere ricoperta da varietà quasi-affini (vedi Corollario 1.2.15), possiamo supporre che X sia una varietà

quasi-affine in \mathbb{A}^n . Sia $Z = \overline{X} \setminus X$, che è un sottoinsieme chiuso di \mathbb{A}^n , e indichiamo con $\mathfrak{a} \subseteq A = k[x_1, \dots, x_n]$ l'ideale di Z . Allora, dato che Z è chiuso e $P \notin Z$, possiamo trovare un polinomio $f \in \mathfrak{a}$ tale che $f(P) \neq 0$. Sia ora H l'ipersuperficie di equazione $f = 0$ in \mathbb{A}^n . Allora $Z \subseteq H$, ma $P \notin H$. Quindi $P \in X \setminus (X \cap H)$, che è un sottoinsieme aperto di X . Inoltre $X \setminus (X \cap H)$ è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{A}^n \setminus H$, che è una varietà affine, come dimostrato nel lemma precedente, quindi anche $X \setminus (X \cap H)$ è affine. Questo è dunque l'intorno affine di P cercato. \square

Siamo ora in grado di dimostrare il Teorema 1.6.7.

Dimostrazione. (Dim. del Teorema 1.6.7). Vogliamo costruire un'inversa della mappa che, a ogni applicazione razionale dominante $\phi : X \dashrightarrow Y$ associa l'omomorfismo di k -algebre $\phi^* : K(Y) \rightarrow K(X)$. Sia $\theta : K(Y) \rightarrow K(X)$ un omomorfismo di k -algebre. Dobbiamo definire una mappa razionale dominante $\phi : X \dashrightarrow Y$ tale che $\theta = \phi^*$. Dato che Y può essere ricoperta da varietà affini (vedi Lemma 1.6.9), possiamo supporre che Y stessa sia una varietà affine. Sia $A(Y)$ il suo anello delle coordinate affini e indichiamo con y_1, \dots, y_n dei generatori di $A(Y)$ in quanto k -algebra. Allora $\theta(y_1), \dots, \theta(y_n)$ sono delle funzioni razionali su X . Possiamo trovare un sottoinsieme aperto $U \subseteq X$ tale che tutte le funzioni $\theta(y_i)$ siano regolari su U . Allora θ definisce un omomorfismo iniettivo di k -algebre $A(Y) \rightarrow \mathcal{O}(U)$. Per il Teorema 1.5.1, questo corrisponde a un morfismo $\phi : U \rightarrow Y$, il quale determina un'applicazione razionale dominante, indicata ancora con ϕ , da X a Y . È facile ora verificare che si ha effettivamente $\theta = \phi^*$.

Per verificare che in questo modo si ottiene un'equivalenza di categorie, come enunciato, rimane solo da dimostrare che, per ogni varietà Y , $K(Y)$ è finitamente generato su k e, viceversa, che se K/k è una estensione finitamente generata di campi, allora $K = K(Y)$ per una qualche varietà Y . Se Y è una varietà, allora $K(Y) = K(U)$ per ogni sottoinsieme aperto affine U , così possiamo supporre che Y sia affine. Allora, per il Teorema 1.4.8, $K(Y)$ è una estensione finitamente generata di campi di k . Viceversa, sia data una estensione finitamente generata di campi K di k . Siano $y_1, \dots, y_n \in K$ un insieme di generatori, e sia B la sotto- k -algebra di K generata da y_1, \dots, y_n . Allora B è un quoziente dell'anello dei polinomi $A = k[x_1, \dots, x_n]$, e quindi $B \cong A(Y)$, per una qualche varietà Y in \mathbb{A}^n . Si ha allora $K \cong K(Y)$, il che conclude la dimostrazione. \square

Corollario 1.6.10. *Date due varietà X e Y , le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (i) X e Y sono birazionalmente equivalenti;
- (ii) esistono due aperti $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$, con U isomorfo a V ;

(iii) $K(X) \cong K(Y)$ come k -algebre.

Dimostrazione. (i) \Rightarrow (ii). Siano $\phi : X \dashrightarrow Y$ e $\psi : Y \dashrightarrow X$ due mappe razionali inverse l'una dell'altra. Supponiamo che ϕ sia rappresentata da (U, ϕ) e che ψ sia rappresentata da (V, ψ) . Allora $\psi \circ \phi$ è rappresentata da $(\phi^{-1}(V), \psi \circ \phi)$ e, dato che $\psi \circ \phi = \text{id}_X$, in quanto mappe razionali, $\psi \circ \phi$ è l'identità su $\phi^{-1}(V)$. Analogamente si dimostra che $\phi \circ \psi$ è l'identità su $\psi^{-1}(U)$. Prendiamo allora $\phi^{-1}(\psi^{-1}(U))$ come sottoinsieme aperto di X e $\psi^{-1}(\phi^{-1}(V))$ come sottoinsieme aperto di Y . Dalla costruzione appena fatta discende che questi due sottoinsiemi aperti sono isomorfi attraverso ϕ e ψ .

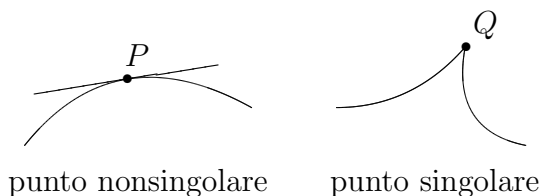
(ii) \Rightarrow (iii). Deriva dalla definizione di campo delle funzioni razionali.

(iii) \Rightarrow (i). Deriva dal Teorema 1.6.7. \square

1.7 Varietà nonsingolari

La nozione di varietà nonsingolare, in geometria algebrica, corrisponde a quella di *manifold*, in geometria differenziale. Sul campo complesso $k = \mathbb{C}$ le varietà nonsingolari sono quelle che, nella topologia usuale, sono manifold complessi.

Il concetto di *punto nonsingolare* di una varietà è legato all'esistenza in tale punto di uno *spazio tangente* alla varietà stessa, cioè di una varietà lineare che “approssimi” la varietà data all'intorno del punto in questione.



Iniziamo considerando il caso più semplice, quello di una ipersuperficie X in \mathbb{A}_k^n . Sia quindi $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio irriducibile e sia $X = Z(f)$. Se $P \in X$, il vettore

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right)$$

è un vettore ortogonale alla ipersuperficie X nel punto P . Di conseguenza, se $\nabla f(P) \neq 0$, è ben definita una direzione ortogonale alla ipersuperficie X nel punto P , e quindi anche un iperpiano tangente a X in P (si tratta dell'iperpiano ortogonale al vettore $\nabla f(P)$). In questo caso risulta quindi naturale dare la seguente definizione:

Definizione 1.7.1. Sia $X = Z(f)$ un'ipersuperficie in \mathbb{A}_k^n e sia P un punto di X . P è un *punto nonsingolare* se $\nabla f(P) \neq 0$.

Osservazione 1.7.2. Se X è una ipersuperficie in uno spazio proiettivo \mathbb{P}_k^n , definita come luogo degli zeri di un polinomio omogeneo $f(x_0, \dots, x_n)$, si può dimostrare (restringendosi a degli opportuni aperti affini di \mathbb{P}_k^n) che la condizione di nonsingularità di un punto $P \in X$ è del tutto analoga al caso affine: P è un punto nonsingolare se

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right) \neq (0, \dots, 0).$$

La generalizzazione naturale della nozione di nonsingularità, nel caso di varietà affini qualsiasi, è data dalla seguente definizione:

Definizione 1.7.3. Sia $X \subset \mathbb{A}_k^n$ una varietà affine di dimensione r e consideriamo un insieme di generatori f_1, \dots, f_s ($s \geq n - r$) dell'ideale di X (in altri termini, X è la varietà definita dal sistema di equazioni $f_1 = 0, \dots, f_s = 0$). Indichiamo con

$$J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i=1, \dots, s; j=1, \dots, n}$$

la matrice Jacobiana. Un punto $P \in X$ è nonsingolare se si ha

$$\text{rango } J(P) = n - r = \text{codim}(X).$$

X è detta *nonsingolare* se tutti i suoi punti sono nonsingolari.

Osservazione 1.7.4. Per essere sicuri che questa sia una buona definizione bisognerebbe controllare che il risultato non dipenda dalla scelta dell'insieme dei generatori dell'ideale $I(X)$. Questo è effettivamente quello che succede, anche se non lo dimostreremo.

Naturalmente questa definizione è motivata dallo studio, in geometria differenziale, delle condizioni che garantiscono l'esistenza di uno spazio tangente a X nel punto P (nel caso in cui k sia il campo dei numeri reali o quello dei numeri complessi). Tuttavia possiamo notare come l'ingrediente essenziale di questa definizione sia il concetto di derivata parziale di un polinomio rispetto a una delle sue indeterminate, concetto questo che può essere definito, in modo puramente algebrico, nel caso di un campo k qualunque (anche di caratteristica positiva). Possiamo quindi utilizzare la definizione precedente anche nel caso di varietà definite su campi diversi da quello reale o complesso. Naturalmente è necessario tener presente che, su campi di caratteristica positiva, possiamo incontrare delle situazioni che, da un punto

di vista intuitivo, possono sembrare alquanto strane. Ciò è dovuto al fatto che, su un campo di caratteristica $p > 0$, è possibile che la derivata di un polinomio sia identicamente nulla senza che il polinomio sia una costante: ad esempio, $\frac{d}{dx}x^p = px^{p-1} = 0$.

Esempio 1.7.5. Vediamo qui un esempio di uno degli “strani fenomeni” che possono accadere in caratteristica positiva.

Sia k un campo di caratteristica 3 e sia $X \subset \mathbb{P}_k^2$ la curva di equazione

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0.$$

Si dimostri che X è nonsingolare, ma ogni punto di X è un punto di flesso (un punto nonsingolare P di una curva X si dice *punto di flesso* se la retta tangente a X in P interseca la curva con molteplicità ≥ 3).

Un aspetto negativo della definizione di nonsingolarità data in precedenza è che essa dipende, almeno in apparenza, non dalla sola varietà X ma dalla sua immersione in \mathbb{A}_k^n (nella definizione si usa infatti l'ideale $I(X)$ che determina l'immersione di X in \mathbb{A}_k^n). Quindi non è chiaro se la proprietà di essere nonsingolare sia una proprietà intrinseca di una varietà oppure no. In altre parole, date due varietà isomorfe ma immerse in spazi affini diversi, esse saranno sempre entrambe singolari oppure nonsingolari?

In realtà la proprietà di essere singolare o nonsingolare risulta essere una proprietà intrinseca di una varietà. Nel 1947, O. Zariski ha dimostrato che la nonsingolarità può essere identificata con una proprietà degli anelli locali dei punti di una varietà. Prima di enunciare il teorema di Zariski richiamiamo alcuni risultati di algebra commutativa relativi agli anelli locali.

Sia A un anello locale noetheriano e sia \mathfrak{m} il suo ideale massimale. Il campo $\kappa = A/\mathfrak{m}$ è il campo residuo dell'anello locale A . Dato che \mathfrak{m} è un ideale, si ha che $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ è un A/\mathfrak{m} -modulo, cioè uno spazio vettoriale su κ . Indichiamo con $\dim_\kappa(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ la dimensione di tale spazio vettoriale. Se indichiamo con $\dim A$ la dimensione di Krull di A , si ha che

$$\dim_\kappa(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \geq \dim A.$$

(Per la dimostrazione si veda [AM, Corollario 11.15]. Questa disuguaglianza discende, in ultima analisi, dal lemma di Nakayama).

Possiamo ora dare la seguente definizione:

Definizione 1.7.6. Sia A un anello locale noetheriano con ideale massimale \mathfrak{m} e campo residuo κ . A è un anello locale *regolare* se

$$\dim_\kappa(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim A.$$

Il seguente teorema fornisce una caratterizzazione intrinseca del concetto di nonsingolarità:

Teorema 1.7.7. *Sia X una varietà affine e sia P un punto di X . P è un punto nonsingolare se e solo se l'anello locale $\mathcal{O}_{X,P}$ è un anello locale regolare.*

Dimostrazione. Iniziamo la dimostrazione considerando il caso dello spazio affine \mathbb{A}_k^n . Sia dunque $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_k^n$. L'ideale massimale corrispondente a P nell'anello $A = k[x_1, \dots, x_n]$ è $\mathfrak{a}_P = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$. Consideriamo ora l'applicazione lineare $\theta : A \rightarrow k^n$ definita ponendo

$$\theta(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right).$$

Si ha $\theta(x_i) = \theta(x_i - a_i) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = e_i$, dove gli e_i , per $i = 1, \dots, n$, sono i vettori della base canonica di k^n . Da ciò segue che la restrizione di θ all'ideale \mathfrak{a}_P ,

$$\theta : \mathfrak{a}_P \rightarrow k^n,$$

è suriettiva. Dato che il suo nucleo è \mathfrak{a}_P^2 , si ottiene un isomorfismo di k -spazi vettoriali

$$\theta : \frac{\mathfrak{a}_P}{\mathfrak{a}_P^2} \xrightarrow{\sim} k^n. \quad (1.1)$$

(In questo isomorfismo $\mathfrak{a}_P/\mathfrak{a}_P^2$ è identificato con lo spazio cotangente $T_P^*\mathbb{A}_k^n \cong k^n$).

Sia ora $\mathfrak{b} = I(X)$ l'ideale di X in A , in modo che $A(X) = A/\mathfrak{b}$, e siano f_1, \dots, f_t dei generatori di \mathfrak{b} (notiamo che deve essere $t \geq n - \dim X$). Dato che l'immagine di \mathfrak{b} tramite θ è generata dai vettori

$$\theta(f_i) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(P), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(P) \right),$$

per $i = 1, \dots, t$, il rango della matrice jacobiana

$$J(P) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P) \right)$$

è la dimensione di $\theta(\mathfrak{b})$ in quanto sottospazio di k^n .

Se $P \in X$, allora si ha $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}_P$, da cui segue che il sottospazio $\theta(\mathfrak{b})$ di k^n corrisponde, tramite l'isomorfismo (1.1), al sottospazio $(\mathfrak{b} + \mathfrak{a}_P^2)/\mathfrak{a}_P^2$ di $\mathfrak{a}_P/\mathfrak{a}_P^2$. Si ha quindi

$$\text{rango} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P) \right) = \dim \theta(\mathfrak{b}) = \dim_k \left(\frac{\mathfrak{b} + \mathfrak{a}_P^2}{\mathfrak{a}_P^2} \right).$$

L'anello locale $\mathcal{O}_{X,P}$ è isomorfo al localizzato $A(X)_{\mathfrak{a}_P} \cong (A/\mathfrak{b})_{\mathfrak{a}_P}$, quindi il suo ideale massimale \mathfrak{m}_P è l'ideale $\mathfrak{a}_P/\mathfrak{b}$, considerato come ideale nell'anello

$$\left(\frac{A}{\mathfrak{b}}\right)_{\mathfrak{a}_P} \cong \frac{A_{\mathfrak{a}_P}}{\mathfrak{b}A_{\mathfrak{a}_P}}.$$

Si ha quindi

$$\frac{\mathfrak{m}_P}{\mathfrak{m}_P^2} \cong \frac{\mathfrak{a}_P}{\mathfrak{b} + \mathfrak{a}_P^2}.$$

Dato che

$$\frac{\frac{\mathfrak{a}_P}{\mathfrak{a}_P^2}}{\frac{\mathfrak{b} + \mathfrak{a}_P^2}{\mathfrak{a}_P^2}} \cong \frac{\mathfrak{a}_P}{\mathfrak{b} + \mathfrak{a}_P^2},$$

si conclude che

$$\dim_k \frac{\mathfrak{a}_P}{\mathfrak{a}_P^2} - \dim_k \frac{\mathfrak{b} + \mathfrak{a}_P^2}{\mathfrak{a}_P^2} = \dim_k \frac{\mathfrak{a}_P}{\mathfrak{b} + \mathfrak{a}_P^2}$$

che equivale a

$$\dim_k \frac{\mathfrak{m}_P}{\mathfrak{m}_P^2} = n - \text{rango } J(P).$$

Poniamo ora $r = \dim X = \dim A(X)$. Sappiamo che $\dim \mathcal{O}_{X,P} = r$. Di conseguenza, richiedere che $\mathcal{O}_{X,P}$ sia un anello locale regolare, cioè che $\dim_k(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2) = r$, equivale a richiedere che la matrice $J(P)$ abbia rango $n - r$, che, per definizione, equivale al fatto che P sia un punto nonsingolare di X . \square

Osservazione 1.7.8. Un'altra proprietà algebrica degli anelli locali che discende dalla proprietà geometrica di nonsingularità è la *fattorizzazione unica*. Un famoso teorema, dovuto a Auslander e Buchsbaum (vedi, ad esempio, [E, Theorem 19.19] oppure [AM, Corollario 3.32 dell'appendice, p. 222]) afferma infatti che ogni anello locale regolare è un dominio di integrità a fattorizzazione unica. In particolare, ogni anello locale di una varietà in un punto nonsingolare è un UFD (ma non vale il viceversa).

Osservazione 1.7.9. L'anello locale $\mathcal{O}_{X,P}$ di una varietà X in un suo punto P contiene le informazioni di natura locale su X all'intorno di P . Dato che i concetti di spazio tangente e cotangente a X nel punto P sono ovviamente di natura locale, è naturale aspettarsi che le informazioni su tali spazi siano contenute in $\mathcal{O}_{X,P}$. In effetti, l'operazione di differenziazione di una funzione in P , $f \mapsto df(P)$, induce un isomorfismo di spazi vettoriali

$$d_P : \frac{\mathfrak{m}_P}{\mathfrak{m}_P^2} \xrightarrow{\sim} T_P^*X$$

(è, in sostanza, l'isomorfismo che avevamo indicato con θ nella dimostrazione del teorema precedente). In realtà si può benissimo prendere questa come definizione di spazio cotangente: data una varietà X e un suo punto P , si definisce lo *spazio cotangente (di Zariski)* di X in P come $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$, dove \mathfrak{m}_P è l'ideale massimale dell'anello locale $\mathcal{O}_{X,P}$. Poiché lo spazio tangente è il duale dello spazio cotangente, si definisce lo *spazio tangente (di Zariski)* di X in P come

$$(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^* = \text{Hom}_k(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2, k).$$

Il risultato algebrico che afferma che, in generale, si ha

$$\dim_k(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2) \geq \dim \mathcal{O}_{X,P} = \dim_P X$$

equivale a

$$\dim T_P X \geq \dim_P X.$$

La definizione di punto nonsingolare equivale quindi a richiedere che valga l'uguaglianza $\dim T_P X = \dim_P X$.

Terminiamo questa discussione sulle definizioni di singolarità e nonsingolarità enunciando il seguente teorema:

Teorema 1.7.10. *Sia X una varietà e indichiamo con $\text{Sing}(X)$ l'insieme dei punti singolari di X . Allora $\text{Sing}(X)$ è un sottoinsieme chiuso proprio di X .*

Dimostrazione. Vedi [Ha, Theorem 5.3]. □

Osservazione 1.7.11. Notiamo che il teorema precedente vale anche in caratteristica positiva, se il campo k è, come di consueto, algebricamente chiuso (in realtà è sufficiente supporre che k sia *perfetto*, cioè che $k^{1/p} \subseteq k$, ove p è la caratteristica di k).

Capitolo 2

Schemi

Il concetto di *schema*, introdotto da Grothendieck in [EGA], sostituisce e generalizza quello di varietà e costituisce l'oggetto di studio naturale della geometria algebrica moderna. Fondamentale nella definizione stessa di schema è la nozione di *fascio*, introdotta da Leray, durante la seconda guerra mondiale, mentre era rinchiuso in un campo di prigionia in Austria. Inizieremo pertanto questo capitolo fornendo una breve introduzione alla teoria dei fasci.

2.1 Fasci

L'idea alla base del concetto di fascio è estremamente semplice. Se X è uno spazio topologico, a ogni aperto U di X possiamo associare l'insieme $\mathcal{C}(U)$ (che è in realtà un anello) delle funzioni continue, definite su U , a valori reali. Inoltre, a ogni inclusione $V \subseteq U$ di sottoinsiemi aperti di X corrisponde una mappa di restrizione

$$\rho_{UV} : \mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{C}(V), \quad f \mapsto f|_V,$$

la quale è, in effetti, un omomorfismo di anelli. Queste mappe di restrizione soddisfano a delle proprietà del tutto ovvie: per ogni aperto U , si ha $\rho_{UU} = \text{id}_U$ e per ogni inclusione $W \subseteq V \subseteq U$, si ha $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

La mappa

$$U \mapsto \mathcal{C}(U),$$

con le proprietà appena descritte, è il prototipo del concetto di fascio.

Definizione 2.1.1. Sia X uno spazio topologico. Un *prefascio di gruppi abeliani* \mathcal{F} su X consiste dei seguenti dati:

- (a) per ogni sottoinsieme aperto U di X , un gruppo abeliano $\mathcal{F}(U)$;

- (b) per ogni inclusione di sottoinsiemi aperti $V \subseteq U$, un omomorfismo di gruppi abeliani $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$,

soddisfacenti alle seguenti condizioni:

- (0) $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$;
- (1) $\rho_{UU} = \text{id}_U$, per ogni sottoinsieme aperto $U \subseteq X$;
- (2) $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$, per ogni inclusione di sottoinsiemi aperti $W \subseteq V \subseteq U$.

Osservazione 2.1.2. Sostituendo, nella definizione precedente, il termine “gruppo abeliano” con “anello,” “modulo su un anello,” etc., si ottiene la definizione di “prefascio di anelli,” “prefascio di moduli su un anello,” etc. Nel seguito, con i termini prefascio o fascio intenderemo sempre un prefascio o un fascio di gruppi abeliani. Le modifiche da apportare nel caso di fasci di anelli, di moduli su un anello fissato, etc., sono del tutto ovvie.

Se \mathcal{F} è un prefascio su X , gli elementi di $\mathcal{F}(U)$ sono detti le *sezioni* di \mathcal{F} sull’aperto U . Le mappe $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ sono chiamate *mappe di restrizione* e, se $s \in \mathcal{F}(U)$, spesso si scrive $s|_V$ per indicare $\rho_{UV}(s)$. L’insieme $\mathcal{F}(U)$ viene anche indicato con la notazione $\Gamma(U, \mathcal{F})$.

Osservazione 2.1.3. Utilizzando il linguaggio delle categorie, la definizione di prefascio può essere riformulata come segue.

Sia X uno spazio topologico. Indichiamo con $\mathfrak{Top}(X)$ la categoria i cui oggetti sono i sottoinsiemi aperti di X e i cui morfismi sono dati dalle mappe di inclusione. Indichiamo con \mathfrak{Ab} la categoria dei gruppi abeliani. Allora un prefascio \mathcal{F} di gruppi abeliani su X non è altro che un funtore controvariante

$$\mathcal{F} : \mathfrak{Top}(X) \rightarrow \mathfrak{Ab}.$$

Più in generale, se \mathfrak{C} è una categoria qualsiasi, un funtore controvariante

$$\mathcal{F} : \mathfrak{Top}(X) \rightarrow \mathfrak{C}$$

è un prefascio su X a valori in \mathfrak{C} .

In base a quanto detto è immediato verificare che, per ogni spazio topologico X , la mappa

$$U \mapsto \mathcal{C}(U)$$

che a ogni aperto $U \subseteq X$ associa l’anello delle funzioni continue, a valori reali, definite in U , definisce un prefascio (di anelli) su X , che indicheremo con \mathcal{C}_X , oppure semplicemente con \mathcal{C} . Questo prefascio soddisfa, in realtà, a delle ulteriori proprietà che, in sostanza, equivalgono ad affermare che la

nozione di funzione continua è di carattere locale: il dato di una funzione continua $f \in \mathcal{C}(U)$ equivale al dato della sua restrizione ad ogni aperto di un ricoprimento aperto dell'insieme U . La formalizzazione di queste ulteriori proprietà di carattere locale, porta alla definizione di *fascio*.

Definizione 2.1.4. Un prefascio \mathcal{F} su X è un *fascio* se esso soddisfa le seguenti proprietà:

- (3) Siano U un sottoinsieme aperto di X e $\{V_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di U . Se $s \in \mathcal{F}(U)$ è tale che $s|_{V_i} = \rho_{UV_i}(s) = 0$, per ogni $i \in I$, allora deve essere $s = 0$;
- (4) Se U è un aperto di X e $\{V_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di U , e se sono date delle sezioni $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$, per ogni $i \in I$, con la proprietà che $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$, per ogni $i, j \in I$, allora esiste $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s_i = s|_{V_i}$, per ogni $i \in I$ (il punto (3) assicura poi che una tale sezione $s \in \mathcal{F}(U)$ è unica).

Osservazione 2.1.5. La distinzione tra la definizione di prefascio e quella di fascio è giustificata dal fatto che, sebbene il concetto più utile sia quello di fascio, alcune operazioni naturali tra fasci producono come risultato solo un prefascio e non un fascio, come avremo occasione di vedere in seguito.

Osservazione 2.1.6. Esempi naturali di fasci sono dati dal fascio delle funzioni continue su uno spazio topologico, dal fascio delle funzioni di classe C^∞ su una varietà differenziabile reale, dal fascio delle funzioni olomorfe su una varietà analitica complessa, etc. Ciò è dovuto al fatto che la proprietà di una funzione di essere continua, o di essere differenziabile, o di essere olomorfa, è una proprietà di carattere locale. Se invece consideriamo, su uno spazio topologico X dotato di una misura μ , la mappa che ad ogni aperto $U \subseteq X$ associa l'insieme $L^p(U)$ delle funzioni $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\int_U |f|^p d\mu < +\infty,$$

modulo la relazione di equivalenza che identifica due funzioni f e g se esse sono uguali quasi ovunque¹, si ottiene un prefascio che soddisfa la proprietà (3) dei fasci, ma non la (4). In altre parole, dato un ricoprimento aperto $(V_i)_{i \in I}$ di X e delle sezioni $f_i \in L^p(V_i)$ tali che $f_i|_{V_i \cap V_j} = f_j|_{V_i \cap V_j}$, non è detto che esista una sezione $f \in L^p(U)$ tale che $f_i = f|_{V_i}$. La ragione di ciò è da ricercarsi nel fatto che la proprietà di essere integrabile non è di carattere locale: una funzione può essere localmente integrabile senza

¹Due funzioni $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ sono uguali quasi ovunque se l'insieme $\{x \in U \mid f(x) \neq g(x)\}$ è un sottoinsieme di misura nulla di U .

esserlo globalmente. Per ottenere un fascio bisogna sostituire, nella definizione precedente, $L^p(U)$ con $\mathcal{L}^p(U)$, definito come l'insieme delle (classi di equivalenza di) funzioni da U in \mathbb{R} che sono localmente in L^p .

Esempio 2.1.7. L'esempio fondamentale di fascio, nel caso della geometria algebrica, è dato dal fascio strutturale di una varietà.

Sia X una varietà. Ad ogni aperto U di X associamo l'anello $\mathcal{O}_X(U)$ delle funzioni regolari su U , con le mappe di restrizione naturali. È facile verificare che, in questo modo, si ottiene un fascio su X , indicato con \mathcal{O}_X , detto il *fascio delle funzioni regolari*, o anche il *fascio strutturale* di X .

Definizione 2.1.8. Sia \mathcal{F} un prefascio su uno spazio topologico X e sia P un punto di X . La *spiga* (o *fibra*) di \mathcal{F} in P , indicata con \mathcal{F}_P , è definita da

$$\mathcal{F}_P = \varinjlim_{U \ni P} \mathcal{F}(U),$$

ove il limite diretto è preso sull'insieme diretto costituito da tutti gli aperti di X contenenti il punto P , con la relazione d'ordine definita ponendo $V \succeq U$ se $V \subseteq U$.

In termini più concreti, la spiga \mathcal{F}_P di un fascio \mathcal{F} è l'insieme di tutte le coppie del tipo (U, s) , dove U è un sottoinsieme aperto di X e $s \in \mathcal{F}(U)$, modulo la relazione di equivalenza data da $(U_1, s_1) \sim (U_2, s_2)$ se esiste un intorno aperto V di P , con $V \subseteq U_1 \cap U_2$, tale che $s_1|_V = s_2|_V$. Gli elementi di \mathcal{F}_P sono anche detti *germi* di sezioni di \mathcal{F} in P : essi possono essere intuitivamente pensati come delle sezioni di \mathcal{F} definite in un qualche intorno aperto di P , dove però non è importante sapere esattamente *chi* è l'aperto di definizione di tali sezioni.

Osservazione 2.1.9. Se X è una varietà algebrica e \mathcal{O}_X è il suo fascio strutturale, allora la spiga di \mathcal{O}_X in un punto P non è altro che l'anello locale $\mathcal{O}_{X,P}$ definito in precedenza.

2.1.1 Morfismi di fasci

Definizione 2.1.10. Siano \mathcal{F} e \mathcal{G} due prefasci di gruppi abeliani su uno spazio topologico X . Un *morfismo di prefasci* $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è il dato di un omomorfismo di gruppi abeliani $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$, per ogni sottoinsieme aperto U di X , con la condizione che, per ogni inclusione $V \subseteq U$ di sottoinsiemi aperti di X , il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{UV} \downarrow & & \downarrow \rho'_{UV} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

ove le ρ_{UV} sono le mappe di restrizione di \mathcal{F} e le ρ'_{UV} quelle di \mathcal{G} .

Se \mathcal{F} e \mathcal{G} sono due fasci, un *morfismo di fasci* da \mathcal{F} in \mathcal{G} è la stessa cosa che un morfismo di prefasci.

Un *isomorfismo* di prefasci (o di fasci) è un morfismo che ammette un inverso da entrambi i lati.

Se $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un morfismo di (pre)fasci, si ottiene un morfismo indotto sulle spighe $\phi_P : \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{G}_P$, per ogni punto $P \in X$.

Il seguente teorema illustra bene la natura locale della nozione di fascio (si noti che tale teorema sarebbe falso nel caso dei prefasci):

Teorema 2.1.11. *Sia $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo di fasci su uno spazio topologico X . Allora ϕ è un isomorfismo se e solo se le mappe $\phi_P : \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{G}_P$ sono degli isomorfismi (di gruppi abeliani), per ogni punto $P \in X$.*

Dimostrazione. Se ϕ è un isomorfismo è chiaro che ogni ϕ_P è un isomorfismo. Viceversa, supponiamo che ϕ_P sia un isomorfismo per ogni $P \in X$. Per dimostrare che ϕ è un isomorfismo sarà sufficiente mostrare che $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ è un isomorfismo per ogni aperto U , perché in tal caso potremo definire un morfismo inverso $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ ponendo $\psi(U) = \phi(U)^{-1}$, per ogni U . Dimostriamo innanzitutto che $\phi(U)$ è iniettiva. Sia $s \in \mathcal{F}(U)$ e supponiamo che $\phi(s) = 0$. Allora, per ogni punto $P \in U$, l'immagine $\phi(s)_P$ di $\phi(s)$ nella spiga \mathcal{G}_P è 0. Dato che ϕ_P è iniettiva per ogni P , deve essere $s_P = 0$ in \mathcal{F}_P , per ogni $P \in U$. Ma dire che $s_P = 0$ equivale a dire che esiste un intorno aperto W_P di P in U tale che $s|_{W_P} = 0$ in $\mathcal{F}(W_P)$. Dato che gli intorni W_P , al variare di P in U , costituiscono un ricoprimento aperto di U , in base alla proprietà (3) dei fasci, si deduce che $s = 0$ in U . Ciò significa che ϕ è iniettiva.

Dimostriamo ora che $\phi(U)$ è suriettiva. Supponiamo di avere una sezione $t \in \mathcal{G}(U)$. Per ogni $P \in U$, sia $t_P \in \mathcal{G}_P$ il suo germe in P . Dato che ϕ_P è suriettiva, possiamo trovare $s_P \in \mathcal{F}_P$ tale che $\phi_P(s_P) = t_P$. Supponiamo che s_P sia rappresentata da una sezione $s(P)$ in un intorno V_P di P . Allora $\phi(s(P))$ e $t|_{V_P}$ sono due elementi di $\mathcal{G}(V_P)$ i cui germi in P coincidono. Pertanto, sostituendo eventualmente V_P con un intorno aperto di P più piccolo, possiamo supporre che $\phi(s(P)) = t|_{V_P}$ in $\mathcal{G}(V_P)$. Ora U è ricoperto dagli aperti V_P e su ogni V_P abbiamo una sezione $s(P) \in \mathcal{F}(V_P)$. Se P e Q sono due punti, allora $s(P)|_{V_P \cap V_Q}$ e $s(Q)|_{V_P \cap V_Q}$ sono due sezioni di $\mathcal{F}(V_P \cap V_Q)$ la cui immagine tramite ϕ coincide con $t|_{V_P \cap V_Q}$. Per l'iniettività di ϕ dimostrata precedentemente, esse sono dunque uguali. Ricordando la proprietà dei fasci (4), ciò significa che esiste una sezione $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s|_{V_P} = s(P)$, per ogni $P \in U$. Ora rimane solo da dimostrare che $\phi(s) = t$. Ma $\phi(s)$ e t sono due sezioni di $\mathcal{G}(U)$ con la proprietà che, per ogni P , $\phi(s)|_{V_P} = t|_{V_P}$, quindi, in base alla proprietà (3) dei fasci applicata alla sezione $\phi(s) - t$, si conclude che $\phi(s) = t$. \square

2.1.2 Fascio associato a un prefascio

C'è una costruzione naturale, che ora descriveremo, la quale permette di associare ad ogni prefascio, un fascio. Sia dunque \mathcal{F} un prefascio su uno spazio topologico X . Costruiremo un fascio \mathcal{F}^+ su X come segue. Per ogni sottoinsieme aperto $U \subseteq X$, definiamo $\mathcal{F}^+(U)$ come l'insieme delle funzioni $s : U \rightarrow \bigsqcup_{P \in U} \mathcal{F}_P$, tali che $s(P) \in \mathcal{F}_P$, per ogni $P \in U$. Richiediamo inoltre che, per ogni P in U , esistano un intorno aperto $V \subseteq U$ di P e una sezione $t \in \mathcal{F}(V)$ tali che $s(Q) = t_Q$, per ogni $Q \in V$, ove con $t_Q \in \mathcal{F}_Q$ indichiamo il germe di t in Q . La verifica che \mathcal{F}^+ è effettivamente un fascio non è difficile (anche se un po' noiosa).

Esiste inoltre un morfismo naturale di prefasci

$$\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+,$$

che associa a una sezione $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ la funzione $\tilde{\sigma} : U \rightarrow \bigsqcup_{P \in U} \mathcal{F}_P$ definita da $\tilde{\sigma}(Q) = \sigma_Q$, ove $\sigma_Q \in \mathcal{F}_Q$ è il germe di σ in Q . Questo morfismo ha la seguente proprietà universale: per ogni morfismo di prefasci $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, dove \mathcal{G} è un fascio, esiste un unico morfismo di fasci $\psi : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{F}^+ \\ & \searrow \phi & \downarrow \psi \\ & & \mathcal{G} \end{array}$$

Da questa proprietà universale segue subito che il fascio \mathcal{F}^+ , assieme al morfismo $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$, è unico a meno di isomorfismo (anch'esso unicamente determinato).

Definizione 2.1.12. Dato un prefascio \mathcal{F} su X , il fascio \mathcal{F}^+ è detto il *fascio associato* al prefascio \mathcal{F} . L'operazione di passaggio da un prefascio \mathcal{F} al fascio associato è anche detta la *fascificazione* del prefascio \mathcal{F} .

Si può dimostrare facilmente che, per ogni punto $P \in X$, le spighe di \mathcal{F} e di \mathcal{F}^+ in P coincidono, $\mathcal{F}_P = \mathcal{F}_P^+$. Infine, se \mathcal{F} è già un fascio, allora la mappa $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ è un isomorfismo di fasci (θ induce infatti un isomorfismo a livello delle spighe e, in base al Teorema 2.1.11, ciò implica che θ è un isomorfismo).

Osservazione 2.1.13. Dato un prefascio \mathcal{F} , il morfismo di prefasci $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ non è, in generale, iniettivo. Ad esempio, se $X = \mathbb{R}$ con la topologia usuale, ponendo

$$\mathcal{F}(U) = \begin{cases} G & \text{se } U = X, \\ \{0\} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

per un qualche gruppo abeliano $G \neq 0$, si ottiene un prefascio di gruppi abeliani il cui fascio associato \mathcal{F}^+ è il fascio nullo. Dato che \mathcal{F} non è il prefascio nullo, la mappa $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ non è iniettiva.

È facile dimostrare che, se il prefascio \mathcal{F} è *separato*, cioè soddisfa la proprietà (3) dei fasci, allora il morfismo θ è iniettivo, quindi \mathcal{F} può essere considerato un sottoprefascio di \mathcal{F}^+ .

Esempio 2.1.14. Sia X uno spazio topologico e G un gruppo abeliano. Definiamo un prefascio \underline{G} su X ponendo $\Gamma(U, \underline{G}) = G$, per ogni aperto non vuoto $U \subseteq X$. Tutti i morfismi di restrizione ρ_{UV} sono, naturalmente, l'identità. È immediato verificare che \underline{G} è effettivamente un prefascio su X , detto *prefascio costante*, ma non è, in generale, un fascio (dimostrarlo per esercizio). Il *fascio costante* G_X su X è quindi definito come il fascio associato al prefascio costante \underline{G} . Esso coincide con il fascio le cui sezioni su un aperto U sono le funzioni localmente costanti da U in G . Se U è un aperto connesso, si ha $\Gamma(U, G_X) = G$. Se X è uno spazio topologico localmente connesso, si ha $(G_X)_P = G$, per ogni punto $P \in X$.

Esempio 2.1.15. Sia X uno spazio topologico e P un punto di X . Dato un gruppo abeliano G , definiamo un prefascio G_P ponendo

$$G_P(U) = \begin{cases} G & \text{se } P \in U, \\ \{0\} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Le mappe di restrizione sono, a seconda dei casi, l'identità oppure la mappa nulla. Si verifica facilmente che G_P è addirittura un fascio. Per quanto riguarda le spighe, si ha

$$(G_P)_Q = \begin{cases} G & \text{per ogni } Q \text{ appartenente alla chiusura di } \{P\} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il fascio G_P è dunque tutto concentrato al di sopra del sottoinsieme chiuso $\overline{\{P\}}$. Per tale motivo esso è chiamato *fascio grattacielo*.

2.1.3 Nuclei, conuclei e immagini

In questa sezione definiremo il nucleo, il conucleo e l'immagine di un morfismo di prefasci o di fasci.

Definizione 2.1.16. Sia $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo di prefasci su uno spazio topologico X . Il *nucleo* di ϕ , indicato con $\text{Ker } \phi$ è il prefascio definito da

$$U \mapsto \text{Ker}(\phi(U)),$$

per ogni sottoinsieme aperto U di X .

In modo del tutto analogo si definiscono i prefasci *conucleo* e *immagine* di ϕ , indicati rispettivamente con $\text{Coker } \phi$ e $\text{Im } \phi$, ponendo $\Gamma(U, \text{Coker } \phi) = \text{Coker}(\phi(U))$ e $\Gamma(U, \text{Im } \phi) = \text{Im}(\phi(U))$.

È immediato verificare che $\text{Ker } \phi$, $\text{Coker } \phi$ e $\text{Im } \phi$ sono effettivamente dei prefasci. Nel caso in cui \mathcal{F} e \mathcal{G} siano dei fasci, si può verificare che il prefascio $\text{Ker } \phi$ è anch'esso un fascio, quindi possiamo usare la definizione precedente anche per definire il nucleo di un morfismo di fasci. Le cose invece non vanno così bene nel caso del conucleo e dell'immagine: se $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un morfismo di fasci, i prefasci $\text{Coker } \phi$ e $\text{Im } \phi$ definiti in precedenza *non* sono dei fasci, in generale. Quindi, nel caso di un morfismo di fasci, le definizioni di conucleo e immagine devono essere modificate come segue:

Definizione 2.1.17. Sia $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo di fasci su uno spazio topologico X . Il *conucleo* di ϕ , indicato con $\text{Coker } \phi$, è il fascio associato al prefascio

$$U \mapsto \text{Coker}(\phi(U)),$$

per ogni aperto $U \subseteq X$.

Analogamente, l'*immagine* di ϕ , indicata con $\text{Im } \phi$, è il fascio associato al prefascio

$$U \mapsto \text{Im}(\phi(U)).$$

Possiamo anche definire i sottofasci e i fasci quoziente come segue:

Definizione 2.1.18. Un *sottofascio* di un fascio \mathcal{F} è un fascio \mathcal{F}' tale che, per ogni aperto $U \subseteq X$, $\mathcal{F}'(U)$ sia un sottogruppo di $\mathcal{F}(U)$, con la condizione che le mappe di restrizione di \mathcal{F}' siano quelle indotte dalle mappe di restrizione di \mathcal{F} .

Dalla definizione segue che, se \mathcal{F}' è un sottofascio di \mathcal{F} , allora le spighe \mathcal{F}'_P di \mathcal{F}' sono dei sottogruppi delle spighe \mathcal{F}_P di \mathcal{F} .

Se \mathcal{F}' è un sottofascio di \mathcal{F} , associando ad ogni aperto $U \subseteq X$ il gruppo quoziente $\mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$ si ottiene, in generale, solo un prefascio e non un fascio. Il fascio quoziente si definisce quindi come segue:

Definizione 2.1.19. Se \mathcal{F}' è un sottofascio di \mathcal{F} , il *fascio quoziente* \mathcal{F}/\mathcal{F}' è il fascio associato al prefascio

$$U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U).$$

Si può dimostrare che, a livello delle spighe, vi è un isomorfismo naturale

$$(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_P \cong \mathcal{F}_P/\mathcal{F}'_P,$$

per ogni punto $P \in X$.

In base alle definizioni date, il nucleo di un morfismo di fasci $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un sottofascio di \mathcal{F} , l'immagine è un sottofascio di \mathcal{G} e il conucleo è il fascio quoziente di \mathcal{G} modulo il suo sottofascio $\text{Im } \phi$.

Diremo che un morfismo di fasci $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è *iniettivo* (o è un *monomorfismo*) se $\text{Ker } \phi = 0$. Dato che il fascio $\text{Ker } \phi$ è definito da $\Gamma(U, \text{Ker } \phi) = \text{Ker}(\phi(U))$, si ha che ϕ è iniettivo se e solo se l'omomorfismo di gruppi $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ è iniettivo, per ogni aperto $U \subseteq X$.

Analogamente, diremo che un morfismo di fasci $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è *suriettivo* (o è un *epimorfismo*) se $\text{Im } \phi = \mathcal{G}$. In questo caso, tuttavia, dato che l'immagine di ϕ è definita come il fascio associato al prefascio $U \mapsto \text{Im}(\phi(U))$, il fatto che ϕ sia suriettivo non implica che sia suriettivo anche $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$. Quello che è vero in generale, invece, è che un morfismo di fasci $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è suriettivo se e solo se gli omomorfismi indotti sulle spighe $\phi_P : \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{G}_P$ sono suriettivi, per ogni $P \in X$.

Esempio 2.1.20. Sul piano complesso \mathbb{C} , dotato della topologia usuale, consideriamo i fasci \mathcal{O} e \mathcal{O}^* definiti come segue: per ogni aperto U di \mathbb{C} , $\mathcal{O}(U)$ è il gruppo additivo delle funzioni olomorfe su U e $\mathcal{O}^*(U)$ è il gruppo moltiplicativo delle funzioni olomorfe non nulle in U . Indichiamo con $\exp : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*$ il morfismo di fasci definito inviando $f \in \mathcal{O}(U)$ in $e^{2\pi i f} \in \mathcal{O}^*(U)$. Per ogni punto $P \in \mathbb{C}$, l'omomorfismo indotto sulle spighe $\exp : \mathcal{O}_P \rightarrow \mathcal{O}_P^*$ è suriettivo, quindi $\exp : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*$ è un morfismo suriettivo di fasci. Consideriamo ora l'aperto $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. È facile verificare che la sezione $z \in \mathcal{O}^*(U)$ non appartiene all'immagine di $\mathcal{O}(U)$ tramite \exp , quindi la mappa $\exp : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}^*(U)$ non è suriettiva.

Notiamo che il nucleo di $\exp : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*$ è il fascio costante $\mathbb{Z}_{\mathbb{C}}$, quindi si ha una sequenza esatta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0,$$

la quale è detta la *sequenza esatta esponenziale*.

2.1.4 Immagini dirette e immagini inverse

Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua tra due spazi topologici X e Y e sia \mathcal{F} un fascio su X . Per ogni aperto $V \subseteq Y$, $f^{-1}(V)$ è un sottoinsieme aperto di X . Ad un tale sottoinsieme aperto V di Y possiamo quindi associare il gruppo abeliano $\mathcal{F}(f^{-1}(V))$. Non è difficile verificare che la mappa

$$V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

definisce un prefascio di gruppi abeliani su Y e che questo prefascio è, in realtà, un fascio.

Definizione 2.1.21. Il fascio *immagine diretta* di \mathcal{F} , indicato con $f_*\mathcal{F}$ è il fascio su Y definito da $\Gamma(V, f_*\mathcal{F}) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$, per ogni sottoinsieme aperto $V \subseteq Y$.

Sia ora \mathcal{G} un fascio su Y . Vogliamo definire un fascio $f^{-1}\mathcal{G}$ su X . Purtroppo, se U è un sottoinsieme aperto di X , non si può porre semplicemente $\Gamma(U, f^{-1}\mathcal{G}) = \mathcal{G}(f(U))$, perché $f(U)$ non è, in generale, aperto in Y . L'idea è dunque quella di sostituire $f(U)$ con un suo qualche intorno aperto in Y , dove, come al solito, non interesserà sapere esattamente quale sia questo intorno. Questo ragionamento porta, in modo naturale, a definire $\Gamma(U, f^{-1}\mathcal{G})$ come il limite diretto, al variare di V fra gli intorni aperti di $f(U)$ in Y , delle sezioni di \mathcal{G} su V ,

$$\Gamma(U, f^{-1}\mathcal{G}) = \lim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V). \quad (2.1)$$

Si può verificare che, in questo modo, si ottiene un prefascio di gruppi abeliani su X . Tuttavia questo prefascio non è un fascio, in generale. Ciò spiega la seguente definizione:

Definizione 2.1.22. Il fascio *immagine inversa* di \mathcal{G} , indicato con $f^{-1}\mathcal{G}$ è il fascio su X associato al prefascio definito in (2.1).

Osservazione 2.1.23. L'asimmetria fra le notazioni f_* per l'immagine diretta e f^{-1} per l'immagine inversa è dovuta al fatto che il simbolo f^* è riservato per altri scopi.

Osservazione 2.1.24. I fasci di gruppi abeliani su uno spazio topologico X , assieme ai morfismi di fasci, formano una categoria, indicata con $\mathfrak{Ab}(X)$. Se $f : X \rightarrow Y$ è una funzione continua tra due spazi topologici, si verifica facilmente che le mappe $\mathcal{F} \mapsto f_*\mathcal{F}$ e $\mathcal{G} \mapsto f^{-1}\mathcal{G}$ definiscono due funtori $f_* : \mathfrak{Ab}(X) \rightarrow \mathfrak{Ab}(Y)$ e $f^{-1} : \mathfrak{Ab}(Y) \rightarrow \mathfrak{Ab}(X)$. Si può dimostrare che questi due funtori sono *aggiunti* l'uno dell'altro, nel senso che si ha

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Ab}(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Ab}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

Più precisamente, questa formula significa che il funtore f^{-1} è *aggiunto a sinistra* del funtore f_* , mentre f_* è *aggiunto a destra* di f^{-1} .

Sia X uno spazio topologico e Y un suo sottoinsieme chiuso. Indichiamo con $i : Y \hookrightarrow X$ la mappa di inclusione. Se \mathcal{F} è un fascio su Y , il fascio $i_*\mathcal{F}$ è anche detto *l'estensione con zero* di \mathcal{F} a X . Per abuso di notazione, spesso si scrive semplicemente \mathcal{F} al posto di $i_*\mathcal{F}$ (in questo caso, naturalmente, si pensa a \mathcal{F} come fascio su X).

Sia ora Z un sottoinsieme qualsiasi di X (dotato della topologia indotta) e indichiamo con $j : Z \hookrightarrow X$ la mappa di inclusione. Se \mathcal{G} è un fascio su X , il fascio $j^{-1}\mathcal{G}$ viene più comunemente indicato con $\mathcal{G}|_Z$ e chiamato la *restrizione* di \mathcal{G} a Z . Si ha $(\mathcal{G}|_Z)_P = \mathcal{G}_P$, per ogni $P \in Z$.

2.2 Spazi anellati

La nozione di fascio fornisce lo strumento ideale per formalizzare il concetto di “spazio con funzioni.” In geometria (e non solo) l’oggetto naturale di studio non è tanto uno “spazio” di un qualche tipo, quanto piuttosto una coppia, costituita da uno “spazio” e dalle “funzioni” definite su di esso. Naturalmente la scelta di quali funzioni considerare dipende dal contesto. Come abbiamo già osservato, nel caso di uno spazio topologico X sarà naturale considerare, per ogni aperto $U \subseteq X$, l’insieme $\mathcal{C}(U)$ delle funzioni continue, a valori reali, definite in U ; se X invece è una varietà differenziabile reale, considereremo l’insieme $\mathcal{C}^\infty(U)$ delle funzioni di classe C^∞ in U ; se X è una varietà analitica complessa, si considererà l’insieme $\mathcal{O}_X(U)$ delle funzioni olomorfe in U , mentre se X è una varietà algebrica, considereremo l’insieme $\mathcal{O}_X(U)$ delle funzioni regolari su U . Dato che questi insiemi di funzioni sono in realtà degli anelli, tutti questi esempi sono esempi di fasci di anelli sullo “spazio” X .

Seguendo Grothendieck, l’idea di uno “spazio con funzioni” può dunque essere espressa dalla seguente definizione:

Definizione 2.2.1. Uno *spazio anellato* è una coppia (X, \mathcal{A}) , formata da uno spazio topologico X e da un fascio di anelli \mathcal{A} su X .

In questa definizione \mathcal{A} può essere un fascio di anelli qualsiasi, anche non commutativi. Di solito, tuttavia, ci si restringe a considerare una qualche classe di anelli particolarmente interessanti, come ad esempio, nel nostro caso, anelli commutativi con unità.

Ora che abbiamo definito gli “spazi,” dovremo anche definire i morfismi tra tali spazi. Prima di dare la definizione, è utile osservare che se X e Y sono due spazi topologici, dotati dei loro fasci \mathcal{C}_X e \mathcal{C}_Y delle funzioni continue a valori reali, e se f è una funzione continua da X a Y , per ogni sottoinsieme aperto $V \subseteq Y$ si ha un omomorfismo di anelli $f^* : \mathcal{C}_Y(V) \rightarrow \mathcal{C}_X(f^{-1}(V))$, definito da $g \mapsto g \circ f$. Ricordando che il fascio $f_*\mathcal{C}_X$ su Y è definito ponendo $\Gamma(V, f_*\mathcal{C}_X) = \mathcal{C}_X(f^{-1}(V))$, per ogni aperto $V \subseteq Y$, si conclude che la mappa $f : X \rightarrow Y$ induce un morfismo di fasci di anelli $f^* : \mathcal{C}_Y \rightarrow f_*\mathcal{C}_X$. Ciò giustifica la seguente definizione di morfismo di spazi anellati.

Definizione 2.2.2. Un *morfismo di spazi anellati* da (X, \mathcal{A}_X) a (Y, \mathcal{A}_Y) è una coppia $(f, f^\#)$, dove $f : X \rightarrow Y$ è una funzione continua e $f^\#$ è un morfismo di fasci di anelli su Y ,

$$f^\# : \mathcal{A}_Y \rightarrow f_*\mathcal{A}_X.$$

Osservazione 2.2.3. Nella definizione precedente abbiamo usato il simbolo $f^\#$ al posto di f^* per indicare il morfismo di fasci da \mathcal{A}_Y a $f_*\mathcal{A}_X$. Ciò è

stato fatto per evidenziare che, a differenza del caso classico, il morfismo $f^\#$ non è dato dalla composizione con f (infatti le sezioni di \mathcal{A}_X non sono, in generale, delle funzioni definite su X).

Osservazione 2.2.4. Si può facilmente verificare che gli spazi anellati, con i morfismi di spazi anellati appena definiti, formano una categoria.

2.2.1 Spazi localmente anellati

Come abbiamo già visto, se X è una varietà algebrica e \mathcal{O}_X è il fascio delle funzioni razionali su X , la coppia (X, \mathcal{O}_X) è uno spazio anellato. Gli spazi anellati di questo tipo godono di alcune particolari proprietà: innanzitutto il fascio \mathcal{O}_X è un fascio di anelli commutativi con unità, quindi questi sono spazi *commutativamente anellati*. Inoltre, per ogni punto $P \in X$, la spiga $\mathcal{O}_{X,P}$ è un anello locale. Ciò motiva la seguente definizione:

Definizione 2.2.5. Uno *spazio localmente anellato* è uno spazio commutativamente anellato (X, \mathcal{O}_X) tale che, per ogni $P \in X$, la spiga $\mathcal{O}_{X,P}$ sia un anello locale. Indicheremo con \mathfrak{m}_P l'ideale massimale di $\mathcal{O}_{X,P}$ e con $\kappa(P) = \mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P$ il suo campo residuo.

Nel caso degli spazi localmente anellati, la definizione di morfismo va opportunamente modificata:

Definizione 2.2.6. Un *morfismo di spazi localmente anellati* è un morfismo di spazi anellati

$$(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y),$$

dove (X, \mathcal{O}_X) e (Y, \mathcal{O}_Y) sono spazi localmente anellati, tale che, per ogni $P \in X$, l'omomorfismo $f_P^\# : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,P}$ sia un *omomorfismo locale*² di anelli locali.

Osservazione 2.2.7. Gli spazi localmente anellati, assieme ai morfismi di spazi localmente anellati, formano una categoria, la quale è una sottocategoria *non piena* della categoria degli spazi commutativamente anellati.

Definizione 2.2.8. Un *isomorfismo* di spazi localmente anellati è un isomorfismo nella categoria degli spazi localmente anellati. Ciò significa che esso deve ammettere un inverso da entrambi i lati. Pertanto, $(f, f^\#)$ è un isomorfismo di spazi localmente anellati se e solo se f è un omeomorfismo di spazi topologici e $f^\#$ è un isomorfismo di fasci.

²Se A e B sono anelli locali, con ideali massimali \mathfrak{m}_A e \mathfrak{m}_B rispettivamente, un omomorfismo di anelli $\phi : A \rightarrow B$ è detto un omomorfismo locale di anelli locali se $\phi^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$.

2.2.2 Lo spettro di un anello

Ad una varietà affine X su un campo k abbiamo associato il suo anello delle coordinate affini $A(X)$, che è una k -algebra finitamente generata e priva di divisori dello zero. Abbiamo poi dimostrato che in questo modo si ottiene un'equivalenza di categorie tra la categoria delle varietà affini e quella delle k -algebre finitamente generate e prive di divisori dello zero. Grothendieck ebbe l'idea di estendere questa equivalenza di categorie alla categoria di *tutti* gli anelli commutativi con unità. Per fare ciò bisogna innanzitutto trovare il modo di associare, ad ogni anello commutativo con unità A , un qualche tipo di “spazio” X che, in base a quanto detto in precedenza, dovrà essere dotato di un fascio di anelli (commutativi e con unità) \mathcal{O}_X , in modo tale che l'anello A possa essere identificato con le “funzioni” definite su X cioè, più precisamente, con le sezioni globali $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Sia quindi dato un anello A (d'ora in poi, con il termine ‘anello’ intenderemo sempre ‘anello commutativo con unità’). Per definire lo “spazio” X associato ad A possiamo procedere per analogia con il caso classico: se X è una varietà affine, definita su un campo algebricamente chiuso k , e se $A = A(X)$ è l'anello corrispondente, sappiamo che c'è una corrispondenza biunivoca tra i punti di X e gli ideali massimali di A . Potremmo quindi pensare di definire uno spazio X ponendo

$$X = X_A = \{\mathfrak{m} \mid \mathfrak{m} \subset A \text{ è un ideale massimale}\}$$

anche nel caso di un anello A qualsiasi (questo insieme è detto lo *spettro massimale* di A). Purtroppo questa idea si rivela non essere quella buona. Infatti, se $\phi : A \rightarrow B$ è un omomorfismo di anelli e se \mathfrak{m} è un ideale massimale di B , la sua antiimmagine $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$ è certamente un ideale di A , ma non è più massimale, in generale. Ciò significa che a un omomorfismo di anelli $\phi : A \rightarrow B$ non è possibile associare una funzione $f : X_B \rightarrow X_A$ tra gli spazi corrispondenti, quindi non si potrà certo ottenere un'equivalenza di categorie.

Questo stesso ragionamento suggerisce però un modo per risolvere il problema appena descritto: infatti, se al posto degli ideali massimali consideriamo gli ideali primi, è immediato verificare che l'antiimmagine di un ideale primo di B è un ideale primo di A . Diamo quindi la seguente definizione:

Definizione 2.2.9. Sia A un anello. Lo *spettro primo* di A , indicato con $\text{Spec } A$, è l'insieme degli ideali primi³ di A .

$\text{Spec } A$ sarà dunque il nostro “spazio” X associato all'anello A . Da quanto detto in precedenza risulta ora evidente che ad ogni omomorfismo

³L'anello A non è considerato un ideale primo.

di anelli $\phi : A \rightarrow B$ è associata una funzione $f : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$, la quale associa a un punto \mathfrak{m} di $\text{Spec } B$ (cioè a un ideale primo \mathfrak{m} di B) il punto di $\text{Spec } A$ dato da $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$.

Osservazione 2.2.10. Qualcuno potrebbe pensare di costruire un oggetto geometrico X_A associato a un anello A considerando l'insieme di *tutti* gli ideali di A . Certamente, in questo modo, per ogni omomorfismo di anelli $\phi : A \rightarrow B$ si ottiene una funzione $f : X_B \rightarrow X_A$. Tuttavia l'insieme X_A contiene ora *troppi* punti. Infatti noi dovremo poi costruire un fascio di anelli \mathcal{O}_X su tale spazio X e ricordiamo che, nel caso classico in cui X è una varietà affine, per ogni punto $P \in X$, la spiga $\mathcal{O}_{X,P}$ è identificata con la localizzazione dell'anello A rispetto all'ideale corrispondente al punto P . Nel nostro caso si otterrebbe quindi che, in corrispondenza ad un punto $P = \mathfrak{a}$ di X (cioè a un ideale qualunque \mathfrak{a} dell'anello A), la spiga del fascio \mathcal{O}_X in tale punto dovrebbe essere identificata con l'anello locale $A_{\mathfrak{a}}$. Un anello, però, può essere localizzato solo rispetto ad un suo ideale primo, e non rispetto a un ideale qualsiasi! Questo dimostra che la definizione data dello spazio X come spettro primo dell'anello A è essenzialmente l'unica possibile.

Avendo ora costruito l'insieme $X = \text{Spec } A$ associato all'anello A , dobbiamo definire una topologia su di esso. Anche in questo caso ci ispiriamo al caso classico della topologia di Zariski su una varietà affine.

Per ogni ideale \mathfrak{a} di A , non necessariamente primo, poniamo

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}.$$

Questo insieme deve essere pensato come il “sottoinsieme algebrico” di $\text{Spec } A$ definito dall'ideale \mathfrak{a} (è l'analogo di $Z(\mathfrak{a})$, nel caso classico). Vale il seguente risultato:

Proposizione 2.2.11. (1) Se \mathfrak{a} e \mathfrak{b} sono due ideali di A , allora

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b});$$

(2) per ogni famiglia di ideali $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ di A , si ha

$$V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i);$$

(3) se \mathfrak{a} e \mathfrak{b} sono due ideali di A , allora

$$V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b}) \Leftrightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}}.$$

Dimostrazione. (1) Se $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$, oppure $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}$, allora necessariamente $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{ab}$. Viceversa, se $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{ab}$ e se, per esempio $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{b}$, allora deve esistere $b \in \mathfrak{b}$ tale che $b \notin \mathfrak{p}$. Ma allora, per ogni $a \in \mathfrak{a}$, si ha $ab \in \mathfrak{p}$ e quindi $a \in \mathfrak{p}$, dato che \mathfrak{p} è un ideale primo. Quindi $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$.

(2) \mathfrak{p} contiene $\sum \mathfrak{a}_i$ se e solo se \mathfrak{p} contiene ciascuno degli \mathfrak{a}_i , semplicemente perché $\sum \mathfrak{a}_i$ è il più piccolo ideale contenente tutti gli ideali \mathfrak{a}_i .

(3) Il radicale di \mathfrak{a} è l'intersezione di tutti gli ideali primi contenenti \mathfrak{a} . Pertanto $\sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$ se e solo se $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$. \square

Questo risultato, assieme al fatto che $V(A) = \emptyset$ e $V((0)) = \text{Spec } A$, mostra che i sottoinsiemi di $\text{Spec } A$ del tipo $V(\mathfrak{a})$ soddisfano alle proprietà degli insiemi chiusi di una topologia. Possiamo quindi definire una topologia su $\text{Spec } A$, detta la *topologia di Zariski*, prendendo come sottoinsiemi chiusi gli insiemi del tipo $V(\mathfrak{a})$.

Osservazione 2.2.12. La topologia appena definita su $\text{Spec } A$ non è separata⁴; ad esempio, esistono dei punti che non sono chiusi. Più in generale, se $T \subseteq \text{Spec } A$, la sua chiusura è l'intersezione di tutti i sottoinsiemi chiusi di $\text{Spec } A$ che contengono T , quindi, in base alla definizione di insieme chiuso, si ha

$$\overline{T} = \bigcap_{V(\mathfrak{a}) \supseteq T} V(\mathfrak{a}) = V\left(\sum_{V(\mathfrak{a}) \supseteq T} \mathfrak{a}\right).$$

Dire che $T \subseteq V(\mathfrak{a})$ significa che ogni ideale primo $\mathfrak{p} \in T$ contiene \mathfrak{a} , quindi $\mathfrak{a} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in T} \mathfrak{p}$. Ma il più grande di tali ideali è proprio $\bigcap_{\mathfrak{p} \in T} \mathfrak{p}$. Da ciò segue che

$$\overline{T} = V\left(\bigcap_{\mathfrak{p} \in T} \mathfrak{p}\right).$$

Se $T = \{\mathfrak{p}\}$ è un punto di $\text{Spec } A$, la sua chiusura è quindi data da $\overline{T} = V(\mathfrak{p})$. Da questo discorso si deduce che un punto $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ è chiuso se e solo se esso è un ideale massimale di A .

Per terminare la nostra costruzione dobbiamo ora costruire un fascio di anelli \mathcal{O}_X sullo spazio topologico $X = \text{Spec } A$ così ottenuto. Per ogni punto \mathfrak{p} di X (cioè, per ogni ideale primo \mathfrak{p} di A) consideriamo l'anello locale $A_{\mathfrak{p}}$, localizzazione di A in \mathfrak{p} . Per ogni sottoinsieme aperto U di $\text{Spec } A$, definiamo $\mathcal{O}_X(U)$ come l'insieme delle funzioni

$$s : U \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}},$$

⁴ $\text{Spec } A$ è solo un spazio T_0 cioè, per ogni coppia di punti distinti \mathfrak{p} e \mathfrak{q} di $\text{Spec } A$ esiste un intorno di uno dei due che non contiene l'altro.

tali che $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$, per ogni $\mathfrak{p} \in U$. Richiediamo inoltre che s sia localmente un quoziente di elementi di A , nel senso che, per ogni $\mathfrak{p} \in U$, esista un intorno aperto $V \subseteq U$ di \mathfrak{p} e due elementi $a, f \in A$, tali che, per ogni $\mathfrak{q} \in V$, si abbia $f \notin \mathfrak{q}$ e $s(\mathfrak{q}) = a/f$ in $A_{\mathfrak{q}}$.

Osservazione 2.2.13. Si noti l'analogia con la definizione delle funzioni regolari su un aperto U di una varietà affine. In effetti, gli elementi di $\mathcal{O}_X(U)$ vanno intuitivamente pensati come a delle “funzioni regolari” su $X = \text{Spec } A$. L'ultima condizione $f \notin \mathfrak{q}$ nella definizione precedente è l'analogo della richiesta che, nell'espressione locale della sezione s come rapporto a/f di due elementi di A , il denominatore sia “diverso da zero.”

Si verifica facilmente che \mathcal{O}_X è un fascio di anelli su $X = \text{Spec } A$ (la sua costruzione è basata essenzialmente sulla stessa idea della costruzione del fascio associato a un prefascio). Inoltre, per ogni punto \mathfrak{p} di X , la spiga $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ è naturalmente identificata con l'anello locale $A_{\mathfrak{p}}$. La coppia (X, \mathcal{O}_X) così costruita è quindi uno spazio localmente anellato.

Osservazione 2.2.14. Nel caso classico in cui X è una varietà affine definita sul campo k e $A = A(X)$, gli elementi di A possono essere pensati come funzioni su X a valori in k . Anche nel caso generale, in cui A è un anello qualsiasi e $X = \text{Spec } A$, ad un elemento $f \in A$ corrisponde una funzione \tilde{f} su X , ma questa funzione non è più a valori in k . La funzione \tilde{f} è infatti definita come segue:

$$\tilde{f} : X \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in X} A_{\mathfrak{p}}, \quad \mathfrak{p} \mapsto \tilde{f}(\mathfrak{p}),$$

ove $\tilde{f}(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$ è l'immagine di f in $A_{\mathfrak{p}}$ tramite la mappa naturale $A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$. Inoltre, a differenza del caso classico, un elemento $f \in A$ non è, in generale, determinato dalla corrispondente funzione \tilde{f} (ciò è dovuto alla possibile presenza di elementi nilpotenti nell'anello A). È anche possibile ottenere, in corrispondenza di un elemento $f \in A$, una funzione su X i cui valori appartengano a dei campi piuttosto che a degli anelli locali. A tal fine è sufficiente comporre la funzione \tilde{f} definita in precedenza con le mappe naturali

$$A_{\mathfrak{p}} \rightarrow A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \kappa(\mathfrak{p}),$$

dove $\kappa(\mathfrak{p})$ è il campo residuo nel punto \mathfrak{p} . Si noti però che anche se la funzione su X così ottenuta assume i suoi valori in un campo, questo campo può variare da un punto all'altro di X .

Sia ora $f \in A$ e indichiamo con $D(f)$ il sottoinsieme aperto di $\text{Spec } A$ definito da $D(f) = \text{Spec } A \setminus V((f))$. $D(f)$ è quindi l'insieme degli ideali primi di A che non contengono f (intuitivamente $D(f)$ è il complementare dell'“insieme degli zeri” di f , e la condizione $f \notin \mathfrak{p}$ è l'analogo di $f(\mathfrak{p}) \neq 0$).

Proposizione 2.2.15. *Gli aperti del tipo $D(f)$ formano una base di aperti per la topologia su $\text{Spec } A$.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che ogni aperto U di $\text{Spec } A$ è unione di aperti del tipo $D(f)$. Passando ai complementari, ciò equivale a dimostrare che ogni sottoinsieme chiuso è intersezione di chiusi del tipo $V((f))$. Ma, per definizione, ogni sottoinsieme chiuso di $\text{Spec } A$ è del tipo $V(\mathfrak{a})$, per qualche ideale \mathfrak{a} di A , ed è immediato verificare che

$$V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} V((f)).$$

□

Osservazione 2.2.16. Elenchiamo qui alcune proprietà della topologia di $\text{Spec } A$ e degli aperti fondamentali $D(f)$ la cui dimostrazione è lasciata al lettore: $D(f) \cap D(g) = D(fg)$, $D(f) = \emptyset$ se e solo se f è nilpotente, $D(f) = \text{Spec } A$ se e solo se f è invertibile, $D(f) = D(g)$ se e solo se $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$, $\text{Spec } A$ è quasi-compatto⁵ e, più in generale, ogni insieme $D(f)$ è quasi-compatto, un aperto di $\text{Spec } A$ è quasi-compatto se e solo se è un'unione finita di insiemi del tipo $D(f)$.

Siamo ora in grado di dimostrare alcune importanti proprietà dello spazio anellato $(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$.

Proposizione 2.2.17. *Sia A un anello e $X = \text{Spec } A$ il suo spettro, dotato del fascio di anelli \mathcal{O}_X . Allora:*

- (a) *per ogni $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, la spiga $\mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}}$ è isomorfa all'anello locale $A_{\mathfrak{p}}$;*
- (b) *per ogni $f \in A$, l'anello $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_X)$ è isomorfo alla localizzazione $A_f = \{a/f^n \mid a \in A, n \geq 0\}$;*
- (c) *esiste un isomorfismo naturale $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong A$.*

Dimostrazione. (a) Definiamo un omomorfismo $\phi : \mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}} \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ inviando ogni sezione locale s , definita in un intorno di \mathfrak{p} nel suo valore $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$. La mappa ϕ è suriettiva, perché ogni elemento di $A_{\mathfrak{p}}$ può essere rappresentato come un quoziente a/f , con $a, f \in A$ e $f \notin \mathfrak{p}$. In questo caso $D(f)$ è un intorno aperto di \mathfrak{p} e a/f definisce una sezione di \mathcal{O}_X su $D(f)$ il cui valore in \mathfrak{p} è l'elemento dato. Per dimostrare che ϕ è iniettiva, sia U un intorno di \mathfrak{p} e siano $s, t \in \mathcal{O}_X(U)$ due elementi aventi lo stesso valore $s(\mathfrak{p}) = t(\mathfrak{p})$ nel punto \mathfrak{p} . Restringendo U , se necessario, possiamo supporre che $s = a/f$

⁵Uno spazio topologico X è detto quasi-compatto se ogni suo ricoprimento aperto possiede un sottoricoprimento finito.

e $t = b/g$ su U , dove $a, b, f, g \in A$ e $f, g \notin \mathfrak{p}$. Dato che a/f e b/g hanno la stessa immagine in $A_{\mathfrak{p}}$, dalla definizione di localizzazione segue che esiste un elemento $h \notin \mathfrak{p}$ tale che $h(ga - fb) = 0$ in A . Pertanto $a/f = b/g$ in ogni anello locale $A_{\mathfrak{q}}$ tale che $f, g, h \notin \mathfrak{q}$. Ma l'insieme di tali \mathfrak{q} è l'insieme aperto $D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, che contiene \mathfrak{p} . Di conseguenza $s = t$ in tutto un intorno di \mathfrak{p} , quindi s e t determinano lo stesso elemento della spiga $\mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}}$. Ciò dimostra che ϕ è un isomorfismo, e conclude la dimostrazione del punto (a).

(b) e (c). Notiamo che (c) è un caso speciale di (b), quando $f = 1$. È quindi sufficiente dimostrare (b). Definiamo un omomorfismo $\psi : A_f \rightarrow \Gamma(D(f), \mathcal{O}_X)$ inviando un elemento a/f^n nella sezione $s \in \Gamma(D(f), \mathcal{O}_X)$ che assegna a ogni punto $\mathfrak{p} \in D(f)$ l'immagine di a/f^n in $A_{\mathfrak{p}}$. Dimostriamo che ψ è iniettivo. Se $\psi(a/f^n) = \psi(b/f^m)$, allora per ogni $\mathfrak{p} \in D(f)$, a/f^n e b/f^m hanno la stessa immagine in $A_{\mathfrak{p}}$. Quindi esiste un elemento $h \notin \mathfrak{p}$ tale che $h(f^m a - f^n b) = 0$ in A . Sia \mathfrak{a} l'annullatore di $f^m a - f^n b$. Allora $h \in \mathfrak{a}$ e $h \notin \mathfrak{p}$, quindi $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Questo vale per ogni $\mathfrak{p} \in D(f)$; si conclude quindi che $V(\mathfrak{a}) \cap D(f) = \emptyset$. Pertanto $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ e quindi una qualche potenza f^l appartiene ad \mathfrak{a} , per cui $f^l(f^m a - f^n b) = 0$, il che prova che $a/f^n = b/f^m$ in A_f . Quindi ψ è iniettiva.

La parte difficile è dimostrare che ψ è anche suriettiva. Sia dunque $s \in \mathcal{O}_X(D(f))$. Allora, in base alla definizione di \mathcal{O}_X , possiamo ricoprire $D(f)$ con degli aperti V_i sui quali s è rappresentata da un rapporto a_i/g_i , con $g_i \notin \mathfrak{p}$, per ogni $\mathfrak{p} \in V_i$; in altri termini, $V_i \subseteq D(g_i)$. Ora i sottoinsiemi aperti del tipo $D(h)$ formano una base per la topologia, quindi possiamo supporre che $V_i = D(h_i)$, per qualche h_i . Dato che $D(h_i) \subseteq D(g_i)$, si ha che $V((h_i)) \supseteq V((g_i))$, quindi per il punto (3) della Proposizione 2.2.11, $\sqrt{(h_i)} \subseteq \sqrt{(g_i)}$ e, in particolare, $h_i^n \in (g_i)$, per qualche n . Quindi $h_i^n = c g_i$, così $a_i/g_i = c a_i/h_i^n$. Sostituendo h_i con h_i^n (dato che $D(h_i) = D(h_i^n)$) e a_i con $c a_i$, possiamo supporre che $D(f)$ sia ricoperto dagli aperti $D(h_i)$ e che s sia rappresentata da a_i/h_i nell'aperto $D(h_i)$.

Ora osserviamo che $D(f)$ può essere ricoperto da un numero finito dei $D(h_i)$. Infatti, $D(f) \subseteq \bigcup D(h_i)$ se e solo se $V((f)) \supseteq \bigcap V((h_i))$, ma $\bigcap V((h_i)) = V(\sum(h_i))$. Ancora per il punto (3) della Proposizione 2.2.11, ciò equivale a dire che f appartiene al radicale dell'ideale $\sum(h_i)$, cioè che $f^n \in \sum(h_i)$, per qualche n . Ciò significa che f^n può essere espresso come una somma finita $f^n = \sum b_i h_i$, ove $b_i \in A$. Di conseguenza basta un sottoinsieme finito degli h_i affinché gli aperti $D(h_i)$ ricoprano $D(f)$. D'ora in poi fissiamo dunque un insieme finito h_1, \dots, h_r tale che $D(f) \subseteq D(h_1) \cup \dots \cup D(h_r)$.

A questo punto possiamo notare che su $D(h_i) \cap D(h_j) = D(h_i h_j)$ ci sono due elementi di $A_{h_i h_j}$, a_i/h_i e a_j/h_j , che rappresentano entrambi la

sezione s . Pertanto, a causa dell'iniettività di ψ (dimostrata in precedenza) applicata a $D(h_i h_j)$, si deve avere $a_i/h_i = a_j/h_j$ in $A_{h_i h_j}$. Ciò significa che, per qualche n , si ha

$$(h_i h_j)^n (h_j a_i - h_i a_j) = 0.$$

Dato che il numero di indici coinvolti è finito, possiamo scegliere l'intero n così grande da andar bene per tutti gli indici i e j . Riscriviamo ora l'equazione precedente come segue

$$h_j^{n+1} (h_i^n a_i) - h_i^{n+1} (h_j^n a_j) = 0.$$

Ora sostituiamo ogni h_i con h_i^{n+1} e a_i con $h_i^n a_i$. La sezione s continua a essere rappresentata su $D(h_i)$ da a_i/h_i e inoltre si ha $h_j a_i = h_i a_j$, per ogni i e j .

Scriviamo ora $f^n = \sum b_i h_i$ come sopra, il che è possibile, per qualche n , perché gli aperti $D(h_i)$ ricoprono $D(f)$. Sia $a = \sum b_i a_i$. Allora, per ogni j , si ha

$$h_j a = \sum_i b_i a_i h_j = \sum_i b_i h_i a_j = f^n a_j.$$

Ciò significa che $a/f^n = a_j/h_j$ su $D(h_j)$. Pertanto, $\psi(a/f^n) = s$ ovunque, il che dimostra che ψ è suriettiva e quindi è un isomorfismo. \square

Per concludere la nostra costruzione dimostriamo il seguente risultato.

Proposizione 2.2.18. (a) Per ogni anello A , la coppia $(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$ è uno spazio localmente anellato;

(b) Un omomorfismo di anelli $\phi : A \rightarrow B$ induce un morfismo naturale di spazi localmente anellati

$$(f, f^\#) : (\text{Spec } B, \mathcal{O}_{\text{Spec } B}) \rightarrow (\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A});$$

(c) Dati due anelli A e B , ogni morfismo di spazi localmente anellati da $\text{Spec } B$ a $\text{Spec } A$ è indotto da un omomorfismo di anelli $\phi : A \rightarrow B$, come descritto nel punto precedente.

Dimostrazione. (a) Questo discende dal punto (a) della Proposizione 2.2.17.

(b) Dato un omomorfismo $\phi : A \rightarrow B$, definiamo una mappa $f : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ ponendo $f(\mathfrak{p}) = \phi^{-1}(\mathfrak{p})$, per ogni $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$. Se \mathfrak{a} è un ideale di A , si verifica subito che $f^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\phi(\mathfrak{a}))$, cioè che l'anti-immagine tramite f di un chiuso è chiuso, il che dimostra che f è continua. Per ogni $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$, possiamo localizzare ϕ in \mathfrak{p} ottenendo un omomorfismo locale di anelli locali $\phi_{\mathfrak{p}} : A_{\phi^{-1}(\mathfrak{p})} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$. Ora, per ogni aperto $V \subseteq \text{Spec } A$, si ottiene un omomorfismo di anelli $f^\# : \Gamma(V, \mathcal{O}_{\text{Spec } A}) \rightarrow \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{O}_{\text{Spec } B})$,

definito per composizione con le mappe f e $\phi_{\mathfrak{p}}$. Questo fornisce un morfismo di fasci $f^{\#} : \mathcal{O}_{\text{Spec } A} \rightarrow f_*(\mathcal{O}_{\text{Spec } B})$. Le mappe $f^{\#}$ indotte sulle spighe non sono altro che gli omomorfismi locali $\phi_{\mathfrak{p}}$, pertanto $(f, f^{\#})$ è un morfismo di spazi localmente anellati.

(c) Viceversa, supponiamo sia dato un morfismo di spazi localmente anellati $(f, f^{\#})$ da $\text{Spec } B$ a $\text{Spec } A$. Prendendo le sezioni globali, $f^{\#}$ induce un omomorfismo di anelli $\phi : \Gamma(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A}) \rightarrow \Gamma(\text{Spec } B, \mathcal{O}_{\text{Spec } B})$. Per il punto (c) della Proposizione 2.2.17, questi anelli sono, rispettivamente, A e B , quindi abbiamo un omomorfismo $\phi : A \rightarrow B$. Per ogni $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$, abbiamo un omomorfismo locale indotto sulle spighe, $\mathcal{O}_{\text{Spec } A, f(\mathfrak{p})} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } B, \mathfrak{p}}$, cioè $A_{f(\mathfrak{p})} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$, che deve essere compatibile con la mappa ϕ sulle sezioni globali e con gli omomorfismi di localizzazione. In altri termini, si ha un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{f(\mathfrak{p})} & \xrightarrow{f^{\#}_{\mathfrak{p}}} & B_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

Dato che $f^{\#}$ è un omomorfismo locale, si ha che $\phi^{-1}(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})$, il che dimostra che f coincide con la mappa $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ indotta da ϕ . Ora è immediato verificare che anche $f^{\#}$ è indotta da ϕ , il che significa che il morfismo $(f, f^{\#})$ di spazi localmente anellati proviene, in effetti, dall'omomorfismo di anelli ϕ . \square

2.3 Schemi

In questa sezione introduciamo la nozione di schema, la quale sostituisce la nozione classica di varietà. Allo stesso modo in cui, in geometria differenziale, una varietà differenziabile è ottenuta “incollando” tra loro degli aperti isomorfi a dei sottoinsiemi aperti di \mathbb{R}^n , uno schema è ottenuto per incollamento di schemi affini, i quali appaiono dunque come i “pezzi” elementari di costruzione di ogni schema. Iniziamo dunque definendo gli schemi affini:

Definizione 2.3.1. Uno *schema affine* è uno spazio localmente anellato (X, \mathcal{O}_X) isomorfo, in quanto spazio localmente anellato, allo spettro di un anello.

Definizione 2.3.2. Uno *schema* è uno spazio localmente anellato (X, \mathcal{O}_X) in cui ogni punto $P \in X$ possiede un intorno aperto $U \subseteq X$ tale che lo spazio topologico U dotato del fascio di anelli $\mathcal{O}_X|_U$ sia uno schema affine. X è detto lo spazio topologico sottostante dello schema (X, \mathcal{O}_X) e \mathcal{O}_X è chiamato il fascio strutturale.

Definizione 2.3.3. Un *morfismo* tra due schemi è un morfismo in quanto spazi localmente anellati. Un *isomorfismo* di schemi è un morfismo che ammette un inverso da entrambi i lati.

Vediamo ora alcuni esempi di schemi affini.

Esempio 2.3.4. Sia k un campo qualsiasi. Lo spettro di k , $\text{Spec } k$, è uno schema affine il cui spazio topologico sottostante consiste in un solo punto (corrispondente all'unico ideale proprio (0) di k), e il cui fascio strutturale è identificato con il campo k (ciò corrisponde al fatto che le uniche funzioni definite su uno spazio consistente in un solo punto sono le “costanti”).

Esempio 2.3.5. Un esempio più interessante è dato dallo spettro di \mathbb{Z} . Gli unici ideali primi dell'anello degli interi sono (0) e (p) , per ogni numero primo p . Si ha quindi

$$\text{Spec } \mathbb{Z} = \{(p) \mid p = 0 \text{ oppure } p \text{ è primo}\}.$$

I punti corrispondenti agli ideali (p) , con p primo, sono punti chiusi, il cui campo residuo è $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Il punto corrispondente all'ideale (0) non è un punto chiuso; il suo campo residuo è \mathbb{Q} e la sua chiusura è tutto lo spazio $\text{Spec } \mathbb{Z}$.

Esempio 2.3.6. Sia ora k un campo algebricamente chiuso e consideriamo lo spettro dell'anello dei polinomi in una indeterminata su k , $X = \text{Spec } k[x]$. Poiché k è algebricamente chiuso, gli unici ideali primi di $k[x]$ sono l'ideale (0) e tutti gli ideali del tipo $(x - a)$, al variare di $a \in k$ (ricordiamo che l'anello $k[x]$ è un dominio di integrità a ideali principali). Gli ideali del tipo $(x - a)$ sono massimali e sono quindi dei punti chiusi di $\text{Spec } k[x]$, mentre l'ideale (0) corrisponde a un punto non chiuso, la cui chiusura coincide con tutto lo spazio X . Il campo residuo di un punto del tipo $(x - a)$ coincide con k , mentre il campo residuo del punto (0) è il campo delle frazioni dell'anello $k[x]$. Il punto (0) è detto il *punto generico* di $\text{Spec } k[x]$ (è un punto la cui chiusura coincide con tutto lo spazio X , cioè un punto che può essere *specializzato* in ogni altro punto).

Da quanto visto si deduce che, eccetto per la presenza del punto generico, lo schema affine $\text{Spec } k[x]$ può essere identificato con la retta affine classica \mathbb{A}_k^1 , tramite la corrispondenza che a un punto $A \in \mathbb{A}_k^1$ di coordinata $a \in k$ associa l'ideale primo $(x - a) \in \text{Spec } k[x]$. L'esistenza del punto generico $(0) \in \text{Spec } k[x]$ permette poi di dare un significato preciso a frasi classiche del tipo “sia P un punto generico della retta affine...”

Esempio 2.3.7. Se il campo k non è algebricamente chiuso, la differenza tra lo schema $\text{Spec } k[x]$ e la retta affine classica \mathbb{A}_k^1 è molto più marcata. Vediamo in dettaglio quello che succede nel caso del campo dei numeri reali, studiamo cioè $\text{Spec } \mathbb{R}[x]$. L'anello dei polinomi $\mathbb{R}[x]$ è un anello a

ideali principali, quindi ogni ideale primo \mathfrak{p} è del tipo $\mathfrak{p} = (f)$, ove f è un polinomio irriducibile, oppure f è il polinomio nullo. I polinomi irriducibili di $\mathbb{R}[x]$ sono essenzialmente di due tipi: $f(x) = x - a$, per qualche $a \in \mathbb{R}$, oppure $f(x) = x^2 + bx + c$, con $b^2 - 4c < 0$. Passando dal campo dei numeri reali a quello dei numeri complessi, il polinomio $x^2 + bx + c$ si scompone come segue:

$$x^2 + bx + c = (x - (\alpha + i\beta))(x - (\alpha - i\beta)),$$

per qualche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\beta \neq 0$.

Notiamo ora che l'immersione $\mathbb{R}[x] \hookrightarrow \mathbb{C}[x]$ determina un morfismo di schemi $\text{Spec } \mathbb{C}[x] \rightarrow \text{Spec } \mathbb{R}[x]$, che invia il punto generico (0) di $\text{Spec } \mathbb{C}[x]$ nel punto generico di $\text{Spec } \mathbb{R}[x]$, un punto del tipo $(x - a) \in \text{Spec } \mathbb{C}[x]$, con $a \in \mathbb{R}$, nell'analogo punto $(x - a) \in \text{Spec } \mathbb{R}[x]$ e infine i due punti $(x - (\alpha + i\beta))$ e $(x - (\alpha - i\beta))$ nel punto $(x^2 + bx + c)$.

In conclusione, lo schema $\text{Spec } \mathbb{R}[x]$ contiene, oltre ai punti del tipo $(x - a)$, con $a \in \mathbb{R}$, i quali corrispondono ai punti di coordinate a della retta affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$, dei nuovi punti, dati da ideali primi del tipo $(x^2 + bx + c)$, i quali corrispondono a coppie di punti con coordinate complesse coniugate.

Esempio 2.3.8. Sia A un anello e \mathfrak{a} un ideale di A . L'omomorfismo canonico $A \rightarrow A/\mathfrak{a}$ induce un morfismo di schemi

$$\text{Spec}(A/\mathfrak{a}) \rightarrow \text{Spec } A.$$

Si verifica facilmente che questo morfismo è iniettivo e che $\text{Spec}(A/\mathfrak{a})$ si può identificare in modo canonico con il sottoinsieme chiuso $V(\mathfrak{a})$ di $\text{Spec } A$. Questa identificazione permette dunque di definire una struttura di schema affine su un sottoinsieme chiuso di $\text{Spec } A$ (questo è un esempio di *sottoschema chiuso*).

Esempio 2.3.9. Sia A un anello, $f \in A$ e sia $D(f)$ il corrispondente aperto fondamentale. Si può dimostrare che $D(f) \cong \text{Spec}(A_f)$ e il morfismo di inclusione $D(f) \hookrightarrow \text{Spec } A$ corrisponde all'omomorfismo naturale di anelli $A \rightarrow A_f$. Da ciò si deduce che anche $D(f)$ è uno schema affine.

Esempio 2.3.10. Sia A un anello locale di ideale massimale \mathfrak{m} . Lo schema affine $\text{Spec } A$ contiene un unico punto chiuso (l'ideale \mathfrak{m}) ma contiene anche, in generale, molti altri punti non chiusi, nella cui chiusura sta l'ideale \mathfrak{m} . Questi punti non chiusi corrispondono, intuitivamente, a dei "germi di sottovarietà" passanti per il punto \mathfrak{m} (per comprendere questa analogia si pensi al caso in cui A è l'anello locale $\mathcal{O}_{X,P}$ di un punto P in una varietà affine X).

Esempio 2.3.11. Sia R un anello di valutazione discreta (vedi [AM, Cap. 9]). Allora $\text{Spec } R$ è uno schema affine il cui spazio topologico consiste di due

punti. Uno dei due punti, chiamiamolo x_0 , è chiuso e il suo anello locale è R . L'altro, che indicheremo con x_1 , è aperto e denso, e il suo anello locale è il campo delle frazioni K dell'anello R . L'inclusione naturale $R \hookrightarrow K$ corrisponde al morfismo di schemi $\text{Spec } K \rightarrow \text{Spec } R$ che manda l'unico punto di $\text{Spec } K$ nel punto x_1 .

2.3.1 Incollamento di schemi

Dato che, per definizione, uno schema è ottenuto incollando tra loro degli schemi affini, è ragionevole pensare che due schemi si possano, in qualche modo, incollare tra loro in modo da ottenere un nuovo schema. Descriviamo ora sommariamente la procedura di "incollamento" di due schemi, lasciando al lettore il compito, alquanto noioso, di verificare tutti i dettagli.

Siano dunque (X_1, \mathcal{O}_{X_1}) e (X_2, \mathcal{O}_{X_2}) due schemi, $U_1 \subseteq X_1$ e $U_2 \subseteq X_2$ due sottoinsiemi aperti, e supponiamo che sia dato un isomorfismo di spazi localmente anellati

$$\phi : (U_1, \mathcal{O}_{X_1}|_{U_1}) \xrightarrow{\sim} (U_2, \mathcal{O}_{X_2}|_{U_2}).$$

Vogliamo costruire uno schema (X, \mathcal{O}_X) ottenuto *incollando* (X_1, \mathcal{O}_{X_1}) e (X_2, \mathcal{O}_{X_2}) *attraverso l'isomorfismo* ϕ . Lo spazio topologico X è ottenuto come lo spazio quoziente dell'unione disgiunta $X_1 \sqcup X_2$ modulo la relazione di equivalenza definita ponendo $x_1 \sim \phi(x_1)$, per ogni $x_1 \in U_1$, dotato della topologia quoziente. Ciò significa che un sottoinsieme $V \subseteq X$ è aperto se e solo se $i_1^{-1}(V)$ è aperto in X_1 e $i_2^{-1}(V)$ è aperto in X_2 , dove $i_1 : X_1 \rightarrow X$ e $i_2 : X_2 \rightarrow X$ sono le mappe di inclusione naturali. Bisogna ora definire il fascio strutturale di X . Ciò può essere fatto definendo, per ogni aperto $V \subseteq X$, l'anello $\mathcal{O}_X(V)$ come l'insieme delle coppie (s_1, s_2) , dove s_1 è una sezione del fascio \mathcal{O}_{X_1} sull'aperto $i_1^{-1}(V)$, s_2 è una sezione del fascio \mathcal{O}_{X_2} sull'aperto $i_2^{-1}(V)$ tali che valga l'uguaglianza $\phi(s_1|_{i_1^{-1}(V) \cap U_1}) = s_2|_{i_2^{-1}(V) \cap U_2}$. Naturalmente bisogna verificare che \mathcal{O}_X sia effettivamente un fascio di anelli su X , che (X, \mathcal{O}_X) sia uno spazio localmente anellato e che ogni punto di X possieda un intorno aperto isomorfo a uno schema affine.

Esempio 2.3.12. Sia k un campo e poniamo $X_1 = X_2 = \text{Spec } k[x]$. Indichiamo con O il punto corrispondente all'ideale massimale (x) . X_1 e X_2 sono quindi due rette affini su k e O è l'origine. Poniamo ora $U_1 = U_2 = \text{Spec } k[x] \setminus \{O\}$ e sia $\phi : U_1 \rightarrow U_2$ l'identità. Sia X lo schema ottenuto incollando X_1 e X_2 attraverso l'isomorfismo ϕ . In sostanza, quello che abbiamo fatto è incollare tra loro le due rette affini in tutti i punti tranne nell'origine: in questo modo si ottiene una *retta affine con l'origine sdoppiata*.

$$X \quad \text{—————} :$$

Lo schema X così ottenuto *non* è uno schema affine (lo vedremo in seguito).

2.3.2 Schemi proiettivi

Esiste una costruzione, simile a quella che ad un anello A associa $\text{Spec } A$, la quale permette di costruire una classe molto importante di schemi (non affini) che sono l'analogo, nella teoria degli schemi, delle varietà proiettive nella geometria algebrica classica.

Consideriamo un anello graduato $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ e indichiamo con $S_+ = \bigoplus_{d > 0} S_d$ il suo ideale irrilevante. Indichiamo con $\text{Proj } S$ l'insieme di tutti gli ideali primi omogenei di S che non contengono S_+ .

Per ogni ideale omogeneo \mathfrak{a} di S (non necessariamente primo), poniamo

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj } S \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}.$$

Questo insieme deve essere pensato come il “sottoinsieme algebrico” di $X = \text{Proj } S$ definito dall'ideale \mathfrak{a} (è l'analogo di $Z(\mathfrak{a})$, nel caso classico dello spazio proiettivo). Vale il seguente risultato, che è l'analogo, nel presente contesto, della Proposizione 2.2.11:

Proposizione 2.3.13. (1) Se \mathfrak{a} e \mathfrak{b} sono due ideali omogenei di S , allora

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b});$$

(2) per ogni famiglia di ideali omogenei $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ di S , si ha

$$V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i).$$

Dimostrazione. La dimostrazione è lasciata per esercizio al lettore. \square

Come nel caso dello spettro di un anello, questo risultato, assieme al fatto che $V(S) = \emptyset$ e $V((0)) = \text{Proj } S$, mostra che i sottoinsiemi di $\text{Proj } S$ del tipo $V(\mathfrak{a})$ (dove \mathfrak{a} è ora un ideale omogeneo) soddisfano alle proprietà degli insiemi chiusi di una topologia. Definiamo quindi una topologia su $\text{Proj } S$, detta la *topologia di Zariski*, prendendo come sottoinsiemi chiusi gli insiemi del tipo $V(\mathfrak{a})$, per ogni ideale omogeneo \mathfrak{a} .

Per dotare lo spazio topologico $X = \text{Proj } S$ di una struttura di schema dobbiamo ora costruire su X un fascio di anelli \mathcal{O}_X . Per ogni punto \mathfrak{p} di X (cioè, per ogni ideale primo omogeneo \mathfrak{p} di S che non contiene S_+) consideriamo la localizzazione omogenea⁶ $S_{(\mathfrak{p})}$ di S in \mathfrak{p} . Per ogni sottoinsieme

⁶Se S è un anello graduato e \mathfrak{p} è un ideale primo omogeneo di S , la localizzazione omogenea $S_{(\mathfrak{p})}$ è il sottoanello degli elementi di grado 0 nella localizzazione di S rispetto al sottoinsieme moltiplicativo T composto dagli elementi omogenei di S che non appartengono a \mathfrak{p} . Si noti che $T^{-1}S$ ha una graduazione naturale data da $\deg(f/g) = \deg f - \deg g$, dove f è un elemento omogeneo di S e $g \in T$. $S_{(\mathfrak{p})}$ è un anello locale il cui ideale massimale è $(\mathfrak{p} \cdot T^{-1}S) \cap S_{(\mathfrak{p})}$. In particolare, se S è un dominio di integrità, allora per $\mathfrak{p} = (0)$ si ottiene un campo $S_{((0))}$. Per terminare, se $f \in S$ è un elemento omogeneo, indichiamo con $S_{(f)}$ il sottoanello degli elementi di grado 0 nell'anello localizzato S_f .

aperto U di $\text{Proj } S$, definiamo $\mathcal{O}_X(U)$ come l'insieme delle funzioni

$$s : U \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} S_{(\mathfrak{p})},$$

tali che $s(\mathfrak{p}) \in S_{(\mathfrak{p})}$, per ogni $\mathfrak{p} \in U$. Richiediamo inoltre che s sia localmente un quoziente di due elementi omogenei dello stesso grado di S , nel senso che, per ogni $\mathfrak{p} \in U$, esista un intorno aperto $V \subseteq U$ di \mathfrak{p} e due elementi omogenei dello stesso grado $a, f \in S$, tali che, per ogni $\mathfrak{q} \in V$, si abbia $f \notin \mathfrak{q}$ e $s(\mathfrak{q}) = a/f$ in $S_{(\mathfrak{q})}$.

Osservazione 2.3.14. Si noti l'analogia con la definizione delle funzioni regolari su un aperto U di una varietà proiettiva. In effetti, gli elementi di $\mathcal{O}_X(U)$ vanno intuitivamente pensati come a delle “funzioni regolari” sull'aperto U di $X = \text{Proj } S$.

Si può ora verificare che \mathcal{O}_X è effettivamente un fascio di anelli su $X = \text{Proj } S$ e che la coppia (X, \mathcal{O}_X) è uno spazio localmente anellato.

Sia ora $f \in S_+$ un elemento omogeneo e indichiamo con $D_+(f)$ il complementare di $V((f))$ in $\text{Proj } S$:

$$D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj } S \mid f \notin \mathfrak{p}\}.$$

Gli insiemi di questo tipo sono aperti e, come vedremo, ricoprono $\text{Proj } S$. Possiamo ora dimostrare il seguente risultato:

Proposizione 2.3.15. *Sia S un anello graduato e sia $X = \text{Proj } S$, dotato del fascio di anelli \mathcal{O}_X . Allora:*

- (a) *per ogni $\mathfrak{p} \in \text{Proj } S$, la spiga $\mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}}$ è isomorfa all'anello locale $S_{(\mathfrak{p})}$;*
- (b) *per ogni $f \in S_+$, f omogeneo, gli aperti $D_+(f)$ formano un ricoprimento aperto di X e si ha un isomorfismo di spazi localmente anellati*

$$(D_+(f), \mathcal{O}_X|_{D_+(f)}) \cong \text{Spec } S_{(f)};$$

- (c) *$X = \text{Proj } S$ è uno schema.*

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che il punto (a) afferma che $\text{Proj } S$ è uno spazio localmente anellato, mentre il punto (b) afferma che esso può essere ricoperto da dei sottoinsiemi aperti che sono isomorfi a degli schemi affini. Quindi il punto (c) è una conseguenza dei punti (a) e (b).

La dimostrazione del punto (a) è praticamente identica alla dimostrazione del punto (a) della Proposizione 2.2.17 ed è quindi lasciata al lettore per esercizio.

Per dimostrare il punto (b) ricordiamo che gli elementi di $\text{Proj } S$ sono gli ideali primi omogenei \mathfrak{p} di S che non contengono tutto S_+ . Dalla definizione degli aperti $D_+(f)$ risulta pertanto chiaro che, al variare di f tra gli elementi omogenei di S_+ , questi aperti ricoprono tutto $\text{Proj } S$. Fissiamo ora un elemento omogeneo $f \in S_+$. Definiremo un isomorfismo $(\phi, \phi^\#)$ di spazi localmente anellati da $D_+(f)$ a $\text{Spec } S_{(f)}$. Esiste un omomorfismo naturale di anelli $S \rightarrow S_f$, e $S_{(f)}$ è un sottoanello di S_f . Per ogni ideale omogeneo $\mathfrak{a} \subseteq S$, poniamo $\phi(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}S_f) \cap S_{(f)}$. In particolare, se $\mathfrak{p} \in D_+(f)$, allora $\phi(\mathfrak{p}) \in \text{Spec } S_{(f)}$ e in questo modo si ottiene la mappa ϕ a livello di insiemi. Le proprietà della localizzazione mostrano che ϕ è biiettiva in quanto funzione da $D_+(f)$ a $\text{Spec } S_{(f)}$. Inoltre, se \mathfrak{a} è un ideale omogeneo di S , allora $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ se e solo se $\phi(\mathfrak{p}) \supseteq \phi(\mathfrak{a})$, il che significa che ϕ è un omeomorfismo. Notiamo inoltre che, se $\mathfrak{p} \in D_+(f)$, allora gli anelli locali $S_{(\mathfrak{p})}$ e $(S_{(f)})_{\phi(\mathfrak{p})}$ sono canonicamente isomorfi. Questi isomorfismi, assieme all'omeomorfismo ϕ , inducono una mappa naturale di fasci $\phi^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec } S_{(f)}} \rightarrow \phi_*(\mathcal{O}_X|_{D_+(f)})$ che si verifica facilmente essere un isomorfismo. In conclusione, $(\phi, \phi^\#)$ è un isomorfismo di spazi localmente anellati, come richiesto. \square

Osservazione 2.3.16. Se k è un campo algebricamente chiuso e S è l'anello dei polinomi in $n + 1$ indeterminate $k[x_0, \dots, x_n]$, con la graduazione naturale, lo schema $\text{Proj } S$ è l'analogo, nella teoria degli schemi, del classico spazio proiettivo \mathbb{P}_k^n .

Più in generale, se A è un anello qualsiasi, possiamo considerare l'anello dei polinomi $S = A[x_0, \dots, x_n]$ dotato della graduazione naturale, in cui gli elementi di A hanno grado 0. In questo caso lo schema $\text{Proj } S$ è anche indicato con \mathbb{P}_A^n e detto lo *spazio proiettivo n -dimensionale su A* . Esiste un morfismo naturale di schemi $\pi : \mathbb{P}_A^n \rightarrow \text{Spec } A$ che permette di pensare a \mathbb{P}_A^n come ad una *famiglia di spazi proiettivi parametrizzati dai punti di Spec A* .

2.3.3 Schemi e varietà

Per terminare questo discorso introduttivo sugli schemi vogliamo spiegare in che modo il concetto di schema generalizzi il concetto classico di varietà algebrica. Naturalmente una varietà nel senso classico *non* è uno schema: anche nel caso in cui il campo k è algebricamente chiuso, la retta affine \mathbb{A}_k^1 non coincide con lo schema $\text{Spec } k[x]$. Abbiamo visto infatti che uno schema possiede, in generale, dei punti non chiusi, che non hanno un analogo nel caso delle varietà classiche. Tuttavia, usando il fatto che questi punti non chiusi corrispondono intuitivamente a delle “sottovarietà,” intese in senso classico, mostreremo ora come sia possibile aggiungere dei nuovi punti a una varietà classica in modo da trasformarla in uno schema.

Proposizione 2.3.17. *Sia k un campo algebricamente chiuso. Sia $\mathcal{S}ch(k)$ la categoria degli schemi su k (cioè degli schemi X dotati di un morfismo $X \rightarrow \text{Spec } k$) e sia $\mathcal{V}ar(k)$ la categoria delle varietà (affini, quasi-affini, proiettive o quasi-proiettive) su k . Allora esiste un funtore naturale, pienamente fedele,*

$$t : \mathcal{V}ar(k) \rightarrow \mathcal{S}ch(k).$$

Per ogni varietà V , il suo spazio topologico è omeomorfo all'insieme dei punti chiusi dello spazio topologico sottostante allo schema $t(V)$ e il suo fascio delle funzioni regolari è ottenuto per restrizione, attraverso questo omeomorfismo, del fascio strutturale dello schema $t(V)$.

Dimostrazione. Per cominciare, sia X uno spazio topologico qualsiasi e sia $t(X)$ l'insieme dei sottoinsiemi chiusi irriducibili (non vuoti) di X . Se Y è un sottoinsieme chiuso di X , allora $t(Y) \subseteq t(X)$. Inoltre $t(Y_1 \cup Y_2) = t(Y_1) \cup t(Y_2)$ e $t(\bigcap Y_i) = \bigcap t(Y_i)$. Possiamo quindi definire una topologia su $t(X)$ prendendo come sottoinsiemi chiusi i sottoinsiemi della forma $t(Y)$, dove Y è un sottoinsieme chiuso di X . Se $f : X_1 \rightarrow X_2$ è una funzione continua, si ottiene una mappa $t(f) : t(X_1) \rightarrow t(X_2)$ inviando un sottoinsieme chiuso irriducibile nella chiusura della sua immagine. Pertanto t è un funtore sugli spazi topologici. Possiamo inoltre definire una funzione continua $\alpha : X \rightarrow t(X)$ ponendo $\alpha(P) = \overline{\{P\}}$. Si noti che α induce una biiezione tra l'insieme dei sottoinsiemi aperti di X e l'insieme dei sottoinsiemi aperti di $t(X)$.

Sia ora k un campo algebricamente chiuso. Sia V una varietà su k e sia \mathcal{O}_V il suo fascio delle funzioni regolari. Dimosteremo che $(t(V), \alpha_*(\mathcal{O}_V))$ è uno schema su k . Dato che ogni varietà può essere ricoperta da sottovarietà aperte affini (vedi Lemma 1.6.9), sarà sufficiente dimostrare che se V è affine, allora $(t(V), \alpha_*(\mathcal{O}_V))$ è uno schema. Sia dunque V una varietà affine con anello delle coordinate affini A . Definiamo un morfismo di spazi localmente anellati

$$\beta : (V, \mathcal{O}_V) \rightarrow X = \text{Spec } A$$

come segue. Per ogni punto $P \in V$, sia $\beta(P) = \mathfrak{m}_P$ l'ideale di A composto da tutte le funzioni regolari che si annullano in P . Allora, in base al punto (b) del Teorema 1.4.8, β è una biiezione di V sull'insieme dei punti chiusi di X . Si verifica facilmente che, in effetti, β è un omeomorfismo sulla sua immagine. Ora, per ogni sottoinsieme aperto $U \subseteq X$, definiremo un omomorfismo di anelli $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \beta_*(\mathcal{O}_V)(U) = \mathcal{O}_V(\beta^{-1}(U))$. Data una sezione $s \in \mathcal{O}_X(U)$ e dato un punto $P \in \beta^{-1}(U)$, definiamo $s(P)$ prendendo prima l'immagine di s nella spiga $\mathcal{O}_{X, \beta(P)}$, che è isomorfa all'anello locale $A_{\mathfrak{m}_P}$ e, poi passando all'anello quoziente $A_{\mathfrak{m}_P}/\mathfrak{m}_P$, che è isomorfo al campo k . In questo modo s determina una funzione da $\beta^{-1}(U)$ a valori in k . È facile verificare che questa è una funzione regolare e che questa mappa determina

un isomorfismo $\mathcal{O}_X(U) \cong \mathcal{O}_V(\beta^{-1}(U))$. Infine, poiché gli ideali primi di A sono in corrispondenza biunivoca con i sottoinsiemi chiusi e irriducibili di V , queste osservazioni provano che (X, \mathcal{O}_X) è isomorfo a $(t(V), \alpha_*(\mathcal{O}_V))$ e quindi il secondo è uno schema affine.

Per dare un morfismo da $(t(V), \alpha_*(\mathcal{O}_V))$ a $\text{Spec } k$, dobbiamo solo dare un omomorfismo di anelli $k \rightarrow \Gamma(t(V), \alpha_*\mathcal{O}_V) = \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$. Inviando $\lambda \in k$ nella funzione costante λ su V . Pertanto $t(V)$ diventa uno schema su k . Infine, se V e W sono due varietà, si può verificare che la mappa naturale

$$\text{Hom}_{\mathfrak{Var}(k)}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{Sch}(k)}(t(V), t(W))$$

è una biiezione. Ciò dimostra che il funtore $t : \mathfrak{Var}(k) \rightarrow \mathfrak{Sch}(k)$ è pienamente fedele. In particolare, ciò implica che $t(V)$ è isomorfo a $t(W)$ se e solo se V è isomorfa a W .

Per terminare osserviamo che, dalla costruzione, risulta evidente che $\alpha : V \rightarrow t(V)$ induce un omeomorfismo di V sull'insieme dei punti chiusi di $t(V)$, con la topologia indotta. \square

2.3.4 Sottoschemi

In questa sezione descriveremo la nozione di *sottoschema* di uno schema dato. Come vedremo il concetto di sottoschema è meno intuitivo di quanto possa sembrare a prima vista.

Iniziamo con alcune considerazioni generali che valgono anche per gli spazi anellati. Sia (X, \mathcal{O}_X) uno schema (o, più in generale, uno spazio anellato). Dato che gli schemi (rispettivamente, gli spazi anellati) formano una categoria, si potrebbe pensare di definire un sottoschema (risp., un sottospazio anellato) come un *sotto-oggetto* nella categoria appropriata.

Ricordiamo che, se X è un oggetto di una categoria \mathfrak{C} , un sotto-oggetto di X è essenzialmente un oggetto Y di \mathfrak{C} dotato di un monomorfismo $j : Y \rightarrow X$ detto l'iniezione canonica⁷.

Si può facilmente dimostrare che vale il seguente risultato:

Proposizione 2.3.18. *Sia $(f, f^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ un morfismo di schemi (o di spazi anellati). Se $f : Y \rightarrow X$ è una funzione iniettiva e continua tra spazi topologici e $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ è un morfismo suriettivo di fasci, allora $(f, f^\#)$ è un monomorfismo nella categoria degli schemi (risp., nella categoria degli spazi anellati).*

Purtroppo però la definizione categorica di sotto-oggetto non fornisce la buona nozione di sottoschema. Infatti, se $(Y, \mathcal{O}_Y) \hookrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ è un

⁷In realtà un sotto-oggetto di X è una classe di equivalenza di coppie (Y, j) come sopra, per una opportuna relazione di equivalenza.

sottoschema, noi vorremmo poter identificare Y con la sua immagine in X . Tuttavia se $(Y, \mathcal{O}_Y) \hookrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ è un monomorfismo di schemi, non è affatto detto che esso determini un omeomorfismo di Y con la sua immagine in X . In effetti ciò non vale neppure nella categoria degli spazi topologici, in cui monomorfismo significa funzione iniettiva e continua, come mostra il seguente esempio.

Esempio 2.3.19. Sia $X = \{x_1, x_2\}$ dotato della topologia in cui gli aperti sono i sottoinsiemi \emptyset , $\{x_2\}$ e X (x_1 è dunque un punto chiuso, mentre x_2 è un punto aperto la cui chiusura è tutto X). Sia $Y = \{y_1, y_2\}$ con la topologia discreta, e sia $f : Y \rightarrow X$ la funzione definita da $y_1 \mapsto x_1$ e $y_2 \mapsto x_2$. f è quindi una funzione biettiva e continua, ma la sua inversa non è continua. Infatti i due spazi X e Y non sono omeomorfi.

Un esempio analogo, nel caso degli schemi, è il seguente (vedi [EGA, Vol. 1, Rémarque 3.8.4]):

Esempio 2.3.20. Sia $Y = \text{Spec } A$, dove A è un anello di valutazione discreta di campo residuo k e di campo delle frazioni K . Sia $X = \text{Spec } B$, dove $B = K \times k$ (quindi $X = \text{Spec } K \sqcup \text{Spec } k$). Sia $f : X \rightarrow Y$ il morfismo di schemi che corrisponde all'omomorfismo di anelli $(\rho_1, \rho_2) : A \rightarrow K \times k$, dove $\rho_1 : A \rightarrow K$ e $\rho_2 : A \rightarrow k$ sono gli omomorfismi canonici. Allora $f : X \rightarrow Y$ è un monomorfismo biettivo, ma non è un omeomorfismo tra gli spazi topologici X e Y .

Veniamo ora alla definizione corretta di immersione di schemi e di sottoschema. Trattiamo separatamente il caso dei sottoschemi aperti e quello dei sottoschemi chiusi.

Sia dunque (X, \mathcal{O}_X) uno schema. Se $U \subseteq X$ è un sottoinsieme aperto, esso eredita da X una struttura naturale di schema, ottenuta prendendo come fascio strutturale la restrizione del fascio \mathcal{O}_X a U , $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|_U$.

Definizione 2.3.21. Lo schema (U, \mathcal{O}_U) costruito come sopra è detto un *sottoschema aperto* di (X, \mathcal{O}_X) .

Definizione 2.3.22. Una *immersione aperta* è un morfismo di schemi $f : Y \rightarrow X$ che induce un isomorfismo di Y con un sottoschema aperto di X .

Osservazione 2.3.23. Facciamo notare che un sottoinsieme aperto U di uno schema (X, \mathcal{O}_X) può benissimo avere, oltre alla struttura di sottoschema aperto data dal fascio di anelli $\mathcal{O}_X|_U$, altre strutture di schema, diverse da quella indotta da X .

Il caso dei sottoschemi chiusi è più delicato. Un'analogia con il caso classico delle sottovarietà di una varietà può servire da guida. Noi sappiamo che, nel caso di una varietà affine X , le sottovarietà chiuse di X o, più in

generale, i sottoinsiemi algebrici, corrispondono agli ideali dell'anello delle coordinate affini $A(X)$. Più in generale, se A è un anello qualsiasi e \mathfrak{a} è un ideale di A , la proiezione canonica $A \rightarrow A/\mathfrak{a}$ determina un morfismo di schemi $Y = \text{Spec}(A/\mathfrak{a}) \rightarrow X = \text{Spec } A$. Come abbiamo già visto nell'Esempio 2.3.8, questo morfismo permette di identificare in modo canonico lo schema Y con il sottoinsieme chiuso $V(\mathfrak{a})$ di X . In questo caso infatti la mappa $f : Y \rightarrow X$ induce un omeomorfismo tra Y e la sua immagine in X , mentre il morfismo di fasci $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ è suriettivo.

Questo esempio motiva la seguente definizione:

Definizione 2.3.24. Una *immersione chiusa* di schemi è un morfismo $(f, f^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ tale che f induca un omeomorfismo di Y con un sottoinsieme chiuso di X e tale che il morfismo di fasci $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ sia suriettivo.

Definizione 2.3.25. Un *sottoschema chiuso* di uno schema (X, \mathcal{O}_X) è una classe di equivalenza di immersioni chiuse del tipo $(f, f^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$, dove due immersioni chiuse $f : Y \rightarrow X$ e $f' : Y' \rightarrow X$ sono equivalenti se esiste un isomorfismo di schemi $i : Y' \xrightarrow{\sim} Y$ tale che $f' = f \circ i$.

Osservazione 2.3.26. Come abbiamo già visto, nel caso di uno schema affine $X = \text{Spec } A$, per ogni ideale \mathfrak{a} dell'anello A l'identificazione di $\text{Spec}(A/\mathfrak{a})$ con il sottoinsieme chiuso $V(\mathfrak{a})$ di X permette di definire una struttura di sottoschema chiuso sul sottoinsieme $V(\mathfrak{a})$. In particolare, ciò significa che un dato sottoinsieme chiuso Y di X possiede, in generale, molte strutture di sottoschema, corrispondenti a tutti gli ideali \mathfrak{a} per i quali si ha $V(\mathfrak{a}) = Y$. Fra tutte queste strutture di sottoschema ce n'è una "più bella" delle altre, la quale corrisponde al più grande tra tutti questi ideali \mathfrak{a} : essa è detta la *struttura di sottoschema chiuso ridotto indotta*. Si può poi dimostrare che ogni struttura di sottoschema chiuso su un dato sottoinsieme chiuso Y di uno schema affine X deriva dalla scelta di un ideale nel modo sopra descritto.

2.3.5 Alcune proprietà degli schemi

Definiamo ora alcune tra le più importanti proprietà degli schemi. Come vedremo, alcune di esse sono di carattere puramente topologico, altre invece coinvolgono anche il fascio strutturale.

Definizione 2.3.27. Uno schema è *connesso* se il suo spazio topologico è connesso. Uno schema è *irriducibile* se il suo spazio topologico è irriducibile.

Definizione 2.3.28. Uno schema (X, \mathcal{O}_X) è *ridotto* se, per ogni sottoinsieme aperto U , l'anello $\mathcal{O}_X(U)$ è privo di elementi nilpotenti.

Si può dimostrare (farlo per esercizio) che la definizione di schema ridotto equivale a richiedere che tutti gli anelli locali $\mathcal{O}_{X,P}$ siano privi di elementi nilpotenti, per ogni $P \in X$.

Definizione 2.3.29. Uno schema (X, \mathcal{O}_X) è *intero* se, per ogni sottoinsieme aperto U , l'anello $\mathcal{O}_X(U)$ è un dominio di integrità.

Una proprietà di carattere puramente algebrico può avere delle conseguenze anche di natura topologica, come ora dimostreremo. Premettiamo il seguente risultato, la cui dimostrazione è lasciata al lettore come esercizio.

Lemma 2.3.30. Sia X uno schema, sia $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ e sia $X_f = \{x \in X \mid f_x \notin \mathfrak{m}_x\}$, dove f_x indica l'immagine di f in $\mathcal{O}_{X,x}$ e \mathfrak{m}_x è l'ideale massimale dell'anello locale $\mathcal{O}_{X,x}$. Sia $U = \text{Spec } A$ un sottoinsieme aperto affine di X e sia $\bar{f} \in A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X|_U)$ la restrizione di f . Si dimostri che $U \cap X_f = D(\bar{f})$. Si concluda che X_f è un sottoinsieme aperto di X .

Proposizione 2.3.31. Uno schema è intero se e solo se è sia irriducibile che ridotto.

Dimostrazione. Ovviamente uno schema intero è anche ridotto. Se X non fosse irriducibile allora esisterebbero due sottoinsiemi aperti disgiunti non vuoti U_1 e U_2 . Ma in tal caso si avrebbe $\mathcal{O}_X(U_1 \cup U_2) = \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2)$, che non è un dominio di integrità. Quindi se X è intero, deve essere anche irriducibile.

Viceversa, supponiamo che X sia ridotto e irriducibile. Sia U un sottoinsieme aperto di X e supponiamo che esistano due elementi $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ con $fg = 0$. Sia $Y = \{x \in U \mid f_x \in \mathfrak{m}_x\}$ e sia $Z = \{x \in U \mid g_x \in \mathfrak{m}_x\}$. Dal Lemma 2.3.30 segue che Y e Z sono due sottoinsiemi chiusi, e si ha $Y \cup Z = U$. Ma X è irriducibile, quindi anche U è irriducibile e quindi Y , oppure Z , deve coincidere con U ; supponiamo che sia $Y = U$. Ma allora la restrizione di f ad ogni sottoinsieme aperto affine di U deve essere nilpotente⁸, quindi deve essere nulla. Da ciò segue che anche g deve essere nulla. Ciò dimostra che X è intero. \square

Definizione 2.3.32. Uno schema X è *localmente noetheriano* se può essere ricoperto con dei sottoinsiemi aperti affini $\text{Spec } A_i$, dove ogni A_i è un anello noetheriano. X è detto *noetheriano* se esso è localmente noetheriano e quasi-compatto. Equivalentemente, X è noetheriano se esso ammette un ricoprimento aperto finito costituito da sottoinsiemi aperti affini $\text{Spec } A_i$, dove ciascun A_i è un anello noetheriano.

⁸Ciò discende dal fatto che, in uno schema affine $\text{Spec } A$, l'aperto $D(f)$ è vuoto se e solo se $f \in A$ è nilpotente.

La proprietà di essere noetheriano è una proprietà di carattere locale, come illustra il seguente risultato:

Proposizione 2.3.33. *Uno schema X è localmente noetheriano se e solo se per ogni sottoinsieme aperto affine $U = \text{Spec } A$ di X , A è un anello noetheriano. In particolare, uno schema affine $X = \text{Spec } A$ è uno schema noetheriano se e solo se A è un anello noetheriano.*

Dimostrazione. Vedi [Ha, Proposition 3.2, p. 83]. □

Vediamo ora delle proprietà di finitezza per i morfismi di schemi.

Definizione 2.3.34. Un morfismo di schemi $f : X \rightarrow Y$ è *localmente di tipo finito* se esiste un ricoprimento di Y con aperti affini $V_i = \text{Spec } B_i$ tali che, per ogni i , $f^{-1}(V_i)$ possa essere ricoperto con aperti affini $U_{ij} = \text{Spec } A_{ij}$, dove ogni A_{ij} è una B_i -algebra finitamente generata.

Il morfismo $f : X \rightarrow Y$ è *di tipo finito* se, in aggiunta a quanto detto, ogni $f^{-1}(V_i)$ può essere ricoperto con un numero finito di tali aperti U_{ij} .

Definizione 2.3.35. Un morfismo di schemi $f : X \rightarrow Y$ è *finito* se esiste un ricoprimento di Y con aperti affini $V_i = \text{Spec } B_i$ tali che, per ogni i , $f^{-1}(V_i)$ sia uno schema affine, $f^{-1}(V_i) = \text{Spec } A_i$, dove A_i è una B_i -algebra *finita*, cioè finitamente generata in quanto B_i -modulo.

Esiste anche una proprietà di finitezza di tipo puramente insiemistico:

Definizione 2.3.36. Un morfismo di schemi $f : X \rightarrow Y$ è *quasi-finito* se, per ogni punto $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ è un insieme finito.

Alcune relazioni tra tutte queste proprietà sono chiarite dal seguente risultato:

Proposizione 2.3.37. *Sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo di schemi.*

- (a) *Se f è finito allora è anche quasi-finito.*
- (b) *Se f è finito allora è anche chiuso, cioè l'immagine di ogni sottoinsieme chiuso di X è chiuso in Y .*
- (c) *Un morfismo suriettivo, di tipo finito e quasi-finito non è necessariamente un morfismo finito.*

Osservazione 2.3.38. Se V è una varietà, definita su un campo algebricamente chiuso k , allora lo schema $t(V)$ associato a V è uno schema noetheriano, intero e di tipo finito su k (cioè su $\text{Spec } k$).

2.3.6 Prodotto fibrato di schemi

La nozione di prodotto fibrato di schemi è estremamente importante; essa fornisce, ad esempio, lo strumento ideale per definire e studiare le fibre di un morfismo di schemi.

Definizione 2.3.39. Siano S uno schema e X e Y due schemi su S , cioè due schemi con il dato di due morfismi $f : X \rightarrow S$ e $g : Y \rightarrow S$. Il *prodotto fibrato* di X e Y su S è uno schema, indicato con $X \times_S Y$, con il dato di due morfismi $p_X : X \times_S Y \rightarrow X$ e $p_Y : X \times_S Y \rightarrow Y$ che rendono commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & X \times_S Y & \\ p_X \swarrow & & \searrow p_Y \\ X & & Y \\ f \searrow & & \swarrow g \\ & S & \end{array}$$

Deve valere inoltre la seguente proprietà universale: per ogni schema Z su S , con il dato di due morfismi $\alpha : Z \rightarrow X$ e $\beta : Z \rightarrow Y$ tali che $f \circ \alpha = g \circ \beta$, esiste un unico morfismo $\gamma : Z \rightarrow X \times_S Y$ che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} & & X \times_S Y & & \\ & p_X \swarrow & \uparrow \gamma & \searrow p_Y & \\ X & \xleftarrow{\alpha} & Z & \xrightarrow{\beta} & Y \\ & f \searrow & \downarrow & \swarrow g & \\ & & S & & \end{array}$$

Osservazione 2.3.40. Questa è la solita definizione categorica di prodotto fibrato. Naturalmente non è detto che in una categoria i prodotti fibrati esistano, ma se esistono la stessa definizione ne garantisce l'unicità a meno di isomorfismo (anch'esso unicamente determinato).

Si tratta ora di mostrare che nella categoria degli schemi i prodotti fibrati esistono.

Teorema 2.3.41. Sia S uno schema e X e Y due schemi su S . Indichiamo con $p : X \rightarrow S$ e con $q : Y \rightarrow S$ i morfismi strutturali. Allora il prodotto fibrato $X \times_S Y$ esiste.

Dimostrazione. Per la dimostrazione dettagliata si veda [Ha, Theorem 3.3, p. 87]. Descriveremo ora, a grandi linee, l'idea della dimostrazione.

Iniziamo costruendo il prodotto fibrato nel caso in cui tutti gli schemi sono affini. Sia quindi $S = \operatorname{Spec} R$, $X = \operatorname{Spec} A$ e $Y = \operatorname{Spec} B$. Allora il diagramma di morfismi di schemi

$$\begin{array}{ccc} X & & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & \end{array}$$

corrisponde al diagramma di omomorfismi di anelli

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ & \swarrow & \searrow \\ & R & \end{array}$$

Dall'equivalenza di categorie tra schemi affini e anelli, si deduce che il prodotto fibrato $X \times_S Y$ è lo spettro dell'anello $A \otimes_R B$.

Nel caso generale dovremo considerare un ricoprimento di S costituito da schemi affini $S_i = \operatorname{Spec} R_i$. Poniamo $X_i = p^{-1}(S_i)$ e $Y_i = q^{-1}(S_i)$. Ognuno degli schemi X_i sarà ricoperto da degli schemi affini $U_{ij} = \operatorname{Spec} A_{ij}$ e, analogamente, ogni schema Y_i sarà ricoperto da degli schemi affini $V_{ih} = \operatorname{Spec} B_{ih}$. Per ogni i, j, h potremo quindi considerare il prodotto fibrato di schemi affini

$$U_{ij} \times_{S_i} V_{ih} = \operatorname{Spec}(A_{ij} \otimes_{R_i} B_{ih}).$$

Ora si tratta solo di far vedere che tutti questi prodotti fibrati locali $U_{ij} \times_{S_i} V_{ih}$ si possono incollare tra loro in modo da ottenere uno schema $X \times_S Y$ di cui essi costituiscono un ricoprimento aperto affine (i dettagli non sono eccessivamente difficili, ma effettuare tutte le verifiche necessarie risulta abbastanza lungo). \square

2.3.7 Fibre di un morfismo di schemi

La nozione di prodotto fibrato di schemi permette di definire, in modo adeguato, le fibre di un morfismo di schemi.

Sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo di schemi, e sia $y \in Y$ un punto di Y . La classica definizione di fibra

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

non è adeguata alla teoria degli schemi, dato che in questo modo si ottiene solo un sottoinsieme di X e non un sottoschema. La definizione corretta può essere data come segue. Dato $y \in Y$ sia $\kappa(y)$ il suo corpo residuo.

Allora dare $y \in Y$ equivale a dare un morfismo di schemi $\text{Spec } \kappa(y) \rightarrow Y$. Si ottiene così il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ & \downarrow f & \\ \text{Spec } \kappa(y) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Definizione 2.3.42. Con le notazioni precedenti, la fibra di f in y è lo schema

$$X_y = X \times_Y \text{Spec } \kappa(y).$$

In questo modo la fibra di f in y risulta essere, per definizione, uno schema. Si può poi dimostrare che lo spazio topologico sottostante alla fibra X_y è omeomorfo al sottoinsieme $f^{-1}(y)$ di X .

Osservazione 2.3.43. La nozione di fibra di un morfismo permette di pensare a un morfismo di schemi $f : X \rightarrow Y$ come a una famiglia di schemi, le fibre $X_y = f^{-1}(y)$, parametrizzate da Y .

2.3.8 Morfismi separati

Introduciamo ora la nozione di schema separato o, più in generale, di morfismo separato di schemi. La definizione topologica classica di separatezza non è adeguata al caso degli schemi: la topologia di uno schema non è praticamente mai una topologia di Hausdorff! C'è tuttavia una definizione alternativa di separatezza che può essere adattata al caso degli schemi. Vale infatti il seguente risultato:

Proposizione 2.3.44. *Uno spazio topologico X è di Hausdorff se e solo se l'immagine del morfismo diagonale*

$$\Delta : X \rightarrow X \times X, \quad x \mapsto (x, x),$$

è un sottoinsieme chiuso di $X \times X$.

Dimostrazione. La dimostrazione è assolutamente standard (basta ricordare le definizioni di insieme chiuso, di topologia separata e di topologia prodotto) ed è lasciata per esercizio al lettore. \square

Se X è uno schema o, più in generale, se $f : X \rightarrow Y$ è un morfismo di schemi (cioè se X è uno schema *su* Y), esiste un unico morfismo diagonale $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$: esso è l'unico morfismo da X a $X \times_Y X$ che composto con le due proiezioni dal prodotto $X \times_Y X$ a ciascuno dei suoi fattori è

l'identità (l'esistenza e l'unicità del morfismo diagonale Δ derivano dalla proprietà universale del prodotto fibrato).

Risulta quindi ragionevole pensare di definire una nozione di separatezza per i morfismi di schemi ricorrendo al morfismo diagonale, in modo analogo al risultato enunciato nella proposizione precedente. Abbiamo però due possibili candidate al ruolo di “buona definizione” di morfismo separato di schemi:

- (1) Un morfismo di schemi $f : X \rightarrow Y$ è separato se $\Delta(X)$ è un *sottoinsieme* chiuso di $X \times_Y X$;
- (2) Un morfismo di schemi $f : X \rightarrow Y$ è separato se $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$ è una immersione chiusa.

Naturalmente (2) \Rightarrow (1), ma si può dimostrare (vedi Corollario 2.3.50) che anche (1) \Rightarrow (2). Le due possibili definizioni sono quindi equivalenti. Dopo aver chiarito questo punto possiamo finalmente dare la seguente definizione:

Definizione 2.3.45. Un morfismo di schemi $f : X \rightarrow Y$ è *separato* se il morfismo diagonale $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$ è una immersione chiusa. In tal caso si dice anche che X è separato su Y . Uno schema X è detto *separato* se esso è separato su $\text{Spec } \mathbb{Z}$ (a tal proposito ricordiamo che $\text{Spec } \mathbb{Z}$ è un oggetto finale nella categoria degli schemi, cioè che ogni schema X ammette un unico morfismo $X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$).

Osservazione 2.3.46. Se $k = \mathbb{C}$ e se X è uno schema di tipo finito su k , è possibile considerare lo spazio analitico complesso X_{an} corrispondente a X . Mentre X , in quanto schema, è dotato della topologia di Zariski, lo spazio analitico X_{an} è dotato della classica topologia complessa. In questo caso si può dimostrare che X è uno schema separato su k se e solo se lo spazio topologico X_{an} è di Hausdorff. Ciò significa che, nel caso classico, questa nuova definizione di separatezza coincide con la classica nozione topologica di spazio topologico separato.

Esempio 2.3.47. Un esempio classico di schema non separato è il seguente. Sia k un corpo e X la retta affine su k con l'origine sdoppiata (X non è uno schema affine). Lo schema X non è separato su k . Infatti il prodotto $X \times_k X$ è il piano affine con gli assi sdoppiati e con quattro origini. L'immagine del morfismo diagonale Δ è la solita diagonale, con due delle quattro origini di $X \times_k X$. Ma $\Delta(X)$ non è un sottoinsieme chiuso di $X \times_k X$, dato che tutte le quattro origini appartengono alla chiusura di $\Delta(X)$. Per una dimostrazione di quanto asserito si veda [S].

Esempio 2.3.48. Sia V una varietà affine su un corpo algebricamente chiuso k e sia $t(V)$ lo schema associato. Si può dimostrare che $t(V)$ è uno schema separato su k .

Dimostriamo ora il seguente risultato:

Proposizione 2.3.49. *Se $f : X \rightarrow Y$ è un morfismo di schemi affini, allora f è separato.*

Dimostrazione. Sia $X = \operatorname{Spec} A$ e $Y = \operatorname{Spec} B$. Il morfismo $f : X \rightarrow Y$ corrisponde a un omomorfismo di anelli $B \rightarrow A$ che rende A una B -algebra. Si ha quindi $X \times_Y X = \operatorname{Spec}(A \otimes_B A)$. Il morfismo diagonale $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$ corrisponde all'omomorfismo $A \otimes_B A \rightarrow A$ definito da $a \otimes a' \mapsto aa'$. Dato che questo è un omomorfismo suriettivo di anelli, si conclude che Δ è una immersione chiusa. \square

Corollario 2.3.50. *Un morfismo di schemi $f : X \rightarrow Y$ è separato se e solo se l'immagine del morfismo diagonale è un sottoinsieme chiuso di $X \times_Y X$.*

Dimostrazione. Un'implicazione è ovvia: se $f : X \rightarrow Y$ è separato, $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$ è una immersione chiusa, quindi $\Delta(X)$ è un sottoinsieme chiuso di $X \times_Y X$.

Viceversa, supponiamo che $\Delta(X)$ sia un sottoinsieme chiuso di $X \times_Y X$. Dobbiamo dimostrare che $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$ è una immersione chiusa, cioè che Δ induce un omeomorfismo tra X e $\Delta(X)$ e che il morfismo di fasci $\mathcal{O}_{X \times_Y X} \rightarrow \Delta_* \mathcal{O}_X$ è suriettivo.

Sia $p_1 : X \times_Y X \rightarrow X$ la prima proiezione. Dato che $p_1 \circ \Delta = \operatorname{id}_X$, si conclude che Δ definisce un omeomorfismo tra X e $\Delta(X)$. Rimane solo da dimostrare la suriettività del morfismo di fasci $\mathcal{O}_{X \times_Y X} \rightarrow \Delta_* \mathcal{O}_X$, ma questa è una questione locale. Per ogni punto $P \in X$ consideriamo un intorno aperto affine U di P in X , sufficientemente piccolo da garantire che $f(U)$ sia contenuto in un aperto affine V di Y . Allora $U \times_V U$ è un intorno aperto affine di $\Delta(P)$ e, in base alla proposizione precedente, $\Delta : U \rightarrow U \times_V U$ è una immersione chiusa. Da ciò segue che il morfismo di fasci $\mathcal{O}_{X \times_Y X} \rightarrow \Delta_* \mathcal{O}_X$ è suriettivo in un intorno di P , il che conclude la dimostrazione. \square

In generale, verificare se un morfismo di schemi è separato usando la definizione può non essere facile. Esiste un importante criterio che molto spesso può essere effettivamente usato per dimostrare che un dato morfismo di schemi è separato. L'idea è, grosso modo, la seguente: uno schema X , per essere separato, non dovrebbe contenere alcun sottoschema del tipo di una curva con un punto sdoppiato (si ricordi l'esempio della retta affine con l'origine sdoppiata che risultava essere uno schema non separato). Un modo più formale di dire la stessa cosa è richiedere che, se C è una curva

e P un punto di C , allora dato un qualunque morfismo da $C \setminus P$ a X , esso deve ammettere al più una sola estensione a un morfismo da C a X . In pratica però si scopre che questa idea grossolana deve essere leggermente modificata. Innanzi tutto il problema in questione è locale, quindi possiamo sostituire l'intera curva C con il suo germe in P , cioè con il suo anello locale in P . Si noti che questo anello locale, essendo l'anello locale di una curva in un suo punto, è un anello di valutazione discreta. Purtroppo però considerare solo degli anelli di valutazione discreta non è ancora sufficiente. Dato che lavoriamo con schemi del tutto generali, si trova che è necessario considerare degli anelli di valutazione arbitrari. Infine, bisogna anche rendere il nostro criterio relativo, su uno schema di base Y . Il risultato che si ottiene, enunciato nel prossimo teorema, è noto come il *criterio valutativo di separatezza*:

Teorema 2.3.51. *Sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo di schemi, e supponiamo che X sia uno schema noetheriano. Allora f è separato se e solo se è verificata la seguente condizione. Per ogni campo K e per ogni anello di valutazione R con campo quoziente K , sia $T = \operatorname{Spec} R$ e $U = \operatorname{Spec} K$, e sia $i : U \rightarrow T$ il morfismo indotto dall'inclusione $R \subseteq K$. Dato un morfismo da T a Y e dato un morfismo da U a X in modo tale che il seguente diagramma sia commutativo*

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \downarrow f \\ T & \longrightarrow & Y \end{array}$$

esiste al più un solo morfismo $\gamma : T \rightarrow X$ che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow \gamma & \downarrow f \\ T & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda [Ha, Theorem 4.3, p. 97]. \square

Utilizzando questo criterio si può dimostrare tutta una serie di proprietà dei morfismi separati:

Corollario 2.3.52. *Supponiamo, per semplicità, che tutti gli schemi siano noetheriani. Allora:*

- (a) *Immersioni aperte e immersioni chiuse sono separate.*
- (b) *La composizione di due morfismi separati è un morfismo separato.*
- (c) *I morfismi separati sono stabili per cambiamento di base.*

- (d) Se $f : X \rightarrow Y$ e $f' : X' \rightarrow Y'$ sono morfismi separati di schemi su uno stesso schema di base S , allora il prodotto fibrato

$$f \times_S f' : X \times_S X' \rightarrow Y \times_S Y'$$

è separato.

- (e) Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ sono due morfismi di schemi e se $g \circ f$ è separato, allora anche f è separato.

- (f) Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ è separato se e solo se Y può essere ricoperto da sottoinsiemi aperti V_i tali che i morfismi $f^{-1}(V_i) \rightarrow V_i$ siano separati, per ogni i .

2.3.9 Morfismi propri

Introdurremo ora la nozione di morfismo proprio di schemi (e di schema proprio) che risulta essere un analogo, nel caso degli schemi, della nozione di compattezza per le varietà differenziabili o analitiche. A tal proposito è quasi superfluo osservare che la classica definizione topologica di compattezza, formulata nell'ambito degli schemi, non fornisce la “buona definizione” (ciò è dovuto alle proprietà peculiari della topologia di Zariski).

Quello che sicuramente vorremmo, da una definizione adeguata di “compattezza” nel caso degli schemi, è che uno spazio affine \mathbb{A}_k^n o, più in generale, una varietà affine $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$, non sia “compatta,” mentre uno spazio proiettivo \mathbb{P}_k^n o, più in generale, una varietà proiettiva $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$, lo sia.

Seguendo Grothendieck, la “buona definizione” di compattezza (chiamata *proprietà*) nel caso di uno schema o, più in generale, nel caso di un morfismo di schemi, può essere formulata come segue:

Definizione 2.3.53. Un morfismo di schemi $f : X \rightarrow Y$ è *proprio* se è separato, di tipo finito e universalmente chiuso.⁹

Uno schema X sul campo k è *proprio* se il morfismo naturale $X \rightarrow \text{Spec } k$ è proprio.

Bisogna ammettere che, a prima vista, questa definizione può sembrare alquanto strana, se non del tutto incomprensibile! Tuttavia, nel caso degli schemi definiti sul campo complesso $k = \mathbb{C}$, questa definizione di proprietà coincide proprio con la classica nozione di compattezza. Si può infatti dimostrare che, se (X, \mathcal{O}_X) è uno schema di tipo finito sul campo complesso

⁹Un morfismo di schemi $f : X \rightarrow Y$ è detto *chiuso* se l'immagine di ogni sottoinsieme chiuso di X è un chiuso di Y ; f è detto *universalmente chiuso* se è chiuso e se per ogni morfismo $Y' \rightarrow Y$ il morfismo $f' : X' = X \times_Y Y' \rightarrow Y'$, ottenuto da f per cambiamento di base, è chiuso.

\mathbb{C} e se indichiamo con $(X_{\text{an}}, \mathcal{O}_{X_{\text{an}}})$ lo spazio analitico complesso ad esso associato (dotato della classica topologia complessa), allora:

- (a) X è proprio su \mathbb{C} se e solo se X_{an} è uno spazio topologico compatto;
- (b) più in generale, se (Y, \mathcal{O}_Y) è un altro schema di tipo finito su \mathbb{C} e se indichiamo con $(Y_{\text{an}}, \mathcal{O}_{Y_{\text{an}}})$ lo spazio analitico complesso associato, allora un morfismo di schemi $f : X \rightarrow Y$ è proprio se e solo se il corrispondente morfismo $f_{\text{an}} : X_{\text{an}} \rightarrow Y_{\text{an}}$ di spazi analitici complessi è proprio, nel senso che l'antiimmagine di ogni sottoinsieme compatto di Y_{an} è un sottoinsieme compatto di X_{an} .

A titolo di esempio possiamo ora dimostrare che la retta affine \mathbb{A}_k^1 non è propria su k . Sia dunque k un campo e sia $X = \mathbb{A}_k^1$. Certamente X è separato e di tipo finito su k , inoltre il morfismo $f : X \rightarrow \text{Spec } k$ è chiuso. Dobbiamo allora dimostrare che f non è universalmente chiuso. Consideriamo il cambiamento di base $X \rightarrow \text{Spec } k$. Si ottiene così il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} X \times_k X & \longrightarrow & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X & \longrightarrow & \text{Spec } k \end{array}$$

Si ha $X \times_k X \cong \mathbb{A}_k^2$ e il morfismo $f' : \mathbb{A}_k^2 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ è la proiezione, espressa in coordinate da $f' : (x, y) \mapsto x$. Questo morfismo non è chiuso, infatti il sottoinsieme chiuso di \mathbb{A}_k^2 di equazione $xy = 1$ (iperbole) ha come immagine la retta affine privata dell'origine, che non è un sottoinsieme chiuso di \mathbb{A}_k^1 . Pertanto $f : X \rightarrow \text{Spec } k$ non è universalmente chiuso, e quindi X non è proprio su k . Osserviamo infine che, con un ragionamento analogo, si può dimostrare che lo spazio affine \mathbb{A}_k^n non è proprio su k , per ogni $n \geq 1$.

Osservazione 2.3.54. Il ragionamento utilizzato per dimostrare che la retta affine \mathbb{A}_k^1 non è uno schema proprio su k sembra suggerire che ciò che manca per dimostrare che il morfismo $f : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \text{Spec } k$ è universalmente chiuso è il “punto all'infinito” dell'iperbole di equazione $xy = 1$, il quale verrebbe proiettato nell'origine di \mathbb{A}_k^1 rendendo chiusa l'immagine dell'iperbole. Si può così sperare che, considerando la retta proiettiva \mathbb{P}_k^1 , si ottenga uno schema proprio su k . In effetti, questo è proprio quello che accade. Si può dimostrare che lo spazio proiettivo \mathbb{P}_k^n e, più in generale, ogni varietà proiettiva $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$, è uno schema proprio su k .

Come nel caso dei morfismi separati, anche per i morfismi propri esiste un criterio estremamente utile:

Teorema 2.3.55. (*Criterio valutativo di proprietà*). *Sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo di tipo finito, con X schema noetheriano. Allora f è proprio se*

e solo se per ogni anello di valutazione R con campo quoziente K , posto $T = \operatorname{Spec} R$, $U = \operatorname{Spec} K$, $i : U \rightarrow T$ il morfismo indotto dall'inclusione $R \subseteq K$, e per ogni coppia di morfismi $U \rightarrow X$ e $T \rightarrow Y$ che formano un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \downarrow f \\ T & \longrightarrow & Y \end{array}$$

esiste un unico morfismo $\gamma : T \rightarrow X$ che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow \gamma & \downarrow f \\ T & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda [Ha, Theorem 4.7, p. 101]. \square

Utilizzando questo criterio si dimostrano le seguenti affermazioni:

Corollario 2.3.56. *Supponiamo, per semplicità, che tutti gli schemi siano noetheriani. Allora:*

- (a) *Un'immersione chiusa è un morfismo proprio.*
- (b) *La composizione di due morfismi propri è un morfismo proprio.*
- (c) *I morfismi propri sono stabili per cambiamento di base.*
- (d) *Se $f : X \rightarrow Y$ e $f' : X' \rightarrow Y'$ sono morfismi propri di schemi su uno stesso schema di base S , allora il prodotto fibrato*

$$f \times_S f' : X \times_S X' \rightarrow Y \times_S Y'$$

è proprio.

- (e) *Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ sono due morfismi di schemi e se $g \circ f$ è proprio e g è separato, allora anche f è proprio.*
- (f) *Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ è proprio se e solo se Y può essere ricoperto da sottoinsiemi aperti V_i tali che i morfismi $f^{-1}(V_i) \rightarrow V_i$ siano propri, per ogni i .*

2.3.10 Morfismi proiettivi

In questa sezione introduciamo la nozione di morfismo proiettivo come naturale generalizzazione della nozione di varietà proiettiva.

Sia A un anello. Lo spazio proiettivo n -dimensionale su A è definito ponendo $\mathbb{P}_A^n = \text{Proj } A[x_0, \dots, x_n]$. Se $A \rightarrow B$ è un omomorfismo di anelli, si ottiene il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_A^n \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } B & \longrightarrow & \mathbb{P}_A^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } B & \longrightarrow & \text{Spec } A \end{array}$$

ed è facile dimostrare che $\mathbb{P}_A^n \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } B \cong \mathbb{P}_B^n$. In particolare, per ogni anello A , si ha $\mathbb{P}_A^n \cong \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} \text{Spec } A$.

Quanto abbiamo appena visto fornisce l'idea per la seguente definizione:

Definizione 2.3.57. Sia Y uno schema qualsiasi. Lo spazio proiettivo n -dimensionale su Y è definito ponendo $\mathbb{P}_Y^n = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} Y$.

Possiamo ora definire i morfismi proiettivi come segue:

Definizione 2.3.58. Un morfismo di schemi $f : X \rightarrow Y$ è *proiettivo* se esso può essere fattorizzato in una immersione chiusa $i : X \rightarrow \mathbb{P}_Y^n$, per qualche n , seguita dalla proiezione $p : \mathbb{P}_Y^n \rightarrow Y$.

Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ è *quasi-proiettivo* se esso può essere fattorizzato in una immersione aperta $j : X \rightarrow X'$ seguita da un morfismo proiettivo $g : X' \rightarrow Y$.

Osservazione 2.3.59. Un morfismo proiettivo $f : X \rightarrow Y$ può quindi essere pensato come una famiglia di sottoschemi chiusi di uno spazio proiettivo \mathbb{P}^n , per qualche n , parametrizzata dallo schema Y ; questa famiglia è ottenuta prendendo, per ogni $y \in Y$, la fibra (in senso schematico) $f^{-1}(y)$.

A proposito dei morfismi proiettivi, si può dimostrare il seguente risultato, che può essere interpretato come una generalizzazione del classico risultato secondo cui una varietà proiettiva complessa è compatta.

Teorema 2.3.60. *Un morfismo proiettivo di schemi noetheriani è proprio (un morfismo quasi-proiettivo di schemi noetheriani è invece solo di tipo finito e separato).*

Per concludere, citiamo il seguente risultato:

Teorema 2.3.61. *Sia k un campo algebricamente chiuso. L'immagine del funtore $t : \mathfrak{Var}(k) \rightarrow \mathfrak{Sch}(k)$ coincide con l'insieme degli schemi su k quasi-proiettivi e integri. L'immagine dell'insieme delle varietà proiettive è l'insieme degli schemi proiettivi e integri. In particolare, per ogni varietà V , lo schema $t(V)$ è integro, separato e di tipo finito su k .*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda [Ha, Prop. 4.10, p. 104]. \square

In base a questo risultato, si definisce la nozione di varietà astratta come segue:

Definizione 2.3.62. Una *varietà astratta* è uno schema integro, separato, di tipo finito su un campo algebricamente chiuso k . Se esso è anche proprio su k , si dice che è una *varietà completa*.

A proposito delle varietà astratte, si conoscono i seguenti fatti (vedi [Ha, Remark 4.10.2, p. 105]):

- (a) Ogni curva (i.e., varietà astratta di dimensione 1) completa è proiettiva.
- (b) Ogni superficie (i.e., varietà astratta di dimensione 2) completa e non-singolare è proiettiva.
- (c) Esistono delle superficie complete singolari che non sono proiettive.
- (d) Esistono delle varietà astratte di dimensione 3, complete e non-singolari, che non sono proiettive.
- (e) Ogni varietà astratta può essere immersa, come sottoinsieme aperto e denso, in una varietà astratta completa.

Bibliografia

- [AM] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald, “Introduzione all’algebra commutativa,” Feltrinelli Editore, Milano, 1981.
- [B] N. Bourbaki, “Algèbre Commutative,” Hermann, Paris, 1961–1965.
- [E] D. Eisenbud, “Commutative Algebra (with a view toward algebraic geometry),” Springer-Verlag, 1995.
- [GH] P. Griffiths, J. Harris, “Principles of Algebraic Geometry,” Wiley and Sons, 1978.
- [EGA] A. Grothendieck, “Eléments de Géométrie Algébrique I–IV,” Publ. Math. IHES, 1960–1967.
- [H] J. Harris, “Algebraic Geometry, a first course,” Springer-Verlag, 1992.
- [Ha] R. Hartshorne, “Algebraic Geometry,” Springer-Verlag, 1977.
- [M] H. Matsumura, “Commutative Algebra,” W.A. Benjamin Co., New York, 1970.
- [S] I. Shafarevich, “Basic Algebraic Geometry,” 2nd edition, Springer-Verlag, 1994.