APPUNTI

DEL CORSO DI

ANALISI MATEMATICA

PER IL DIPLOMA UNIVERSITARIO

PARTE PRIMA

INDICE

Capitolo Primo

INSIEMI, APPLICAZIONI, RELAZIONI

§ 1. GLI INSIEMI

Alla base di una qualunque trattazione matematica c'è la nozione di *insieme*.

Noi assumeremo la nozione di insieme come *primitiva*, come si fa nella geometria elementare con le nozioni di punto, retta, piano, etc. Non daremo cioè una "definizione" di insieme, dato che, per farlo, avremmo bisogno di altri concetti che, a loro volta, andrebbero definiti, e così via.

Diremo dunque, alla buona, che un insieme è una *collezione* di oggetti detti gli *elementi* dell'insieme.

Per esprimere il fatto che un oggetto x è un elemento dell'insieme E, diremo che *x appartiene ad E*. In tal caso scriveremo

$$x \in E.$$

Naturalmente la scrittura $x \notin E$ sta ad indicare che l'oggetto x *non appartiene* all'insieme E, ossia che non è un suo elemento.

Se, per esempio, prendiamo come E l'insieme dei numeri naturali pari, possiamo dire che 0, 4, 120 appartengono ad E, mentre non gli appartengono 1, -6, π, la città di Trieste, la sedia su cui siamo seduti.

Assegnare un insieme significa assegnare i suoi elementi. Ne viene che per definire correttamente un insieme bisogna essere sempre in grado, almeno teoricamente, di decidere se un dato oggetto è o non è elemento del nostro insieme. Diciamo "teoricamente" perché, in pratica, la cosa può risultare difficile, se non addirittura impossibile.

Sia, per esempio, E l'insieme dei numeri naturali positivi primi, cioè maggiori di 1 e divisibili solo per 1 e per se stessi. Le cose sono tranquille, dato che per decidere se un elemento x appartiene ad E basta vedere se, in primo luogo è un numero naturale positivo, in secondo luogo se è un numero primo. Ora però non è così banale decidere se è o non è primo il numero naturale $12343^{847} + 98767^{51276} - 1$.

Possiamo dunque parlare dell'insieme dei numeri reali positivi *piccoli* solo dopo che abbiamo dato un criterio per decidere se un numero reale è o non è piccolo.

Un altro punto al quale bisogna prestare attenzione è quello di non prendere insiemi "troppo grandi" perché si rischia di creare delle contraddizioni (*antinomie*). Non si può, per esempio, parlare dell'insieme di *tutti gli insiemi* o cose simili. Dati i nostri scopi, non c'è però da preoccuparsi molto di queste cose difficili. Per stare tranquilli, ci basterà sempre pensare che gli insiemi e gli elementi di cui parliamo stanno tutti in un *insieme universo U* che potrà anche variare di volta in volta e che noi sottintenderemo sempre assegnato.

Di solito, ma non sempre, indicheremo gli insiemi con lettere maiuscole $A, B, C, X, \dots$ e gli elementi con lettere minuscole $a, b, c, x, \dots$

Un primo modo per descrivere un insieme è quello di *elencare tutti* i suoi elementi raccogliendoli fra parentesi graffe. Per esempio: $E = \{a, b, c, d\}$. Ciò può essere fatto anche se l'insieme è infinito, quando la scrittura ottenuta è di chiara interpretazione. Per esempio, l'insieme dei numeri naturali pari può essere indicato con la scrittura $E = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$, o anche $E = \{2n: n = 0, 1, 2, \dots\}$, da leggersi "$E$ uguale all'insieme dei numeri del tipo $2n$, con $n = 0, 1, 2, \dots$".

A priori, non è necessario che gli elementi di un insieme abbiano una qualche proprietà in comune. Si può per esempio considerare l'insieme $E = \{3, \text{Roma}, \text{colore giallo}\}$. Tuttavia è chiaro che insiemi così strampalati saranno per noi di ben scarso interesse. Di solito ci interesseranno insiemi formati dagli elementi che godono di una data proprietà. Per definire l'insieme E formato dagli elementi x che godono della proprietà P, scriveremo

$$E = \{x\colon x \text{ ha la proprietà } P),$$

o anche

$$E = \{x\colon P(x)),$$

da leggersi "E uguale all'insieme degli x tali che $P(x)$".

Per esempio, l'insieme dei numeri naturali primi si potrà indicare scrivendo

$$E = \{x\colon x \text{ è un numero naturale primo}).$$

E ancora: dato un piano cartesiano, l'insieme dei punti $P(x,y)$ della circonferenza di centro l'origine O e raggio 2, potrà essere indicato con una scrittura del tipo

$$E = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 = 4\}.$$

Consideriamo ora l'insieme $E = \{x\colon x \neq x\}$. Questo insieme è chiaramente privo di elementi. Esso prende il nome di *insieme vuoto* e si indica con il simbolo $\varnothing$.

Sottolineiamo ancora il fatto che due insiemi A e B sono da riguardarsi come *uguali* ($A = B$) se e solo se sono *lo stesso insieme*, ossia se e solo se contengono gli stessi elementi. Dunque, per controllare l'uguaglianza dei due insiemi A e B, bisogna verificare che *ogni* elemento di A appartiene a B e che *ogni* elemento di B appartiene ad A.

Siano, per esempio, A l'insieme dei triangoli rettangoli e B l'insieme dei triangoli per i quali sussiste il Teorema di Pitagora. Risulta $A = B$. Infatti, come è ben noto, in ogni triangolo rettangolo vale il Teorema di Pitagora e, come è purtroppo molto meno noto, ogni triangolo in cui sussiste il Teorema di Pitagora è rettangolo.

Dati due insiemi A e B, se accade che ogni elemento di A è anche elemento di B, diremo che A è un *sottoinsieme* di B e, simmetricamente, che B è un *soprainsieme* di A. Diremo anche che A è *contenuto* in B e che B *contiene* A. Indicheremo questo fatto con una delle notazioni

$$A \subset B, \quad B \supset A.$$

Se A non è contenuto in B (in simboli: $A \not\subset B$), significa che *esiste almeno un* elemento x che appartiene ad A ma che non appartiene a B.

Per esempio, l'insieme A dei numeri naturali primi non è contenuto nell'insieme B dei numeri naturali dispari, dato che è $2 \in A$, ma $2 \notin B$.

Ovviamente, ogni insieme è contenuto in se stesso ($A \subset A$). Se è $A \subset B$, ma è $A \neq B$, cioè se ogni elemento di A appartiene a B, ma c'è almeno un elemento di B che non sta in A, si dice che A è un *sottoinsieme proprio* di B. Ciò si esprime con la notazione $A \subsetneqq B$.

Per definizione, si ha $A = B$ se e solo se risulta $A \subset B$ e $B \subset A$.

È poi di immediata verifica che da $A \subset B$ e $B \subset C$ segue $A \subset C$.

Osserviamo ancora che, qualunque sia l'insieme A, si ha $\varnothing \subset A$. Infatti, se così non fosse, dovrebbe esistere un elemento x tale che $x \in \varnothing$ e $x \notin A$, ma la prima delle due condizioni è chiaramente impossibile.

N.B. Non si confondano i simboli $\subset$ e $\in$. Il primo dei due esprime una relazione intercorrente tra due insiemi, mentre il secondo lega fra loro oggetti di natura diversa: elementi ed insiemi.

CONVENZIONE. Scriveremo qualche volta … := … per dire che ciò che sta a sinistra dell'uguale è definito da ciò che sta a destra.

Dato un insieme E, ha senso considerare l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi. Si pone cioè

$$\mathcal{P}(E) := \{A\colon A \subset E\}.$$

È dunque $A \in \mathcal{P}(E)$ se e solo se è $A \subset E$.
Se, per esempio, è $E = \{1, 2, 3\}$, si ha

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}.$$

§ 2. OPERAZIONI FRA INSIEMI

Come si è detto in precedenza, penseremo sempre gli insiemi di cui si parla come sottoinsiemi di un insieme universo U.

DEFINIZIONE. Dati due insiemi A e B, si chiama loro *intersezione* l'insieme formato da tutti e soli gli elementi che appartengono sia ad A che a B. Questo insieme si indica con il simbolo $A \cap B$. È dunque

$$A \cap B := \{x: (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Ricordiamo che il simbolo $\wedge$ posto tra due affermazioni sta ad indicare che esse devono essere verificate entrambi; la frase può dunque essere letta "x tali che $x \in A$ e $x \in B$".
A volte semplificheremo la notazione scrivendo semplicemente $\{x: x \in A, x \in B\}$.

ESEMPI. 1) Siano r ed s due rette di un piano pensate come insiemi di punti. La loro intersezione è l'insieme dei punti comuni. L'insieme $r \cap s$ consta dunque di un solo punto se le due rette sono incidenti, è l'insieme vuoto se r ed s sono parallele e distinte, coincide, in fine, con r se è $r = s$.

2) L'insieme $E = \{x: x^2 - 4 < 0\}$ è dato dall'intersezione dei due insiemi $A = \{x: x > -2\}$ e $B = \{x: x < 2\}$.

Se è $A \cap B = \emptyset$, i due insiemi A e B sono detti fra loro *disgiunti*.
Si constata facilmente che è:

$$A \cap A = A; \quad A \cap B = B \cap A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset;$$

$$A \cap B \subset A; \quad A \cap B = A \text{ se e solo se } A \subset B.$$

Si può, naturalmente, fare l'intersezione anche di più di due insiemi. Per esempio, si ha

$$A \cap B \cap C := \{x: (x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C)\}.$$

E ancora: Per ogni numero naturale n, sia A_n un sottoinsieme dell'insieme universo U. Si ha

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n := \{x: x \in A_n, \text{ per } \textit{ogni } n\}.$$

DEFINIZIONE. Dati due insiemi A e B, si chiama loro *riunione* (o *unione*) l'insieme formato da tutti e soli gli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi A e B. Questo insieme si indica con il simbolo $A \cup B$. È dunque

$$A \cup B := \{x: x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Nella lingua italiana, la "o" può avere almeno due significati diversi.
Significato *esclusivo* (latino *aut*), come nella frase: "Se sostengo un esame, o sono promosso o sono bocciato." (Le due cose non possono verificarsi entrambi.)

Significato *inclusivo* (latino *vel*), come nella frase: "Se a febbraio riesco a dare Analisi o Geometria, sono contento." (Se li dò tutti due, tanto meglio!)

In Matematica, salvo esplicito avviso del contrario, la "o" ha sempre quest'ultimo significato.

In luogo della "o", si usa anche il simbolo $\vee$. Dunque:

$$A \cup B := \{x: (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

ESEMPI. 3) Siano A e B gli insiemi di numeri naturali formati, rispettivamente, dai multipli di 2 e dai multipli di 3. L'insieme $A \cup B$ è formato da tutti i numeri naturali pari e dai multipli dispari di 3. L'insieme $A \cap B$ è formato dai multipli di 6.

4) L'insieme $E = \{x: x^2 - 4 > 0\}$ è dato dall'unione dei due insiemi $A = \{x: x < -2\}$ e $B = \{x: x > 2\}$.

Si constata facilmente che è:

$$A \cup A = A; \quad A \cup B = B \cup A; \quad A \cup \varnothing = A;$$

$$A \cup B \supset B; \quad A \cup B = B \text{ se e solo se } A \subset B.$$

Si può, naturalmente, fare la riunione anche di più di due insiemi. Per esempio, si ha

$$A \cup B \cup C := \{x: (x \in A) \vee (x \in B) \vee (x \in C)\}.$$

E ancora: Per ogni numero naturale n, sia A_n un sottoinsieme dell'insieme universo U. Si ha

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n := \{x: x \in A_n, \text{ per } \textit{almeno} \text{ un } n\}.$$

DEFINIZIONE. Dati due insiemi B e A, si chiama *insieme differenza* fra B e A, l'insieme

$$B \setminus A := \{x : (x \in B) \wedge (x \notin A)\}.$$

Se poi è $A \subset B$, l'insieme $B \setminus A$ si chiama *complementare di A rispetto a B* e lo si indica anche con $\complement_B A$. Il complementare di A rispetto all'insieme universo U si indica semplicemente con $\complement A$ o con $\widetilde{A}$.

ESEMPI. 5) Siano: A l'insieme dei numeri naturali pari: $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e $\mathbb{Z}$ l'insieme degli interi relativi. L'insieme $\complement_{\mathbb{N}} A$ è formato dai numeri naturali dispari, mentre l'insieme $\complement_{\mathbb{Z}} A$ è costituito dai numeri naturali dispari e dagli interi negativi.

6) Se $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali e se è $U = \mathbb{R}$ (= insieme dei numeri reali), allora $\complement \mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri irrazionali.

7) Siano: A l'insieme dei numeri naturali pari e B quello dei numeri primi. L'insieme $A \setminus B$ è costituito da tutti i numeri naturali pari diversi da 2.

Sono di immediata verifica le seguenti proprietà:

$$\complement \complement A = A; \quad \complement U = \varnothing; \quad \complement \varnothing = U;$$

$$A \cap \complement A = \varnothing; \quad A \cup \complement A = U.$$

DEFINIZIONE. Dati due insiemi A e B, si chiama loro *insieme prodotto (cartesiano)*, e si indica con $A \times B$, l'insieme delle *coppie ordinate* (a,b) con a appartenente ad A e b appartenente a B; in simboli:

$$A \times B := \{(a,b): (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

In particolare, l'insieme $A \times A := \{(a,b): (a \in A) \wedge (b \in A)\}$ si indica anche con A^2.

Si può, naturalmente, definire anche il prodotto di 3 o più insiemi. Per esempio, si ha

$$A \times B \times C := \{(a,b,c): (a \in A) \wedge (b \in B) \wedge (c \in C)\}.$$

Com'è ben noto, l'insieme dei punti di una retta si può porre in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali (coordinate cartesiane). Così i punti di un piano [dello spazio] si possono mettere in corrispondenza biunivoca con le coppie di numeri reali, ossia con $\mathbb{R}^2$ [con le terne di numeri reali, ossia con $\mathbb{R}^3$].

DEFINIZIONE. Sia E un insieme non vuoto e siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sottoinsiemi di E. Diremo che gli insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formano una *ripartizione* di E in n sottoinsiemi o *classi* se:

1) $A_i \neq \emptyset$ per ogni i;

2) $A_i \cap A_j = \emptyset$ se è $i \neq j$;

3) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$.

Ossia: gli A_i non sono vuoti e ogni x di E appartiene ad uno e uno solo dei sottoinsiemi dati.

Questa definizione può essere facilmente estesa anche al caso di infiniti sottoinsiemi.

ESEMPI. 8) Siano $E = \mathbb{N}$, $A = \{n;\ n$ è un numero pari$\}$, $B = \{n;\ n$ è un numero dispari$\}$. A e B formano una ripartizione di $\mathbb{N}$ in 2 classi.

9) Sia E l'insieme dei punti di un piano. Le rette parallele ad una retta data formano una ripartizione di E in un numero infinito di classi.

10) Sia ancora $E = \mathbb{N}$. Si ponga ora: $A = \{n;\ n$ è un numero pari$\}$, $B = \{n;\ n$ è un numero primo$\}$, $C = \{n;\ n$ è un numero dispari non primo$\}$. Questi 3 insiemi non costituiscono una ripartizione di $\mathbb{N}$; infatti, pur essendo $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$, si ha $A \cap B \neq \emptyset$.

Chiudiamo il paragrafo segnalando alcuni simboli che useremo molto spesso.

$\forall$ sta al posto di "per ogni", "qualunque sia";

$\exists$ sta al posto di "esiste"**;**

$\exists!$ sta al posto di "esiste ed è unico", ossia "esiste uno e un solo"**.**

Siano ora p e q due proposizioni.

La *negazione* di p si indica col simbolo $\neg\, p$ e si legge *non p*. Dunque $\neg\, p$ è vera se e solo se p è falsa. La proposizione $p \wedge q$ (*congiunzione*, da leggersi *p e q*) è vera se e solo se sono vere sia la p che la q. La proposizione $p \vee q$ (*disgiunzione*, da leggersi *p o q*) è vera se e solo se è vera la p o è vera la q, ossia se e solo se è vera almeno una delle due.

La proposizione $p \Rightarrow q$ (*implicazione*, da leggersi *p implica q*) è sempre vera, tranne nel caso che p sia vera e q falsa. Essa traduce il fatto che "se è vera p, allora è vera anche q" mentre, se p è falsa, non abbiamo alcuna pretesa su q. La proposizione $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ si indica con

$p \Leftrightarrow q$. La proposizione $p \Leftrightarrow q$ (che si legge *p coimplica q*) è vera se e solo se le proposizioni p e q sono entrambe vere o entrambe false.

Se la proposizione $p \Rightarrow q$ è vera, si dice che la p è condizione *sufficiente* per la q e che la q è condizione *necessaria* per la p.

Per esempio, fra numeri naturali, "essere multiplo di 4" è condizione sufficiente ma non necessaria per "essere pari".

Alcuni insiemi numerici vengono indicati con lettere particolari:

$\mathbb{N}$	:= insieme dei numeri *naturali*;	$\mathbb{N}^+$	:= insieme dei numeri *naturali positivi*;
$\mathbb{Z}$	:= insieme dei numeri *interi*;	$\mathbb{Z}^*$	:= insieme dei numeri *interi non nulli*;
$\mathbb{Q}$	:= insieme dei numeri *razionali*;	$\mathbb{Q}^+$	:= insieme dei numeri *razionali positivi*;
$\mathbb{Q}^-$	:= insieme dei numeri *razionali negativi*;	$\mathbb{R}$	:= insieme dei numeri *reali*;
$\mathbb{R}^+$	:= insieme dei numeri *reali positivi*;	$\mathbb{R}^-$	:= insieme dei numeri *reali negativi;*
$\mathbb{C}$	:= insieme dei numeri *complessi*;	$\mathbb{C}^*$	:= insieme dei num. *complessi non nulli*.

§ 3. APPLICAZIONI

DEFINIZIONE. Dati due insiemi E ed E', si chiama *applicazione* o *funzione* di E in E' ogni legge f che ad *ogni* elemento $x \in E$ associa *un* elemento $x' \in E'$. L'insieme E è detto il *dominio* della f, mentre E' è detto il suo *codominio*. Il fatto che ad ogni $x \in E$ debba corrispondere *un solo* elementi di E' si esprime dicendo che la legge f è *univoca*.

Per indicare che f è un'applicazione di E in E' useremo la notazione $f : E \to E'$. Per esprimere il fatto che la f associa all'elemento $x \in E$ l'elemento $x' \in E'$, si scrive $x' = f(x)$. L'elemento x' è detto l'*immagine* di x. Useremo qualche volta anche la notazione $x \mapsto x'$.

Si tenga ben presente che, per assegnare una funzione è necessario assegnare *tre* oggetti: il dominio, il codominio e la legge f.

ESEMPI. 1) La legge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ espressa da $f(n) = n - 1$ non definisce una funzione, dato che non esiste un corrispondente di 0. La stessa f definisce invece una funzione di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$.

2) La legge f: $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ espressa da $f(x) = y$ se e solo se è $y^2 = x$ non definisce una funzione, dato che al numero 4 associa sia il 2 che il -2. Viene dunque a mancare l'univocità.

3) Le seguenti leggi definiscono invece delle applicazioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = 2; \quad f(x) = x^2; \quad f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}; \quad f(x) = \log(1 + x^2); \quad f(x) = \sin^2 x + \cos^3 x.$$

4) La legge $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ definisce un'applicazione dell'insieme $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ in $\mathbb{R}$.

5) La legge che ad ogni circonferenza di un piano associa il suo centro definisce un'applicazione dell'insieme A delle circonferenze di quel piano nell'insieme B dei punti del piano stesso.

6) Sia A un insieme di persone nate in Italia. Anche la legge che ad ogni elemento di A associa il comune in cui è nato definisce un'applicazione di A nell'insieme B dei comuni italiani.

A noi interessano, in particolare, le applicazioni che hanno come codominio un insieme numerico; a tali applicazioni riserveremo, di regola, il nome di *funzioni*. In tal caso, all'elemento $f(x)$ si dà anche il nome di *valore* della f in x.

Sia data un'applicazione $f : E \to E'$. L'insieme $f(E) := \{f(x): x \in E\}$ ($\subset E'$) prende il nome di *insieme immagine* della f. È dunque $f(E) = \{x' \in E': \exists\, x \in E$ tale che $f(x) = x'\}$. Analogamente, se è $A \subset E$, si chiama *immagine* di A tramite la f l'insieme $f(A) := \{f(x): x \in A\}$.

Un'applicazione $f : E \to E'$ è detta *costante* se esiste $c' \in E'$ tale che $(\forall\, x \in E)(f(x) = c')$.

L'applicazione $f : E \to E$ definita da $f(x) = x$ è detta *applicazione identica* o *identità* di E.

Un'applicazione $f : \mathbb{N} \to E$ è detta *successione* di elementi di E. In luogo di $f(n)$ si usa più volentieri la notazione a_n; la successione si indica con $(a_n)_n$.

Per esempio, la successione per cui è ($f(n)$ =) $a_n = n^2$, si indica con $(n^2)_n$.

Si tenga ben presente che, in generale, ad un'applicazione non è richiesto né che sia $f(E) = E'$, né che ad elementi distinti di E vengano associati elementi distinti di E'.

DEFINIZIONE. Un'applicazione $f : E \to E'$ è detta *iniettiva* se ad elementi distinti di E vengano associati elementi distinti di E', ossia se

$$(\forall\, x_1 \in E)(\forall\, x_2 \in E)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Ciò equivale a dire che, per ogni $x' \in E'$, esiste *al più* un $x \in E$ tale che $f(x) = x'$.

Per esempio, l'applicazione dell'Esempio 4 è iniettiva, mentre quelle degli Esempi 5 e 6 non lo sono.

DEFINIZIONE. Un'applicazione $f : E \to E'$ è detta *suriettiva* se l'insieme immagine $f(E)$ coincide con E', ossia se

$$(\forall\, x' \in E')(\exists\, x \in E)(f(x) = x').$$

Ciò equivale a dire che, per ogni $x' \in E'$, esiste *almeno* un $x \in E$ tale che $f(x) = x'$.

Per esprimere il fatto che l'applicazione $f : E \to E'$ è suriettiva, si dice che f è un'applicazione di E *su* E'.

Per esempio, l'applicazione dell'Esempio 5 è suriettiva, mentre quella dell'Esempio 4 non lo è.

DEFINIZIONE. Un'applicazione $f : E \to E'$ è detta *biiettiva* se è iniettiva e suriettiva, ossia se

$$(\forall\, x' \in E')(\exists!\, x \in E)(f(x) = x').$$

Ciò equivale a dire che, per ogni $x' \in E'$, esiste *esattamente* un $x \in E$ tale che $f(x) = x'$.

Per esempio, è biiettiva l'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$.

DEFINIZIONE. Data l'applicazione $f : E \to E'$ e detto A un sottoinsieme di E, l'applicazione che a ogni elemento x di A associa l'elemento $f(x) \in E'$ è detta *restrizione* della f ad A; essa si indica col simbolo $f|_A$ o, quando non c'è possibilità di equivoco, ancora con f.

Sia ancora $A \subset E$ e sia f un'applicazione di A in E'. ogni $f^*: E \to E'$ tale che $f^*|_A = f$ è detta un prolungamento della f ad E.

Sia per esempio data l'applicazione $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}.$$

Per ottenere un prolungamento della f a tutto $\mathbb{R}$, basta considerare una qualunque funzione $f_c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_c(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se è } x \neq -1 \\ c, & \text{se è } x = -1. \end{cases}$$

DEFINIZIONE. Sia $f: E \to E'$ un'applicazione biiettiva. L'applicazione di E' in E che a ogni elemento x' di E' associa l'unico elemento $x \in E$ tale che $f(x) = x'$ è detta *applicazione inversa* della f; essa si indica col simbolo f^{-1}. Dunque, per definizione, si ha

$$f^{-1}(x') = x \Leftrightarrow f(x) = x'.$$

Si tenga presente che, se la f non è biiettiva, non può esistere un'applicazione inversa. Tuttavia, è spesso utile costruire una funzione imparentata con la f che risulti invece invertibile.

Se la f non è suriettiva, per renderla tale basta sostituire ad E' il suo sottoinsieme $f(E)$. Se la f non è iniettiva, per renderla tale si può considerare un'opportuna restrizione. Abbinando i due procedimenti, si ottiene un'applicazione biiettiva che è, per così dire, strettamente imparentata con quella di partenza.

ESEMPI. 7) L'applicazione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ non è biiettiva. Per ottenere un'applicazione biiettiva, si restringe la f all'insieme $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ e si assume quest'ultimo insieme anche come codominio. Insomma la funzione x^2 non è biiettiva fra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$, ma lo è fra $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ e $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. L'inversa della funzione $f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, definita da $f(x) = x^2$ è la funzione *radice quadrata.*

8) L'applicazione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin x$ non è biiettiva. Per ottenere un'applicazione biiettiva, si assume come codominio l'intervallo $J = \{y: -1 \leq y \leq 1\}$ e si restringe la f all'intervallo $I = \{x: -\pi/2 \leq x \leq \pi/2\}$. Naturalmente, questa restrizione non è l'unica possibile, ma è la più naturale. L'inversa della funzione $f: I \to J$, definita da $f(x) = \sin x$ è la funzione *arco seno.*

Sia data un'applicazione $f: E \to E'$ e sia A' un sottoinsieme di E'. Si chiama *controimmagine* di A' il sottoinsieme $f^{-1}(A')$ di E definito da $f^{-1}(A') := \{x \in E: f(x) \in A'\}$.

ESEMPIO. 9) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Si ha:

$$f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}; \qquad f^{-1}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$f^{-1}(\{x': -1 < x' \leq 9\}) = \{x: -3 \leq x \leq 3\}; \qquad f^{-1}(\{-2\}) = \emptyset.$$

Non si confonda la controimmagine con l'applicazione inversa. Quest'ultima opera sugli *elementi* di E' e ha senso solo se la f è biiettiva, mentre la controimmagine opera sui *sottoinsiemi* di E' e si può definire in ogni caso.

Sia ancora $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Sappiamo che questa funzione non è invertibile. Non ha dunque senso scrivere $f^{-1}(4)$, mentre si è visto che è $f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$.

DEFINIZIONE. Siano date le due applicazioni $f : E \to E'$ e $g : E' \to E''$. Si può costruire un'applicazione $h : E \to E''$ ponendo $h(x) := g(f(x))$, $\forall\, x \in E$. L'applicazione h è detta applicazione *composta* della f e della g; essa si indica col simbolo $g \circ f$.

ESEMPI. 10) Siano: $E = \mathbb{R}^+$, $E' = E'' = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log x$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(u) = -u^2$. L'applicazione composta $h = g \circ f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è definita da $h(x) = -\log^2 x$.

Si badi che, in questo caso, non è definita un'applicazione che si possa indicare con $f \circ g$. Infatti questa dovrebbe essere un'applicazione k definita da $k(u) = \log(-u^2)$ che non ha senso.

11) Siano: $E = E' = E'' = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + 1$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(u) = u^2$. In questa situazione, esistono sia la funzione composta $g \circ f$ sia la $f \circ g$. Si ha:

$$(g \circ f)(x) = (x + 1)^2 \text{ e } (f \circ g)(x) = x^2 + 1.$$

Se ne deduce che, in generale, è $g \circ f \neq f \circ g$.

11) Siano: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1 - x^2$ e $g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $g(u) = \sqrt{u}$. Non esiste l'applicazione composta $g \circ f$, dato che la f assume anche valori negativi. Si può però comporre con la g la restrizione della f al sottoinsieme A $(\subset \mathbb{R})$ formato dagli x per cui è $1 - x^2 \geq 0$, ossia agli x:per cui è $-1 \leq x \leq 1$. L'applicazione composta $h : A \to \mathbb{R}$ è definita da $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

DEFINIZIONE. Data l'applicazione $f : E \to E'$, l'insieme $G(f) := \{(x, f(x)) \colon x \in E\}$ $(\subset E \times E')$ è detto *grafico* di f.

Un sottoinsieme G di $E \times E'$ è il grafico di una funzione se e solo se

$$(\forall\, x \in E)(\exists!\, x' \in E')((x, x') \in G).$$

Posto, per esempio, $I = \{x \colon -1 \leq x \leq 1\}$, l'insieme $H = \{(x,y) \colon x^2 + y^2 = 1\}$ $(\subset I \times I)$ non è il grafico di una funzione dato che, appartengono ad H sia $(0, -1)$ sia $(0, 1)$. Se però si considera l'insieme $H' = \{(x,y) \colon x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ $(\subset I \times I)$, questo è il grafico della funzione $f : I \to I$ definita da $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

§ 4. RELAZIONI BINARIE

DEFINIZIONE. Si chiama *relazione binaria* in un insieme non vuoto E ogni applicazione $\mathcal{R}$ di $E \times E$ nell'insieme $\{sì, no\}$. Per esprimere il fatto che per una coppia (x, y) di $E \times E$ è $\mathcal{R}(x,y) = sì$ [*no*], si dice che gli elementi x e y di E *sono in relazione* [*non sono in relazione*].

Per assegnare una relazione $\mathcal{R}$ su un insieme E basta ovviamente fissare il sottoinsieme $\mathcal{R}^{-1}(\{sì\})$. Spesso, in luogo delle parole "*sì*", "*no*", si usano più volentieri i numeri "1" e "0". Inoltre, invece di scrivere $\mathcal{R}(x,y) = 1$; si usa interporre fra x e y un segno particolare. Per esprimere una relazione generica useremo il segno $\frown$. Alcune relazioni hanno un loro segno usuale: $=$, $/\!/$, $\leq$, $\perp$, $\subset$, etc.

Per esprimere il fatto che nell'insieme E è definita la relazione $\sqcap$, si usa la scrittura $(E,\sqcap)$.

ESEMPI DI RELAZIONI. 1) Uguaglianza fra gli elementi di un insieme (=).
2) Inclusione fra i sottoinsimi di un insieme ($\subset$).
3) Parallelismo fra le rette di un piano o dello spazio ($/\!/$)
4) Ortogonalità fra le rette di un piano ($\perp$).
5) Relazione di "*minore o uguale*" fra numeri reali ($\leq$).
6) Relazione di "*minore*" fra numeri reali ($<$).
7) Relazione di divisibilità fra numeri naturali positivi ($\lhd$).
8) Relazione "*essere fratello di*" (nel senso di avere in comune almeno un genitore) in un insieme di persone.
9) Relazione "*distare meno di* 100 *km*" in un insieme di città.

Una relazione $\sqcap$ in un insieme E può godere di alcune proprietà.

– **Proprietà *riflessiva*:** $(\forall\ x \in E)(x \sqcap x)$, cioè "ogni elemento di E è in relazione con se stesso".

Le relazioni precedenti sono tutte riflessive, tranne quelle degli esempi (4) e (6).

– **Proprietà *simmetrica*:** $(\forall\ x \in E)(\forall\ y \in E)(x \sqcap y \Rightarrow y \sqcap x)$; cioè "se x è in relazione con y, allora anche y è in relazione con x".

Le relazioni degli esempi (1), (3), (4), (8) e (9) sono simmetriche, le altre no.

– **Proprietà *antisimmetrica*:** $(\forall\ x \in E)(\forall\ y \in E)[((x \sqcap y) \wedge (y \sqcap x)) \Rightarrow x = y]$; cioè "se x è in relazione con y e y è in relazione con x, allora è $x = y$".

Le relazioni degli esempi (1), (2), (5), (6) e (7) sono antisimmetriche, le altre no.

L'uguaglianza è l'unica relazione che è al tempo stesso simmetrica e antisimmetrica.

– **Proprietà *transitiva*:** $(\forall\ x \in E)(\forall\ y \in E)(\forall\ z \in E)[((x \sqcap y) \wedge (y \sqcap z)) \Rightarrow x \sqcap z]$; cioè "se x è in relazione con y e y è in relazione con z, allora x è in relazione con z".

Le relazioni precedenti sono tutte transitive, tranne quelle degli esempi (4), (8) e (9).

Accenniamo solo al fatto che, come si parla di relazioni binarie, si può parlare anche di relazioni ternarie, quaternarie, …, cioè di relazioni che coinvolgono 3, 4, … elementi di un insieme.

Sia E l'insieme dei punti di un piano. Un esempio di relazione fra terne di elementi di E è quella di "*essere allineati*". Un esempio di relazione fra quaterne di elementi di E è quella di "*appartenere ad una medesima circonferenza*".

La nozione di relazione binaria su un insieme E ammette una facile generalizzazione. Dati due insiemi E ed E' si chiamerà relazione binaria fra gli elementi di E e quelli di E' ogni applicazione di $E \times E'$ in $\{1,0\}$.

Se per esempio è $E' = \wp(E)$, una relazione fra E ed E' è quella di appartenenza.

Noi ci occuperemo esclusivamente di relazioni binarie su un insieme E. Anzi ci limiteremo a due tipi particolari di queste: le relazioni di equivalenza e quelle d'ordine.

§ 5. RELAZIONI DI EQUIVALENZA

DEFINIZIONE. Si chiama *(relazione di) equivalenza* in un insieme non vuoto E ogni relazione binaria su E che sia *riflessiva, simmetrica e transitiva*.

Data un'equivalenza su un insieme E, diremo che due elementi a e b in relazione sono fra loro *equivalenti*; esprimeremo il fatto scrivendo $x \sim y$.

L'uguaglianza è chiaramente un'equivalenza che viene detta equivalenza *discreta*.

Diamo qualche altro esempio di equivalenza.

ESEMPI. 1) Il parallelismo fra rette o fra piani.

2) Sia $E = \{(p,q)\colon p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\}$; dunque E è l'insieme di tutte le frazioni. In E si definisce la ben nota relazione di equivalenza $(p, q) \sim (r, s) \Leftrightarrow ps = qr$.

3) La relazione di congruenza fra i segmenti dello spazio.

4) In un insieme di persone, la relazione "*essere fratelli*", ma nel senso di avere uguali entrambi i genitori.

5) Fra numeri reali: $x \sim y$ se e solo se $x - y$ è un multiplo intero di 2π.

6) Fra numeri reali: $x \sim y$ se e solo se $x - y$ è un numero intero.

7) Dato un insieme non vuoto E, si dichiarino fra loro equivalenti tutti gli elementi di E. Si ottiene una relazione di equivalenza detta equivalenza *nulla*.

DEFINIZIONE. Sia $\sim$ un'equivalenza in un insieme E. Per ogni $x \in E$ si definisce

$$[x] := \{y \in E\colon x \sim y\}.$$

I sottoinsiemi $[x]$ prendono il nome di *classi* dell'equivalenza data.

TEOREMA 1. *Sia $\sim$ un'equivalenza in un insieme E.*
1) *Per ogni $x \in E$, si ha $[x] \neq \emptyset$.*
2) *Si ha $[x] = [y]$ se e solo se è $x \sim y$.*
3) *Se è $x \not\sim y$. si ha $[x] \cap [y] = \emptyset$.*
4) *Le classi dell'equivalenza costituiscono una ripartizione di E.*

DIM. 1) Essendo $x \sim x$, si ha $x \in [x]$.

2) Sia $x \sim y$. Da $z \in [x]$ segue $x \sim z$, da cui $z \sim x \sim y$ e quindi $z \sim y$, ossia $y \sim z$ e, in fine, $z \in [y]$. L'inclusione opposta si prova allo sesso modo.

Sia ora $[x] = [y]$. È dunque $y \in [x]$, da cui $x \sim y$.

3) Sia $x \not\sim y$ e supponiamo, per assurdo, che esista $z \in [x] \cap [y]$. Si ottiene: $(x \sim z) \wedge (y \sim z)$, da cui $x \sim z \sim y$ e, in fine, $x \sim y$. Assurdo.

4) Basta osservare che ogni elemento di E appartiene a una e una sola classe dell'equivalenza. ▮

DEFINIZIONE. Sia data su un insieme E un'equivalenza $\sim$. L'insieme $\{[x]\colon x \in E\}$ ($\subset \mathcal{P}(E)$) delle classi di equivalenza prende il nome di *insieme quoziente* di E rispetto all'equivalenza data. Esso si indica con $E/\sim$.

Passare da E a $E/\sim$ comporta il riguardare certi sottoinsiemi di E come elementi di un nuovo insieme. Spesso in matematica si dà un nome a questi nuovi elementi. Tale procedimento prende il nome di *definizione per astrazione.*

ESEMPI. 8) Sia E l'insieme delle rette dello spazio e sia $\sim$ la relazione di parallelismo. Agli elementi di $E/\sim$ si dà il nome di *direzioni.*

9) Sia E l'insieme dei piani dello spazio e sia $\sim$ ancora la relazione parallelismo. Agli elementi di $E/\sim$ si dà il nome di *giaciture.*

10) Nell'insieme $E = \{(p,q): p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\}$ di tutte le frazioni sia $\sim$ l'equivalenza definita da $(p, q) \sim (r, s) \Leftrightarrow ps = qr$. Agli elementi di $E / \sim$ si dà il nome di *numeri razionali.*

11) Sia E l'insieme dei segmenti dello spazio e sia $\sim$ la relazione di congruenza. Agli elementi di $E / \sim$ si dà il nome di *lunghezze.*

12) Sia E l'insieme dei segmenti orientati dello spazio e sia $\sim$ la relazione che proclama equivalenti due segmenti se e solo se sono congruenti e hanno uguali anche direzione e verso. Agli elementi di $E / \sim$ si dà il nome di *vettori.*

§ 6. RELAZIONI D'ORDINE

DEFINIZIONE. Si chiama *relazione d'ordine* o *ordinamento* in un insieme non vuoto E ogni relazione binaria su E che sia *riflessiva, antisimmetrica e transitiva.*

Se a è in relazione con b diremo che *a precede b* [che *b segue a*] e scriveremo, per esempio, $a \leqq b$ [$b \geqq a$].

ESEMPI. 1) La relazione d'inclusione in $\mathbb{P}(E)$.

2) La relazione "≤" in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$.

3) La relazione di divisibilità fra numeri naturali positivi definita da $a \lhd b$ se e solo se a è un divisore di b.

Data in un insieme E una relazione d'ordine $\leqq$, si può definire una nuova relazione, in certo qual modo equivalente (cioè con lo steso grado di informazione) a quella data, ponendo $a < b$ se e solo se è $(a \leqq b) \wedge (a \neq b)$.

Il caso più interessante è quello in cui si parte dalla relazione ≤ fra numeri (in particolare in $\mathbb{N}$) ottenendo così l'usuale relazione di <.

Una relazione < gode delle seguenti proprietà:

1) Prop. *antiriflessiva*: $(\forall\, x \in E)\ (x \not< x)$, cioè nessun elemento è in relazione con se stesso.

2) Prop. *antisimmetrica*. In virtù della (1), essa diviene: $(\forall\, x \in E)(\forall\, y \in E)(x < y \Rightarrow y \not< x)$.

3) Proprietà *transitiva*: $(\forall\, x \in E)(\forall\, y \in E)(\forall\, z \in E)((x < y) \wedge (y < z) \ \Rightarrow x < z)$.

A una tale relazione si dà il nome di *relazione d'ordine in forma antiriflessiva.*

Viceversa, partendo da una relazione d'ordine in forma antiriflessiva <, si ottiene una relazione d'ordine riflessiva $\leqq$ ponendo $a \leqq b$ se e solo se è $(a < b) \vee (a = b)$.

Sia $(E, \leqq)$ un insieme ordinato. Se accade che comunque si fissino due elementi a, b di E si ha $(a \leqq b) \vee (b \leqq a)$, si dice la relazione è di ordine *totale*. Se invece esistono almeno due elementi a e b fra loro *inconfrontabili*, ossia tali che non risulti né $a \leqq b$ né $b \leqq a$, si parla di ordinamento *parziale.*

Per esempio, l'insieme $(\mathbb{P}(E), \subset)$ è totalmente ordinato se e solo se E non contiene più di un elemento. Infatti, se in E esistono due elementi a e b, si ha $\{a\} \not\subset \{b\}$ e $\{b\} \not\subset \{a\}$.

La relazione ≤ in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ è d'ordine totale.

Naturalmente, un sottoinsieme X di un insieme parzialmente ordinato U può risultare totalmente ordinato. Per esempio, sappiamo che se è $E = \{a, b, c\}$, l'insieme $(\mathbb{P}(E), \subset)$ è parzialmente ordinato; per contro, il suo sottoinsieme $X = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, E\}$ è totalmente ordinato.

DEFINIZIONE. Sia $(E, \leqq)$ un insieme ordinato. Si dice che un elemento $m \in E$ è il *primo* o il *minimo* elemento di E se m precede tutti gli elementi di E. Scriveremo $m = \min E$.
Analogamente, si dice che un elemento $M \in E$ è l'*ultimo* o il *massimo* elemento di E se M segue tutti gli elementi di E. Scriveremo $M = \max E$.

Qualunque sia l'insieme non vuoto E, l'insieme $(\mathcal{P}(E), \subset)$ ha un minimo ($m = \emptyset$) e un massimo ($M = E$). L'insieme $(\mathbb{N}, \leq)$ ha minimo, lo zero, ma non ha massimo. In $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ non c'è né minimo né massimo.

TEOREMA 2. *Se in un insieme ordinato* $(E, \leqq)$ *esiste minimo* [*massimo*] *esso è unico.*

DIM. Se m e m' sono minimi di E, si ha $(m \leqq m') \wedge (m' \leqq m)$, da cui $m = m'$. Analogamente per il massimo. ∎

DEFINIZIONE. Siano $(E, \leqq)$ un insieme ordinato e A un sottoinsieme di E. Se esiste un elemento $L \in E$ che segue tutti gli elementi di A, si dice che L è una *limitazione superiore* o un *maggiorante* di A. In tal caso si dice che A è un sottoinsieme *superiormente limitato* di E.
Analogamente, se esiste un elemento $l \in E$ che precede tutti gli elementi di A, si dice che l è una *limitazione inferiore* o un *minorante* di A. In tal caso si dice che A è un sottoinsieme *inferiormente limitato* di E.
Un sottoinsieme A di E è detto *limitato* se ammette sia limitazioni inferiori che superiori.

Siano $(E, \leqq)$ un insieme ordinato e A un sottoinsieme superiormente limitato di E. Se L è una limitazione superiore di A, ogni elemento L' che segua L è ancora una limitazione superiore di A. Interessa vedere se fra le limitazioni superiori di A ce n'è una minima.

DEFINIZIONE. Siano $(E, \leqq)$ un insieme ordinato e A un sottoinsieme superiormente limitato di E. Se l'insieme delle limitazioni superiori di A ha minimo, questo è detto l'*estremo superiore* di A ed è indicato col simbolo $\sup A$
Analogamente: Se A è un sottoinsieme inferiormente limitato di E e se l'insieme delle limitazioni inferiori di A ha massimo, questo è detto l'*estremo inferiore* di A ed è indicato col simbolo $\inf A$.

ESEMPI. 4) Sia $(\mathbb{N}^+, \lhd)$ l'insieme dei numeri naturali positivi ordinato per divisibilità. Se A è un suo sottoinsieme finito, allora esso è superiormente limitato ed ammette anche estremo superiore dato dal minimo comune multiplo dei suoi elementi. Se A è infinito, esso è superiormente illimitato.
Un qualunque sottoinsieme non vuoto A è inferiormente limitato (da 1) ed ha estremo inferiore dato dal massimo comune divisore dei suoi elementi.

5) Consideriamo l'insieme $(\mathbb{Q}; \leq)$. Sia ora $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ : x^2 < 2\}$. Si vede subito che A è superiormente limitato (per es. da 2) ma che non ha estremo superiore.
Posto invece $B = \{x \in \mathbb{Q}^+ : x^2 < 4\}$, si ha $\sup B = 2$.
Dunque, non tutti i sottoinsiemi superiormente limitati di $\mathbb{Q}$ hanno estremo superiore. Vedremo che nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali le cose vanno altrimenti.

Chiaramente, se un sottoinsieme A di $(E, \leqq)$ ha massimo, questo è anche l'estremo superiore di A. Il caso dell'insieme B dell'Esempio 5 mostra che l'estremo superiore di un insieme può ben non appartenergli. Anzi, l'estremo superiore si inventa proprio come "surrogato" del massimo.

§ 7. ESERCIZI

1) Detto U l'insieme dei primi 20 numeri naturali positivi, si considerino i suoi sottoinsiemi: $A = \{2k: k = 1, 2, \ldots,, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{3k: k = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si descrivano gli insiemi :

$$A \cap B; \quad A \cup B, \quad A \cap \complement B; \quad A \cup \complement B,$$

$$(A \cap B) \cap C; \quad A \cap (B \cap C); \quad (A \cup B) \cup C; \quad A \cup (B \cup C);$$

$$(A \cap B) \cup C; \quad (A \cup C) \cap (B \cup C); \quad (A \cup B) \cap C; \quad (A \cap C) \cup (B \cap C);$$

$$\complement A; \quad \complement B; \quad \complement(A \cap B); \quad \complement A \cup \complement B; \quad \complement(A \cup B); \quad \complement A \cap \complement B.$$

2) Si dimostri che sussistono le seguenti proprietà:

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $\quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\quad$ (prop. *associative*)

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$; $\quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $\quad$ (prop. *distributive*)

$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$; $\quad \complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ $\quad$ (formule di *De Morgan*).

[Si può procedere così: Si fissa un $x \in U$ e ci si chiede: «$x \in A$?», «$x \in B$?», «$x \in C$?». In base alle risposte, ci sono 8 casi possibili se gli insiemi coinvolti sono 3, 4 casi se gli insiemi sono solo 2. Per ciascuno di essi si controlla che x appartiene al primo insieme se e solo se appartiene al secondo. Occupiamoci, per esempio, della prima formula di De Morgan.

A	B	$A \cap B$	$\complement(A \cap B)$	$\complement A$	$\complement B$	$\complement A \cup \complement B$;
sì	sì	sì	no	no	no	no
sì	no	no	sì	no	sì	sì
no	sì	no	sì	sì	no	sì
no	no	no	sì	sì	sì	sì

Per concludere, basta confrontare le colonne ombreggiate della tabella.]

3) Dati due insiemi A e B si chiama loro *differenza simmetrica* l'insieme $A \Delta B$ formato dagli elementi che appartengono ad uno e uno solo degli insiemi A e B. È dunque

$$A \Delta B := \{x: x \in A \textit{ aut } x \in B\} = (A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A).$$

Considerati gli insiemi di cui all'Esercizio 1, si descrivano gli insiemi:

$$A \Delta B; \quad A \Delta A; \quad A \Delta U; \quad A \Delta \emptyset; \quad (A \Delta B) \Delta C; \quad A \Delta (B \Delta C).$$

4) Si dimostri che sussistono le seguenti proprietà:

$$A \Delta B = B \Delta A; \quad A \Delta A = \emptyset; \quad A \Delta U = \complement A; \quad A \Delta \emptyset = A;$$

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

[Si può procedere con la stessa tecnica suggerita per l'Esercizio 2.]

5) Si individuino graficamente i seguenti insiemi di punti del piano riferito a coordinate cartesiane:

$$\{(x, y): x \leq 0\}; \quad \{(x, y): x \leq 1, y \leq 1\}; \quad \{(x, y): |x| \leq 1\}; \quad \{(x, y): x = y\};$$

$$\{(x, y): x \leq y\}; \quad \{(x, y): |x| + |y| \leq 1\}; \quad \{(x, y): |x - y| \leq 1\};$$

$$\{(x, y): x^2 + y^2 > 1\}; \quad \{(x, y): (x > 1) \vee (y > 1)\}.$$

6) Posto $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6)$, si ricerchino i suoi sottoinsiemi X soddisfacenti alle seguenti condizioni:

$$(a)\begin{cases} X \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 6\} \\ X \cap \{1, 2\} \supset \{1\} \end{cases}; \qquad (b)\begin{cases} X \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{3, 4\} \\ X \cap \{2, 4, 5, 6\} = \{2, 6\} \end{cases};$$

$$a)\begin{cases} X \cap \{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 4\} \\ X \cap \{2, 5, 6\} \subset \{2, 6\} \\ X \cap \{2, 4, 6\} \subset \{1, 3, 5\} \end{cases}; \qquad (b)\begin{cases} X \cap \{3, 4, 5\} \supset \{4, 5\} \\ X \cap \{1, 2, 6\} \supset \{2, 6\} \end{cases}.$$

[Anche in questo caso, si può utilizzare una tabella analoga a quella vista in precedenza. Occupiamoci del problema (*a*).

Elemento	Prima condizione	Seconda condizione	Conclusioni
1	–	Sì	sì
2	–	–	–
3	no	–	no
4	no	–	no
5	no	–	no
6	sì	–	sì

Il trattino indica che la cosa è indifferente. Ci sono dunque due soluzioni: $X_1 = \{1, 6\}$ e $X_2 = \{1, 2, 6\}$.]

7) (*a*) Si provi, mediante esempi, che da $A \cap B = A \cap C$ non segue $B = C$.

(*b*) Si provi, mediante esempi, che da $A \cup B = A \cup C$ non segue $B = C$.

(*c*) Si dimostri che, invece, da $(A \cap B = A \cap C) \wedge (A \cup B = A \cup C)$ segue $B = C$.

[(*c*) Sia $x \in B$. Se è $x \in A$, è anche $x \in A \cap B = A \cap C$, da cui $x \in C$. Sia $x \notin A$; essendo comunque $x \in A \cup B = A \cup C$, si ottiene ancora $x \in C$. Analogamente si prova che è $C \subset B$.]

8) Date le seguenti coppie di funzioni f e g di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, si definiscano le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$..

$f(x) = 1 - 3x$; $g(x) = x - 2$; $\qquad f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$;

$f(x) = 3x$; $g(x) = \sin x$; $\qquad f(x) = 3x + 2$; $g(x) = 2x - 4$.

9) Data un'applicazione f: $E \to E'$, siano A, B sottoinsiemi di E e A',B' sottoinsiemi di E'. Si provi che:

(a) Da $A \subset B$ segue $f(A) \subset f(B)$. (b) Da $A' \subset B'$ *segue* $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$.

(c) Si ha $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. ($d$) Si ha $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(e) Si ha $A \subset f^{-1}(f(A))$; (f) Si ha $f(f^{-1}(A')) = A' \cap f(E)$.

[(a) Sia $x' \in f(A)$; esiste $x \in A$ tale che $f(x) = x'$; essendo anche $x \in B$, segue $f(x) = x' \in f(B)$.
(d) Essendo $A \cap B \subset A$, la tesi segue dalla (a); in generale non sussiste l'uguaglianza; questa si ha se e solo se la f è iniettiva.]

10) Si esprima il termine n - imo a_n delle seguenti successioni a valori razionali (ossia delle seguenti applicazioni f: $\mathbb{N}^+ \to \mathbb{Q}$:

$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \frac{1}{14}, \dots$

$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$ $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$ $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \frac{6}{7}, \dots$

$0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, \dots$

[Per l'ultima successione, si può porre $a_n = \sqrt{2}\,\sin(\frac{\pi}{3}n)$.]

11) Per ciascuna delle seguenti relazioni binarie definite in $\mathbb{N}^+$, si dica se è riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva. Sia dunque $a \rightharpoondown b$ se e solo se

(a) $b = a + 1$; (b) a è un divisore proprio di b; (c) a e b sono entrambi maggiori di 1;
(d) a e b sono uguali o consecutivi; (e) nessuno dei due numeri è multiplo dell'altro;
(f) a e b sono primi fra loro; (g) il massimo comun divisore di a e b è uguale a 3.

12) Si descriva l'insieme quoziente $E / \sim$ nel caso dell'equivalenza discreta e nel caso dell'equivalenza nulla.

13) Sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle applicazioni di un insieme E in un insieme E'. Si provi che è un'equivalenza in $\mathcal{F}$ la relazione binaria definita da $f \sim g$ se e solo se è finito l'insieme

$$A = \{x \in E: f(x) \neq g(x)\}.$$

14) Può accadere che in un insieme ordinato (E, $\leqq$) il minimo coincida col massimo?

15) Sia ($\mathbb{N}^+$, $\lhd$) l'insieme dei numeri naturali positivi ordinato per divisibilità. Si dica quali dei suoi seguenti sottoinsiemi sono totalmente ordinati:

$\{2n: n = 1, 2, 3, \dots\}$; $\{n^2: n = 1, 2, 3, \dots\}$; $\{2^n: n = 1, 2, 3, \dots\}$;
$\{6^n: n = 0, 1, 2,, \dots\}$; $\{n!: n = 1, 2, 3, \dots\}$; $\{n: n \text{ è un numero primo}\}$.

16) In un insieme E di persone, sia $a \rightharpoondown b$ se e solo se a è più giovane di b. Si tratta di una relazione d'ordine?

Capitolo Secondo

GLI INSIEMI NUMERICI

§ 1. I NUMERI NATURALI

Tutti conoscono l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots \}$$

e le operazioni in esso definite. Noi perciò non affronteremo uno studio sistematico di $\mathbb{N}$, ma ci limiteremo a mettere in risalto alcuni punti.

In $\mathbb{N}$ è definita una *relazione d'ordine totale* (cfr. Cap. 1, § 6) detta "*ordine naturale*" che si indica con il simbolo $\leq$ (*minore o uguale*). In realtà, nel caso dell'insieme $\mathbb{N}$ è spesso più comodo usare la corrispondente relazione antiriflessiva indicata con il simbolo $<$ (*minore*). Sono dunque verificate le seguenti proprietà:

1) Prop. *antiriflessiva*: $(\forall\, n \in \mathbb{N})\ (n \nless n)$; cioè: *nessun elemento è minore di se stesso*.

2) Prop. *antisimmetrica*. Per la (1), essa diviene: $(\forall\, m \in \mathbb{N})(\forall\, n \in \mathbb{N})(m < n \Rightarrow n \nless m)$.

3) Prop. *transitiva*: $(\forall\, m \in \mathbb{N})(\forall\, n \in \mathbb{N})(\forall\, p \in \mathbb{N})((m < n) \wedge (n < p) \Rightarrow m < p)$.

4) **Principio di tricotomia**: $(\forall\, n \in \mathbb{N})(\forall\, m \in \mathbb{N})[(m < n) \vee (m = n) \vee (m > n)]$; ossia: *dati due numeri naturali* (diversi) *uno di essi è minore dell'altro* (ordine *totale*).

Inoltre:

5) *Ogni numero naturale n ha un immediato seguente* ($n + 1$).

6) **Principio del minimo**: *Ogni sottoinsieme non vuoto di* $\mathbb{N}$ *ha minimo*. In particolare, *esiste il minimo di* $\mathbb{N}$, *lo* 0.

7) *Ogni numero naturale* $n > 0$ *ha un immediato precedente* ($n - 1$).

8) **Principio del massimo**: *Ogni sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato di* $\mathbb{N}$ *ha massimo*. (Cfr. Esercizio 1, § 9.)

Del *Principio di induzione* ci occuperemo nel prossimo paragrafo.

Ricordiamo che si chiama *operazione (interna)* in un insieme E ogni applicazione φ di $E \times E$ in E. In luogo di $\varphi(x,y)$, si preferisce interporre fra x e y un segno come $\circ$, $+$, $\times$, $\cup$, $\cap$, $\wedge$, $\vee$, etc. Quindi, in luogo di $\varphi(x,y) = z$, si scrive $x \circ y = z$, $x + y = z$, … In qualche caso, invece di $\varphi(x,y)$ si scrive semplicemente xy.

9) Com'è ben noto, nell'insieme $\mathbb{N}$ sono definite le operazioni di *somma* e *prodotto*. Queste operazioni godono delle seguenti proprietà:

$(a + b) + c = a + (b + c)$;	$(ab)c = a(bc)$	proprietà *associative*
$a + b = b + a$;	$ab = ba$	proprietà *commutative*
$a + 0 = 0 + a$;	$a1 = 1a$	esistenza dell'*elemento neutro*
$a(b + c) = ab + ac$;	$(b + c)a = ba + ca$	propr. *distributive* del prodotto rispetto alla somma
$ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$		legge dell'*annullamento del prodotto*
$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$		legge di *cancellazione* della somma
$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$		*compatibilità* della relazione d'ordine con la somma
$a = b \Leftrightarrow ac = bc, \ \forall\ c \neq 0$		legge di *cancellazione* del prodotto
$a < b \Leftrightarrow ac < bc, \ \forall\ c > 0$		*compatibilità* della relazione d'ordine col prodotto.

Ricordiamo ancora che in $\mathbb{N}^+$ si introduce anche l'operazione di *innalzamento a potenza* definita da

per $n = 1$, $\quad a^1 = a$;

per $n > 1$, $\ a^n = a \times a \times \ldots \times a$ (ossia il prodotto di n fattori uguali ad a).

Si definisce inoltre:

$$a^0 = 1, \ \forall\ a > 0; \qquad 0^n = 0, \ \forall\ n > 0.$$

Si tenga ben presente che al simbolo 0^0 *non è attribuito alcun significato.*
L'innalzamento a potenza gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} a^n a^m = a^{n+m} \\ (a^n)^p = a^{np} \\ a^n b^n = (ab)^n. \end{cases}$$

(Le richiameremo con l'espressione: *proprietà formali delle potenze.*)

E ancora:

$a = b \Leftrightarrow a^n = b^n, \ \forall\ n > 0$	legge di *cancellazione* dell'innalzamento a potenza
$a < b \Leftrightarrow a^n < b^n, \ \forall\ n > 0$	*compatibilità* della relazione d'ordine con l'innalzamento a potenza.

Sappiamo, in fine, che in $\mathbb{N}$ è definita una "operazione" di *divisione con resto*. Sussiste infatti il seguente Teorema di cui omettiamo la dimostrazione.

TEOREMA 1. *Quali che siano i numeri naturali a e b, con b* > 0, *esiste una e una sola coppia di numeri naturali* (q, r) *tali che:*
1) $a = qb + r$,
2) $(0 \leq)\ r < b$. ∎

DEFINIZIONE. I numeri q ed r prendono rispettivamente il nome di *quoziente* e di *resto* della divisione di a per b. Se è $r = 0$, si dice che a è un *multiplo* di b e che b è un *divisore* di a.

Osserviamo che questa divisione non è un'operazione nel vero senso della parole in quanto non è un'applicazione di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$.

§ 2. IL PRINCIPIO DI INDUZIONE

L'ordinamento esistente in $\mathbb{N}$ ha un'altra interessantissima proprietà. Partendo da 0, si può raggiungere un qualunque numero naturale n con un numero finito di *passi* del tipo $n \mapsto n + 1$.

Sia dunque A l'insieme dei numeri naturali *raggiungibili* da 0 con un numero finito di passi. Ovviamente, $0 \in A$ e, se $n \in A$, è anche $n + 1 \in A$. La cosa interessante è il fatto che un insieme di umeri naturali che gode di queste due proprietà deve necessariamente coincidere con $\mathbb{N}$.

TEOREMA 2 (Principio di induzione). *Sia A un sottoinsieme di* $\mathbb{N}$ *tale che:*
1) $0 \in A$ (*base dell'induzione*),
2) *se* $n \in A$, *anche* $n + 1 \in A$ (*passo dell'induzione*).
Sotto queste ipotesi, si conclude che è $A = \mathbb{N}$.

DIM. Supponiamo, per assurdo, che sia $A \neq \mathbb{N}$. Dunque l'insieme $X = \{n: n \in \mathbb{N} \setminus A\}$ non è vuoto. Per il *Principio del minimo*, esiste $m = \min X$. Non può essere $m = 0$ per l'ipotesi (1). Esiste dunque $m - 1 \notin X$ da cui $m - 1 \in A$. Si ha quindi $m - 1 \in A$ e $(m - 1) + 1 = m \notin A$. Ma ciò va contro la (2). ∎

Intuitivamente, dalle ipotesi del Teorema si vede che: $0 \in A$, da cui $1 \in A$; da $1 \in A$ segue $2 \in A$; da $2 \in A$ segue $3 \in A$; …

Per sottolineare l'importanza di questo risultato, vediamo con un controesempio che le cose possono anche andare altrimenti.

ESEMPIO. 1) Nell'insieme $\mathbb{N}$ introduciamo un nuovo ordinamento in cui tutti i numeri pari precedono i numeri dispari

$$0, 2, 4, 6, \ldots\ldots \quad 1, 3, 5, 7, \ldots\ldots$$

In questo ordinamento è ancora vero che ogni sottoinsieme ha minimo e che ogni elemento n ha un immediato seguente n'; si vede, però, che 1 non ha un immediato precedente. Sia A l'insieme dei numeri pari. Si ha $0 \in A$ e da $n \in A$ segue $n' \in A$, ma, in questo caso, risulta $A \neq \mathbb{N}$.

Se, anziché partire da 0, si parte da un numero k si ha il seguente enunciato equivalente a quello del Teorema 2:

TEOREMA 2' (Principio di induzione). *Sia A un sottoinsieme di* $\mathbb{N}$ *tale che:*
1) $k \in A$ (*base dell'induzione*),
2) *se* $n \in A$, *anche* $n + 1 \in A$ (*passo dell'induzione*).
Sotto queste ipotesi, si conclude che $A \supset \{n \in \mathbb{N}: n \geq k\}$. ∎

Un'altra formulazione dello stesso Teorema è la seguente

TEOREMA 2" (Principio di induzione). *Per ogni numero naturale* $n \geq k \in \mathbb{N}$, *sia* $p(n)$ *una proposizione dipendente da n tale che:*
1) $p(k)$ *è vera* (*base dell'induzione*),
2) *se* $p(n)$ *è vera, allora è vera anche* $p(n + 1)$ (*passo dell'induzione*).
Sotto queste ipotesi, si conclude che $p(n)$ *è vera almeno per ogni* $n \geq k$. ∎

Il Principio di induzione si sfrutta molto spesso per dimostrare la validità di formule o proprietà $p(n)$ che dipendono da $n \in \mathbb{N}$, (dimostrazione *per induzione*) o per ottenere valori numerici $K(n)$ che dipendono da n, quando si conosce il legame tra $K(n)$ e $K(n - 1)$ (metodi *ricorsivi*).

Per dimostrare per induzione la validità di una proprietà *p(n)* bisogna fare *due verifiche*:
a) la validità del punto di partenzea (*p(k)* è vera);
b) la validità del teorema: *Se p(n) è vera, allora anche p(n* + 1*) è vera.*
[L'ipotesi di quest'ultimo teorema è detta *ipotesi induttiva*. Non è che si dimostri che *p(n)* è vera partendo dall'ipotesi che *p(n)* è vera! Ci si limita a controllare che *se p(n)* è vera, allora *deve* essere vera anche *p(n* + 1*)*, solo un passo! Poi si conclude in base al *Principio di induzione*.]

ESEMPI. 2) Si voglia dimostrare che per ogni $n > 0$ sussiste l'uguaglianza

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad [p(n)].$$

Per induzione su *n*.

Base dell'induzione: $n = 1$. Si ha: $1 = \frac{1 \times 2}{2}$; dunque *p(*1*)* è vera.

Passo dell'induzione. Supposta *p(n)* vera, proviamo che è vera anche *p(n* + 1*)*. Si ha

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) \underset{\text{ip ind}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Si è così provato che da *p(n)* vera segue *p(n* + 1*)* vera.
Per il *Principio di induzione*, la *p(n)* è quindi vera per ogni $n \geq 1$.

3) Si voglia dimostrare che per ogni $n > 0$ sussiste l'uguaglianza

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

Per induzione su *n*.
Base dell'induzione: $n = 1$. Si ha: $1^3 = 1^2$; dunque *p(*1*)* è vera.
Passo dell'induzione. Supposta *p(n)* vera, proviamo che è vera anche *p(n* + 1*)*. Si ha

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 \underset{\text{ip ind}}{=} (1 + 2 + \ldots + n)^2 + (n+1)^3 =$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] =$$

$$= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 = (1 + 2 + \ldots + n + (n+1))^2.$$

Per il Principio di induzione, la *p(n)* è quindi vera per ogni $n \geq 1$.

4) Date *n* rette del piano ($n \geq 1$), a 2 a 2 incidenti e a 3 a 3 non concorrenti in un punto, esse dividono il piano in un numero *K(n)* di regioni. Si vuol provare che è $K(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

Per induzione su *n*.

Base dell'induzione: $n = 1$. Si ha: $2 = \frac{1 \times 2}{2} + 1$; dunque *p(*1*)* è vera.

Passo dell'induzione. Supposta *p(n)* vera, proviamo che è vera anche *p(n* + 1*)*.
Fissiamo $n + 1$ rette del piano, a 2 a 2 incidenti e a 3 a 3 non concorrenti in un punto, e diciamo *r* una di queste. La *r* incontra le altre rette in *n* punti che la dividono in $n + 1$ parti (segmenti o semirette). Ognuna di queste parti divide in 2 una delle regioni formate dalle restanti rette. Passando da *n* a $n + 1$ rette, il numero delle regioni ottenute aumenta dunque di $n + 1$. Si ha perciò $K(n+1) = K(n) + (n+1)$. Sfruttando l'ipotesi induttiva, si ottiene

$$K(n+1) = K(n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + 1 + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1.$$

Per il Principio di induzione, la $p(n)$ è quindi vera per ogni $n \geq 1$.

§ 3. GLI INTERI RELATIVI

Consideriamo l'equazione a coefficienti in $\mathbb{N}$

$$a + x = b.$$

Sappiamo che questa ha una e una sola soluzione ($x = b - a$) se è $a \leq b$, mentre se è $a > b$ non ammette nessuna soluzione nell'insieme dei numeri naturali.

Per far sì che un'equazione del tipo $a + x = b$ abbia sempre soluzione, si definisce l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi (relativi)

$$\mathbb{Z} := \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

L'insieme $\mathbb{Z}$ è altrettanto noto di $\mathbb{N}$; ci limiteremo perciò soltanto a qualche osservazione.

Anche in $\mathbb{Z}$ è definita una relazione d'*ordine totale* (<). Sono dunque verificate le prime 4 proprietà elencate nel § 1. Inoltre:

- Ogni numero intero ha un immediato precedente e un immediato seguente.
- $\mathbb{Z}$ non ha né minimo né massimo, ma ogni sottoinsieme non vuoto e inferiormente limitato ha minimo e ogni sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato ha massimo.
- Continua a valere il Principio di induzione secondo gli enunciati dei Teoremi 2' e 2".
- Le operazione di somma e prodotto definite in $\mathbb{Z}$ godono delle proprietà (9) del § 1, salvo che l'ultima assume la seguente forma

$$\left.\begin{array}{l} a < b \Leftrightarrow ac < bc,\ \forall\ c > 0 \\ a < b \Leftrightarrow ac > bc,\ \forall\ c < 0 \end{array}\right\} \qquad \textit{compatibilità}\text{ della relazione d'ordine col prodotto.}$$

Inoltre:

10) Per ogni $x \in \mathbb{Z}$ esiste $-x \in \mathbb{Z}$ tale che $x + (-x) = (-x) + x = 0$ esistenza dell'*opposto*.

11) L'equazione $a + x = b$, con $a, b \in \mathbb{Z}$ ha in $\mathbb{Z}$ una e una sola soluzione data da

$$x = b + (-a) =: b - a.$$

Dell'operazione di innalzamento a potenza ci occuperemo piò avanti (Cap. 4).

Ricordiamo, in fine, che anche in $\mathbb{Z}$ è definita una "operazione" di *divisione con resto*. Sussiste infatti il seguente Teorema:

TEOREMA 3. *Quali che siano i numeri interi a e b, con* $b > 0$, *esiste una e una sola coppia di numeri interi* (q, r) *tali che:*
1) $a = qb + r$,
2) $0 \leq r < b$.

DIM. Se è $a \geq 0$, la tesi segue dal Teorema 1. Sia dunque $a < 0$. Essendo $-a > 0$, esiste, sempre per il Teorema 1, una coppia di numeri naturali (q', r') tale che

$$-a = q'b + r'; \qquad 0 \leq r' < b.$$

Se è $r' = 0$, si ottiene $a = (-q')b + 0$.
Se è $r' > 0$, si ottiene $a = -q'b - r' = -q'b - r' + b - b = -(q' + 1)b + (b - r')$.
Posto $q = -(q' + 1)$ e $r = b - r'$, si prova l'esistenza di una coppia del tipo cercato.
Per provare l'unicità, supponiamo che sia $a = qb + r = q'b + r'$, con $0 \leq r \leq r' < b$. Si ottiene

$$(q - q')b = r' - r.$$

Essendo $0 \leq r' - r < b$, deve essere anche $0 \leq (q - q')b < b$. Ma ciò è possibile solo se è $q = q'$ e, quindi, $r = r'$. ∎

I numeri q ed r prendono ancora rispettivamente il nome di *quoziente* e di *resto* della divisione di a per b. Se è $r = 0$, si dice che a è un *multiplo* di b e che b è un *divisore* di a.

ESEMPIO. Si voglia dividere - 24 per 7. Si ha

$$24 = 3 \times 7 + 3; \quad -24 = -3 \times 7 - 3 + 7 - 7 = -4 \times 7 + 4.$$

§ 4. I NUMERI RAZIONALI

Consideriamo l'equazione a coefficienti interi

$$ax = b, \text{ con } a \neq 0.$$

Sappiamo che questa ha una (unica) soluzione in $\mathbb{Z}$ se e solo se b è multiplo di a.
Per far sì che un'equazione del tipo $ax = b$, con $a \neq 0$, abbia sempre soluzione, si definisce l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri *razionali*.
Diamo un'idea del modo con cui si ottiene questa nuova *estensione numerica*.
Si parte dall'insieme $F = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ formato da tutte le frazioni. È dunque

$$F := \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*\right\}.$$

Si introduce in F la relazione binaria definita da $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow mn' = m'n$ e si verifica che si tratta di un'equivalenza. (Esercizio!)

DEFINIZIONE. Gli elementi dell'insieme quoziente $F/\sim$ sono detti *numeri razionali*. L'insieme dei numeri razionali si indica solitamente con $\mathbb{Q}$ (da quoziente).

In F si definiscono le ben note operazioni di somma e prodotto:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}; \qquad \frac{m}{n}\frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}.$$

A questo punto si verifica che le operazioni ora definite sono compatibili con la relazione di equivalenza. Si dimostra cioè il seguente

TEOREMA 4. *Se è* $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'}$ *e* $\frac{p}{q} \sim \frac{p'}{q'}$ *allora è anche*

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} \sim \frac{m'}{n'} + \frac{p'}{q'} \quad e \quad \frac{m}{n}\frac{p}{q} \sim \frac{m'}{n'}\frac{p'}{q'}. \blacksquare$$

Per esempio, per provare la seconda tesi, bisogna verificare che è $\frac{mp}{nq} \sim \frac{m'p'}{n'q'}$ ossia che è $mpn'q' = m'p'nq$: ma ciò è immediato dato che, per ipotesi, è $mn' = m'n$ e $pq' = p'q$. L'altra verifica è un poco più fastidiosa e la tralasciamo.

Dunque le operazioni definite in F diventano operazioni definite in $\mathbb{Q}$.

Si dimostra poi che queste operazioni godono delle seguenti proprietà:

$(a + b) + c = a + (b + c)$;	$(ab)c = a(bc)$	proprietà *associative*
$a + b = b + a$;	$ab = ba$	proprietà *commutative*
$a + 0 = 0 + a$;	$a1 = 1a$	esistenza dell'*elemento neutro*
$(\forall\, x \in \mathbb{Q})(\exists\, -x \in \mathbb{Q})(x + (-x) = (-x) + x = 0)$		esistenza dell'*opposto*
$(\forall\, x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\})(\exists\, x^{-1} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\})(xx^{-1} = x^{-1}x = 1)$		esistenza del *reciproco*
$a(b + c) = ab + ac$;	$(b + c)a = ba + ca$	propr. *distributive* del prodotto rispetto alla somma
$ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$		legge dell'*annullamento del prodotto*
$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$		legge di *cancellazione* della somma
$a = b \Leftrightarrow ac = bc,\ \forall\, c \neq 0$		legge di *cancellazione* del prodotto.

L'equazione $a + x = b$, con $a, b \in \mathbb{Q}$ ha in $\mathbb{Q}$ una e una sola soluzione: $x = b + (-a) =: b - a$.

L'equazione $ax = b$, con $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, ha in $\mathbb{Q}$ una e una sola soluzione: $x = ba^{-1}$.

Nell'insieme $\mathbb{Q}$ si introduce anche una relazione d'ordine.

DEFINIZIONE. Dati i due numeri razionali x e y rappresentati, rispettivamente, dalle frazioni $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$, con $n > 0$ e $q > 0$, si definisce $x \leq y$ se e solo se è $mq \leq pn$.

Affinché questa definizione sia sensata, bisogna provare che essa non dipende dalle frazioni scelte per rappresentare i numeri x e y. Si deve cioè mostrare che se è $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'}$, $\frac{p}{q} \sim \frac{p'}{q'}$, con n, n', q, q' tutti positivi, allora si ha $mq \leq pn$ se e solo se è $m'q' \leq p'n'$. Ma ciò si verifica facilmente. Infatti, la disuguaglianza $mq \leq pn$, equivale alla $mqn'q' \leq pnn'q'$, dato che n' e q' sono positivi. Essendo, per ipotesi, $mn' = m'n$ e $pq' = p'q$, l'ultima disuguaglianza equivale alla $m'nqq' \leq p'qnn'$ che, a sua volta, equivale alla $m'q' \leq p'n'$, dato che n e q aono positivi.

Si prova poi la validità delle seguenti proprietà:

$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$ — *compatibilità* della relazione d'ordine con la somma

$$\left.\begin{array}{l} a < b \Leftrightarrow ac < bc,\ \forall\, c > 0 \\ a < b \Leftrightarrow ac > bc,\ \forall\, c < 0 \end{array}\right\}$$ *compatibilità* della relazione d'ordine col prodotto.

Tutto ciò si esprime col

TEOREMA 5. $\mathbb{Q}$ *è un corpo commutativo (o campo) ordinato.* $\blacksquare$

Si tenga ben presente che, a differenza di quanto accade in $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Z}$, nell'ordinamento di $\mathbb{Q}$ un elemento *non ha* più né un immediato precedente né un immediato seguente. Anzi sussiste il

TEOREMA 6. *Il campo dei numeri razionali è denso,* cioè: *fra due numeri razionali ce n'è sempre compreso almeno un altro (e quindi ce ne sono infiniti).*

DIM. Siano dati due numeri razionali a e b, con $a < b$. Sommando ad ambo i membri di questa disuguaglianza una volta a e una volta b, si ottiene $2a < a + b < 2b$, da cui

$$a < \frac{a+b}{2} < b. \blacksquare$$

Accenniamo ora brevemente al problema della rappresentazione decimale dei numeri razionali. Ricordiamo intanto la

DEFINIZIONE. Dato un numero razionale x, si chiama *parte intera di* x il più grande numero intero che non supera x; esso si indica con $[x]$. Il numero $x - [x]$, che si indica con (x), è detto la *mantissa* di x. Per definizione, è dunque

$$x = [x] + (x), \quad [x] \in \mathbb{Z}, \quad [x] \leq x < [x] + 1, \quad 0 \leq (x) < 1.$$

Per esempio, si ha $-\frac{23}{7} = -4 + \frac{5}{7}$; è dunque $\left[-\frac{23}{7}\right] = -4$ e $\left(-\frac{23}{7}\right) = \frac{5}{7}$.

Ora si ha

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{10}\,\frac{50}{7} = \frac{1}{10}\left(7 + \frac{1}{7}\right) = \frac{7}{10} + \frac{1}{10}\,\frac{1}{7} = \frac{7}{10} + \frac{1}{100}\,\frac{10}{7} =$$
$$= \frac{7}{10} + \frac{1}{100}\left(1 + \frac{3}{7}\right) = \frac{7}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100}\,\frac{3}{7} = \ldots$$

Si ottiene così il ben noto algoritmo della divisione. Utilizzando l'usuale notazione posizionale delle cifre "dopo la virgola", si ricava la scrittura

$$-\frac{23}{7} = -4 + 0{,}\,71428571824571\ldots = -4 + 0{,}\overline{714285}.$$

Questa tecnica può essere usata per trovare la *rappresentazione decimale* di un qualunque numero razionale. Siccome i possibili resti nei singoli passi delle divisioni successive (dopo la virgola) sono in numero finito, ne viene che la scrittura ottenuta è sempre *periodica*; si potrebbe anche dimostrare che il *periodo* non può essere fatto da sole cifre 9.

Osserviamo che vale anche il viceversa, cioè: *una qualunque successione periodica di cifre non definitivamente uguali a* 9 *è la successione delle cifre della rappresentazione decimale di un numero razionale* x, *con* $0 \leq x < 1$.

Per esempio, data la scrittura $0{,}12\overline{345}$, cerchiamo un numero razionale x il cui sviluppo decimale coincida con quello dato. Se un tale x esiste, cioè se è $x = 0{,}12\overline{345}$, si ha

$$100x = 12 + 0{,}\overline{345} \quad \text{e} \quad 100000x = 12345 + 0{,}\overline{345}.$$

Si ricava $(100000 - 100)x = 12345 - 12$, da cui $x = \frac{12345 - 12}{99900} = \frac{12333}{99900}$. Si constata poi che, effettivamente, lo sviluppo di questo numero razionate è quello di partenza.

Se fossimo partiti dalla scrittura $-3 + 0{,}12\overline{345}$, avremmo trovato il numero $-3 + \frac{12333}{99900}$.

Quanto visto nell'esempio numerico ha carattere generale:

TEOREMA 7. *I numeri razionali sono tutti e soli quelli che ammettono una rappresentazione decimale periodica con le cifre non definitivamente uguali a* 9. ∎

§ 5. INSUFFICIENZA DEL CAMPO RAZIONALE - I NUMERI REALI

Consideriamo l'equazione $x^2 = 2$ e proviamo che essa non ha alcuna soluzione in $\mathbb{Q}$. Supponiamo che esista un numero razionale positivo $r = \frac{p}{q}$ che sia soluzione della nostra equazione. È lecito supporre p e q primi tra loro. Si ha $p^2 = 2q^2$. Ne viene che p^2 è divisibile per 2. Dunque p è pari e perciò p^2 è divisibile per 4. Deve essere quindi tale anche $2q^2$. Ma questo è assurdo, dato che q, essendo primo con p, è dispari.

Questa non è però l'unica mancanza di $\mathbb{Q}$. Anzi, questa è, per così dire, la meno grave. Si tenga presente che, anche dopo aver introdotto i numeri reali, ci saranno ancora equazioni senza soluzioni: per esempio $x^2 + 1 = 0$. La ragione vera per cui $\mathbb{Q}$ proprio non ci basta è un'altra.

Sappiamo che tutti i numeri razionali sono rappresentabili su una retta (coordinate cartesiane). Ebbene, mentre così facendo ad ogni numero razionale si associa un punto della retta, non è vero il viceversa; esistono cioè dei punti della retta che non hanno ascissa e questo è inaccettabile.

Si potrebbe anche pensare di togliere dalla retta i punti privi di ascissa razionale, ma ciò porterebbe a risultati ancora più strani.

Si introduca in un piano π un sistema di coordinate cartesiane e si costruisca il quadrato di lato 1 e di vertici $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$ e $C(0, 1)$. Consideriamo la circonferenza di centro O e raggio OB. Questa circonferenza deve incontrare la retta OA.in due punti. Ma questi, se ci sono, non hanno ascissa!

E ancora: Consideriamo la circonferenza di centro $C(0, 1)$ e raggio 1 e facciamola rotolare, senza strisciare, sull'asse delle ascisse. Dopo un giro completo, la circonferenza dovrà ben avere un punto di contatto; ma questo, se c'è, non ha ascissa!

Questo tipo di mancanze può anche essere visto sotto un'altra angolazione.

Abbiamo già notato come in $\mathbb{Q}$ ci sono sottoinsiemi superiormente limitati che non hanno estremo superiore. Ciò accade, per esempio, per l'insieme $A = \{x \in \mathbb{Q}^+: x^2 < 2\}$ e anche per l'insieme formato dai numeri razionali positivi che esprimono le misure dei perimetri dei poligoni convessi contenuti in un cerchio di diametro 1.

DEFINIZIONE. Si dice che due sottoinsiemi A e B di $\mathbb{Q}$ formano una coppia di *classi separate,* se per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$, si ha $a < b$.

Ogni eventuale elemento $x \in \mathbb{Q}$ *compreso* fra le due classi, cioè ogni eventuale $x \in \mathbb{Q}$ per cui si abbia $a \leq x \leq b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ è detto *elemento separatore* delle due classi.

Due classi separate A e B sono dette *contigue* se accade che

$$(\forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}^+)(\exists\, a \in A)(\exists\, b \in B)(b - a < \varepsilon).$$

Ovviamente, una coppia di classi contigue non può avere più di un elemento separatore. Infatti, se esistessero due elementi separatori x e y, per esempio con $x < y$, per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ si avrebbe $a \leq x < y \leq b$, da cui $b - a \geq y - x$, contro la definizione di classi contigue.

Ebbene, in $\mathbb{Q}$ ci sono coppie di classi separate che non hanno elementi separatori. Basta prendere i sottoinsiemi $A = \{x \in \mathbb{Q}^+: x^2 < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q}^+: x^2 > 2\}$.

Per ovviare a tutte queste lacune si introducono i numeri reali.

Una trattazione rigorosa dei numeri reali è una cosa molto impegnativa che richiede tempo e fatica. Cercheremo di semplificare al massimo le cose, procurando di dare solo le idee fondamentali.

Ripartiamo l'insieme $\mathbb{Q}$ in due classi *separate* A e B. Ci sono due possibilità:

1) Esiste un elemento separatore $r \in \mathbb{Q}$; dunque si ha $(r = \max A) \vee (r = \min B)$. Decidiamo di metterci sempre nella seconda situazione, cioè in quella in cui A non ha massimo e B ha minimo.

2) Non esiste in $\mathbb{Q}$ un elemento separatore. Dunque A non ha massimo e B non ha minimo.

(Non può accadere che esistano $a = \max A$ e $b = \min B$, perché allora $\frac{a+b}{2}$ non starebbe né in A né in B.)

La situazione critica è la (2). Bisogna dunque inventare dei nuovi numeri che coprano questi buchi. Questi nuovi numeri sono detti *irrazionali*. L'unione degli insiemi dei numeri razionali e dei numeri irrazionali dà l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri *reali*. Ammettiamo dunque che, per ogni ripartizione di $\mathbb{Q}$ in due classi separate, esiste uno ed un solo numero reale fra esse compreso.

In modo un po' più preciso:

DEFINIZIONE. Chiameremo *sezione* o *taglio* di $\mathbb{Q}$ ogni sua ripartizione (A, B) in classi separate (anzi contigue) in cui la prima classe non ha massimo.

DEFINIZIONE. Dicesi *numero reale* ogni sezione (A, B) di $\mathbb{Q}$. L'insieme dei numeri reali si indica con $\mathbb{R}$.

(Se tale definizione spaventa, si pensi pure che *una sezione di* $\mathbb{Q}$ *individua un numero reale*.)

Teniamo ben presente che ogni numero razionale r individua ed è individuato da una sezione (A, B) di $\mathbb{Q}$ in cui è $r = \min B$; la indicheremo con $\hat{r}$.

Sappiamo che, se è $\hat{r} = (A, B)$, r è l'unico elemento separatore fra A e B. Quello che vorremmo poter dire è che sussiste un'analoga proprietà per ogni numero reale α. Ma, per poterlo fare, abbiamo bisogno di definire in $\mathbb{R}$ una relazione d'ordine. La definizione più naturale è la seguente:

DEFINIZIONE. Dati $\alpha = (A, B)$ e $\alpha' = (A', B')$, si pone $\alpha < \alpha'$ se e solo se è $A \subsetneqq A'$ o, equivalentemente, se e solo se è $B' \subsetneqq B$.

Si dimostra facilmente che questa è effettivamente una relazione d'ordine totale e che, dati $r, s \in \mathbb{Q}$, si ha $r < s$ se e solo se è $\hat{r} < \hat{s}$. (Esercizio!)

LEMMA 8. *Siano* $\alpha = (A, B)$ *un numero reale e* x *un numero razionale diverso da* α. *Si ha* $x \in A$ *se e solo se è* $\hat{x} < \alpha$ *e* $x \in B$, *con* $x \neq \min B$, *se e solo se è* $\hat{x} > \alpha$.

DIM. Dato un numero razionale x, si ponga $\hat{x} = (A^*, B^*)$. Se è $x \in A$, ai ha $A^* \subset A$; è dunque $\hat{x} \le \alpha$, anzi $\hat{x} < \alpha$, dato che è $x \in A \setminus A^*$. Se è $x \in B$, ai ha $B^* \subset B$; è dunque $\hat{x} \ge \alpha$, anzi $\hat{x} > \alpha$, dato che x è il minimo di B^* ma non di B.

Il viceversa si prova facilmente ragionando per assurdo. ∎

In particolare, dato $\alpha = (A, B)$, si ha $\alpha > 0$ se e solo se in A esistono dei numeri (razionali) positivi e si ha $\alpha < 0$ se e solo se in B ci sono degli elementi negativi.

§ 6. PROPRIETÀ FONDAMENTALI DI $\mathbb{R}$

TEOREMA 9 (della densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). *$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.* Cioè: *Fra due numeri reali è sempre compreso un numero razionale.*

DIM. Siano dati due numeri reali $\alpha = (A, B)$ e $\alpha' = (A', B')$, con $\alpha < \alpha'$ ossia tali che $A \subsetneq A'$. Esiste dunque almeno un numero razionale $s \in A' \setminus A$, ossia $s \in A' \cap B$. Siccome A' non ha massimo, esiste $r > s$, con $r \in A'$. È ancora $r \in A' \cap B$ e certamente r non è il minimo di B. È dunque $\alpha < \hat{r} < \alpha'$. ∎

D'ora in poi identificheremo i numeri razionai r con le corrispondenti sezioni $\hat{r}$.

TEOREMA 10 (di esistenza dell'estremo superiore). *Ogni insieme non vuoto e superiormente limitato E di numeri reali ammette estremo superiore.*

DIM. Sia E ($\subset \mathbb{R}$) non vuoto e superiormente limitato. Siano K l'insieme dei numeri razionali che sono limitazioni superiori di E e H il complementare di K in $\mathbb{Q}$. Gli insiemi H e K formano una ripartizione di $\mathbb{Q}$ in due classi separate. Siano, infatti, $h \in H$ e $k \in K$. Se fosse $h \geq k$, anche h sarebbe una limitazione superiore di E; dato che ciò non è, deve essere $h < k$. Inoltre, H non ha massimo. Infatti, fissato $h \in H$, esiste $x \in E$ tale che $h < x$. Fra h e x ci sono numeri razionali che devono appartenere a H e che sono più grandi di h. Dunque (H, K) è una sezione di $\mathbb{Q}$, ossia un numero reale α compreso fra H e K.

Proviamo che è $\alpha = \sup E$. Intanto vediamo che α è una limitazione superiore di E. Infatti se così non fosse, esisterebbe un $x \in E$ con $x > \alpha$. Per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, esisterebbe anche un numero razionale r compreso tra α e x. Ma allora si avrebbe $r \in H$, dato che è $r < x$, e $r \in K$, dato che è $r > \alpha$. Se poi α non fosse la minima limitazione superiore di E, ne esisterebbe una β più piccola di α. Fra β ε α ci sarebbe un numero razionale s il quale dovrebbe ancora una volta appartenere sia a H che a K. ∎

Esiste poi un analogo teorema di esistenza dell'estremo inferiore. I risultati di questi due teoremi si esprime anche dicendo che l'insieme $\mathbb{R}$ è *continuo.*

ESEMPI. 1) Sia $I = \{x: -1 \leq x < 2\}$. Si ha $\inf I = \min I = -1$ e $\sup I = 2$.

2) Sia $E = \{x : x = 1/n, n \in \mathbb{N}^+\}$. Si ha $\inf I = 0$ e $\sup I = \max I = 1$.

Per esprimere il fatto che un insieme è superiormente [inferiormente] illimitato, si *dice* che è $\sup E = +\infty$ [$\inf E = -\infty$].

La nozione di classi separate definita in $\mathbb{Q}$ si estende pari-pari anche a $\mathbb{R}$.

DEFINIZIONE. Due classi separate A e B di $\mathbb{R}$ sono dette *contigue* se è $\sup A = \inf B$.

TEOREMA 11. *Ogni coppia di classe separate A e B di $\mathbb{R}$ ammette almeno un elemento separatore. L'elemento separatore è unico se e solo se è $\sup A = \inf B$, ossia se e solo se le due classi sono contigue.*

DIM Per il Teorema 10, esistono $\alpha = \sup A$ e $\beta = \inf B$. Siccome ogni elemento di B è limitazione superiore per A; si ha $\alpha \leq b$, per ogni $b \in B$. Dunque α è una limitazione inferiore di B. Si ha pertanto $\alpha \leq \beta$. Sono perciò elementi separatori di A e B tutti e soli i numeri reali x tali che $\alpha \leq x \leq \beta$. La seconda parte della tesi, a questo punto, è ovvia. ∎

Osserviamo esplicitamente che, dato un numero reale $\alpha = (A, B)$, si ha $\alpha = \sup A = \inf B$.

TEOREMA 12. *Esiste una corrispondenza biunivoca ordinata tra $\mathbb{R}$ e l'insieme dei punti di una retta r.*

DIM. Sappiamo rappresentare su r i numeri razionali. Dato $\alpha = (A, B)$, i punti provenienti dai numeri di A individuano una semiretta di origine un punto P al quale si attribuisce ascissa α. Abbiamo così un'applicazione di $\mathbb{R}$ in r. È facile vedere che questa è biiettiva e che, al crescere di α in $\mathbb{R}$, il corrispondente punto $P(\alpha)$ si muove su r in uno dei due versi possibili. ∎

In $\mathbb{R}$ si introducono le operazioni di somma e prodotto. Siano $\alpha = (A, B)$ e $\alpha' = (A', B')$.

Somma. Sappiamo che se a, a', b, b' sono, rispettivamente, elementi di A, A', B, B', allora si ha $a + a' < b + b'$. Dunque le classi di numeri razionali A'' e B'' definite da

$$A'' := \{a + a' \colon\ a \in A, a' \in A'\} \quad \text{e} \quad B'' := \{b + b' \colon b \in B, b' \in B'\}$$

sono separate. Si prova poi che esse sono anche contigue. Esiste dunque uno ed un solo elemento separatore fra A'' e B'' che viene assunto, per definizione, come $\alpha + \alpha'$.

Prodotto di numeri reali positivi. Sappiamo che se a, a', b, b' sono elementi positivi rispettivamente di A, A', B, B', allora si ha $(0 <)\ aa' < bb'$. Dunque le classi di numeri razionali A^* e B^* definite da

$$A^* := \{aa' \colon (a \in A) \wedge (a > 0) \wedge (a' \in A') \wedge (a' > 0)\}$$
$$\text{e} \quad B^* := \{bb' \colon (b \in B) \wedge (b' \in B')\}$$

sono separate. Si prova poi che esse sono anche contigue. Esiste dunque uno ed un solo elemento separatore fra A^* e B^* che viene assunto, per definizione, come $\alpha\alpha'$.

Ricordiamo la

DEFINIZIONE. Dato un numero reale x si chiama *valore assoluto* di x il numero reale

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se è } x \geq 0 \\ -x & \text{se è } x < 0. \end{cases}$$

Prodotto di numeri reali qualsiasi. Dati due numeri reali α e α', si definisce il loro prodotto come segue: Si assume intanto $|\alpha\alpha'| = |\alpha| \times |\alpha'|$; inoltre si adotta la ben nota regole dei segni (ossia: $\alpha\alpha'$ è positivo se e solo se α e α' hanno segni concordi, negativo se α e α' hanno segni discordi). In particolare, $\alpha\alpha'$ è nullo se e solo se è nullo uno dei due fattori.

Si dimostra poi che le operazioni ora definite godono di tutte le proprietà formali di cui godevano le analoghe operazioni in $\mathbb{Q}$ e che per i numeri razionali i risultati sono quelli già noti.

Tenuto poi conto del Teorema 10, tutto ciò è riassunto dal

TEOREMA 13. $\mathbb{R}$ *è un corpo commutativo (o campo) ordinato e continuo.* ∎

Osservazione. Tra due numeri razionali c'è sempre almeno un numero irrazionale. Infatti, dati $a, b \in \mathbb{Q}$, basta prendere il numero $a + \dfrac{b - a}{\sqrt{2}}$.

Le nozioni di *parte intera* e *mantissa* definite nel § 4 per i numeri razionali si estendono in modo del tutto naturale ai numeri reali.

Sussiste il seguente Teorema di cui tralasciamo la dimostrazione.

TEOREMA 14. *Sia S l'insieme delle scritture del tipo* $A + 0{,}a_1a_2a_3 \dots a_n \dots$, *con* $A \in \mathbb{Z}$, $0 \le a_n \le 9$ *e con* a_n *non definitivamente uguale a* 9. *Introduciamo in S l'ordinamento lessicografico* (ossia quello del vocabolario). *Tra gli insiemi* $\mathbb{R}$ *e S esiste una corrispondenza biunivoca e ordinata.* ∎

Adesso che in $\mathbb{R}$ abbiamo le operazioni, possiamo stabilire i seguenti risultati che caratterizzano, rispettivamente, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di un insieme di numeri reali.

TEOREMA 15. *Sia E un insieme non vuoto e superiormente limitato di numeri reali. Un numero reale* λ *è l'estremo superiore di E se e solo se soddisfa alle due seguenti proprietà*

1) $(\forall\, x \in E)(x \le \lambda)$,
2) $(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, x \in E)(x > \lambda - \varepsilon)$.

DIM. La (1) equivale a dire che λ è una limitazione superiore di E. La (2) dice che, invece, ogni numero minore di λ, che si può sempre scrivere nella forma $\lambda - \varepsilon$, non lo è più. Le due proprietà prese assieme dicono dunque che λ è la minima limitazione superiore di E. ∎

TEOREMA 15'. *Sia E un insieme non vuoto e inferiormente limitato di numeri reali. Un numero reale* μ *è l'estremo inferiore di E se e solo se soddisfa alle due seguenti proprietà*

1) $(\forall\, x \in E)(x \ge \mu)$,
2) $(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, x \in E)(x < \mu + \varepsilon)$. ∎

Si è visto che, se l'insieme E è superiormente illimitato, si dice che è $\sup E = +\infty$. È dunque $\sup E = +\infty$ se e solo se $(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, x \in E)(x > M)$.

Similmente, se l'insieme E è inferiormente illimitato, si dice che è $\inf E = -\infty$. È dunque $\inf E = -\infty$ se e solo se $(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, x \in E)(x < M)$.

Proviamo ora che la definizione di classi contigue di $\mathbb{R}$ data in questo paragrafo è in accordo con quella data nel § 5 per i numeri razionali

TEOREMA 16. *Due classi separate A e B di numeri reali sono contigue se e solo se*

$$(*) \qquad (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, a \in A)(\exists\, b \in B)(b - a < \varepsilon).$$

DIM. Se le due classi sono contigue, si ha $\sup A = \inf B = \lambda$. Fissiamo ora un $\varepsilon > 0$. Per i Teoremi precedenti, esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che $a > \lambda - \varepsilon/2$ e $b < \lambda + \varepsilon/2$. Si ha dunque $b - a < \varepsilon$. Pertanto la (*) è verificata. Viceversa, se le classi non sono contigue, si ha $\sup A = \alpha < \beta = \inf B$. Per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ si ha allora $b - a \ge \beta - \alpha$. In questo caso, la (*) non sussiste. ∎

ESEMPI. 3) Sia $E = \left\{\dfrac{2x}{1+x} : x \in \mathbb{R}^+\right\}$. Proviamo che è $\sup A = 2$. Essendo $x > 0$, si ha:

a) $\dfrac{2x}{1+x} = 2\dfrac{x}{1+x} < 2$.

b) Dato $\varepsilon > 0$, si ha: $\dfrac{2x}{1+x} > 2 - \varepsilon \Leftrightarrow 2x > (1+x)(2-\varepsilon) \Leftrightarrow \varepsilon x > 2 - \varepsilon \Leftrightarrow x > \dfrac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$.

4) Sia $A = \left\{\dfrac{3+2x}{1+x} : x \in \mathbb{R}^+\right\}$. Proviamo che è $\inf A = 2$. Essendo $x > 0$, si ha:

a) $\dfrac{3+2x}{1+x} = 2 + \dfrac{1}{1+x} > 2$.

b) Dato $\varepsilon > 0$, si ha: $\dfrac{3+2x}{1+x} < 2 + \varepsilon \Leftrightarrow 3 + 2x < (1+x)(2+\varepsilon) \Leftrightarrow \varepsilon x > 1 - \varepsilon \Leftrightarrow x > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.

5) Sia $A = \left\{\dfrac{1}{x}: |x| < 2,\ x \neq 0\right\}$. Proviamo che è $\inf A = -\infty$. Dobbiamo cioè provare che l'insieme A è inferiormente illimitato. Fissiamo dunque un $M \in \mathbb{R}$. È lecito supporre $M < 0$ e possiamo anche limitarci agli $x < 0$; si ha: $\dfrac{1}{x} < M \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{M}$. Dovendo però essere anche $x > -2$, si prendono gli x tali che $x > \max\{-2, M^{-1}\}$.

§ 7. INTERVALLI E INTORNI

DEFINIZIONE. Fissati $a, b \in \mathbb{R}$, si chiamano *intervalli limitati* di *estremi a* e *b* gli insiemi:

$]a, b[:= \{x: a < x < b\}$, intervallo *aperto*;

$[a, b] := \{x: a \le x \le b\}$, intervallo *chiuso*;

$]a, b] := \{x: a < x \le b\}$, intervallo *aperto a sinistra* e *chiuso a destra*;

$[a, b[:= \{x: a \le x < b\}$, intervallo *chiuso a sinistra* e *aperto a destra*.

Fissato $a \in \mathbb{R}$, si chiamano *intervalli illimitati* di *estremo a* gli insiemi:

$]a, +\infty[:= \{x: x > a\}$, $\quad]-\infty, a[:= \{x: x < a\}$, $\quad$ intervalli illimitati *aperti*;

$[a, +\infty[:= \{x: x \ge a\}$, $\quad]-\infty, a] := \{x: x \le a\}$, $\quad$ intervalli illimitati *chiusi*;

si pone poi $]-\infty, +\infty[:= \mathbb{R}$, $\quad$ intervallo illimitato *aperto e chiuso.*

La proprietà caratterizzante gli intervalli è espressa dal seguente teorema, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio al Lettore.

TEOREMA 17. *Gli intervalli sono tutti e soli i sottoinsiemi I di* $\mathbb{R}$ *con più di un elemento che godono della seguente proprietà* (cfr. Esercizio 6):

Dati $x, y, z \in \mathbb{R}$, *con* $x < y < z$, *da* $x, z \in I$ *segue* $y \in I$. ▮

Per ragioni di comodità, si chiamano *intervalli degeneri* gli insiemi formati da un solo punto e all'insieme vuoto si dà il nome di *intervallo nullo* e ciò per rendere vero il seguente risultato

TEOREMA 18. *L'intersezione di quanti si vogliano intervalli è un intervallo.*

DIM. Sia data un'arbitraria famiglia di intervalli e tre elementi $x < y < z$. Se x e z appartengono a tuteli gli intervalli della famiglia, accade lo stesso anche per y. ∎

DEFINIZIONE. Dato un intervallo limitato di estremi a e b, il punto $x_0 = \frac{a+b}{2}$ è detto il suo *centro*. Si chiama poi *raggio* o *semiampiezza* dell'intervallo il numero $r = b - x_0 = x_0 - a$, mentre al numero $b - a$ si dà il nome di *diametro* o *ampiezza* dell'intervallo.

Dunque l'intervallo aperto di centro x_0 e raggio δ, con $\delta > 0$, è l'insieme $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.
Ogni punto di un intervallo che non sia uno dei suoi estremi è detto *interno* all'intervallo.

TEOREMA 19 (di Cantor). *Data una successione* $(I_n)_n$ *di intervalli chiusi e limitati, decrescente per inclusione* (ossia tale che $I_n \supset I_{n+1}$) *esiste almeno un elemento comune a tutti gli intervalli. Se poi l'ampiezza degli intervalli diventa arbitrariamente piccola, il punto comune è unico.*

DIM. Sia $I_n = [a_n, b_n]$. Essendo $I_n \supset I_{n+1}$, si ha $a_n \leq a_{n+1}$ e $b_n \geq b_{n+1}$. Dati $m, n \in \mathbb{N}$, sia k un naturale maggiore di entrambi. Si ha $a_n \leq a_k < b_k \leq b_m$. Dunque le due classi numeriche $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$sono separate. Per il Teorema 11, esiste un elemento x tale che $a_n \leq x \leq b_m$, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$. In particolare, si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq x \leq b_n$, da cui $x \in I_n$, dato che quest'ultimo intervallo è chiuso. La seconda parte del teorema è poi immediata, dato che, se l'ampiezza degli intervalli diventa arbitrariamente piccola, le classi A e B sono contigue. ∎

Si noti che se gli intervalli di partenza non sono chiusi e limitati, l'intersezione *può* essere vuota

ESEMPI. 1) Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $I_n = \left]0, \frac{1}{n}\right]$. Gli intervalli sono limitati ma non chiusi; la loro intersezione è vuota.

2) Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $I_n = [n, +\infty[$. Gli intervalli sono chiusi ma illimitati; la loro intersezione è vuota.

3) Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $I_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$. Gli intervalli non sono chiusi e limitati, ma la loro intersezione non è vuota, essendo data da $\{0\}$.
Il Teorema di Cantor dà una condizione *sufficiente*, ma *non necessaria.*

DEFINIZIONE. Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, si chiama *intorno di* x_0 ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ contenente un intervallo aperto di centro x_0.

ESEMPI. 4) Ogni intervallo aperto (in particolare $\mathbb{R}$) è intorno di ogni suo punto. Ogni intervallo non aperto è intorno di ogni suo punto interno, ma non dei suoi estremi.

5) $\mathbb{Q}$ non è intorno di nessuno dei suoi punti.

6) L'insieme $E = [1, 2[\cup \{3\}$ non è un intorno né di 3 né di 1, mentre è un intorno di $x = 1{,}000001$.

NOTAZIONE. Indicheremo con $\mathcal{U}(x)$ l'insieme degli intorni di un punto x. È dunque $\mathcal{U}(x) := \{U: U$ è un intorno di $x\}$.

TEOREMA 20. 1) *Ogni intorno di un punto contiene il punto stesso.*
2) *Se U è un intorno di* x_0 *e* $V \supset U$, *allora anche V è un intorno di* x_0.
3) *Se U e V sono intorni di* x_0, *allora è tale anche l'insieme* $U \cap V$.
4) *Se è* $x_0 \neq y_0$, *allora esistono un* $U \in \mathcal{U}(x_0)$ *e un* $V \in \mathcal{U}(y_0)$ *tali che* $U \cap V = \emptyset$.

DIM. Se $U \in \mathcal{U}(x_0)$, allora, per definizione, esiste un intervallo aperto I di centro x_0 contenuto in U; dunque $x_0 \in U$ (Prop. 1). Se poi è $U \subset V$, si ha anche $I \subset V$, e quindi anche V è intorno di x_0 (Prop. 2). Se U e V sono intorni di un punto x_0, esistono un intervallo I' contenuto in U e un intervallo I'' contenuto in V, entrambi con centro in x_0; quello dei due intervalli che ha il raggio più piccolo è contenuto in $U \cap V$ che è dunque ancora un intorno di x_0 (Prop. 3).

Per provare la (4), basta prendere gli intervalli I_1 di centro x_0 e raggio δ e I_2 di centro y_0 e raggio δ, con $0 < \delta < \frac{1}{2}|y_0 - x_0|$. ∎

Si tenga ben presente che, nella pratica, l'uso degli intorni avverrà quasi sempre con frasi del tipo

"*Per ogni intorno U di* x_0, *esiste un punto y tale che …*"

"*Esiste un intorno U di* x_0, *per ogni punto y del quale …*"

Si accetta anche la seguente

DEFINIZIONE. Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, si chiama *intorno sinistro di* x_0 ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ contenente un intervallo del tipo $]x_0 - \delta, x_0]$, con $\delta > 0$.

Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, si chiama *intorno destro di* x_0 ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ contenente un intervallo del tipo $[x_0, x_0 + \delta[$, con $\delta > 0$.

Per ragioni di comodità, si dà anche la definizione di intorno di $+\infty$, di $-\infty$ e di ∞.

DEFINIZIONE. Si dice intorno di $+\infty$ ogni insieme che contiene una semiretta del tipo $]a, +\infty[$.
Si dice intorno di $-\infty$ ogni insieme che contiene una semiretta del tipo $]-\infty, a[$.
Si dice intorno di ∞ ogni insieme che contiene una coppia di semirette del tipo $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$, o, ciò che è lo stesso, contiene un insieme del tipo $\{x: |x| > k\}$.

DEFINIZIONE. Si dice che un punto x è *interno* a un insieme E se esiste un intervallo aperto di centro x contenuto in E. L'insieme dei punti interni a un insieme E si chiama *interno* di E e si indica con *int E* o con $\mathring{E}$. Un punto x si dice *esterno* a un insieme E se è interno al complementare di E, ossia se esiste un intervallo aperto di centro x contenuto in $\complement E$.

DEFINIZIONE. Un insieme E è detto *aperto* se ogni suo punto gli è interno o, equivalentemente, se E è intorno di ogni suo punto.
In altre parole, un insieme E è detto *aperto* se è $E = \mathring{E}$.

TEOREMA 21. *Una intervallo aperto è un insieme aperto.*

DIM. Dato $x \in I =]a, b[$, l'intervallo di centro x e raggiro r con $r < \min\{x - a, b - x\}$ è un intorno di x contenuto in I. Se è $I =]a, +\infty[$, basta prendere l'intervallo di centro x e raggio $x - a$. Analogamente per il caso $I =]-\infty, a[$. Se è $I = \mathbb{R}$, la cosa è banale. ∎

DEFINIZIONE. Un punto x è detto *di accumulazione* per un insieme E se in *ogni* intorno di x cadono infiniti punti di E.

DEFINIZIONE. Un insieme E è detto *chiuso* se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

DEFINIZIONE. Un punto $x \in E$ che non sia di accumulazione per E è detto un punto *isolato* di E.

ESEMPI. 7) Ogni intervallo aperto è un insieme aperto (Teor. 21) e ogni intervallo chiuso è un insieme chiuso (Esercizio!). Sia $I = [0,1[$. I *non* è aperto, perché non è intorno di 0; I *non* è nemmeno chiuso, dato che 1 è di accumulazione per I, ma non gli appartiene.

Da tale esempio, si vede che: *Esistono insiemi che non sono né aperti né chiusi!*

8) Ø e $\mathbb{R}$ sono sia aperti che chiusi (Esercizio!). Si potrebbe anzi dimostrare che in $\mathbb{R}$ non ci sono altri insiemi che risultino contemporaneamente aperti e chiusi.

9) Consideriamo il sottoinsieme $\mathbb{Q}$ di $\mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ non ha punti interni; l'insieme dei suoi punti di accumulazione è tutto $\mathbb{R}$. Dunque $\mathbb{Q}$ non è né aperto né chiuso.

10) Sia $E = \left\{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}^+\right\}$. L'unico suo punto di accumulazione è 0 (che non appartiene a E).

Ovviamente, ogni insieme finito E non ha punti di accumulazione.

Ricordiamo che un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ è detto *limitato* se ammette sia limitazioni inferiori che superiori, ossia se è contenuto in un intervallo $[a, b]$.

Si vede subito che un sottoinsieme infinito e illimitato di $\mathbb{R}$ può ammettere o non ammettere punti di accumulazione: basta considerare, da un lato $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$, dall'altro, $\mathbb{Q}$ o lo stesso $\mathbb{R}$.

Sussiste invece al riguardo il seguente risultato:

TEOREMA 22 (di Bolzano - Weierstrass). *Ogni insieme infinito e limitato ammette almeno un punto di accumulazione.*

DIM. Essendo E limitato, esiste un intervallo $I_0 = [a_0, b_0]$ che lo contiene. Diciamo m_0 il punto medio di I_0. In almeno uno dei due sottointervalli $[a_0, m_0]$, $[m_0, b_0]$ cadono infiniti punti di E, dato che ciò avviene per la loro riunione. Sia questo $I_1 = [a_1, b_1]$. Operiamo su I_1 come su I_0: lo dividiamo a metà e scegliamo uno dei due sottointervalli (chiusi) così trovati in modo che in esso cadano infiniti punti di E, ribattezzandolo $I_2 = [a_2, b_2]$. E così di seguito: dato $I_n = [a_n, b_n]$, lo si divide a metà, si prende uno dei due sottointervalli (chiusi) in cui cadono infiniti punti di E e lo si ribattezza $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Si ottiene così una successione di intervalli chiusi e limitati (per costruzione), decrescente per inclusione. Inoltre, l'ampiezza dell'n - imo intervallo I_n è data da $\frac{b - a}{2^n}$, che diventa, al crescere di n, arbitrariamente piccola. Per il Teorema di Cantor, esiste uno ed un solo punto ξ comune a tutti gli I_n. Proviamo che ξ è di accumulazione per E. Fissiamo dunque un intorno U di ξ. Questo contiene un intervallo del tipo $]\xi - \delta, \xi + \delta[$. Preso ora un n per cui è $\frac{b - a}{2^n} < \delta$, si ha $I_n \subset\,]\xi - \delta, \xi + \delta[\, \subset U$. A questo punto abbiamo finito, dato che, per costruzione, in I_n cadono infiniti punti di E. ∎

ESEMPIO. 11) Sia $E = \{n\pi - [n\pi]: n \in \mathbb{N}\}$. L'insieme E è limitato, dato che è contenuto nell'intervallo $[0, 1]$. Esso è anche infinito. Infatti, se così non fosse, dovrebbero esistere due multipli distinti di π che differiscono per un numero intero. L'insieme E ammette perciò almeno un punto di accumulazione. (In realtà ne ammette infiniti: precisamente tutti i punti di $[0, 1]$.)

§ 8. I NUMERI COMPLESSI

Vedremo nel Capitolo 4 che un'equazione del tipo $x^n = a$, con $n \in \mathbb{N}^+$ e $a > 0$, ha sempre in $\mathbb{R}$ una e una sola soluzione positiva. Rimane però il problema che nemmeno in $\mathbb{R}$ ha soluzioni l'equazione $x^2 + 1 = 0$. Dobbiamo dunque costruire un nuovo insieme, che indicheremo con $\mathbb{C}$, di numeri, detti *complessi*, in cui ci sia un elemento i il cui quadrato sia uguale a -1. Volendo che questo nuovo insieme contenga $\mathbb{R}$ e abbia la struttura di corpo, esso dovrà contenere tutti i numeri esprimibili nella forma $a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Inoltre, dovendo valere le note proprietà formali delle operazioni, dovrà aversi

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i; \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

DEFINIZIONE. Dicesi insieme dei numeri *complessi* l'insieme

$$\mathbb{C} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \ (= \mathbb{R}^2),$$

in cui si introducono le seguenti operazioni:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d); \quad (a, b)(c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Si constata facilmente che:
* le operazioni di somma e prodotto così definite sono entrambi associative e commutative:
* il prodotto è distributivo rispetto alla somma;
* (0, 0) è elemento neutro rispetto alla somma e (1, 0) è elemento neutro rispetto al prodotto;
* $(-a, -b)$ è l'opposto di (a, b).

Proviamo inoltre che ogni elemento $(a, b) \neq (0, 0)$ ha reciproco. Cerchiamo dunque un elemento $(x, y) \neq (0, 0)$ tale che $(a, b)(x, y) = (1, 0)$. Essendo, per definizione, $(a, b)(x, y) = (ax - by, ay + bx)$, ciò accade se e solo se x e y soddisfano al sistema

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}.$$

Risolvendo il sistema, si ottiene

$$(x, y) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right).$$

Si ha poi: $$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0).$$

e ancora $$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1).$$

Il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ formato dalle coppie del tipo $(a, 0)$ è isomorfo a $\mathbb{R}$. Fra i due insiemi c'è cioè una corrispondenza biunivoca che conserva le operazioni. Conveniamo dunque di identificare questi due insiemi.

A questo punto possiamo dire che $\mathbb{R}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{C}$ e convenire di scrivere semplicemente x in luogo di $(x, 0)$. Se poi accettiamo di indicare il numero complesso (0, 1) con i, si ottiene che ogni numero complesso z può essere scritto nella forma

$$z = x + yi, \text{ con } x, y \in \mathbb{R}.$$

I conti con i numeri complessi si fanno normalmente; l'unica novità è data dal fatto che, come sappiamo, è $i^2 = -1$. Si tenga ben presente che

TEOREMA 23. *Nell'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi non si può definire una relazione d'ordine totale che sia compatibile con le operazione di somma e prodotto.*

DIM. Supponiamo, per assurdo, che esista un ordinamento totale di $\mathbb{C}$ compatibile con le operazioni di somma e prodotto. Osserviamo, intanto che il quadrato di un numero non nullo deve essere positivo. Inoltre, dato $a \neq 0$, uno e uno solo dei numeri a e $-a$ deve essere positivo. Ora, essendo $1^2 = 1$ e $i^2 = -1$, devono risultare positivi sia 1, sia -1. Si ha così un assurdo. ∎

DEFINIZIONE. Il numero complesso i è detto *unità immaginaria.* Dato il numero complesso $z = x + yi$, i numeri reali x e y prendono, rispettivamente i nomi di *parte reale* e *coefficiente della parte immaginaria.* Ogni numero complesso con parte reale nulla è detto *immaginario puro.*

I numeri complessi sono, per costruzione, coppie di numeri reali. È dunque naturale rappresentarli come punti di un piano detto appunto *piano complesso* o di *Gauss*.

ESEMPI. 1) Si ha:

$$i^0 = 1,\ i^1 = i;\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i;\ i^6 = -1,\ i^7 = -i,$$
$$\dots,\ i^{4n} = 1,\ i^{4n+1} = i;\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i,\ \dots$$

2) Si ha:
$$(3 + i)(1 - 2i) = 3 + 2 + (-6 + 1)i = 5 - 5i.$$
$$(2 - i)^4 = 2^4 - 4 \times 2^3 i - 6 \times 2^2 + 4 \times 2i + 1 = -7 - 24i.$$
$$(\sqrt{2} + i)(\sqrt{2} - i) = 2 - i^2 = 3.$$

3) Si ha:
$$\frac{1}{i} = -i; \qquad \frac{1}{3+i} = \frac{3-i}{(3+i)(3-i)} = \frac{3-i}{10} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i.$$

Il coniugio nel campo complesso

DEFINIZIONE. Dato il numero complesso $z = a + ib$, si chiama suo *(complesso) coniugato* il numero $\overline{z} = a - ib$.

Nel piano di Gauss, il coniugato di un numero z è il simmetrico rispetto all'asse reale.

TEOREMA 24. *Sia* ω: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *l'applicazione definita da* $\omega(z) = \overline{z}$, *ossia da* $\omega(x + yi) = x - yi$. *Allora:*

1) *Si ha:* $\omega(\omega(z)) = z$.

2) *L'applicazione* ω *è biiettiva.*

3) *Si ha* $\omega(z_1 + z_2) = \omega(z_1) + \omega(z_2)$; $\omega(z_1 z_2) = \omega(z_1)\,\omega(z_2)$.

4) *Si ha* $\omega(z) = z$ *se e solo se* z *è un numero reale.*

DIM. 1) Si ha $\omega(\omega(x + yi)) = \omega(x - yi) = x + yi$.

2) Dalla (1) segue intanto che l'applicazione ω è suriettiva. Sia ora $z_1 = x_1 + iy_1 \neq z_2 = x_2 + iy_2$. È dunque $(x_1 \neq x_2) \vee (y_1 \neq y_2)$, da cui anche $\omega(z_1) \neq \omega(z_2)$.

3) Si ha:

$$\omega(z_1) + \omega(z_2) = \omega(x_1 + iy_1) + \omega(x_2 + iy_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) =$$
$$= (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i = \omega(z_1 + z_2)\ .$$
$$\omega(z_1)\,\omega(z_2) = \omega(x_1 + iy_1)\,\omega(x_2 + iy_2) = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) =$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)i = \omega(z_1z_2)\ .$$

4) Si ha $\omega(z) = z$ se e solo se è $x - iy = x + iy$ e dunque se e solo se è $y = -y$. ▮

Tutto ciò si esprime dicendo che

Il coniugio (ossia l'applicazione che ad ogni numero complesso associa il suo coniugato) è un automorfismo involutorio di $\mathbb{C}$, in cui sono uniti tutti e soli i numeri reali.

Si tenga inoltre ben presente il seguente risultato di immediata verifica.

TEOREMA 25. *Per ogni numero complesso $z = x + iy$, i numeri $z + \overline{z}$ e $z\overline{z}$ sono reali e si ha*

$$z + \overline{z} = 2x; \qquad z\overline{z} = x^2 + y^2.\ ▮$$

Della forma trigonometrica dei numeri complessi parleremo nel Capitolo 4.

ESEMPIO. 4) Si ricercano i numeri complessi $z = x + yi$ per cui risulta reale il numero complesso $w = \dfrac{1 + \overline{z}}{z - i}$.

Intanto deve essere $z \neq i$. Ciò posto, si ha:

$$w = \frac{(x + 1) - iy}{x + (y - 1)i} = \frac{(x + 1) - iy}{x + (y - 1)i}\,\frac{x - (y - 1)i}{x - (y - 1)i} =$$

$$= \frac{x(x + 1) - y(y - 1)}{x^2 + (y - 1)^2} - \frac{(x + 1)(y - 1) + xy}{x^2 + (y - 1)^2}\,i,$$

che è reale se e solo se si ha $((x + 1)(y - 1) + xy) = 0) \wedge ((x, y) \neq (0,1))$, ossia se e solo se è

$$(2xy - x + y - 1 = 0) \wedge ((x, y) \neq (0,1)).$$

Nel piano di Gauss, ciò rappresenta un'iperbole equilatera privata del punto (0, 1).

§ 9. E S E R C I Z I

1) Si provi che, nell'insieme $\mathbb{N}$, il *Principio del massimo* è una conseguenza del *Principio del minimo* e dell'esistenza dell'immediato precedente.

[Dato un insieme non vuoto e superiormente limitato $A \subset \mathbb{N}$, si consideri l'insieme $K = \{L: x < L, \forall\, x \in A\}$. Per il *Principio del minimo*, esiste $m = \min K$. Essendo $A \neq \emptyset$, deve aversi $m > 0$. Si prova poi che è $m - 1 = \max A$.]

2) Si provino per induzione le seguenti uguaglianze o disuguaglianze:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}, \qquad n \geq 1;$

b) $1 - 3 + 5 - 7 + \ldots + (-1)^n(2n + 1) = (-1)^n(n + 1)$, $\quad n \geq 0$;

c) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}$, $\quad n \geq 1$;

d) $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $\quad n \geq 1$;

z) $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, $\quad n \geq 1$.

3) Si trovino le frazioni generatrici dei numeri periodici $2,3\overline{41}$; $-6 + 0,\overline{8}$. Si applichi lo stesso procedimento anche alla scrittura $0,\overline{9}$; cosa si scopre?

4) Si provi che dati due numeri razionali (o reali) positivi a e b, si ha $a < b$, se e solo se è $1/a > 1/b$.

5) Posto $A = \left\{\frac{x-1}{2+x} : x \in \mathbb{R}^+\right\}$, si provi che è $\sup A = 1$.

Posto $A = \left\{\frac{2+x}{1+x} : x \in \mathbb{R}^+\right\}$, si provi che è $\inf A = 1$.

Posto $A = \left\{\frac{1}{|x|}: x \neq 0, -2 \leq x \leq 1\right\}$, si provi che è $\inf A = \frac{1}{2}$.

Posto $A = \left\{-\frac{1}{|x|}: x \neq 0, -2 < x < 1\right\}$, si provi che è $\inf A = -\infty$.

6) Si provi il Teorema 17.

7) Si trovino i punti di accumulazione dei seguenti insiemi di numeri reali; per ciascuno di essi, si dica poi se è un insieme aperto e se è un insieme chiuso:

$$\{x: x > 0\}, \quad \{x: x \leq 0\}, \quad \{x: |x| < 2\} \cup \{2\}, \quad \{x: x^2 = 3\}, \quad \{x: x^3 < 3\},$$

$$\left\{\frac{n}{n+1}: n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}^+\right\} \cup \left\{1 - \frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}^+\right\}, \quad \left\{\frac{n+2}{n^2+2}: n \in \mathbb{N}\right\}.$$

8) Si risolvano le seguenti disequazioni:

$$\frac{x+1}{x} - 2 > \frac{x-1}{x}; \qquad \frac{2x+3}{x-1} - \frac{3}{1-x} + 2 > 0; \qquad \frac{3x}{x-2} + \frac{4}{x+2} < 0.$$

9) Si verifichino le seguenti proprietà del valore assoluto:

$$|a| \geq 0; \qquad |a| = 0 \text{ se e solo se è } a = 0; \qquad |a| = |-a|; \qquad |ab| = |a|\,|b|; \qquad |a + b| \leq |a| + |b|;$$

$$|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b; \qquad |a| > b \Leftrightarrow (a < -b) \vee (a > b); \qquad \big||a| - |b|\big| \leq |a - b| \leq |a| + |b|.$$

10) Si risolvano le seguenti disequazioni:

$$|x + 1| > 2; \qquad |2x - 3| - |x + 4| < 5; \qquad \big||x - 1| + x\big| \geq x; \qquad |5 - x| < |2x - 3|;$$

$$x > \sqrt{2x^2 - x - 3}; \qquad \sqrt{4x^2 - 9} > \sqrt{2}x; \qquad \sqrt{|2x + 1| - 1} \geq x - 3;$$

$$\frac{|x+2|-|x-1|}{1-\sqrt[3]{x^2-1}} > 0; \qquad \frac{\sqrt{x^2-1}+x-2}{x} \geq 0.$$

[Esempi.

1) $x > \sqrt{2x^2-8} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2-8 \geq 0 \\ x^2 > 2x^2-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 4 \\ x^2 < 8 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < \sqrt{8}.$

2) $x < \sqrt{8-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 8-x^2 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < 8-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 \leq 8 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in [-\sqrt{8}, 0[\cup [0, 2[= [-\sqrt{8}, 2[.$

La cosa importante da tener presente è che *si può elevare al quadrato i membri di una disequazione se e solo se questi sono entrambi positivi*.]

11) Si eseguano i seguenti calcoli con i numeri complessi:

$$(2-i)^2-(3+i)(3-i); \quad i(1-i)^2(1-3i); \quad (1+i^3+i^6+i^9+i^{12})^2;$$

$$(1-i)^3(1-i)^2-(1+i)^2(1-i)^3; \quad (1-i)^5; \quad (2-i)^4.$$

12) Si ricerchino i reciproci dei seguenti numeri complessi:

$$2i; \quad -5i; \quad 2-i; \quad \frac{1}{\sqrt{3}}+i; \quad 5-24i; \quad \frac{1}{3-4i}; \quad \pi-\pi i.$$

13) Si eseguano i seguenti calcoli con i numeri complessi:

$$3i+\frac{2}{i}; \quad \frac{1-2i}{1+2i}; \quad \frac{1-2i}{(1+2i)^2}; \quad \left(1+\frac{1}{1+i}\right)^2.$$

14) Per ciascuna delle seguenti funzioni $w = w(z)$, si ricerchino i numeri complessi $z = x + yi$ per cui il numero w risulta reale e si rappresentino le soluzioni nel piano di Gauss:

$$(z+\overline{z})^5; \quad \frac{z+i}{z-1}; \quad iz\overline{z}; \quad z^2+\overline{z}^2; \quad \frac{z}{\overline{z}}-i.$$

15) Si rappresenti nel piano di Gauss il luogo dei numeri complessi per cui risulta

$$|2z-1| \leq |z-\overline{z}-1|.$$

Capitolo Terzo

CALCOLO COMBINATORIO

§ 1. INTRDUZIONE, INSIEME PRODOTTO

Il *Calcolo Combinatorio* è quel Capitolo della Matematica che si occupa del computo degli elementi di un insieme finito ottenuto a partire da altri insiemi di cui si conosce già il numero degli elementi.

I problemi di cui ci occupiamo possono essere espressi nelle forme più varie e riferirsi agli argomenti più disparati, come appare dai seguenti

ESEMPI. 1) Quanti sono i triangoli che compaiono nella *Figura 1*?

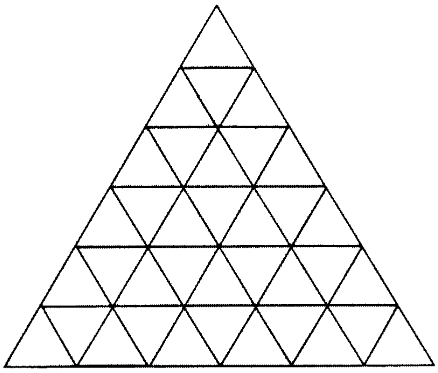


Figura 1

2) Si disputa una partita a "battaglia navale" con uno schema di 10 righe (indicate da lettere dell'alfabeto) e 12 colonne (indicate da numeri naturali). Quante sono le possibili chiamate?

3) Quattordici Studenti devono sostenere un esame orale e segnano il loro nome su un foglio per stabilire l'ordine delle interrogazioni. In quanti modi può essere compilata una tale lista?

4) Stessa situazione dell'Esempio precedente. Si supponga ora che la Commissione Esaminatrice decida di interrogare i Candidati in due giorni diversi, a gruppi di 7. In quanti modi può essere compilata la lista degli Studenti da interrogare il primo giorno?

5) Quante sono le possibili cinquine in un'estrazione del lotto su una ruota?

6) Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di *n* elementi?

7) Quanti sono i numeri di 10 cifre in cui compare tre volte la cifra 1, cinque volte la cifra 2, due volte la cifra 3?

8) Quante sono le possibili colonne della schedina del totocalcio?

9) In quanti modi si possono collocare 20 biglie, fra loro uguali, in 5 scatole numerate?

Un problema, per essere risolubile, deve essere formulato in maniera chiara e inequivocabile. Solo dopo che sono stati stabiliti con chiarezza i termini del quesito, si può pensare alla sua risoluzione.

Non si possono dare dei *metodi generali* per la risoluzione dei vari problemi. In linea di principio, si potrebbe immaginare di *contare uno alla volta* tutti gli elementi dell'insieme, ma questo procedimento è, di regola, sconsigliabile se non, addirittura, impraticabile.
A volte, però, questa è l'unica via possibile.

ESEMPIO. 10) La *Figura 2* rappresenta la pianta del *labirinto* del giardino in *Hampton Court.* Un uomo parte da *A* e vuole arrivare in *M.* Ogni volta che si trova ad un bivio, egli prende una delle strade possibili e la segue finché non scopre che questa è chiusa oppure si vede costretto a percorrere un sentiero già utilizzato; in tal caso, ritorna indietro fino a un bivio che gli permetta di seguire un nuovo cammino. Dopo quanti tentativi, al più, il nostro esploratore raggiungerà la meta?

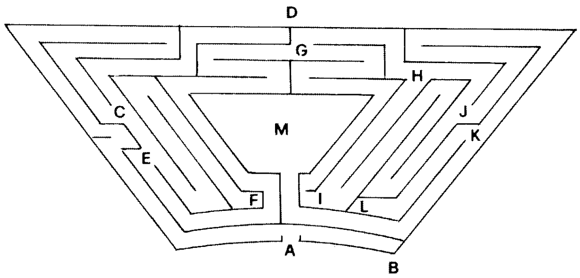


Figura 2

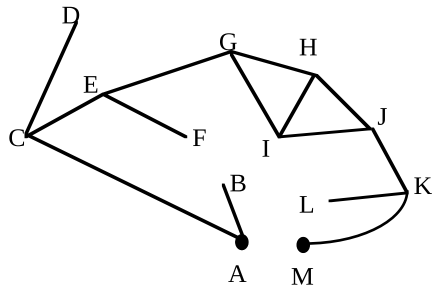


Figura 3

Si rappresentano i bivi con dei punti del piano e si congiungono con degli archi quelli che indicano incroci uniti da sentieri. Si costruisce così il *grafo* di *Figura 3.*

Non ci resta che annotare uno alla volta i percorsi possibili: *ABA, ACDC, CEFE, EGHIGI, IJHJ, JKLK, KM.* I tentativi sono perciò, al massimo, 7.

Vogliamo imparare qualche strategia più razionale e redditizia ma, proprio per questo, meno *universale.* A parte i casi più semplici e immediati, per arrivare al risultato è, quasi sempre, opportuno scindere il problema in altri più semplici e riconducibili ai "Problemi Tipo„ che esporremo tra poco.

Esaminiamo intanto l'Esempio 1. La figura è divisa in triangolini elementari che assumiamo di lato 1; gli altri si ottengono riunendone un numero opportuno. Si ottengono così triangoli equilateri con il lato di lunghezza da 1 a 6; ci sono, inoltre, triangoli a "punta in su" e triangoli a "punta in giù". Per il conteggio, distinguiamo i vari tipi di triangolo:

Lato 1: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 a punta in su e 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 a punta in giù.
Lato 2: 15 a punta in su e 6 a punta in giù. Lato 3: 10 a punta in su e 1 a punta in giù.
Lato 4: 6; lato 5: 3; lato 6: 1, tutti a punta in su.
Si ha così un totale di 21 + 15 + 15 + 6 + 10 + 1 + 6 + 3 + 1 = 78 triangoli.

In luogo di contare gli elementi di un sottoinsieme *A*, contenuto in un insieme *E* di *n* elementi, può essere talvolta più comodo contare gli elementi del complementare di *A* rispetto a *E* e poi sottrarre il numero così trovato da *n.*

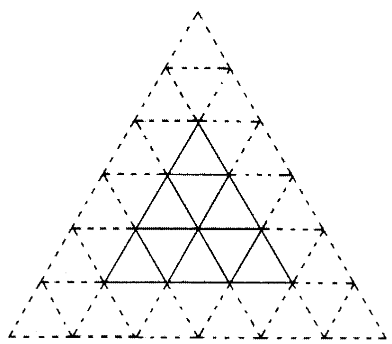


Figura 4

ESEMPIO. 11) Si consideri ancora la *Figura 1*. Quanti sono i triangoli che hanno almeno un punto sul bordo esterno della figura?

Invece di contare i triangoli che ci vanno bene, contiamo quelli che non soddisfano alle condizioni richieste. Guardiamo la *Figura 4* e procediamo come indicato in precedenza. Si vede subito che i triangoli non buoni sono 13. Quelli cercati sono, perciò, 78 - 13 = 65.

Un problema di conteggio presenta, di regola, due ordini di difficoltà: *quali* sono gli elementi da contare e, poi, *quanti* sono. Solo il secondo punto è di pertinenza del Calcolo Combinatorio; il primo è di natura completamente diversa e può essere legato al modo di esprimersi o a questioni proprie di scienze diverse (matematiche e non).

ESEMPIO. 12) Fra i primi 100 000 numeri naturali positivi, quanti sono quelli che hanno la radice quadrata irrazionale?

Tenuto presente il *TEOREMA*: «*Se la radice quadrata di un numero naturale non è un numero naturale, allora è un numero irrazionale*», il quesito diventa semplicemente il seguente: "Fra i primi 100 000 numeri naturali positivi, quanti sono quelli che non sono quadrati perfetti?"

Avendosi $316^2 = 99\,856 < 100\,000 < 317^2 = 100\,489$, i numeri cercati sono dunque $100\,000 - 316 = 99\,684$.

Quando si devono contare gli elementi di un insieme, bisogna prestare molta attenzione a contarli "*tutti*" e "*una sola volta ciascuno".*

ESEMPIO. 13) Fra i primi 1000 numeri naturali positivi, quanti sono quelli che sono multipli di 3 o di 5?

Fra i primi 1000 numeri naturali positivi, i multipli di 3 sono 333, mentre i multipli di 5 sono 200. Sarebbe però errato se concludessimo che la risposta al nostro problema sia 333 + 200 = 533. Infatti, così facendo, i multipli di 15 verrebbero contati due volte (prima fra i multipli di 3 e poi fra quelli di 5). Da 533 bisogna dunque togliere il numero dei multipli di 15. Poiché questi sono 66, il risultato esatto è 533 - 66 = 467.

TEOREMA 1. *Dati due insiemi A e B, rispettivamente di p e q elementi, se l'insieme $A \cap B$ è formato da r (≥ 0) elementi, allora l'insieme $A \cup B$ ne conta $p + q - r$.*

DIM. Si contano gli elementi di A, poi di seguito quelli di B e si osserva che così facendo, se è $r > 0$, gli elementi di $A \cap B$ vengono contati due volte. ∎

DEFINIZIONE. Il numero degli elementi di un insieme finito E viene indicato con $|E|$. Se è $|E| = n$, E è detto un *n - insieme.* L'insieme dei primi n naturali positivi sarà anche indicato con $E(n)$; dunque, per definizione, è $E(n) = \{1, 2, \ldots, n\}$; porremo poi $E(0) = \emptyset$.

Il quesito dell'Esempio n. 2 è un caso particolare del seguente problema:

"Se due insiemi A e B hanno rispettivamente p e q elementi, quanti ne ha il loro insieme prodotto $A \times B$?"

TEOREMA 2. *Se A e B sono due insiemi, rispettivamente di p e q elementi, il loro insieme prodotto $A \times B$ ne conta pq.*

DIM. Procediamo per induzione su p. Per $p = 0$ e $p = 1$, la tesi è immediata. Supponiamola vera per $p - 1$ e proviamola per p. Fissato un elemento $a \in A$, contiamo dapprima le coppie che non contengono a e poi quelle che lo contengono. Per l'ipotesi induttiva, le coppie del primo tipo sono $(p - 1)q$, mentre le altre sono q. In tutto, le coppie sono dunque pq. ∎

Nel nostro gioco di "battaglia navale", le possibili chiamate sono perciò 120.

Facciamo un altro esempio.

ESEMPIO. 14) Sia E l'insieme dei numeri naturali compresi fra 10 e 80. Quanti sono gli elementi di E che hanno la prima cifra pari e la seconda dispari? Quanti quelli che hanno la prima cifra dispari e la seconda pari?

Per la prima domanda non ci sono problemi: la prima cifra può essere scelta in 3 modi e la seconda in 5. I numeri cercati sono dunque $3 \times 5 = 15$.

Veniamo alla seconda domanda. In questo caso è indispensabile sapere che cosa si debba intendere con la parola "compresi"; bisogna cioè decidere se includere anche gli estremi dell'intervallo oppure no, ossia se i numeri 10 e 80 appartengono o meno a E. La cosa è essenziale, dato che il numero 10 ha effettivamente la prima cifra dispari e la seconda pari. Perciò: se si accettano gli estremi, la risposta è $4 \times 5 = 20$; in caso contrario, è 19.

Il Teorema 2 ammette la seguente generalizzazione che si prova in modo del tutto analogo:

TEOREMA 3. *Sia A un insieme di p elementi e, per ogni* $a \in A$, *sia poi* B_a *un insieme di q elementi. Allora l'insieme*

$$E = \{(a, b): a \in A, b \in B_a\}$$

è formato da pq elementi. ∎

ESEMPIO. 15) Sia E l'insieme dei primi 100 numeri naturali positivi. In quanti modi si possono scegliere 3 elementi di E se si vuole che due di essi, e non più di due, siano fra loro consecutivi?

Per scegliere due numeri consecutivi, basta assegnare il più piccolo dei due che, ovviamente, non può essere il 100: ci sono dunque 99 possibilità. Indichiamo questi due numeri con a e a + 1. Passiamo a scegliere il terzo numero che chiameremo c. Se è $a = 1$ o $a = 99$, c può essere scelto in 97 modi; per ciascuna delle altre 97 scelte possibili di a, ci sono solo 96 possibilità per c. Dunque (Teorema 3) i tre numeri cercati possono essere scelti in $2 \times 97 + 97 \times 96 = 9506$ modi diversi.

§ 2. PERMUTAZIONI SEMPLICI

Il quesito dell'Esempio n. 3 de § 1 è un caso particolare del seguente problema:
"In quanti modi si possono ordinare totalmente gli elementi di un n - insieme?"

DEFINIZIONE. Dato un n - insieme E, si dice sua *permutazione* (*semplice*) ciascuno dei possibili modi di ordinare totalmente i suoi elementi, cioè ogni n - pla ottenuta con essi in modo da usarli tutti, ossia ogni applicazione biiettiva di $E(n)$ su E.

ESEMPIO. 1) Se è $E = \{a, b, c\}$, le possibili permutazioni sono 6 e cioè:

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).$$

Il nostro problema può dunque essere così riformulato:
"Quante sono le permutazioni di un insieme E di n elementi?"
Il numero cercato non dipende dalla natura degli oggetti, ma solo da n; indichiamolo con P_n.

DEFINIZIONE. Dato un numero naturale positivo n, si chiama *fattoriale di n* o n - *fattoriale* il prodotto dei primi n numeri naturali positivi, accettando il valore 1 per $n = 1$. Il fattoriale del numero n si indica con il simbolo $n!$. Si definisce inoltre, per comodità, $0! = 1$.

È dunque:
$$n! := \begin{cases} 1, & \text{se è } n = 0 \text{ o } n = 1 \\ 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n, & \text{se è } n > 1 \end{cases}.$$

Si ha, ovviamente:
$$(n + 1)! = (n + 1)n!.$$

Anzi, si vede subito che il fattoriale di un numero naturale può essere definito per ricorrenza dall'uguaglianza $(n + 1)! = (n + 1)n!$, con la condizione iniziale $0! = 1$.

TEOREMA 4. *Le possibili permutazioni di un n - insieme sono* $n!$.

DIM. Per $n = 0$ e $n = 1$, la tesi è ovvia. Supponiamola ora vera per $n - 1$ e proviamola per n. Scegliamo un elemento $a \in E$ da collocare al primo posto: n possibilità; gli altri $n - 1$ elementi possono essere ordinati, per l'ipotesi induttiva, in $(n - 1)!$ modi. Per il Teorema 3, si ha che i possibili ordinamenti di E sono $n(n - 1)! = n!$. ∎

Come si è detto, il numero P_n, ossia il numero delle applicazioni biiettive di *E(n)* in un *n* - insieme *E*, non dipende dalla natura degli oggetti che compongono gli insiemi *E* ed *E(n)*, ma solo da *n*. Si conclude che il Teorema 4 è equivalente al

TEOREMA 5. *Le applicazioni biiettive di un n - insieme A su un n - insieme B sono* $n!$. ∎

Quanto all'Esempio dal quale siamo partiti, si ricava che le liste possibili sono in numero di P_{14} = 14! = 87 178 291 200.

ESEMPIO. 2) Quanti sono i possibili anagrammi della parola *bacile* che non cominciano con *a*?

Dato che le lettere della parola in esame sono tutte distinte, i suoi anagrammi sono tanti quante le permutazioni di un insieme di 6 oggetti, ossia 6! = 720. Da tale numero bisogna però togliere quello degli anagrammi che cominciano con *a*. Questi sono tanti quanti i possibili modi di ordinare, dopo *a*, le altre 5 lettere, ossia 5! = 120. Il numero cercato è dunque 720 - 120 = 600. Si può anche procedere in modo più diretto: la prima lettera può essere scelta in 5 modi; poi basta allineare le altre 5 lettere; si ottiene il numero $5 \times 5! = 600$. (Tutto ciò, naturalmente, se si prescinde dal fatto che le "parole" ottenute abbiano un qualche significato nella lingua italiana!)

Diamo qui di seguito, a titolo di esempio, i valori di $n!$ per i primi numeri naturali:

n	$n!$
0; 1	1
2	2
3	6
4	24
5	120

n	$n!$
6	720
7	5 040
8	40 320
9	362 880
10	3 628 800

n	$n!$
11	39 916 800
12	479 001 600
13	6 227 020 800
14	87 178 291 200
15	1 307 674 368 000

Basta un rapido sguardo alla tabella per rendersi conto che i valori di $n!$ crescono molto rapidamente. In effetti, i valori della funzione $n!$ crescono più rapidamente non solo di quelli di qualunque potenza (n^2, n^3, ...), ma addirittura di quelli delle funzioni esponenziali (10^n, 100^n, ...), cfr. Cap. 5, § 6.

ESEMPI. 3) In una lotteria collegata con una corsa ippica si devono abbinare sette biglietti, già estratti, ai sette cavalli in gara. Quanti sono i possibili abbinamenti?

La risposta non è $(7!)^2$, ma solo 7! = 5040. Ci interessano solo gli abbinamenti e non l'ordine con cui questi vengono effettuati. Possiamo pensare i cavalli già ordinati (per es, secondo il numero di corsia); a questo punto, basta "mettere in fila" anche i biglietti.

4) Due squadre partecipano a un torneo di equitazione. La squadra *A* è formata da 6 concorrenti e la squadra *B* da 5. Quante sono le possibili classifiche individuali in cui si alternano elementi di una squadra con elementi dell'altra, se non ci sono "ex-aequo"? E se uno dei concorrenti della squadra *A* si è ritirato?

Nel primo caso, il primo concorrente deve appartenere alla squadra *A*, il secondo alla squadra *B*, il terzo alla *A*, e così via. A questo punto basta ordinare i concorrenti delle singole squadre ($6! \times 5! = 86\,400$ modi). Veniamo al secondo caso. Il testo è ambiguo. Se si conosce chi è il candidato che si è ritirato, la risposta è $2 \times (5!)^2 = 28\,800$. In caso contrario, il risultato va moltiplicato per 6; si otiene così il numero $6 \times 2 \times (5!)^2 = 172\,800$.

DEFINIZIONE. Dato un numero naturale positivo n, si chiama suo *semifattoriale* il prodotto dei numeri naturali positivi minori o uguali a n che hanno la sua stessa parità, accettando i valori 1, per $n = 1$, e 2, per $n = 2$. Tale numero si indica con $n!!$. Si assume inoltre, per comodità, $0!! = 1$.

È dunque:

$$n!! := \begin{cases} 1, & \text{se è } n = 0 \text{ o } n = 1 \\ 2, & \text{se è } n = 2 \\ 1 \times 3 \times \ldots. \times (n - 2) \times n, & \text{se } n \text{ è dispari e maggiore di } 1 \\ 2 \times 4 \times \ldots. \times (n - 2) \times n, & \text{se } n \text{ è pari e maggiore di } 2 \end{cases} .$$

Si ha ovviamente: $(n + 2)!! = (n + 2)n!!$.

Anzi, si vede subito che il semifattoriale di un numero naturale può essere definito per ricorrenza dall'uguaglianza $(n + 2)!! = (n + 2)n!!$, con le condizioni iniziali $0!! = 1!! = 1$.

Per $n > 0$, sussiste poi l'uguaglianza: $n! = n!!(n - 1)!!$.

ESEMPIO. 5) Si ha:

$$10!! = 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 = 3840; \quad 9!! = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 = 945;$$
$$10!! \times 9!! = 3840 \times 945 = 3\,628\,800 = 10!.$$

§ 3. DISPOSIZIONI SEMPLICI

Il quesito dell'Esempio n. 4 del § 1 è un caso particolare del seguente problema:
"Dato un insieme E di n elementi, quanti sono i suoi sottoinsiemi ordinati di k elementi, essendo k un numero naturale, con $0 \leq k \leq n$?"

DEFINIZIONE. Dato un insieme E di n elementi, ogni suo sottoinsieme *ordinato* di k elementi, con $0 \leq k \leq n$, prende il nome di *disposizione (semplice) di classe k degli elementi di E*; al plurale, si parla di *disposizioni (semplici) di n oggetti a k a k*. In altre parole, le disposizioni di n oggetti a k a k sono le applicazioni iniettive di $E(k)$ in un n - insieme E.

Il nostro quesito può dunque essere così riformulato:
"Quante sono le disposizioni (semplici) di n oggetti a k a k $(0 \leq k \leq n)$?"

Il numero cercato non dipende dalla natura degli oggetti, ma solo da n e da k; indichiamolo con $D_{n,k}$.

DEFINIZIONE. Per ogni numero reale x e per ogni numero naturale k, si definisce

$$(x)_k := \begin{cases} 1, & \text{se è } k = 0 \\ x, & \text{se è } k = 1 \\ x(x - 1)(x - 2)\ldots..(x - k + 1), & \text{se è } k > 1 \end{cases} .$$

Il numero $(x)_k$ prende il nome di *fattoriale discendente di x di ordine k.*
In particolare, per ogni $n,k \in \mathbb{N}$, si ha:

$$(n)_n = n!; \quad (n)_k = 0, \text{ se è } k > n, \quad (n)_k = n(n - 1)\ldots..(n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}, \text{ se è } 0 \leq k \leq n.$$

TEOREMA 6. *Le disposizioni (semplici) di n oggetti a k a k sono in numero di*

$$D_{n,k} = (n)_k.$$

DIM. Per $n = 0$ la tesi è ovvia, dato che c'è un unico modo di scegliere *l'insieme vuoto* (anche se *ordinato*). Sia dunque $k > 0$. Si ha immediatamente:

$$D_{n,1} = n; \quad D_{n,n} = n!.$$

Infatti, nel primo caso c'è solo da scegliere un elemento di E, mentre, nel secondo, abbiamo tutte le sue permutazioni. Sia dunque $1 < k < n$.

Supponiamo di avere una delle disposizioni cercate; facendo seguire agli elementi di questa gli $n - k$ che restano, arbitrariamente ordinati, si ottiene una permutazione di tutti gli elementi di E. Anzi, partendo da una disposizione di classe k, si possono ottenere, nel modo sopra detto, esattamente $(n - k)!$ permutazioni diverse di E. D'altra parte, ogni permutazione di E si può pensare ottenuta con tale legge da un'opportuna (e *unica*) disposizione di classe k. Si conclude così con l'uguaglianza

$$P_n = P_{n-k}\, D_{n,k},$$

ossia: $$D_{n,k} = \frac{P_n}{P_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2).....(n-k+1) = (n)_k. \blacksquare$$

Come si è già detto, il numero $D_{n,k}$ delle disposizioni di n oggetti a k a k, ossia delle applicazioni iniettive di $E(k)$ in un n - insieme E, non dipende dalla natura degli oggetti che compongono gli insiemi E ed $E(k)$, ma solo da n e da k; si conclude che il Teorema 6 è equivalente al seguente

TEOREMA 7. *Le applicazioni iniettive di un k - insieme A in un n - insieme B (con* $0 \le k \le n$*) sono in numero di* $(n)_k$. ∎

Nel caso particolare dell'Esempio da cui siamo partiti, si ottiene che le possibili liste sono

$$D_{14,7} = (14)_7 = 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 17\,297\,280.$$

ESEMPI. 1) Quante sono le parole di 4 lettere distinte che si possono formare utilizzando le lettere del vocabolo "*albergo*"?

Anche in questo caso, come in altri analoghi, prescindiamo dal fatto che le parole di cui si parla abbiano un qualche significato. Ammesso ciò, il problema proposto è quello di sapere in quanti modi si possono disporre 7 oggetti a 4 a 4. La risposta è dunque $D_{7,4} = (7)_4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.

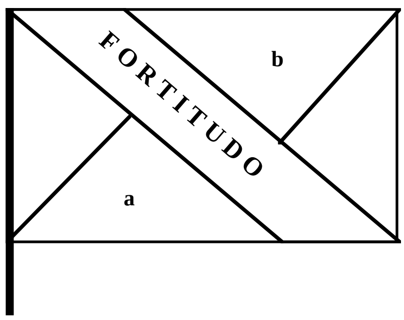


Figura 5

2) Un'associazione sportiva vuole adottare una bandiera come quella mostrata in *Figura 5*, utilizzando alcuni fra i colori seguenti: bianco, nero, rosso, giallo, verde, ocra, azzurro, violetto, arancione. Quante sono le possibili bandiere se si richiede: che la scritta centrale sia o rossa o nera e abbia comunque un colore diverso da quello della fascia che la contiene; che tutte le 5 regioni abbiano colori diversi? E se si chiede che le regioni a e b abbiano lo stesso colore?

La scritta si può fare in 2 modi; restano poi 8 possibilità per la fascia centrale. Per le altre 4 regioni c'è solo il vincolo di non riutilizzare il colore della fascia centrale, fermo restando che devono essere tutte di colore diverso. Si ha così il numero $2 \times 8 \times D_{8,4} = 2 \times 8 \times (8)_4 = 26\,880$. Nel secondo caso, le regioni a e b vengono come unificate: oltre alla striscia centrale, ci sono ora solo 3 regioni ($2 \times 8 \times D_{8,3} = 2 \times 8 \times (8)_3 = 5\,376$ possibilità).

3) Quanti sono i numeri di 6 cifre distinte, da 000 000 a 999 999 (cioè se si conviene di scrivere, per esempio, 012 345 in luogo di 12 345)? Quanti sono i numeri di 6 cifre distinte effettive (cioè numeri di 6 cifre che non cominciano con 0)?

Nel primo caso, la risposta è data da $D_{10,6} = (10)_6 = 151\ 200$. Nel secondo, da $D_{10,6} - D_{9,5} = 9 \times D_{9,5} = 9 \times (9)_5$; bisogna, infatti, togliere i numeri che cominciano con 0, che sono tanti quanti i numeri di 5 cifre distinte e diverse da 0. Naturalmente, a questa seconda domanda si può dare una risposta più diretta: ci sono 9 modi per scegliere la prima cifra ($\neq 0$), poi ci sono $D_{9,5}$ modi per scegliere le cifre successive: in conclusione, i numeri cercati sono appunto $9 \times (9)_5 = 136\ 080$.

§ 4. COMBINAZIONI SEMPLICI

Il quesito dell'Esempio n. 5 del § 1 è un caso particolare del seguente problema:
"Dato un n - insieme E, quanti sono i suoi sottoinsiemi di k elementi, essendo k un numero naturale, con $0 \leq k \leq n$?"

DEFINIZIONE. Dato un insieme E di n elementi, ogni suo sottoinsieme di k elementi ($0 \leq k \leq n$) prende il nome di *combinazione (semplice) di classe k degli elementi di E.* Al plurale, si parla di *combinazioni (semplici) di n oggetti a k a k.*

Possiamo perciò riformulare il nostro quesito così:
"Quante sono le combinazioni (semplici) di n oggetti a k a k?"

Il numero che stiamo cercando non dipende dalla natura degli oggetti, ma solo da n e da k; indichiamolo con $C_{n,k}$. Come appare dalla definizione, la differenza tra *combinazioni* e *disposizioni* consiste nel fatto che gruppi di k oggetti di un insieme E, che differiscano solo per l'ordine con cui essi vengono considerati, danno luogo a diverse disposizioni, ma sono la medesima combinazione. Anzi, si vede subito che da ogni combinazione di classe k si ottengono esattamente $k!$ disposizioni diverse, cioè tante quanti sono i modi di ordinare totalmente i k oggetti in questione. Si ottiene dunque l'uguaglianza

$$D_{n,k} = C_{n,k}\ P_k,$$

dalla quale si ricava

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{P_n}{P_{n-k}}\ \frac{1}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\ k!} = \frac{(n)_k}{k!}\ .$$

Si conclude così col

TEOREMA 8. *Le combinazioni (semplici) di n oggetti a k a k* ($0 \leq k \leq n$) *sono in numero di*

$$C_{n,k} = \frac{(n)_k}{k!}\ . \blacksquare$$

In luogo del simbolo $C_{n,k}$, si usa più volentieri l'espressione $\binom{n}{k}$ che si legge *n su k.*

DEFINIZIONE. Quali che siano i numeri naturali n e k, con $k \leq n$, si definisce:

$$\binom{n}{k} := \frac{(n)_k}{k!}.$$

Dunque, se è $k > 0$ (da cui $n > 0$), si ha:

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-k+1)}{k!}$$

e, in particolare, $$\binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Essendo $0! = 1$, si ottiene $\binom{n}{0} = 1$ e, in particolare, $\binom{0}{0} = 1$, in accordo con l'uguaglianza $\binom{n}{0} = C_{n,0}$ e col fatto che c'è un unico modo di scegliere un sottoinsieme *vuoto* (anche partendo da un insieme privo di elementi).

DEFINIZIONE. I numeri rappresentati dai simboli $\binom{n}{k}$ prendono il nome di *coefficienti binomiali* (il perché verrà spiegato nel prossimo paragrafo).

Quanto al problema del lotto, si ha che le possibili cinquine, su una ruota, sono

$$C_{90,5} = \binom{90}{5} = \frac{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 43\ 949\ 268.$$

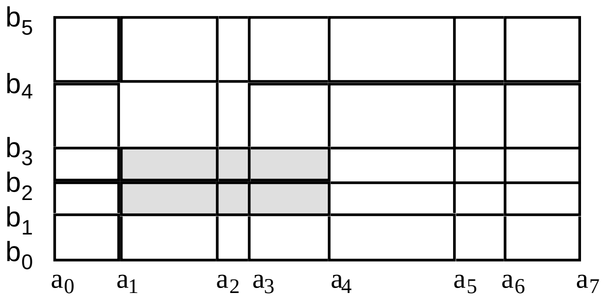


Figura 6

ESEMPI. 1) Quanti sono i rettangoli che compaiono nella *Figura 6*?

Ogni rettangolo è individuato dai suoi 4 lati, ossia da 2 rette *orizzontali* e da due rette *verticali.* Le prime sono in tutto 6, le altre 8. Per esempio, il rettangolo evidenziato in figura è individuato dalle rette orizzontali per b_1 e b_3 e da quelle verticali per a_1 e a_4. Ci sono $\binom{6}{2} = 15$ modi per scegliere le 2 rette orizzontali e $\binom{8}{2} = 28$ modi di scegliere quelle verticali. In tutto, i rettangoli sono perciò $15 \times 28 = 420$.

2) Si consideri ancora la *Figura 6* e la si interpreti come una *pianta stradale.* In quanti modi si può andare da (a_0, b_0) a (a_7, b_5) senza allungare inutilmente la strada?

Ciascuno dei cammini cercati è composto da 7 tratti orizzontali e 5 verticali, per un totale di 12. C'è dunque solo da scegliere l'ordine con cui devono susseguirsi i tratti orizzontali e quelli verticali. Per ottenere una di queste scelte, basta decidere quali dei 12 tratti devono essere orizzontali e, dato che questi devono essere 7, ciò si può fare in $\binom{12}{7} = 792$ modi.

3) Dati 6 punti del piano, a 3 a 3 non allineati, quante rette si ottengono congiungendoli a 2 a 2? Quanti sono, al massimo, gli ulteriori punti di intersezione di queste rette?

Le rette sono, ovviamente $\binom{6}{2} = 15$. Intersecando a 2 a 2 le 15 rette, si possono ottenere fino a $\binom{15}{2} = 105$ punti; nel nostro caso, però, le rette passano a 5 a 5 per uno stesso punto in cui vengono così a cadere 10 intersezioni. Il numero cercato è dunque $105 - 10 \times 6 = 45$.

§ 5. LA FORMULA DI NEWTON

Il problema è quello di esprimere la *potenza n - ima del binomio.* Vogliamo cioè trovare lo sviluppo di

$$(a+b)^n, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^+.$$

Per definizione, si ha:

$$(a+b)^1 = a + b$$

e, per $n > 1$, $\qquad (a+b)^n = (a+b)(a+b) \ \ldots\ldots\ (a+b)\,, \quad (n \text{ volte}).$

TEOREMA 9. (*Formula di NEWTON per la potenza del binomio*). *Quali che siano i numeri reali a e b, per ogni numero naturale positivo n, si ha:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

DIM. In virtù delle proprietà formali delle operazioni, il risultato cercato sarà dato dal polinomio

$$(*) \qquad \sum_{k=0}^{n} c_k\, a^k b^{n-k},$$

dove il coefficiente c_k è il numero naturale che esprime quante volte il monomio $a^k b^{n-k}$ compare nel nostro sviluppo. Per ottenere uno degli addendi, bisogna scegliere da ciascuno degli n fattori $(a + b)$ uno dei due termini e farne il prodotto. Se vogliamo che quest'ultimo sia proprio $a^k b^{n-k}$, dobbiamo ovviamente scegliere a esattamente da k fattori e, di conseguenza, b dai rimanenti $n - k$. Sappiamo che questa scelta può essere fatta in $\binom{n}{k}$ modi. Si conclude perciò che nella (*) è $c_k = \binom{n}{k}$. ∎

Notiamo che, essendo $\binom{0}{0} = 1$, la formula sopra scritta assume, per $n = 0$, la forma $(a + b)^0 = 1$, che è conveniente accettare come vera, anche nell'eventualità che sia $a = 0 = b$, anche se, in questo caso, ci si imbatte nell'espressione 0^0, alla quale non sempre è opportuno attribuire un significato.

È ora ben chiaro perché ai numeri $\binom{n}{k}$ si dà il nome di coefficienti binomiali.

ESEMPI. 1) Si ha: $\quad (2a - b)^5 = 32a^5 - 80a^4b + 80a^3b^2 - 40a^2b^3 + 10ab^4 - b^5$.

2) Quanti sono i monomi dello sviluppo di $(a + b)^n$? E se ognuno di essi viene contato tante volte quante ne indica il coefficiente c_k?

Dato che in ogni fattore si deve scegliere o a o b, ci sono 2 possibilità per ciascuno degli n fattori e quindi i monomi dovrebbero essere 2^n (risposta alla seconda domanda). I monomi distinti sono però solo $n + 1$, dato che l'esponente di a può variare solo da 0 a n e che gli esponenti di a e di b devono avere per somma n.

3) Si sviluppi $(a + b + c)^4$ pensandolo scritto nella forma $((a + b) + c)^4$.

Si ha: $\quad ((a + b) + c)^4 = (a + b)^4 + 4(a + b)^3c + 6(a + b)^2c^2 + 4(a + b)c^3 + c^4 =$
$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4a^3c + 12a^2bc + 12ab^2c + 4b^3c +$
$+ 6a^2c^2 + 12abc^2 + 6b^2c^2 + 4ac^3 + 4bc^3 + c^4$. (15 addendi!)

Stabiliremo alcune proprietà che intercorrono fra i coefficienti binomiali.

(a)
$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}.$$

Ossia: *Nello sviluppo della potenza del binomio, i coefficienti equidistanti dagli estremi sono uguali.*

Si ha infatti $\binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$.

Ma tale uguaglianza può essere giustificata anche osservando che la legge che a ogni sottoinsieme di un n - insieme E associa il suo complementare stabilisce una corrispondenza biunivoca fra la totalità dei sottoinsiemi di E con k elementi e quella dei sottoinsiemi di E che ne hanno $n - k$.

(b) (Formula di *Stifel*)
$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}.$$

Ossia: *Il coefficiente k - imo nello sviluppo della potenza n - ima del binomio è dato dalla somma dei coefficienti* (k - 1) *- imo* e *k - imo dello sviluppo della potenza precedente.*

Chiaramente, l'espressione ha senso per $0 < k < n$. Anche in questo caso si può giungere al risultato facendo i conti (esercizio per il Lettore), ma è più simpatico arrivarci con un semplice ragionamento. Fissiamo dunque un elemento a in un n - insieme E. Per contare i sottoinsiemi di E con k elementi, vediamo quanti di essi contengono l'elemento a e quanti non lo contengono. Per assegnare un sottoinsieme del primo tipo, bisogna aggiungere ad a altri $k - 1$ oggetti scelti fra gli $n - 1$ rimasti; ciò si può fare in $\binom{n-1}{k-1}$ modi. Invece, per assegnare un insieme del secondo tipo, bisogna scegliere k oggetti fra gli $n - 1$ elementi di E che sono diversi da a; ciò si può fare in $\binom{n-1}{k}$ modi.

Sviluppando $(1 + 1)^n$ e $(1 - 1)^n$ con la Formula di Newton, si ottiene:

(c)
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots\ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

(d)
$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots\ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

Dalla (d) si ricava subito che: *Nello sviluppo della potenza del binomio, la somma dei coefficienti di posto pari uguaglia quella dei coefficienti di posto dispari.*

Siamo ora in grado di risolvere il quesito dell'Esempio n. 6 del § 1.

TEOREMA 10. *I sottoinsiemi di un insieme E di n elementi sono in numero di* 2^n.

DIM. Basta contare i sottoinsiemi di E con k elementi, al variare di k da 0 a n, e poi sommare tenendo conto della (c). ∎

Fra tutte le uguaglianze che legano i coefficienti binomiali, la più significativa è indubbiamente la *Formula di Stifel*. In effetti, i coefficienti binomiali possono essere definiti *per ricorrenza* mediante tale proprietà e le *condizioni iniziali* nel modo seguente:

$$\boxed{\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.}$$

Sfruttando la *Formula di Stifel*, si può costruire il ben noto *Triangolo Aritmaetico* (detto anche di *Tartaglia* o di *Pascal*):

TRIANGOLO ARITMETICO

$\binom{n}{k}$	$k = 0$	1	2	3	4	5	6	……
$n = 0$	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
……	……	……	……	……	……	……	……	……

Per ragioni di comodità, è opportuno attribuire un significato al simbolo $\binom{a}{k}$ anche nel caso che a sia un numero reale qualunque, però sempre con $k \in \mathbb{N}$. Precisamente:

DEFINIZIONE. Qualunque sia il numero reale a e qualunque sia il numero naturale k, si definisce:

$$\binom{a}{k} := \frac{(a)_k}{k!} = \begin{cases} 1, & \text{per } k = 0 \\ a, & \text{per } k = 1 \\ \dfrac{a\,(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-k+1)}{k!}, & \text{per } k > 1 \end{cases}.$$

In particolare, si vede immediatamente che è $\binom{a}{k} = 0$ se e solo se a è un numero naturale minore di k. Osserviamo ancora che, anche nel caso più generale in cui a non è un numero naturale, continua a sussistere la Formula di Stifel, come si può appurare facilmente effettuando i calcoli (Esercizio!).

ESEMPI. 4) Si ha $\binom{\sqrt{2}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}{3!} = \dfrac{2\sqrt{2}-3}{3}$.

5) Si ha: $\binom{\pi}{4} = \dfrac{\pi(\pi-1)(\pi-2)(\pi-3)}{4!} = \dfrac{(\pi-1)(\pi-2)(\pi-3)}{3!}\left[1 + \dfrac{\pi-4}{4}\right] =$

$$= \frac{(\pi-1)(\pi-2)(\pi-3)}{3!} + \frac{(\pi-1)(\pi-2)(\pi-3)(\pi-4)}{4!} = \binom{\pi-1}{3} + \binom{\pi-1}{4}.$$

§ 6. PERMUTAZIONI E DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

Il quesito dell'Esempio n. 7 del § 1 è un caso particolare del seguente problema:

"In quanti modi si possono allineare n oggetti, di cui n_1 uguali ad un oggetto A_1, n_2 uguali ad un oggetto A_2, ..., n_k uguali ad un oggetto A_k, con l'ovvia condizione che sia $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$; $n_i \geq 0$?"

DEFINIZIONE. A ciascuno di questi allineamenti si dà il nome di *permutazione fra elementi non tutti distinti* o *permutazione con ripetizione di tipo* $n_1, n_2, \ldots\ldots, n_k$ degli n oggetti.

TEOREMA 11. *Le permutazioni con ripetizione di tipo* $n_1, n_2, \ldots\ldots, n_k$ *di* n *oggetti sono in numero di*

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ldots n_k!} = \binom{n}{n_1}\binom{n - n_1}{n_2} \ldots\ldots\ \binom{n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1}}{n_k}.$$

DIM. Immaginiamo, per un momento, che gli n oggetti siano tutti distinguibili fra loro. In tal caso, si possono allineare in $n!$ modi diversi. Ma, in realtà, due allineamenti che differiscono solo per lo scambio di elementi dello stesso tipo sono indistinguibili. Precisamente: nel numero $n!$ ogni allineamento viene contato tante volte quanti sono i modi di permutare gli elementi del tipo A_1, o del tipo A_2, ..., o del tipo A_k: in conclusione, viene contata $n_1!\ n_2!\ \ldots n_k!$ volte. Si ottiene che il numero cercato è

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ldots n_k!}\ .$$

Il problema può essere affrontato anche in un altro modo. Ogni allineamento consta di n *posti*, n_1 dei quali occupati dagli elementi di tipo A_1, n_2 da quelli di tipo A_2, e così via. Il problema è dunque quello di assegnare i rispettivi posti. Per gli oggetti di tipo A_1, ciò può essere fatto in $\binom{n}{n_1}$ modi; dopo di che, quelli di tipo A_2 possono essere sistemati in $\binom{n - n_1}{n_2}$ modi, dato che n_1 degli n posti iniziali sono già occupati; e così via. Si ottiene in tal modo la seconda espressione. ∎

Quanto all'esempio da cui siamo partiti, si ha che i numeri cercati sono in tutto $\frac{10!}{3! \times 5! \times 2!} = 2520$.

ESEMPI0. 1) In un ufficio ci sono dieci impiegati. Questi vanno in ferie in tre turni: 3 nel primo, 4 nel secondo e 3 nel terzo. Quante sono le possibili assegnazioni dei dieci impiegati ai tre turni?

Ci sono $\binom{10}{3}$ modi per scegliere gli impiegati per il primo turno di ferie; $\binom{7}{4}$ per scegliere, fra i rimanenti, quelli del secondo turno; i restanti sono ovviamente assegnati al terzo. Il risultato è dunque espresso dal numero

$$\binom{10}{3}\binom{7}{4}\binom{3}{3} = \frac{10!}{3! \times 4! \times 3!} = 4200.$$

Il quesito dell'Esempio n. 8 del § 1 è un caso particolare del seguente problema:

"Quante sono le applicazioni di un n - insieme A in un k - insieme B?"

Il numero cercato non dipende dalla natura degli oggetti che formano i due insiemi, ma solo da n e da k: indichiamolo con $F_{n,k}$.

TEOREMA 12. *Le applicazioni di un n - insieme A in un k - insieme B sono* k^n.

DIM. Procediamo per induzione su n. Per $n = 0$ e $n = 1$, la tesi è immediata. Supponiamola vera per $n - 1$ e proviamola per n. Fissiamo un $a \in A$. Le applicazioni di $A - \{a\}$ in B sono, per l'ipotesi induttiva, k^{n-1}. L'immagine dell'elemento a può ora essere scelta in k modi; dunque, per ogni applicazione di $A - \{a\}$ in B, ci sono k applicazioni di tutto A in B. In conclusione, le applicazioni cercate sono $k\, k^{n-1} = k^n$. ∎

DEFINIZIONE. Ad ogni applicazione di $E(n)$ in un k - insieme B si dà il nome di *disposizione con ripetizione di classe n dei k oggetti di B*; al plurale si parla di *disposizioni con ripetizione di k oggetti a n a n.*

Siccome il risultato del Teorema precedente non dipende dalla natura degli oggetti, ma solo da n e da k, possiamo rienunciarlo così:

TEOREMA 12'. *Le disposizioni con ripetizione di k oggetti a n a n sono* k^n. ∎

Con riferimento all'Esempio di partenza, si conclude che le possibili colonne della schedina del totocalcio sono $F_{13,3} = 3^{13} = 1\,594\,323$.

ESEMPI. 2) In quanti modi si possono colorare 8 caselle allineate, disponendo di 3 colori, se si chiede di usare un solo colore per casella e in modo che ognuno di essi venga utilizzato almeno una volta?

Per assegnare una colorazione, bisogna associare uno dei 3 colori a ciascuna delle 8 caselle; ciò equivale a definire un'applicazione dell'insieme A delle caselle nell'insieme B dei colori. Se non ci fossero limitazioni, il numero delle colorazioni possibili sarebbe perciò $3^8 = 6561$. In realtà, noi vogliamo contare le colorazioni in cui si utilizzano *tutti* i colori disponibili; vogliamo cioè contare le applicazioni *suriettive* di A su B. Il modo più comodo per farlo è quello di contare le colorazioni in cui c'è almeno un colore che non viene usato e poi sottrarre il numero così trovato da 3^8. Potendosi scegliere in 3 modi il colore da escludere, il numero delle colorazioni non buone sembrerebbe essere dato da 3×2^8. In realtà, ogni colorazione monocromatica viene così contata 2 volte. Per esempio, se è $B = \{x, y, z\}$, la colorazione fatta col solo colore x è contata sia fra quelle che escludono il colore y che fra quelle che escludono il colore z. Le colorazioni che non utilizzano tutti i colori sono perciò $3 \times 2^8 - 3$. Il numero cercato è dunque

$$3^8 - 3 \times 2^8 + 3 = 5796.$$

3) In quanti modi si possono colorare 10 caselle allineate, disponendo di 4 colori, se si chiede di usare un solo colore per casella e che caselle consecutive abbiano colori diversi?

Ci sono 4 modi per colorare la prima casella e 3 modi per ciascuna delle altre 9, dato che non può essere usato il colore adoperato nella casella precedente. Risultato: $4 \times 3^9 = 78\,732$.

4) Si dica quante sono le colonne della schedina del totocalcio nelle quali sono giusti esattamente k pronostici, con k che varia da 0 a 13. Qual è il numero di pronostici che è più facile indovinare se si riempie a caso la schedina?

Le colonne che ci fanno indovinare esattamente k pronostici sono $\binom{13}{k} \times 2^{13-k}$. Il primo fattore ci dice in quanti modi possiamo scegliere le k partite con pronostico esatto; il secondo dà i modi di riempire le caselle sbagliate. Facendo variare k da 0 a 13, si ottengono i seguenti valori: 8 192; 53 248; 159 744; 292 864; 366 080; 329 472; 219 648; 109 824; 41 184; 11 440; 2288; 312; 26; 1. Il numero di pronostici che è più facile indovinare, se si riempie a caso la schedina, è dunque 4.

Risolviamo, in fine, il problema dell'Esempio 9 del § 1.

La situazione può essere schematizzata così: ci sono 20 *unità* da *distribuire* fra le 5 scatole S_k. Immaginiamo le nostre unità allineate e rappresentate, per esempio, da 20 astine messe in fila: | | | ……….. | |. Per assegnare una delle possibili distribuzioni, bisogna decidere dove *finiscono* le unità da attribuire a S_1 e *cominciano* quelle di S_2; dove finiscono quelle di S_2 e cominciano quelle di S_3, e così via. Per indicare questi *punti di separazione,* inseriamo, fra i 20 segni |, 5 - 1 = 4 segni di un tipo diverso, per esempio dei segni $*$. Per esprimere il fatto che S_1 è vuota [S_5 è vuota], porremo un segno $*$ davanti [dietro] a tutti i segni |; per esprimere il fatto che S_k è vuota, con $1 < k < 5$, sistemeremo il k - imo segno $*$ subito dopo il $(k - 1)$ - imo. A partire da una distribuzione delle 20 unità si è così ottenuta in modo naturale una *stringa* o *sequenza* di 20 + 4 segni, di cui 20 del tipo | e 4 del tipo $*$. Viceversa, ogni stringa di questo tipo individua una e una sola delle distribuzioni cercate. Ora, contare queste stringhe è facile. Esse sono in numero di $\binom{20\ +\ 4}{4}$ = 10 626.

§ 7. ESERCIZI

1) In quanti modi si possono estrarre 5 carte da un mazzo di 40, se si chiede di avere almeno due assi, esattamente un 7 e nessuna figura? [***R.*** 4 884]

2) In un'urna ci sono 18 palline, di cui 10 bianche, 5 rosse e 3 nere. In quanti modi se ne possono estrarre 5 se si vuole che compaiano almeno 1 pallina nera ed esattamente una pallina rossa? [***R.*** 2 525]

3) Quanti sono i numeri di 4 cifre, da 0000 a 9999 che hanno la prima *o* l'ultima cifra uguale a 5? [***R.*** 1 900]

4) In quanti modi si possono estrarre 4 carte da un mazzo di 40, se si chiede di avere due Re e almeno 1 Asso? [***R.*** 804]

5) In un'urna ci sono 10 palline bianche, 6 rosse e 4 nere e se ne estraggono contemporaneamente 5.

a) Quante sono le possibili estrazioni? [***R.*** 15 504]

b) Quante sono le estrazioni in cui figurano palline di tutti i colori? [***R.*** 9 140]

6) Quanti sono i numeri di 6 cifre, da 000 000 a 999 999, in cui una cifra si ripete 3 volte e un'altra si ripete 2 volte? [***R.*** 43 200]

7) Quanti sono i numeri di 6 cifre, da 000 000 a 999 999, che hanno almeno uno 0 nei primi tre posti e nemmeno uno 0 negli ultimi tre? [***R.*** 197 559]

8) Fra i numeri di 6 cifre, da 000 000 a 999 999, quanti ce ne sono con esattamente due cifre uguali e collocate in posti consecutivi? [***R.*** 151 200]

9) In quanti modi si possono estrarre 4 carte da un mazzo di 40 se si chiede di avere in mano *almeno due* figure? [***R.*** 31 603]

10) Quanti sono i numeri di sei cifre effettive, cioè da 100 000 a 999 999, in cui il 7 compare tre volte e lo 0 una volta? [***R.*** 3 200]

11) In un'urna ci sono 20 palline numerate da 0 a 19. In quanti modi se ne possono estrarre contemporaneamente 5 se si vuole che:

la somma dei numeri estratti sia pari? [***R.*** 7 752]

la somma dei numeri estratti sia maggiore o uguale a 11? [***R.*** 15 503]

12) Quanti sono i numeri di 4 cifre distinte (da 0000 a 9999) con la prima cifra pari e l'ultima dispari? [***R.*** 1 400]

13) Indichiamo i primi dodici numeri naturali con i simboli 0, 1, 2, …, 9, *A*, *B* e scriviamo i numeri naturali in base *dodici*. Fra i numeri di 5 cifre (in base *dodici*), da 00000 a *BBBBB*, quanti sono quelli che contengono *esattamente due* cifre 5, *almeno una* cifra 9 e *nessuna* cifra *B*? [***R.*** 2 710]

14) In quanti modi si possono distribuire 12 palline, numerate da 1 a 12, in tre scatole, contrassegnate dalle tre lettere *A*, *B* e *C*, se si vuole che in ciascuna scatola non ci siano più di 5 palline? [***R.*** 250 866]

15) Un ladro si è impossessato di un tesserino *Bancomat*, il cui codice segreto è formato da cinque cifre. Egli sa che il codice contiene un 7 e un 9 collocati in posti non consecutivi e sa ancora che le altre tre cifre sono diverse da 7 e da 9.
Quanti tentativi al più deve fare il ladro per accedere al conto corrente? [***R.*** 6 144]

16) Fra i numeri interi compresi tra 10 000 e 99 999, quanti sono quelli in cui la cifra 9 compare esattamente due volte e in posti non consecutivi? [***R.*** 4 131]

17) Fra i numeri interi compresi tra 00 000 e 99 999, quanti sono quelli in cui la cifra 9 compare almeno tre volte di seguito? [***R.*** 280]

18) Quante sono le cinquine del gioco del lotto che ci fanno fare *terno* se giochiamo 4 numeri su una ruota? Quante sono quelle che ci fanno fare almeno ambo? [***R.*** 14 620; 628 746]

19) Fra i numeri naturali di 6 cifre, da 000 000 a 999 999, quanti ve ne sono con esattamente 2 cifre uguali? [***R.*** 453 600]

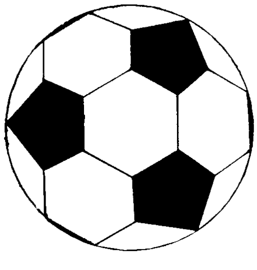
20) Quanti sono i numeri naturali di 6 cifre, da 000 000 a 999 999, che hanno 3 cifre dispari in 3 posti consecutivi e 3 cifre pari non - decrescenti? [***R.*** 17 500]

21) Quante sono le diagonali di un poligono di 7 lati? Qual è il numero massimo di punti, distinti dai vertici del poligono, in cui due *rette diagonali* si incontrano? [***R.*** 14; 49]

22) Si consideri un dodecagono regolare con i vertici numerati da 1 a 12. In quanti modi si possono scegliere 3 dei suoi vertici in modo che il triangolo da essi individuato sia isoscele? E se si chiede che il triangolo sia rettangolo? [***R.*** 52; 60]

23) Fra i numeri di 5 cifre, da 00 000 a 99 999, quanti ve ne sono con le cifre tutte diverse? Quanti con le cifre disposte in ordine crescente? Quanti con le cifre tutte pari? Quanti con 2 cifre pari e 3 dispari? Quanti con 2 cifre pari seguite da 3 cifre dispari
[***R.*** 30 240; 252; 3 125; 31 250; 3 125]

24) Quanti sono i numeri di 4 cifre, da 0000 a 9999 per i quali è uguale a 4 la somma delle cifre pari? [***R.*** 1 080]



25) La superficie di un pallone è costituita da 20 esagoni e da un certo numero di pentagoni. Ogni pentagono è circondato da 5 esagoni e ogni esagono è circondato da 3 esagoni e 3 pentagoni (vedi *Figura*). Quanti sono i pentagoni del pallone [***R.*** 12]

26) Si dimostri che la successione definita da $a_n = \binom{2n}{n}$ è crescente.

Capitolo Quarto

LE FUNZIONI ELEMENTARI

§ 1. FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

Si chiamano *funzioni reali di variabile reale* le funzioni definite in un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{R}$. Scriveremo f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Sappiamo che per definire una funzione è necessario assegnare il dominio, il codominio e la legge f. Nel nostro caso sottintenderemo, salvo esplicito avviso del contrario, che il codominio è $\mathbb{R}$. Quanto al dominio, sempre salvo esplicito avviso del contrario, sottintenderemo che esso è quello più grande possibile, cioè quello formato da *tutti* i numeri reali per cui la f ha senso.

ESEMPIO. 1) Qual è il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x + 1}$? Questa domanda significa: "Qual è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ per ogni x del quale si può definire il numero $\sqrt{x + 1}$"? La risposta è ovviamente data da $E = \{x: x \geq - 1\}$.

Nell'insieme di tutte le funzioni definite in un qualunque insieme E e a valori in $\mathbb{R}$ si possono introdurre in modo del tutto naturale alcune operazioni.

DEFINIZIONE. Qualunque sia l'insieme E, date le funzioni f, g: $E \to \mathbb{R}$, si ottengono le nuove funzioni:

$f + g$: $E \to \mathbb{R}$, definita da $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$,

$-f$: $E \to \mathbb{R}$, definita da $(-f)(x) := - f(x)$,

fg: $E \to \mathbb{R}$, definita da $(fg)(x) := f(x)g(x)$,

$\frac{1}{g}$: $E' \to \mathbb{R}$, definita da $\frac{1}{g}(x) := \frac{1}{g(x)}$, con $E' = \{x \in E: g(x) \neq 0\}$,

$\frac{f}{g}$: $E' \to \mathbb{R}$, definita da $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$, con $E' = \{x \in E: g(x) \neq 0\}$,

$f \vee g$: $E \to \mathbb{R}$, definita da $(f \vee g)(x) := \max \{f(x), g(x)\}$,

$f \wedge g$: $E \to \mathbb{R}$, definita da $(f \wedge g)(x) := \min \{f(x), g(x)\}$.

Si constata immediatamente che

TEOREMA 1. *La somma di funzioni reali è associativa e commutativa, ha elemento neutro (la funzione di valore costante* 0*); ogni funzione f ha un'opposta, la funzione - f.* Dunque: *L'insieme delle funzioni reali definite in E, con l'operazione di somma, è un gruppo abeliano.*

Il prodotto di funzioni reali è associativo, commutativa, distributivo rispetto alla somma e ha elemento neutro (la funzione di valore costante 1*).* Dunque: *L'insieme delle funzioni reali definite in E, con le operazioni di somma e prodotto, è un anello commutativo con unità.* ∎

Si noti che sono dotate di reciproca solo le funzioni che non si annullano in alcun punto di E.

È utile ricordare il seguente risultato (di facile verifica) che dà una comoda espressione delle funzioni $f \vee g$ e $f \wedge g$:

TEOREMA 2. *Date le funzioni f, g*: $E \to \mathbb{R}$, *si ha:*

$$(f \vee g)(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|],$$

$$(f \wedge g)(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|]. \blacksquare$$

ESEMPIO. 2) Siano f,g: $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{per } -1 \le x < 0 \\ 0 & \text{per } 0 \le x \le 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } -1 \le x < 0 \\ x & \text{per } 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

Si ha $(f \vee g)(x) = |x|$ e $(f \wedge g)(x) = 0$, per ogni $x \in [-1, 1]$.
Si osservi che il prodotto delle due funzioni è la funzione nulla, anche se non è tale nessuna delle due funzioni date. Dunque:

Nell'insieme delle finzioni di un insieme E in $\mathbb{R}$ *non è valida la legge dell'annullamento del prodotto.*

DEFINIZIONE. Una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è detta *pari* se da $x \in E$ segue $-x \in E$ e $f(-x) = f(x)$.
Una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è detta *dispari* se da $x \in E$ segue $-x \in E$ e $f(-x) = -f(x)$.

La funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^n$ è una funzione pari se n è pari ed è una funzione dispari se n è dispari. Da qui l'origine della definizione.

Sono inoltre pari le seguenti funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$: $|x|$, $\sqrt[3]{x^2}$; $\cos x$, tutte le funzioni costanti.

Sono invece dispari le seguenti funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$: $\sin x$, $\sqrt[3]{x}$. Sono dispari anche la funzione di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ in $\mathbb{R}$ $\operatorname{sign} x := \frac{x}{|x|}$ e la funzione $\operatorname{tg} x$ definita in $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$.
Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate; il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine. Ciò è di evidente aiuto quando si debba effettuare lo studio di una funzione.
Si vede poi facilmente che: la somma e il prodotto di funzioni pari è una funzione pari; la somma di funzioni dispari è dispari; il prodotto di *due* funzioni dispari è pari; il prodotto di una funzione pari per una funzione dispari è dispari.

DEFINIZIONE. Una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, è detta *periodica di periodo* τ, con τ numero reale positivo, se da $x \in E$ segue $x \pm \tau \in E$ e $f(x + \tau) = f(x)$. Il numero τ è detto un *periodo* della funzione.

Ovviamente, se τ è un periodo, sono tali anche $2\tau, 3\tau, \dots, n\tau, \dots$ Dunque non c'è un massimo periodo. È invece più interessante vedere se c'è un *minimo periodo*. La risposta è positiva se la funzione è *continua* (cfr. Cap. 5, § 8, Esercizio 8). Mostriamo, intanto, con un esempio che esistono funzioni periodiche senza minimo periodo.

ESEMPIO. 3) Sia f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione che vale 1 nei punti razionali e 0 in quelli irrazionali. Si vede che ogni numero razionale positivo è un periodo, dato che, se r è un numero razionale, $x + r$ è razionale se e solo se lo è x. Si ha dunque, per ogni $r > 0$, $f(x + r) = f(x)$.

I tipici esempi di funzioni periodiche sono dati dalle funzioni circolari o goniometriche di cui parleremo nel § 6. Diciamo, intanto che le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π, mentre la funzione tangente è periodica di periodo π.

Dovendo studiare una funzione periodica di periodo τ, basta studiare la sua restrizione ad $E \cap I$, con I intervallo di ampiezza τ.

DEFINIZIONE. Sia data una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
La f è detta *monotona crescente* se da $x_1, x_2 \in E$, con $x_1 < x_2$, segue $f(x_1) < f(x_2)$;
la f è detta *monotona decrescente* se da $x_1, x_2 \in E$, con $x_1 < x_2$, segue $f(x_1) > f(x_2)$;
la f è detta *monotona non - crescente* se da $x_1, x_2 \in E$, con $x_1 < x_2$, segue $f(x_1) \geq f(x_2)$;
la f è detta *monotona non - decrescente* se da $x_1, x_2 \in E$, con $x_1 < x_2$, segue $f(x_1) \leq f(x_2)$.
In ciascuno dei primi due casi, la f è detta *strettamente monotona*.

Attenzione! Dire che la funzione f è non - crescente è cosa ben diversa dal dire che f non è crescente; quest'ultima frase significa solo che da $x_1, x_2 \in E$, con $x_1 < x_2$, non segue affatto $f(x_1) < f(x_2)$.

Sono crescenti le funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$: x, x^3, e^x, $\sqrt[3]{x}$, arctg$x$.

Sono decrescenti le funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$: $-x$, $-x^3$, e^{-x}.

La funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definita da $f(x) = [x]$ è non - decrescente.

La funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ non è monotona.

È importante osservare che *ogni funzione strettamente monotona è iniettiva*. Per vedere che, in generale, non sussiste l'implicazione opposta, basta considerare la funzione f: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1/x$.

§ 2. POLINOMI E FUNZIONI RAZIONALI

La nozione di polinomio e le operazioni fra polinomi fanno parte del bagaglio culturale di ogni studente. Qui perciò richiameremo soltanto alcune cose che ci saranno utili in seguito, limitandoci al caso dei polinomi in una sola *variabile* o *indeterminata*.

Un polinomio P nella variabile x è un'espressione del tipo

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ con } a_i \in \mathbb{R}.$$

Se è $a_n \neq 0$, si dice che il polinomio è di *grado n*; in ogni caso si dice che è di *grado formale n*. Le costanti non nulle sono *polinomi di grado* 0. La costante 0 è detta *polinomio nullo*; ad esso non si attribuisce alcun grado, ma, per ragioni di comodità, ci si comporta come se avesse grado minore di zero. Il grado di un polinomio P sarà indicato con $gr\ P$.

Le note operazioni di somma e prodotto fra polinomi hanno le stesse proprietà delle analoghe operazioni fra numeri interi; lo stesso accade per l'operazione di divisione con resto.

TEOREMA 3. *Dati due polinomi A e B, con B diverso dal polinomio nullo, esiste una e una sola coppia di polinomi Q e R tali che*
1) $A = QB + R$,
2) $gr\ R < gr\ B$.

DIM. L'esistenza della coppia (Q, R) si prova utilizzando il ben noto algoritmo della divisione fra polinomi. Qui ci limiteremo a provare l'unicità. Supponiamo che sia

$$A = QB + R = Q_1 B + R_1, \qquad gr\ R < gr\ B \text{ e } gr\ R_1 < gr\ B.$$

Si ottiene

$$[Q - Q_1]B = R_1 - R.$$

Essendo il grado del polinomio a secondo membro minore di quello di B, deve essere tale anche il grado del polinomio a primo membro. Ma ciò è possibile se e solo se $Q - Q_1$ è il polinomio nullo. È dunque $Q = Q_1$ e, quindi, $R = R_1$. ▮

Al solito, Q e R sono detti, rispettivamente, il quoziente e il resto della divisone. Se R è il polinomio nullo, si dice che A è *divisibile* per B.

Sia dato un polinomio P. Ogni volta che si attribuisce un valore all'indeterminata x si ottiene un numero reale $P(x)$. Si è così costruito una funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ detta *funzione razionale intera rappresentata dal polinomio* e che si indica ancora con P.
Vedremo tra poco che polinomi diversi individuano funzioni razionali diverse, ossia che c'è corrispondenza biunivoca tra i polinomi e le funzioni razionali intere. Il grado del polinomio può dunque essere assunto come *grado* della funzione razionale intera da esso individuata.

DEFINIZIONE. Dato un polinomio P, si dice che un numero reale α è una sua *radice* o che α è uno *zero* della funzione razionale P se è $P(\alpha) = 0$.

TEOREMA 4 (di Cartesio - Ruffini). *Un numero reale α è radice di un polinomio P se e sole se P è divisibile per $x - \alpha$.*

DIM. Dividendo P per $x - \alpha$, si ha

$$P(x) = Q(x)(x - \alpha) + r, \text{ con } r \in \mathbb{R},$$

da cui $P(\alpha) = r$. È dunque $P(\alpha) = 0$ se e solo se è $r = 0$. ▮

TEOREMA 5 (Principio di identità dei polinomi). *Un polinomio P di grado minore o uguale a n* (≥ 0) *non può avere più di n radici distinte.*

DIM. Dato il polinomio P di grado $n > 0$, siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n sue radici distinte. Per il Teorema di Cartesio - Ruffini, si ha $P(x) = Q_1(x)(x - \alpha_1)$. Essendo $\alpha_1 \neq \alpha_2$ e $P(\alpha_2) = 0$, deve essere $Q(\alpha_2) = 0$. È dunque $Q_1(x) = Q_2(x)(x - \alpha_2)$, da cui $P(x) = Q_2(x)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$. Così proseguendo, si ottiene $P(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)$, con $a \neq 0$. Nessun altro numero reale può dunque essere radice di $P(x)$. Per $n = 0$, la tesi è ovvia. ▮

Questo risultato si può esprimere anche nel seguente modo:

TEOREMA 5' (Principio di identità dei polinomi). *Due polinomi di grado minore o uguale a n* (≥ 0) *che assumono valori uguali in più di n punti distinti sono lo stesso polinomio.* Ne viene che: *Polinomi distinti rappresentano funzioni razionali distinte.* ▮

COROLLARIO 6. *Esiste uno e un solo polinomio di grado minore o uguale a n che nei punti $x_0, x_1, \ldots, x_n$ assume rispettivamente i valori $y_0, y_1, \ldots, y_n$.* ▮

L'unicità segue banalmente dal Teorema precedente; l'esistenza di questo polinomio, detto *polinomio interpolatore*, si dimostra costruendo effettivamente un polinomio che fa al caso. Questa costruzione si ottiene generalizzando quella che ora illustreremo in un caso concreto.

ESEMPIO. Cerchiamo il polinomio P, di grado ≤ 3, per cui si ha: $P(-1) = 6$, $P(0) = 4$, $P(1) = 5$, $P(2) = -8$. Il polinomio P può essere così definito:

$$P(x) = 6\,\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} + 4\,\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} +$$

$$+\ 5\,\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} - 8\,\frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)}\,.$$

DEFINIZIONE. Dato un polinomio P, si dice che un numero reale α è una sua radice di *molteplicità* r se P è divisibile per $(x - \alpha)^r$, ma non per $(x - \alpha)^{r+1}$. In altre parole, α è radice di *molteplicità* r per P se è $P(x) = Q(x)(x - \alpha)^r$, con $Q(\alpha) \neq 0$. Se la molteplicità di una radice α è 1, 2, 3, …, r, si dice che α è radice *semplice, doppia, tripla, …, r - pla.*

Per esempio, il polinomio $P(x) = (x - 1)(x^2 - 1)$ ha la radice -1 semplice e la radice 1 doppia.

DEFINIZIONE. Un polinomio è detto *riducibile* se può essere scritto come prodotto di due polinomi non costanti, In caso contrario si dice che il polinomio è *irriducibile.*

Tutti i polinomi di grado minore o uguale a 1 sono ovviamente irriducibili. Tutti i polinomi di grado maggiore di 1 che ammettono radici reali sono riducibili (Teor. 4). I polinomi di grado 2 irriducibili sono tutti e soli quelli che non hanno radici reali, ossia quelli con il discriminante minore di 0. Osserviamo che il polinomio $(x^2 + 1)(x^2 + 2)$ è riducibile, ma non ha radici reali.

Così come si definiscono i polinomi a coefficienti reali, si definiscono i polinomi a coefficienti nel campo complesso. Dunque un polinomio a coefficienti complessi è un'espressione del tipo

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \ldots + a_1 z + a_0, \text{ con } a_i \in \mathbb{C}.$$

Ogni volta che si attribuisce un valore complesso all'indeterminata z si ottiene un numero complesso $P(z)$. Si è così costruito una funzione di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ detta *funzione razionale intera rappresentata dal polinomio* e che si indica ancora con $P(z)$.

Tutte le definizioni e i risultati fin qui stabiliti a proposito dei polinomi a coefficienti reali si estendono in modo del tutto naturale al caso dei polinomi a coefficienti complessi.

Sussiste il seguente risultato del quale non possiamo portare la dimostrazione:

TEOREMA 7 (Teorema fondamentale dell'Algebra). *Ogni polinomio non costante a coefficienti complessi ha in $\mathbb{C}$ almeno una radice.* ▮

Da questo risultato e dal Teorema 4 si ottiene il

COROLLARIO 7'. *Ogni polinomio non costante a coefficienti complessi si scompone in $\mathbb{C}$ in fattori di primo grado.* ▮

Dato un polinomio a coefficienti complessi P, indichiamo con $\overline{P}$ il polinomio che ha come coefficienti i complessi coniugati di quelli di P. Dato che il coniugato della somma è la somma dei coniugati e che il coniugato del prodotto è il prodotto dei coniugati, si ottiene l'uguaglianza

$$\overline{P}(\overline{z}) = \overline{P(z)}\,.$$

TEOREMA 8.- *Se un polinomio a coefficienti reali ammette una radice complessa non reale α, allora ammette anche la complessa coniugata $\overline{\alpha}$ e con la stessa molteplicità.*

DIM. Siano P un polinomio a coefficienti reali e α una sua radice non reale. Si ha:

$$P(\bar{\alpha}) = \overline{P}(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = \bar{0} = 0.$$

Dunque anche $\bar{\alpha}$ è radice di $P(z)$. Proviamo che α e $\bar{\alpha}$ hanno anche la stessa molteplicità. Siano r ed s le molteplicità di α e, rispettivamente, di $\bar{\alpha}$. Non è restrittivo supporre $r \geq s$. Si ha:

$$P(z) = (z - \alpha)^r (z - \bar{\alpha})^s Q(z), \quad \text{con } Q(\alpha) \neq 0 \neq Q(\bar{\alpha});$$

$$P(z) = [(z - \alpha)(z - \bar{\alpha})]^s (z - \alpha)^{r-s} Q(z) = [z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha}]^s Q_1(z).$$

I polinomi $P(z)$ e $[z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha}]^s$ sono a coefficienti reali; è dunque tale anche il polinomio $Q_1(z)$ che è il loro quoziente. Ora, se fosse $r > s$, si avrebbe $Q_1(\alpha) = 0$ e $Q_1(\bar{\alpha}) \neq 0$. Ma ciò sarebbe assurdo. ▮

TEOREMA 9. *Ogni polinomio a coefficienti reali è scomponibile nel campo reale in fattori di primo grado e fattori di secondo grado con discriminante negativo.*

DIM. Il polinomio dato si può scomporre in $\mathbb{C}$ nel prodotto

$$a(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_r)(x - \alpha_1)(x - \bar{\alpha}_1)\ldots(x - \alpha_s)(x - \bar{\alpha}_s),$$

con gli a_i radici reali e gli α_j radici complesse non reali. La tesi segue ora subito dal fatto che i fattori

$$(x - \alpha_i)(x - \bar{\alpha}_i) = x^2 - (\alpha_i + \bar{\alpha}_i)x + \alpha_i\bar{\alpha}_i$$

sono polinomi a coefficienti reali privi di radici reali. ▮

DEFINIZIONE. Si chiama *funzione razionale* ogni funzione che sia rappresentabile come rapporto di due polinomi, ossia ogni funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (o f: $E(\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$) definita da $f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$, con A e B polinomi.

Il dominio E di una simile funzione è dato da tutti gli $x \in \mathbb{R}$ (o $x \in \mathbb{C}$) per cui è $B(x) \neq 0$.

§ 3. LA FUNZIONE ESPONENZIALE

Potenze con esponente intero

La potenza a^n con esponente appartenente a $\mathbb{N}^+$ può essere così definita per ricorrenza:

DEFINIZIONE. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, si pone:

$$a^1 = a; \qquad a^{n+1} = a \times a^n; \qquad n \in \mathbb{N}^+.$$

È dunque, in particolare, $\quad 1^n = 1$; $0^n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$.

Si dimostrano poi, sempre per induzione, le seguenti ben note proprietà delle potenze (dalle quali derivano tutte le altre):

1) $a^n \times a^m = a^{n+m}$;

2) $(a^n)^p = a^{np}$;

3) $a^n \times b^n = (ab)^n$.

Estendendo il significato di *potenza* ai casi di esponenti interi, razionali o reali, si chiede di mantenere la validità di queste proprietà. Si chiede inoltre, ovviamente, che le nuove definizioni subordinino quelle precedenti.

Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, resta così definita la funzione *potenza* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = x^n.$$

Per $n = 1$, si ha l'identità e non c'è niente da aggiungere. Sia dunque $n > 1$.

Sappiamo che $f(x) = x^n$ è una funzione *pari* [*dispari*] se n è pari [dispari]. Basta dunque studiarla per $x \geq 0$. Si vede subito che per tali x la nostra funzione è positiva (salvo che in 0), crescente e superiormente illimitata (è cioè superiormente illimitato l'insieme immagine $f(\mathbb{R}^+)$).

TEOREMA 10. *Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ e per ogni numero reale positivo a, esiste uno ed un solo numero positivo α tale che $\alpha^n = a$.*

Cenno di dim. L'unicità segue subito dalla monotonia; occupiamoci dell'esistenza, limitandoci al caso $n = 2$. (Per $n > 2$ si procede in modo analogo. Il caso $n = 1$ è banale.)

Dato $a > 0$, consideriamo i due insiemi di numeri reali positivi:

$$C = \{c \in \mathbb{R}^+ : c^2 < a\}; \qquad D = \{d \in \mathbb{R}^+ : d^2 > a\}.$$

Si ha, certamente, $a + 1 \in D$ e $\min\{1; a\} \in C$; dunque le classi C e D non sono vuote e sono, come subito si vede, separate. Tali classi devono essere anche contigue. Se, infatti, così non fosse, esisterebbero almeno 2 numeri reali x e y compresi fra di esse; ma allora si avrebbe $t^2 = a$, per tutti i t tali che $x < t < y$; ma ciò è assurdo. Esiste dunque uno ed un solo numero reale α compreso fra le due classi. Si prova poi che è $\alpha^2 = a$. ∎

Torneremo comunque sull'argomento del § 7 del prossimo Capitolo.

Se n è dispari, la funzione $f(x) = x^n$ è biiettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ e quindi invertibile. Se n è pari, questa funzione non è biiettiva. Per invertirla la si considera come definita da $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ in sé.

L'inversa della funzione ($y =$) $f(x) = x^n$ si indica con ($x =$) $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$.

Esponente 0. Se vogliamo conservare la validità della (1), deve essere $a^n = a^{n+0} = a^n \times a^0$, da cui $a^0 = 1$. Tutto va bene se è $a \neq 0$; ma per $a = 0$ la cosa non va così liscia. Torneremo su ciò più avanti (cfr. Cap. 5).

Esponente intero negativo. Sempre se si vuole far salva la validità della (1), si ha: $1 = a^0 = a^{n-n} = a^n \times a^{-n}$. Si arriva così alla nota

DEFINIZIONE. Se è $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}^+$, si definisce $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

In questo caso, la condizione $a \neq 0$ è fuori discussione.
Si verifica facilmente la validità delle proprietà (1), (2) e (3).

Potenze con esponente razionale

Come dar significato all'espressione $a^{1/n}$? Se vogliamo salvare la (2) deve essere $a = a^{n/n} = (a^{1/n})^n$. Vogliamo inoltre che da $m/n = p/q$ segua $a^{m/n} = a^{p/q}$ (proprietà *invariantiva*). Si può dunque dare la

DEFINIZIONE. Se è $a > 0$, si definisce $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, $(n > 1)$; $a^{m/1} = a^m$.
Per ogni numero razionale *positivo* r si definisce $0^r = 0$.

Si vede subito che sono soddisfatte le (1), (2), (3) e la proprietà invariantiva. Dunque va tutto bene. E per $a < 0$?

Noi sappiamo che, essendo $\mathbb{R}$ un corpo ordinato, il quadrato di un numero reale non nullo è positivo. Ma ora, *qualunque sia* la definizione che vogliamo dare al simbolo $(-2)^{1/2}$, si ha: $-2 = (-2)^1 = (-2)^{2/2} = ((-2)^{1/2})^2 > 0$. E questo proprio non va! Quindi:

Non è possibile definire le potenza con esponente razionale e base negativa in modo ragionevole, ossia in modo da conservare, oltre alla validità delle proprietà (1), (2), (3), *anche la compatibilità con la relazione d'ordine e la subordinazione agli esponenti interi.*

Dato un numero reale *positivo* a, resta definita la funzione di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ $f(x) = a^x$. È una funzione positiva. Se è $a = 1$, si ha una funzione costante; se è $a \neq 1$, la funzione è illimitata, monotona crescente se è $a > 1$, decrescente se è $0 < a < 1$. È appena il caso di notare che anche se a è razionale, non è affatto detto che a^x sia razionale.

Potenze con esponente reale

Come definire in modo ragionevole a^α con $a > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$**?**
Sia intanto $a > 1$. Consideriamo i due insiemi

$$C = \{a^r: (r \in \mathbb{Q}) \wedge (r < \alpha)\}, \qquad D = \{a^s: (s \in \mathbb{Q}) \wedge (s > \alpha)\}.$$

Per la monotonia della funzione $f(x) = a^x$, sempre con $x \in \mathbb{Q}$, queste due classi sono separate. Proviamo che sono anche contigue.

LEMMA 11. *Dato il numero reale* $a > 1$, *per ogni numero reale* $\sigma > 0$, *esiste un numero naturale* $n > 0$ *tale che* $a^{1/n} < 1 + \sigma$.

DIM. La tesi equivale all'esistenza di un n per cui si abbia

$$a < (1 + \sigma)^n = 1 + n\sigma + k, \text{ con } k > 0.$$

Ma a tal fine basta che sia $1 + n\sigma > a$, ossia $n > \dfrac{a - 1}{\sigma}$. ∎

TEOREMA 12. *Le classi C e D sopra definite sono contigue.*

DIM. Fissiamo un numero reale $\varepsilon > 0$ e un $k \in \mathbb{Q}$, con $k > \alpha$. Proviamo che esistono $r,s \in \mathbb{Q}$, con $r < \alpha < s < k$, tali che $a^s - a^r < \varepsilon$. Da $r < \alpha < s < k$ si ha:

$$a^s - a^r = a^r(a^{(s-r)} - 1) < a^k(a^{(s-r)} - 1),$$

che è minore di ε se e solo se è $a^{s-r} < 1 + \frac{\varepsilon}{a^k} = 1 + \sigma$. Per il Lemma, esiste un naturale n tale che $a^{1/n} < 1 + \sigma$. Basta quindi prendere r ed s, con $s < k$, tali che $s - r < 1/n$. ∎

Ha dunque senso la

DEFINIZIONE. Dati i numeri reali a e α, con $a > 0$, si definisce il numero reale a^α come segue:

se è $a > 1$, è $\quad a^\alpha := \sup\{a^r : (r \in \mathbb{Q}) \wedge (r < \alpha)\} = \inf\{a^s : (s \in \mathbb{Q}) \wedge (s > \alpha)\}$;

se è $0 < a < 1$, è $\quad a^\alpha := \dfrac{1}{(1/a)^\alpha}$;

se è $a = 1$ $\quad 1^\alpha := 1.$

Si definisce poi, per ogni $\alpha > 0$, $\quad 0^\alpha := 0.$

(La definizione di a^α, con $0 < a < 1$, può naturalmente essere data in maniera diretta, come per il caso $a > 1$, tenendo presente che ora la funzione $f(x) = a^x$, con $x \in \mathbb{Q}$, è decrescente.)

Si prova poi, con un po' di fatica, il

TEOREMA 13. *Con la definizione di a^α sopra data restano soddisfatte le proprietà formali delle potenze.* ∎

Dalla stessa definizione si ottiene invece facilmente il seguente risultato (Esercizio!):

TEOREMA 14. *La definizione di a^α sopra data coincide, nel caso che α sia razionale, con quella data in precedenza.* ∎

La funzione esponenziale

Per ogni numero reale $a > 0$, resta così definita la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, espressa da $f(x) = a^x$, detta *funzione esponenziale di base a.*

Dalla stessa definizione si ha immediatamente il

TEOREMA 15. *La funzione reale di variabile reale f definita da $f(x) = a^x$ è positiva ed è crescente per $a > 1$, decrescente per $0 < a < 1$, costante per $a = 1$.* ∎

TEOREMA 16. *Se a è un numero reale positivo e diverso da 1, la funzione $f(x) = a^x$ assume tutti i valori reali positivi (e una volta sola).* Ossia: *la funzione $f(x) = a^x$ $(a \neq 1)$ di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^+$ è biiettiva e quindi invertibile.*

Cenno di dim. Siano $a > 1$ e $b > 0$; cerchiamo un α tale che $a^\alpha = b$. Siano:

$$C = \{c \in \mathbb{R}:\ a^c < b\}; \quad D = \{d \in \mathbb{R}:\ a^d > b\}.$$

Le classi C e D sono non vuote e separate, anzi contigue; infatti se ci fossero due elementi x e y compresi fra C e D, dovrebbe risultare $a^t = b$, per ogni t tale che $x < t < y$, contro la crescenza della funzione esponenziale. Sia α l'unico elemento compreso fra C e D. Si prova poi che è $a^\alpha = b$. ∎

Anche su questo punto ritorneremo nel § 7 del prossimo Capitolo.

§ 4. LA FUNZIONE LOGARITMO

Dato che, per $a \neq 1$, la funzione esponenziale a^x è biiettiva tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, ha senso la seguente

DEFINIZIONE. Se a e b sono due numeri reali positivi, con $a \neq 1$, l'unico numero reale α tale che $a^\alpha = b$ prende il nome log*aritmo in base a di b* e si indica con la scrittura $\log_a b$.

Data la funzione $(x =)\ g(y) = a^y$, con $0 < a \neq 1$, la sua funzione inversa è dunque indicata con $(y =)\ f(x) = \log_a x$.

TEOREMA 17. *La funzione* $f(x) = \log_a x$, *con* $0 < a \neq 1$, *è definita su* $\mathbb{R}^+$ *ed assume tutti i valori reali. È crescente se è* $a > 1$, *decrescente se è* $0 < a < 1$. ∎

Per la stessa definizione di funzione inversa, si ha:

TEOREMA 18. (1) $\log_a a^x = x$;

(2) $a^{\log_a x} = x$, se è $x > 0$;

(3) $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$. ∎

Dalla monotonia delle funzioni esponenziale ($a \neq 1$) e logaritmica si ottiene il seguente risultato molto utile in pratica:

TEOREMA 19. *Fissiamo un numero reale positivo* $a \neq 1$. *Quali che siano i numeri reali x e y, si ha:*

$$x = y \Leftrightarrow a^x = a^y;$$
$$x < y \Leftrightarrow a^x < a^y, \quad \text{se è } a > 1;$$
$$x < y \Leftrightarrow a^x > a^y, \quad \text{se è } a < 1.$$

Quali che siano i numeri reali positivi x e y, si ha:

$$x = y \Leftrightarrow \log_a x = \log_a y;$$
$$x < y \Leftrightarrow \log_a x < \log_a y, \quad \text{se è } a > 1;$$
$$x < y \Leftrightarrow \log_a x > \log_a y, \quad \text{se è } a < 1. \ \blacksquare$$

Da questa osservazione discendono subito le proprietà dei logaritmi.

TEOREMA 20. *Quali che siano i numeri reali a,b,c,p, con a,b,c positivi,* $a \neq 1$, *si ha:*

(1) $$\log_a bc = \log_a b + \log_a c;$$

(2) $$\log_a b^p = p \log_a b,$$

da cui

(3) $$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b.$$

Se poi è anche $c \neq 1$, *si ha:*

(4) $$\log_a b = \log_a c \times \log_c b,$$

da cui, se è $a = b$,

(5) $$\log_a c = \frac{1}{\log_c a}.$$

DIM. Proviamo, per esempio, la (4). Questa equivale alla

(4') $$a^{\log_a b} = a^{\log_a c \times \log_c b};$$

Primo membro: $.... = b;$

secondo membro: $.... = (a^{\log_a c})^{\log_c b} = c^{\log_c b} = b.$

Le altre proprietà si provano in modo perfettamente analogo (Esercizio!). ∎

La funzione potenza x^α

Sia α un numero reale prefissato. Qual è il dominio E della funzione $f(x) = x^\alpha$?

α intero positivo $\to E = \mathbb{R}$;
α intero negativo $\to E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
$\alpha = 0$ $\to E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; non conviene dare significato al simbolo 0^0;
$\alpha > 0$ non intero $\to E = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$;
$\alpha < 0$ non intero $\to E = \mathbb{R}^+$.

La funzione $f(x)^{g(x)}$

Qual è il dominio di una funzione del tipo $F(x) = f(x)^{g(x)}$?
Il dominio di una funzione di variabile reale è, per definizione, l'insieme di *tutti* i numeri reali per cui ha senso quello che c'è scritto. Dunque, detto A il dominio di g, il dominio E della F è dato da:

$$E = [\{x: f(x) > 0\} \cap A] \cup [\{x: f(x) = 0\} \cap \{x: g(x) > 0\}] \cup$$
$$\cup [\{x: f(x) < 0\} \cap \{x: g(x) \text{ è un numero intero}\}].$$

Ma quando si studia una funzione di questo tipo, si accetta solitamente come dominio l'insieme

$$E' = A \cap \{x: f(x) > 0\}.$$

Notiamo che solo per tali x si può esprimere la funzione F nella comoda forma

$$F(x) = a^{g(x) \log_a f(x)}, \text{ con } 0 < a \neq 1.$$

§ 5. IL NUMERO *e*

Ci si può chiedere quale sia la base più naturale per esponenziali e logaritmi. Ebbene, la base più naturale per esponenziali e logaritmi non è, come si potrebbe pensare a prima vista, il numero 10, ma un numero irrazionale trascendente compreso fra 2 e 3 che si indica con il simbolo *e* di cui daremo ora la definizione.

LEMMA 21. *Dati n numeri reali positivi,* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *tali che* $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$, *si ha* $a_1 a_2 \dots a_n \leq 1$.

DIM. Per induzione su n.
$n = 2$. Siano dati due numeri reali positivi a e b tali che $a + b = 2$. Se è $a = b = 1$ la tesi è ovvia. In caso contrario, si ha $a = 1 - \alpha$ e $b = 1 + \alpha$, da cui $ab = (1 - \alpha)(1 + \alpha) = 1 - \alpha^2 < 1$.
Passo dell'induzione. Siano dati $n + 1$ numeri positivi $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ tali che $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = n + 1$. Se tutti gli a_i sono uguali a 1, la tesi è ovvia. In caso contrario, non è restrittivo supporre che sia $a_0 = 1 + \alpha$ e $a_1 = 1 - \beta$, con α e β positivi. Posto $b_1 = 1 + \alpha - \beta$ (> 0), si ha

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + b_1 + a_2 + \dots + a_n = n + 1,$$

da cui
$$b_1 + a_2 + \dots + a_n = n.$$

Per l'ipotesi induttiva, si ha
$$b_1 a_2 \dots a_n \leq 1.$$

Essendo $a_0 a_1 = (1 + \alpha)(1 - \beta) = 1 - \beta + \alpha - \alpha\beta < 1 - \beta + \alpha = b_1$, è anche $a_0 a_1 a_2 \dots a_n < 1$. ▮

TEOREMA 22. *Dati n numeri reali positivi,* $a_1, a_2, \dots, a_n$, *si ha*

$$(*) \qquad \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

DIM. Posto $M = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, si ha $\frac{a_1}{M} + \frac{a_2}{M} + \dots + \frac{a_n}{M} = n$, da cui, per il Lemma precedente, $\sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{M^n}} \leq 1$, che equivale alla (*). ▮

Consideriamo ora le due seguenti classi numeriche

$$A = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}^+\right\} = \{a_n : n \in \mathbb{N}^+\};$$

$$B = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} : n \in \mathbb{N}^+\right\} = \{b_n : n \in \mathbb{N}^+\}.$$

TEOREMA 23. 1) *La successione* $(a_n)_n$ *è crescente e la successione* $(b_n)_n$ *è decrescente.*
2) *Le classi A e B sono contigue.*

DIM. 1) Proviamo che è $a_n \leq a_{n+1}$. Ciò equivale a dimostrare che è

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Ora, in virtù del Teorema precedente, si ha:

$$\sqrt[n+1]{1\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{1 + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

La decrescenza della successione $(b_n)_n$ si prova in modo analogo, ma con qualche piccolo fastidio in più.

2) Avendosi $a_n \leq a_{n+m} < b_{n+m} \leq b_m$, si ha intanto che le due classi A e B sono separate. Essendo poi

$$b_n - a_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{n} b_1 = \frac{4}{n},$$

si conclude che le classi A e B sono anche contigue. ∎

DEFINIZIONE. L'unico elemento separatore fra le classi A e B si indica con la lettera e.

È dunque, per definizione,

$$e := \sup\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}^+\right\} = \inf\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} : n \in \mathbb{N}^+\right\}.$$

Come si è detto, e è un numero irrazionale trascendente. Si ha $e = 2{,}718281828\ldots\ldots$

DEFINIZIONE. I logaritmi in base e sono detti *logaritmi naturali*. In questo caso si omette l'indicazione della base; è dunque $\log x := \log_e x$. (Si usa anche la notazione $\ln x$.)

I logaritmi in base 10 sono detti *logaritmi volgari* o *di Briggs* e si indicano con la 'elle' maiuscola; è dunque $\operatorname{Log} x := \log_{10} x$.

§ 6. LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Penseremo gli angoli non come parti del piano individuate da una coppia di semirette con l'origine in comune, ma come *le rotazioni di una semiretta attorno alla sua origine*. Così facendo avrà senso considerare anche angoli *maggiori di un angolo giro* e angoli *negativi*.

Siccome ci sono due possibili versi di rotazione, bisogna decidere qual è quello positivo. Se fissiamo in un piano un sistema di coordinate cartesiane (ortogonali e monometriche), accettiamo come positivo il verso che porta il semiasse positivo delle ascisse sul semiasse positivo delle ordinate secondo un angolo convesso (nella fattispecie, retto). Ciò comporta che, se la disposizione degli assi è quella usuale, il verso positivo delle rotazioni è quello *antiorario*.

Sappiamo che la lunghezza del perimetro di un poligono regolare è proporzionale alla sua apotema, cioè al raggio della circonferenza circoscritta. Sappiamo anche che la lunghezza della circonferenza è data dall'estremo superiore delle misure dei perimetri dei poligoni (regolari) inscritti e dall'estremo inferiore delle misure dei perimetri dei poligoni (regolari) circoscritti. Da questo segue che la lunghezza di una circonferenza è proporzionale al suo raggio. Sappiamo che il rapporto tra lunghezza della circonferenza e raggio si indica con 2π.

Da questo fatto segue che anche la lunghezza di un arco di circonferenza è proporzionale al raggio della circonferenza cui esso appartiene. Questo rapporto è direttamente proporzionale alla lunghezza dell'arco o, se si preferisce, all'ampiezza del corrispondente angolo al centro. Dunque il rapporto tra la lunghezza dell'arco e il raggio può essere assunto come misura dell'angolo al centro. Si ha così la misura degli angoli in *radianti*.

Per passare dalla misura in radianti x di un angolo α alla corrispondente misura in gradi sessagesimali $x°$ e viceversa, non c'è che da sfruttare la proporzione

$$x : \pi = x° : 180°.$$

Si ottiene così, in particolare, la seguente tabella

$x°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$180°$	$270°$	$360°$
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

D'ora in poi, misureremo *sempre* gli angoli in *radianti*. Conveniamo, inoltre, di misurare gli angoli a partire dal semiasse positivo delle ascisse. Siccome la misura di un angolo è la misura orientata di un arco, assegnare un angolo equivale ad assegnare un numero reale.

Si chiama *circonferenza trigonometrica* o *goniometrica* la circonferenza Γ con centro nell'origine O e raggio 1. Su di essa consideriamo i punti $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $A'(-1, 0)$ e $B'(0, -1)$. Ogni semiretta r uscente da O individua ed è individuata dal suo punto $P(r)$ di intersezione con Γ.

Un angolo α individua chiaramente *una* semiretta $r(\alpha)$ *e quindi un punto* $P(\alpha) \in \Gamma$. Si tenga però presente che angoli che differiscono per multipli interi di 2π individuano la stessa semiretta e quindi lo stesso punto $P \in \Gamma$.

DEFINIZIONE. Dato un angolo o, ciò che è lo stesso, un numero reale x, l'ascissa e l'ordinata del corrispondente punto $P(x) \in \Gamma$ prendono rispettivamente il nome di *coseno* e *seno* di x. Dunque, il punto $P(x)$ ha, per definizione, coordinate *coseno* di x e *seno* di x che si indicano con $\cos x$ e $\sin x$.

Si ottengono così due funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che, per quanto precede, sono periodiche di periodo 2π.

DEFINIZIONE. Per ogni numero reale x, con $x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$, si chiama *tangente* di x il numero reale $\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x}$.

Si ottiene così una funzione di $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ in $\mathbb{R}$ che, come si constata facilmente, è periodica di periodo π.

La retta OP, se non è parallela all'asse delle ordinate, incontra la retta di equazione $x = 1$ in un punto T. Sia poi H il punto di coordinate $(\cos x, 0)$. Dalla similitudine dei triangoli rettangoli $\Delta(OHP)$ e $\Delta(OAT)$ si ricava che l'ordinata del punto T è data da $\operatorname{tg} x$. Ciò fornisce l'interpretazione geometrica della tangente e ne spiega il nome.

Segnaliamo, ma senza insistere su ciò, le seguenti definizioni:

$$\sec x := \frac{1}{\cos x}; \quad \operatorname{cosec} x := \frac{1}{\sin x}; \quad \operatorname{ctg} x := \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Da facili considerazioni su triangoli rettangoli o equilateri si ha intanto la seguente tabella

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0

Guardando la circonferenza goniometrica e con il confronto di opportuni triangoli si ottiene la seguente tabella che esprime i valori delle funzioni seno, coseno e tangente di angoli *associati* ad un dato angolo x.

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$	$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$	$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} x}$	$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} x}$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

$\sin(x \pm \pi) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(x \pm \pi) = -\cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(-x) = \cos x$
$\operatorname{tg}(x \pm \pi) = \operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$

In particolare, le funzioni *seno* e *tangente* sono *dispari*, e la funzione *coseno* è *pari*.
Stabiliamo ora alcune formule di particolare utilità.

Identità fondamentale

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

Basta ricordare che $\cos x$ e $\sin x$ sono l'ascissa e l'ordinata di un punto della circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

Formule della somma e formule di duplicazione

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$	$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$	$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$
$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$	$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cos\alpha$	$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$	$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

DIM. Si considerino i punti della circonferenza trigonometrica

$$P(\cos\alpha, \sin\alpha),\ Q(\cos\beta, \sin\beta),\ R(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)).$$

Dalla congruenza dei triangoli $\Delta(POQ)$ e $\Delta(AOR)$, si ottiene $\overline{PQ} = \overline{AR}$, da cui

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = (1 - \cos(\alpha - \beta))^2 + \sin^2(\alpha - \beta).$$

Si deduce immediatamente la formula per il cos $(\alpha - \beta)$. Da questa si ottengono poi facilmente le altre. (Esercizio!) ▮

Formule di bisezione

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$	$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$	$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$

DIM. Si parte dalle uguaglianze $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ e si ricavano $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$. Poi basta sostituire α al posto di 2α. ▮

Seno, coseno e tangente in funzione della tangente dell'angolo metà

Posto $t = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, si ha:

$\sin\alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$	$\cos\alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$	$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2t}{1 - t^2}$

$$\boxed{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

DIM. Si parte dalle uguaglianze: $\cos(2\alpha) = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$, $\sin(2\alpha) = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$; poi si divide sopra e sotto per $\cos^2\alpha$. In fine basta sostituire α al posto di 2α.

Per l'ultima formula, si parte dall'uguaglianza $\cos\alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, da cui

$$t^2 = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{(1 + \cos\alpha)^2}.$$

Poi basta osservare che le funzioni $\sin\alpha$ e $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ hanno lo stesso segno. ▮

Formule di prostaferesi

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p + q}{2}\cos\frac{p - q}{2}$	$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p + q}{2}\cos\frac{p - q}{2}$
$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p + q}{2}\sin\frac{p - q}{2}$	$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p + q}{2}\sin\frac{p - q}{2}$

DIM. Dapprima si sommano e sottraggono le formule che danno $\sin(\alpha + \beta)$ e $\sin(\alpha - \beta)$, poi quelle che danno $\cos(\alpha + \beta)$ e $\cos(\alpha - \beta)$. In fine, si pone $\alpha + \beta = p$ e $\alpha - \beta = q$. ▮

L'equazione lineare in seno e coseno

Si consideri un'equazione del tipo

$$a \sin x + b \cos x + c = 0.$$

Posto $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, l'equazione può essere scritta nella forma

$$\frac{a}{\rho} \sin x + \frac{b}{\rho} \cos x = -\frac{c}{\rho}.$$

Essendo $\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{b}{\rho}\right)^2 = 1$, esiste uno e un solo $\alpha \in [0; 2\pi[$ tale che $\frac{a}{\rho} = \cos\alpha$ e $\frac{b}{\rho} = \sin\alpha$ [esiste uno e un solo $\beta \in [0; 2\pi[$ tale che $\frac{a}{\rho} = \sin\beta$ e $\frac{b}{\rho} = \cos\beta$]. L'equazione data può dunque essere scritta nella forma

$$\sin(x + \alpha) = -\frac{c}{\rho} \quad \left[\cos(x - \beta) = -\frac{c}{\rho}\right],$$

che è di tipo elementare.

ESEMPIO. Si consideri l'equazione

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x + 1 = 0.$$

Si ha $\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$. Scritta l'equazione data nella forma

$$\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} = 0,$$

questa diventa $$\sin\frac{\pi}{6} \sin x + \cos\frac{\pi}{6} \cos x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2},$$

le cui soluzioni sono date da

$$x - \frac{\pi}{6} = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi.$$

Le soluzioni della nostra equazione sono dunque date da

$$\left(x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \vee \left(x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right).$$

Le funzioni trigonometriche inverse

Le funzioni seno, coseno e tangente, essendo periodiche, non sono certamente invertibili. Per renderle tali, si considerano opportune restrizioni.

La funzione arco seno. Per invertire la funzione seno, la si restringe all'intervallo chiuso $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e si assume come codominio l'intervallo $I' = [-1, 1]$. La funzione seno è biiettiva tra I e I'; è perciò invertibile.

La sua funzione inversa è detta *arco seno* ed è indicata con $\arcsin x$.

La funzione $\arcsin x$ è dunque una funzione definita in $I' = [-1, 1]$ ed ha come insieme immagine l'intervallo $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. È una funzione dispari e crescente.

La funzione arco coseno. Per invertire la funzione coseno, la si restringe all'intervallo chiuso $J = [0; \pi]$ e si assume come codominio l'intervallo $J' = [-1, 1]$. La funzione coseno è biiettiva tra J e J'; è perciò invertibile.

La sua funzione inversa è detta *arco coseno* ed è indicata con $\arccos x$.

La funzione $\arccos x$ è dunque una funzione definita in $J' = [-1, 1]$ ed ha come insieme immagine l'intervallo $J = [0, \pi]$. È una funzione decrescente.

La funzione arco tangente. Per invertire la funzione tangente, la si restringe all'intervallo aperto $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. La funzione tangente è biiettiva tra I e $\mathbb{R}$; è perciò invertibile.

La sua funzione inversa è detta *arco tangente* ed è indicata con $\operatorname{arctg} x$.

La funzione $\operatorname{arctg} x$ è dunque una funzione definita in $\mathbb{R}$, ha come insieme immagine l'intervallo $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. È una funzione dispari e crescente.

§ 7. LA FORMA TRIGONOMETRICA DEI NUMERI COMPLESSI

Sappiamo che in un piano si possono introdurre, accanto alle coordinate cartesiane, anche quelle polari assegnando ad ogni punto P la distanza ρ dall'origine O e l'angolo ϑ (definito a meno di multipli di 2π) che la semiretta OP forma con il semiasse positivo delle ascisse. Ciò vale dunque anche per i numeri complessi.

Dato un numero complesso $z = x + yi$, si ponga $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Il numero non negativo ρ è detto il *modulo* di z. Si ha, ovviamente, $\rho = 0$ se e solo se è $z = 0$.

Geometricamente, il modulo esprime la distanza che il numero z ha dal punto 0 nel piano di Gauss.

Sia ora $z \neq 0$. Si ha: $z = \rho\left(\frac{a}{\rho} + \frac{b}{\rho} i\right)$. Essendo $\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{b}{\rho}\right)^2 = 1$, esiste uno ed un solo angolo $\vartheta \in [0, 2\pi[$ tale da aversi $\frac{a}{\rho} = \cos\vartheta$ e $\frac{b}{\rho} = \sin\vartheta$. Si ha dunque

$$z = \rho(\cos\vartheta + i \sin\vartheta).$$

Il numero reale ϑ è detto l'*argomento* o l'*anomalia* del numero complesso z. Se è $z = 0$, la sua anomalia è arbitraria o, se si preferisce, indeterminata.

Dati due numeri reali ρ (≥ 0) e ϑ, questi individuano univocamente il numero complesso $z = \rho(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$. Inoltre, coppie di numeri reali (ρ,ϑ_1) e (ρ,ϑ_2), con $\rho > 0$, individuano lo stesso numero complesso se e solo se risulta $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Ciò si esprime dicendo che l'argomento di un numero complesso $z \neq 0$ è individuato a meno di multipli interi di 2π.

Se un numero complesso z è assegnato mediante il suo modulo e il suo argomento, diremo che z è espresso in *forma trigonometrica* e scriveremo, in tal caso,

$$z = [\rho, \vartheta].$$

Le formule che permettono il passaggio dalla forma algebrica ($z = x + yi$) di un numero complesso a quella trigonometrica ($z = [\rho, \vartheta]$) e viceversa sono le seguenti, che discendono direttamente dalle definizioni precedenti:

$$x = \rho\cos\vartheta, \quad y = \rho\sin\vartheta, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

ESEMPI. 1) Se è $z = [\rho, \vartheta]$, si ha $-z = [\rho, \vartheta + \pi]$; $\overline{z} = [\rho, -\vartheta]$.

2) Si ha: $[\pi, \pi] = -\pi$; $[2, 3] = 2(\cos 3 + i\sin 3)$.

$$5 = [5, 0]; \ -1 = [1, \pi]; \quad 3i = \left[3, \frac{\pi}{2}\right]; \ 1 + i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]; \ 2 - 3i = \left[\sqrt{13}, -\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}\right].$$

La forma trigonometrica dei numeri complessi è molto comoda per eseguire prodotti e innalzamenti a potenza.

TEOREMA 24. 1) *Dati* $z_1 = [\rho_1, \vartheta_1]$ *e* $z_2 = [\rho_2, \vartheta_2]$, *si ha*

$$z_1z_2 = [\rho_1\rho_2, \vartheta_1 + \vartheta_2].$$

2) (*Formule di De Moivre). Dati* $z = [\rho, \vartheta]$ *e* $n \in \mathbb{N}^+$, *si ha*

$$z^n = [\rho^n, n\vartheta].$$

DIM. 1) Dati $z_1 = [\rho_1, \vartheta_1]$ e $z_2 = [\rho_2, \vartheta_2]$, si ha

$$z_1z_2 = \rho_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)\,\rho_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) =$$

$$= \rho_1\rho_2[(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2) + i(\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2)] =$$

$$= \rho_1\rho_2[\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)] = [\rho_1\rho_2, \vartheta_1 + \vartheta_2].$$

2) Per induzione su n. Per $n = 1$, la tesi è ovvia. Passo dell'induzione:

$$z^n = zz^{n-1} = [\rho, \vartheta][\rho^{n-1}, (n-1)\vartheta] = [\rho^n, n\vartheta]. \blacksquare$$

ESEMPI. 3) Se è $z = [\rho, \vartheta]$, si ha $\dfrac{1}{z} = \left[\dfrac{1}{\rho}, -\vartheta\right]$.

4) Dalla (1) si riottiene immediatamente l'uguaglianza $\boxed{z\overline{z} = \rho^2.}$

5) Si ha: $(1 + i)^5 = \left[\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right]^5 = \left[4\sqrt{2}, \dfrac{5\pi}{4}\right] = 4\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -4 - 4i.$

6) Sia $z = [1, \vartheta] \neq 1$ un numero complesso di modulo unitario. Partiendo dall'uguaglianza

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z},$$

si ottiene

$$(1 + \cos\vartheta + \cos 2\vartheta + \dots + \cos(n-1)\vartheta) + i\,(\sin\vartheta + \sin 2\vartheta + \dots + \sin(n-1)\vartheta) =$$

$$= \frac{1 - \cos n\vartheta - i \sin n\vartheta}{1 - \cos\vartheta - i \sin\vartheta} = \frac{1 - \cos n\vartheta - i \sin n\vartheta}{1 - \cos\vartheta - i \sin\vartheta} \frac{1 - \cos\vartheta + i \sin\vartheta}{1 - \cos\vartheta + i \sin\vartheta} =$$

$$= \frac{(1 - \cos\vartheta)(1 - \cos n\vartheta) + \sin\vartheta \sin n\vartheta + i\,[(1 - \cos n\vartheta)\sin\vartheta - \sin n\vartheta(1 - \cos\vartheta)]}{(1 - \cos\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta}.$$

Uguagliando le parti reali e quelle immaginarie, si ottiene:

$$1 + \cos\vartheta + \cos 2\vartheta + \ldots + \cos(n - 1)\vartheta = \frac{1 - \cos\vartheta - \cos n\vartheta + \cos\vartheta \cos n\vartheta + \sin\vartheta \sin n\vartheta}{2(1 - \cos\vartheta)} =$$

$$= \frac{1 - \cos\vartheta - \cos n\vartheta + \cos(n - 1)\vartheta}{2(1 - \cos\vartheta)} = \frac{2\left(\cos\frac{(n - 1)\vartheta}{2}\right)^2 - 2\cos\frac{(n + 1)\vartheta}{2}\cos\frac{(n - 1)\vartheta}{2}}{4\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\cos\frac{(n - 1)\vartheta}{2}\left(\cos\frac{(n - 1)\vartheta}{2} - \cos\frac{(n + 1)\vartheta}{2}\right)}{2\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^2} = \frac{2\cos\frac{(n - 1)\vartheta}{2}\sin\frac{n\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}}{2\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^2}.$$

$$\sin\vartheta + \sin 2\vartheta + \ldots + \sin(n - 1)\vartheta = \frac{\sin\vartheta - \sin\vartheta\cos n\vartheta - \sin n\vartheta + \cos\vartheta \sin n\vartheta}{2(1 - \cos\vartheta)} =$$

$$= \frac{\sin\vartheta - \sin n\vartheta + \sin(n - 1)\vartheta}{2(1 - \cos\vartheta)} = \frac{2\sin\frac{(n - 1)\vartheta}{2}\cos\frac{(n - 1)\vartheta}{2} - 2\sin\frac{(n - 1)\vartheta}{2}\cos\frac{(n + 1)\vartheta}{2}}{4\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sin\frac{(n - 1)\vartheta}{2}\left(\cos\frac{(n - 1)\vartheta}{2} - \cos\frac{(n + 1)\vartheta}{2}\right)}{2\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^2} = \frac{2\sin\frac{(n - 1)\vartheta}{2}\sin\frac{n\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}}{2\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^2}.$$

In conclusione, si ottengono le due utili formule:

$$\boxed{1 + \cos\vartheta + \cos 2\vartheta + \ldots + \cos(n - 1)\vartheta = \frac{\cos\frac{(n - 1)\vartheta}{2}\sin\frac{n\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}}$$

$$\boxed{\sin\vartheta + \sin 2\vartheta + \ldots + \sin(n - 1)\vartheta = \frac{\sin\frac{(n - 1)\vartheta}{2}\sin\frac{n\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}}$$

§ 8.- E S E R C I Z I

1) Su dusegnino i grafici delle seguenti funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$:

$$|x|; \quad x + |x|; \quad 1 - |x - 1|; \quad \frac{1}{4}(|x + 2| + |x - 2| - 2|x|); \quad ||x - 1| + x| - x.$$

2) Fra le seguenti funzioni si ricerchino quelle che sono pari e quelle che sono dispari:

$$x^2 - |x| + 1; \quad \frac{\mathrm{tg}x}{x}; \quad x + \sin x; \quad x + \cos x; \quad x \sin^3 x; \; \sqrt{1 - 2\cos x}; \quad x^2 \mathrm{arctg} x;$$
$$5; \; 0; \; \sqrt{x + \mathrm{tg} x}; \quad \arcsin(1 - x).$$

3) Supposte monotone crescenti le funzioni f, g: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, si studi la monotonia delle seguenti funzioni (eventualmente definite in un sottoinsieme di E):

$$-f; \quad f + g; \quad \frac{1}{f}; \quad f^2; \quad f^3; \quad |f|; \quad f \vee g; \quad f \wedge g; \quad g \circ f.$$

4) Si constati che le seguenti funzioni reali di variabile reale sono monotone sul loro dominio:

$$x^3 + 5x + 1; \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \; (\text{con } x \geq 0); \quad (1 + \mathrm{arctg} x)^3;$$
$$(2\pi - x) \arccos x; \quad \mathrm{arctg}\frac{1}{x} \; (\text{con } x > 0).$$

5) Si dimostrino i seguenti *prodotti notevoli:*

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b); \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1});$$
$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots - a^2b^{n-3} + ab^{n-2} - b^{n-1}), \text{ se } n \text{ è } pari;$$
$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1}), \text{ se } n \text{ è } dispari.$$

6) Si ricerchi il polinomio P, di grado ≤ 3, per cui si ha: $P(-2) = 3$, $P(-1) = 0$, $P(0) = 1$, $P(2) = -5$.
Si ricerchi il polinomio P, di grado ≤ 5, per cui si ha: $P(-2) = P(-1) = P(0) = 0$, $P(1) = -4$, $P(2) = P(3) = -4$.

7) Si scriva un polinomio a coefficienti reali e di grado il più piccolo possibile che ammetta la radice 1 doppia e la radice i tripla.
Si scriva un polinomio a coefficienti reali e di grado il più piccolo possibile che ammetta la radice i semplice, la radice $1 + i$ doppia e la radice 0 tripla.

8) Si determinino i domini delle seguenti funzioni:

$$\sqrt{\frac{x + 3}{x^2 - 2}}; \quad \sqrt{1 - \left|\frac{x}{x + 2}\right|}; \quad \arcsin(1 - 3x); \quad \sqrt{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}}; \quad \sqrt{1 - 2\sin x};$$

$$\mathrm{arcdin}(\arcsin x); \; \sqrt{1 + \mathrm{arctg}\, x}; \quad \sqrt{8 + 2\log x - \log^2 x}; \; \log\frac{\pi - 4\arccos x}{\pi + 3\arcsin x};$$

$$\sqrt{4\sin^2 x - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})\sin x + \sqrt{6}}; \quad \log(|\sin x + \cos x| - 2|\sin x|);$$

$$\log\left(1 - \left|1 - e^{\sin x - \cos x}\right|\right);\quad \log\left(\cos x - \cos\frac{x}{2}\right);\quad \log\left(\frac{\pi}{3} - \arccos\frac{x-1}{x+2}\right);$$

$$\frac{e^{2x+1}}{e^{2x-1}};\quad \log(e^x + e^{-x});\quad \log[1 - 2\log(x+1)];\quad \log[1 - \log(1 - \log x)];$$

$$\sqrt{1 + \log(x^2 + 2x);}\quad x^x;\quad (x^2)^x;\quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x;\quad \log_x(x+1);\quad \log_{\mathrm{tg}\,x}\sin x.$$

9) Dato un triangolo di vertici A, B, C, indichiamo, come di consueto, con α, β, γ le misure degli angoli corrispondenti e con a, b, c le misure dei lati opposti. Indichiamo poi con $2p$ la misura del perimetro e con $\mathcal{A}$ l'area del triangolo. Si provino i seguenti Teoremi che, per altro, dovrebbero essere ben noti.

a) Se il triangolo è rettangolo in A, si ha: $b = a\sin\beta = a\cos\gamma$.

b) *Teorema della corda*. Detto r il raggio della cerchio circoscritto, si ha $a = 2r\sin\alpha$, $b = \dots$

c) *Teorema dei seni*. Si ha: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ $(= 2r)$.

d) *Teorema del coseno*. Si ha: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

e) *Formule di Briggs*. Si ha: $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$; $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$.

f) *Formula di Erone*. Si ha: $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

[Per la (b) basta tener presente che tutti gli angoli alla circonferenza che insistono su una stessa corda sono uguali, essendo tutti uguali alla metà del corrispondente angolo al centro.

Per la (e) basta ricavare $\cos\alpha$ dalla (d) e usare le formule di bisezione tenendo presente che, nel nostro caso, coseno e seno sono sempre positivi.

Per la (f) si parte dall'espressione $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha = bc\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$ e si sfruttano le (e).]

10) Si ricerchino nel campo complesso le radici dei seguenti polinomi:

$$x^2(x^2 + 1);\quad (x^2 + 1)^3;\quad x^4 - 4x^2 + 5;\quad x^6 - x^4 + x^2 - 1;\quad x^4 - 1:\quad x^2 - 2ix - 1.$$

11) Ricorrendo alla forma trigonometrica, si risolvano le seguenti equazioni:

$$z^4 = -1;\quad z^5 = 1 - i;\quad z^3 = iz;\quad z^4 = (1 + i)\bar{z}^2;\quad iz^3 = \bar{z};\quad z^4 + \bar{z}^4 = iz^2.$$

[Risolviamo, per esempio il problema generale di trovare le radici n - ime di un numero complesso dato; vogliamo cioè risolvere l'equazione $z^n = u$, con u numero complesso dato e z incognito. Posto $z = [\rho, \vartheta]$ e $u = [r, t]$, si ottiene l'equazione $[\rho^n, n\vartheta] = [r, t]$ e quindi il sistema

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\vartheta = t + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

In conclusione, si ha $\rho = \sqrt[n]{r}$ e $\vartheta = \dfrac{t}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$; i valori di k che danno soluzioni distinte sono, per esempio, $0, 1, 2, \dots, n - 1$. Si vede che, rappresentando queste soluzioni nel piano di Gauss, si ottengono i vertici di un poligono regolare di n lati con centro nell'origine.]

Capitolo Quinto
LIMITI E CONTINUITÀ

§ 1. LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

Ricordiamo che si chiama *successione di numeri reali* ogni applicazione f di $\mathbb{N}$ (o $\mathbb{N}^+$) in $\mathbb{R}$. Per indicare la successione $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ (ossia la successione per cui è $f(n) = a_n$), scriveremo $(a_n)_n$; indicheremo invece con $\{a_n: n \in \mathbb{N}\}$ l'insieme immagine $f(\mathbb{N})$. L'elemento a_n è detto il *termine generale* o *n - imo* della successione.

DEFINIZIONE. Sia data una successione $(a_n)_n$. Se $\mathbb{M} = \{n_0, n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$, con $n_k < n_{k+1}$, è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$, la restrizione della f a $\mathbb{M}$ è ancora una successione $a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots = (a_{n_k})_k$, che prende il nome di *sottosuccessione.* Se, in particolare, $\mathbb{M}$ è un insieme del tipo $\{n: n > m\}$, la sottosuccessione è detta anche *coda.*

Il nostro scopo è quello di studiare come si comporta il termine generale di una successione $(a_n)_n$ quando l'indice n diventa molto grande o, come diremo, quando *n tende a* $+\infty$.
Cominciamo con alcuni esempi.

ESEMPI. 1) Consideriamo la successione $(a_n)_n$ definita da $a_n = \frac{1}{n}$. Si vede subito che al crescere di n, a_n decresce e si avvicina sempre più al valore 0. Anche il termine generale della successione $(b_n)_n$ definita da $b_n = 1 + \frac{1}{n}$ è decrescente e si avvicina sempre più a 0. La differenza fra le due situazioni è che, nel primo caso, il termine a_n si avvicina *arbitrariamente* a 0, mentre il termine generale b_n della seconda successione ne rimane lontano o, come diremo, *discosto*. Ci esprimeremo dicendo che a_n *tende a* 0 *al tendere di n a* $+\infty$. Diremo anche che 0 è il *limite* della successione $(a_n)_n$. Diremo, invece, che il valore b_n della seconda successione tende a 1 al tendere di n a $+\infty$, dato che questo diventa e rimane arbitrariamente vicino a 1.

2) Consideriamo la successione

$$\frac{1}{2}, -\frac{2}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{2}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \dots, \frac{1}{n}, -\frac{2}{n}, \dots$$

Anche i valori di questa successione si avvicinano a 0, ma non è più vero che al crescere di n, la distanza fra il termine generale a_n della successione e 0 diventa sempre più piccola. È però vero che questa distanza diventa e rimane *arbitrariamente* piccola. Dunque il limite della successione è ancora 0.

3) Consideriamo la successione

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, 1, \frac{1}{6} \dots, 1, \frac{1}{n}, \dots$$

Anche il termine generale a_n di questa successione diventa arbitrariamente vicino a 0, ma *non rimane* tale. Si ha analogamente che a_n diventa, ma non rimane, quanto mai vicino a 1. Siccome a_n finisce col rimaner lontano da ogni altro valore, si conclude che la successione *non ha limite*.

Per contro, tende chiaramente a 0 il termine generale della successione

$$0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{6} \ldots, 0, \frac{1}{n}, \ldots$$

4) Consideriamo la successione di termine generale $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Sappiamo che la successione $(a_n)_n$ è crescente e che l'insieme $\{a_n: n \in \mathbb{N}^+\}$ ha come estremo superiore il numero e. Dunque i termini della successione $(a_n)_n$ diventano e rimangono arbitrariamente vicini ad e. Diremo che a_n *tende a e al tendere di n a* $+\infty$ e che e è il limite della nostra successione.

Lo studio delle successioni dei primi tre esempi è molto facile; già lo studio della successione dell'Esempio 4 ha richiesto molta più fatica (tutto un paragrafo del Capitolo 4). Vediamo ancora un esempio non banale.

ESEMPIO. 5) Partiamo dalla successione $(F_n)_n$ dei *numeri di Fibonacci* definita per ricorrenza da

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Poniamo poi $r_n := \frac{F_{n+1}}{F_n}$. Per i primi valori di n, si ottiene la seguente tabella:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
r_n	-	1	2	1,5	1,6667	1,6	1,625	1,61538	1,61905	1,61765	1,61818	1,61798

Come si vede, le cifre decimali sembrano *stabilizzarsi* una dopo l'altra. Si ha l'impressione che i numeri r_n tendano ad un valore I,61… Osserviamo che, per altro, la successione $(r_n)_n$ non è monotona. Come possiamo controllare se la nostra successione ha effettivamente un limite? Osserviamo intanto che la successione $(r_n)_n$ può essere definita per ricorrenza da

$$r_1 = 1,\ r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}.$$

Si ha, infatti,

$$r_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{r_n}.$$

Ora, se si suppone che r_n tenda a un numero reale L, ossia che per *n molto grande*, sia r_n *pressoché uguale a L*, deve essere pressoché uguale a L anche r_{n+1}. Deve dunque essere

$$L = 1 + \frac{1}{L},$$

da cui $L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Il valore $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, essendo negativo, va escluso; l'unico valore possibile di L è dunque $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}617803\ldots$ Ciò è in accordo con i dati della tabella. In realtà, bisognerebbe poi verificare che L è effettivamente il limite della successione, ma questa verifica non è del tutto banale.

Vediamo ora di arrivare alla definizione corretta di limite per una successione. Si tratta di formalizzare la frase "*a_n diventa e rimane arbitrariamente vicino a l*". Ciò significa che, se fissiamo una *misura* per la vicinanza di a_n a l, tutti gli a_n, da un certo punto in poi, soddisfano alla nostra condizione. Il modo più naturale per fissare una misura di vicinanza è quello di fissare un numero reale $\varepsilon > 0$ e di dichiarare ε - vicini due numeri che differiscono, in valore assoluto, meno di ε. Quello che si vuole è dunque che, dato il nostro $\varepsilon > 0$, da un certo indice ν in poi risulti $|a_n - l| < \varepsilon$.

DEFINIZIONE. Si dice che un numero reale l è *limite* di una successione $(a_n)_n$ per n che *tende a* $+\infty$, o che la successione $(a_n)_n$ *tende* o *converge* a l se, comunque si fissi un numero reale $\varepsilon > 0$, esiste un indice ν tale che si abbia $|a_n - l| < \varepsilon$ per ogni $n > \nu$. In simboli:

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \nu \in \mathbb{N})(\forall\, n \in \mathbb{N})(n > \nu \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon).$$

In tal caso si scrive $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ o anche $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ o, semplicemente, $a_n \to l$.

Il risultato dell'Esempio 5 si esprimerà scrivendo $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, quello dell'Esempio 4 si esprimerà scrivendo $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Osserviamo esplicitamente che la condizione $|a_n - l| < \varepsilon$ equivale alla $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$.

Consideriamo ora la successione $(F_n)_n$ dei numeri di Fibonacci. Chiaramente questa non converge ad alcun numero reale. Si vede però che i valori di questa successione diventano e restano arbitrariamente grandi. Per contro, i valori della successione

$$1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, \ldots, 1, n, 1, n + 1, 1, \ldots$$

diventano sì arbitrariamente grandi, ma non restano tali.

DEFINIZIONE. Si dice che una successione $(a_n)_n$ ha *limite* $+\infty$, o che *diverge* a $+\infty$, se comunque si fissi un numero reale M esiste un numero naturale ν tale che si abbia $a_n > M$ per ogni n maggiore di ν. In simboli:

$$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, \nu \in \mathbb{N})(\forall\, n \in \mathbb{N})(n > \nu \Rightarrow a_n > M).$$

In tal caso si scrive $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ o anche $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ o, semplicemente, $a_n \to +\infty$.

DEFINIZIONE. Si dice che una successione $(a_n)_n$ ha *limite* $-\infty$, o che *diverge* a $-\infty$, se, comunque si fissi un numero reale M, esiste un numero naturale ν tale che si abbia $a_n < M$ per ogni n maggiore di ν. In simboli:

$$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, \nu \in \mathbb{N})(\forall\, n \in \mathbb{N})(n > \nu \Rightarrow a_n < M).$$

In tal caso si scrive $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ o anche $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ o, semplicemente, $a_n \to -\infty$.

Per esempio diverge a $-\infty$ la successione di termine generale $a_n = -n$.

ESEMPIO. 6) Consideriamo ora la successione di termine generale $a_n = (-1)^n n$. Questa non diverge né a $+\infty$ né a $-\infty$; però si vede subito che è $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$. Diremo, in tal caso, che la successione diverge a ∞. Dunque

DEFINIZIONE. Si dice che una successione $(a_n)_n$ ha *limite* ∞, o che *diverge* a ∞, se la successione $(|a_n|)_n$ ha limite $+\infty$, ossia se, comunque si fissi un numero reale M, esiste un numero naturale ν tale che si abbia $|a_n| > M$ per ogni n maggiore di ν. In simboli:

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists \nu \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > \nu \Rightarrow |a_n| > M).$$

In tal caso si scrive $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$ o anche $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty$ o, semplicemente, $a_n \to \infty$.

Tenuto conto delle definizioni di intorno di un numero reale, di $+\infty$, $-\infty$ e ∞ viste nel § 7 del Cap. 2, si constata che tutte le definizioni sopra date possono essere compendiate in una sola.

DEFINIZIONE. Si dice che una successione $(a_n)_n$ ha *limite* β (potendo β essere un numero reale, $+\infty$, $-\infty$ o ∞) se comunque si fissi un intorno V di β, esiste un numero naturale ν tale che si abbia $a_n \in V$ per ogni n maggiore di ν. In simboli:

$$(\forall V \in \mathcal{U}(\beta))(\exists \nu \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > \nu \Rightarrow a_n \in V).$$

In tal caso si scrive $\lim_{n\to+\infty} a_n = \beta$ o anche $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta$ o, semplicemente, $a_n \to \beta$.

DEFINIZIONE. Una successione è detta *convergente* se ha un limite finito, è detta *divergente* se ha limite infinito, è detta *indeterminata* se non ha limite.

ESEMPIO. 7) Verifichiamo che è $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n-5} = 2$. Dobbiamo provare che

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \nu \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\left(n > \nu \Rightarrow \left|\frac{2n+1}{n-5} - 2\right| < \varepsilon\right).$$

Dobbiamo cioè verificare che, una volta fissato $\varepsilon > 0$, fra le soluzioni dell'ultima disequazione ci sono tutti i numeri naturali da un certo ν in poi. Scriviamo la disequazione nella forma

$$2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n-5} < 2 + \varepsilon.$$

Poiché non è restrittivo supporre $\varepsilon < 1$ e $n > 5$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} (2-\varepsilon)(n-5) < 2n+1 \\ 2n+1 < (2+\varepsilon)(n-5) \\ n > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-\varepsilon-2)n < 5(2-\varepsilon)+1 \\ (2+\varepsilon-2)n > 1+5(2+\varepsilon) \\ n > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > \dfrac{5\varepsilon - 11}{\varepsilon} \\ n > \dfrac{11+5\varepsilon}{\varepsilon} \end{cases}.$$

Basta dunque che sia $n > \nu$, con ν numero naturale maggiore di $\frac{11+5\varepsilon}{\varepsilon}$ (> 5, se è $\varepsilon < 1$).

OSSERVAZIONE. Se una successione tende a $+\infty$ [a $-\infty$], allora tende anche a ∞. La successione dell'Esempio 6 mostra che non sussiste l'implicazione opposta. Ciò dipende dal fatto che ogni intorno di ∞ è anche un intorno di $+\infty$ e $-\infty$. Con questa sola eccezione, si ha che, se è $\alpha \neq \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$, esistono $U \in \mathcal{U}(\alpha)$ e $V \in \mathcal{U}(\beta)$ con $U \cap V = \emptyset$.

TEOREMA 1. 1) *(Unicità del limite) - Il limite di una successione, se esiste, è unico.*
2) *(Limite delle sottosuccessioni) - Se una successione ha limite, allora ha lo stesso limite ogni sua sottosuccessione e, in particolare, ogni sua coda.*
2') *(Limite delle code) - Una successione ha limite se e solo se lo ha una delle sue code.*
3) *(Permanenza del segno) - Se una successione ha limite positivo* [*negativo*]*, esiste un* ν *tale che, per* $n > \nu$, *è* $a_n > 0$ [risp. $a_n < 0$].
4) *(Limitatezza delle successioni convergenti) - Se una successione* $(a_n)_n$ *è convergente, allora è limitata* (ossia: *l'insieme immagine* $f(\mathbb{N}) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *è limitato*). ▮

La verifica di queste proprietà è molto facile e discende immediatamente dalla stessa definizione di limite e dall'osservazione precedente. Dimostriamo, per esercizio, la (3). Sia $a_n \to l > 0$. Fissiamo un ε positivo ma minore di l. Sappiamo che da un certo ν in poi è $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$, da cui $a_n > 0$. Se poi è $a_n \to +\infty$, la cosa è altrettanto facile.

TEOREMA 2. *(Limite delle successioni monotone) - Una successione monotona ha sempre limite (finito o no) che coincide con* $\sup f(\mathbb{N})$*, se la successione è non - decrescente, ed è dato da* $\inf f(\mathbb{N})$*, se la successione è non - crescente.*

DIM. Supponiamo la successione non - decrescente. Sia $\lambda = \sup f(\mathbb{N}) \in \mathbb{R}$ e fissiamo un $\varepsilon > 0$. Si ha intanto $a_n \leq \lambda < \lambda + \varepsilon$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per la seconda proprietà dell'estremo superiore, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_\nu > \lambda - \varepsilon$. Essendo la successione non - decrescente, per ogni $n > \nu$ si ha $a_n \geq a_\nu > \lambda - \varepsilon$. dunque per ogni $n > \nu$ si ha $|a_n - \lambda| < \varepsilon$, che è quanto si doveva dimostrare.

Sia ora $\sup f(\mathbb{N}) = +\infty$. Dunque, fissato $M \in \mathbb{R}$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_\nu > M$, da cui, sempre per la monotonia della successione, $a_n \geq a_\nu > M$ per ogni $n > \nu$. Ma ciò significa proprio che la successione tende a $+\infty$.

Analogamente nel caso che la successione sia non - crescente. ▮

Si ritrova così, per esempio, che è $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Sussiste il seguente risultato di cui omettiamo la dimostrazione

TEOREMA 3. (di Bolzano - Weierstrass).- *Ogni successione limitata di numeri reali ha una sottosuccessione convergente.* ▮

DEFINIZIONE. Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ è detto *compatto* se è chiuso e limitato.

TEOREMA 4. *Un sottoinsieme* E *di* $\mathbb{R}$ *è compatto se e solo se ogni successione di elementi di* E *ha una sottosuccessione convergente ad un elemento di* E. ▮

DIM. Proviamo il '*solo se*''. Ogni successione in E è limitata. Per il Teorema 3, essa ha una sottosuccessione convergente a un punto $l \in \mathbb{R}$. Si ha poi $l \in E$, dato che E è chiuso.

Per provare il "*se*" procediamo per assurdo. Se E non è limitato, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un $a_n \in E$ tale che $|a_n| > n$. La successione $(a_n)_n$ non ha sottosuccesioni convergenti. Sia ora E non chiuso. Esiste dunque un numero l di accumulazione per E non appartenente ad E. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esiste un $a_n \in E$ tale che $|a_n - l| < \frac{1}{n}$. La successione $(a_n)_n$ converge a $l \notin E$ e lo stesso accade per tutte le sue sottosuccessioni; nessuna di queste può dunque convergere, per l'unicità del limite, ad un elemento di E. ▮

§ § 2. LIMITI DELLE FUNZIONI

Partiamo ancora da alcuni esempi.

ESEMPI. 1) Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Qual è il coefficiente angolare della tangente al suo grafico nel punto $P_0(x_0, x_0^2)$? L'idea è questa: dato un generico punto $P(x, x^2)$ appartenente al grafico della funzione, sappiamo che il coefficiente angolare della retta *secante* passante per P_0 e P è dato da $\varphi(x) = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}$. Naturalmente, la φ non è definita in x_0. Immaginiamo di prendere degli x sempre più vicini ad x_0 o, come diremo, di far *tendere* x a x_0. Cosa succede del valore della funzione $\varphi(x)$? Risulta

$$\varphi(x) = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0, \text{ con } x \neq x_0.$$

Ora, se x si avvicina ad x_0, il valore $\varphi(x)$ si avvicina a $2x_0$. Dunque la retta secante P_0P *tende* alla retta per P_0 di coefficiente angolare $2x_0$ che sarà appunto la retta cercata.

Diremo che il valore $2x_0$ è il *limite* della funzione $\varphi(x)$ per x che *tende* a x_0.

2) Posto $I = [-1, 1]$, consideriamo la funzione $f\colon I(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1 - [1 - x^2]$, dove il simbolo [.] indica, al solito, la parte intera. Cosa succede del valore $f(x)$ quando x si avvicina a 0? Si vede subito che è $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se è } x = 0 \\ 1, & \text{se è } x \in I \setminus \{0\}. \end{cases}$ Essendo $f(x)$ costantemente uguale a 1 per $x \neq 0$, non si può che concludere che, anche se è $f(0) = 0$, $f(x)$ *tende a* 1 per x che tende a 0, ossia che il limite di $f(x)$ per x che tende a 0 è 1.

Dunque il valore della funzione f in un punto x_0 non ha influenza sul limite di f per x che tende a x_0. L'esempio precedente mostra poi che può aver senso ricercare il limite di una funzione per x che tende ad un punto x_0 anche se f non è definita in x_0.

3) Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{x}$. Non ha evidentemente senso chiedersi quale sia il limite di f per x che tende a -1, dato che x non può avvicinarsi arbitrariamente a -1, rimanendo nel dominio della f.

Dunque, affinché abbia senso ricercare il limite di una funzione per x che tende ad un punto x_0, quest'ultimo deve essere di accumulazione per il dominio della f.

A questo punto, possiamo dare la definizione di limite, ricalcando quanto fatto per le successioni. Un numero reale l sarà detto *limite* della funzione f per x che tende a x_0, punto di accumulazione per il dominio di f, se accade che, fissata una misura di vicinanza a l, individuata da un numero positivo ε, esiste un intervallo di centro x_0 per ogni x del quale, purché appartenente al dominio di f e diverso da x_0, il valore $f(x)$ risulti ε - vicino a l. Dunque:

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione $f\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto x_0 di accumulazione per E. Diremo che un numero reale l è *limite di f*, o che *f tende a l, per x che tende a* x_0 se, comunque si fissi un numero reale positivo ε, esiste un numero reale positivo δ tale che, per ogni $x \in E \setminus \{x_0\}$, da $|x - x_0| < \delta$ segua $|f(x) - l| < \varepsilon$. In simboli:

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in E)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

In tal caso si scrive $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ o anche $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$.

ESEMPIO. 4) Consideriamo la funzione f: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{|x|}$. Si vede che, al tendere di x a 0, i valori di f diventano e restano arbitrariamente grandi. Si vede altresì che, al crescere di x, i valori di f diventano e restano arbitrariamente vicini a 0.

Ciò ci conduce a dare le definizioni di limite infinito e di limite per x che tende a infinito.

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto x_0 di accumulazione per E. Diremo che $+\infty$ è *limite di f*, o che *f tende a* $+\infty$, *per x che tende a* x_0 se, comunque si fissi un numero reale M, esiste un numero reale positivo δ tale che, per ogni $x \in E \setminus \{x_0\}$, da $|x - x_0| < \delta$ segua $f(x) > M$. In simboli:

$$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in E)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M).$$

In tal caso si scrive $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ o anche $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$.

Analogamente, si ha:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ se $(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in E)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < M)$.

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ se $(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in E)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M)$.

È dunque $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{|x|} = -\infty$ e $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

DEFINIZIONE. Sia data una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e sia $+\infty$ di accumulazione per E. Diremo che un numero reale l è *limite di f*, o che *f tende a l*, *per x che tende a* $+\infty$ se, comunque si fissi un numero reale positivo ε, esiste un numero reale K tale che, per ogni $x \in E$, da $x > K$ segua $|f(x) - l| < \varepsilon$. In simboli:

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, K \in \mathbb{R})(\forall\, x \in E)(x > K \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

In tal caso si scrive $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ o anche $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$.

Analogamente, si ha:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ se $(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, K \in \mathbb{R})(\forall\, x \in E)(x > K \Rightarrow f(x) > M)$.

E così via. Si danno poi in modo del tutto analogo le quattro definizioni per x che tende a $-\infty$ e quelle per x che tende a ∞ (confronta lo schema di pag. 84); in tutto 16 casi! Vediamo di dare una *definizione universale* di limite che li comprenda tutti.

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto α di accumulazione per E, con $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$. Diremo che β ($\in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$) è *limite di f*, o che *f tende a* β, *per x che tende ad* α se, comunque si fissi un intorno V di β, esiste un intorno U di α tale che, per ogni $x \in E$, da $x \in U \setminus \{\alpha\}$ segua $f(x) \in V$. In simboli:

$$(\forall\, V \in \mathcal{U}(\beta))(\exists\, U \in \mathcal{U}(\alpha))(\forall\, x \in E)(x \in U \setminus \{\alpha\} \Rightarrow f(x) \in V).$$

In tal caso si scrive $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ o anche $f(x) \xrightarrow[x\to\alpha]{} \beta$.

Tipo di limite	Definizione	Esempi
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$	$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta > 0)(\forall\ x \in E)$ $(0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon)$	$x_0 = 0,\ l = 1,$ $f(x) = x + 1$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$	$(\forall\ M \in \mathbb{R})(\exists\ \delta > 0)(\forall\ x \in E)$ $(0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow f(x) > M)$	$x_0 = 0,\ f(x) = \frac{1}{\|x\|}$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$	$(\forall\ M \in \mathbb{R})(\exists\ \delta > 0)(\forall\ x \in E)$ $(0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow f(x) < M)$	$x_0 = 0,\ f(x) = -\frac{1}{\|x\|}$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$	$(\forall\ M \in \mathbb{R})(\exists\ \delta > 0)(\forall\ x \in E)$ $(0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x)\| > M)$	$x_0 = 0,\ f(x) = \frac{1}{x}$
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l$	$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ K \in \mathbb{R})(\forall\ x \in E)$ $(x > K \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon)$	$l = \frac{\pi}{2},\ f(x) = \mathrm{arctg}\,x$
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$	$(\forall\ M \in \mathbb{R})(\exists\ K \in \mathbb{R})(\forall\ x \in E)$ $(x > K \Rightarrow f(x) > M)$	$f(x) = x$
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$	$(\forall\ M \in \mathbb{R})(\exists\ K \in \mathbb{R})(\forall\ x \in E)$ $(x > K \Rightarrow f(x) < M)$	$f(x) = -x$
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \infty$	$(\forall\ M \in \mathbb{R})(\exists\ K \in \mathbb{R})(\forall\ x \in E)$ $(x > K \Rightarrow \|f(x)\| > M)$	$f(x) = (-1)^{[x]}x$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = l$	$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ K \in \mathbb{R})(\forall\ x \in E)$ $(x < K \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon)$	$l = -\frac{\pi}{2},\ f(x) = \mathrm{arctg}\,x$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$	$(\forall\ M \in \mathbb{R})(\exists\ K \in \mathbb{R})(\forall\ x \in E)$ $(x < K \Rightarrow f(x) > M)$	$f(x) = -x$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$	$(\forall\ M \in \mathbb{R})(\exists\ K \in \mathbb{R})(\forall\ x \in E)$ $(x < K \Rightarrow f(x) < M)$	$f(x) = x$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$	$(\forall\ M \in \mathbb{R})(\exists\ K \in \mathbb{R})(\forall\ x \in E)$ $(x < K \Rightarrow \|f(x)\| > M)$	$f(x) = (-1)^{[x]}x$
$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = l$	$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ K \in \mathbb{R})(\forall\ x \in E)$ $(\|x\| > K \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon)$	$l = 0,\ f(x) = \frac{1}{x}$
$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = +\infty$	$(\forall\ M \in \mathbb{R})(\exists\ K \in \mathbb{R})(\forall\ x \in E)$ $(\|x\| > K \Rightarrow f(x) > M)$	$f(x) = x^2$
$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = -\infty$	$(\forall\ M \in \mathbb{R})(\exists\ K \in \mathbb{R})(\forall\ x \in E)$ $(\|x\| > K \Rightarrow f(x) < M)$	$f(x) = -x^2$
$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$	$(\forall\ M \in \mathbb{R})(\exists\ K \in \mathbb{R})(\forall\ x \in E)$ $(\|x\| > K \Rightarrow \|f(x)\| > M)$	$f(x) = x^3$

Chi studia deve rendersi ben conto che la definizione generale di limite di pg. 83 si traduce, in ciascuno dei 16 casi possibili, nelle definizioni della Tabella di pg. 84. Verifichiamolo, per esempio, nel caso del limite finito per x che tende a x_0.

TEOREMA 5. *Dati una funzione* $f: E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, *un punto* x_0 *di accumulazione per* E *e un numero reale* l, *le due seguenti affermazioni sono fra loro equivalenti*:

1) $(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in E)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$.

2) $(\forall\, V \in \mathcal{U}(l))(\exists\, U \in \mathcal{U}(x_0))(\forall\, x \in E)(x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V)$.

DIM. $\underline{(1) \Rightarrow (2)}$. Sia dato $V \in \mathcal{U}(l)$. Esiste un numero reale $\varepsilon > 0$ tale che l'intervallo $J =]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ è contenuto in V. Per la (1), esiste un numero reale $\delta > 0$ tale, per ogni $x \in E$, da $0 < |x - x_0| < \delta$ segue $|f(x) - l| < \varepsilon$, da cui $f(x) \in V$. Posto $U =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, si ottiene che da $x \in U \setminus \{x_0\}$ segue $f(x) \in V$, cioè la (2), dato che U è un intorno di x_0.

$\underline{(2) \Rightarrow (1)}$. Sia dato un $\varepsilon > 0$. Resta così individuato l'intervallo $V =]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ che è un intorno di l. Per la (2), esiste un intorno $U \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che da $x \in U \cap E \setminus \{x_0\}$ segue $f(x) \in V$. Per definizione di intorno, esiste un $\delta > 0$ tale che l'intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ è contenuto in U. Dunque, per ogni $x \in E$, da $0 < |x - x_0| < \delta$ segue $f(x) \in V$, ossia $|f(x) - l| < \varepsilon$. ∎

Osserviamo che la definizione di limite di una successione data nel paragrafo precedente è un caso particolare di quella generale di limite di una funzione illustrata in questo paragrafo.

DEFINIZIONE. Dati una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per E, diremo che $f(x)$ tende a $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ per x che tende a x_0 *da destra* [*da sinistra*] se, comunque si fissi un intorno V di β, esiste un intorno *destro* [*sinistro*] U di x_0 tale che per ogni $x \in E \cap U \setminus \{x_0\}$ segua $f(x) \in V$.

Scriveremo $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \beta$ o anche $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} \beta$ [$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \beta$ o anche $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} \beta$].

La funzione $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$ e tende a $-\infty$ per $x \to 0^-$. (Sappiamo che è $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$.)

La funzione $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ tende a 1 per $x \to 0^+$ e tende a -1 per $x \to 0^-$. In questo caso, non esiste il $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Per la funzione $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log x$, si ha $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$. Non ha, ovviamente senso ricercare il $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

Dati una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per E, se è $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \beta$, è anche $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \beta$. Il viceversa sussiste se e solo se il punto x_0 è di accumulazione sia per l'insieme $E \cap]-\infty, x_0[$, sia per l'insieme $E \cap]x_0, +\infty[$.

Come già notato nel caso delle successioni, ogni funzione che tende a $+\infty$ [a $-\infty$] tende anche a ∞, ma può accadere che una funzione tenda a ∞ senza tendere né a $+\infty$, né a $-\infty$. Con questa limitazione e analogamente alla Proposizione 1 del Teorema 1, si ha:

TEOREMA 6. *(Unicità del limite) - Dati una funzione* $f: E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *e un punto* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ *di accumulazione per* E, *se esiste il* $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$, *esso è unico.* ∎

ESEMPI. 5) Vogliamo verificare che è $\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x-1} = -1$. Fissiamo un $\varepsilon > 0$ e cerchia un intorno U di 0 tale che da $x \in U \setminus \{0\}$ segua $\frac{x+1}{x-1} \in V =]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[$. Consideriamo dunque la disequazione

$$\left|\frac{x+1}{x-1} - (-1)\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -1-\varepsilon < \frac{x+1}{x-1} < -1+\varepsilon.$$

Teniamo presente che noi non cerchiamo *tutte* le soluzioni del sistema ottenuto, ma ci basta controllare che l'insieme di queste *contiene* un intervallo aperto di centro 0. Possiamo dunque limitarci al caso $x < 1$. Con tale limitazione, il sistema diventa

$$\begin{cases}(1+\varepsilon)(1-x) > x+1 \\ x+1 > (1-\varepsilon)(1-x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+\varepsilon-1 > (1+\varepsilon+1)x \\ (1-\varepsilon+1)x > 1-\varepsilon-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2+\varepsilon)x < \varepsilon \\ (2-\varepsilon)x > -\varepsilon.\end{cases}$$

Non essendo restrittivo supporre $\varepsilon < 2$, si ottiene, in fine il sistema $-\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} < x < \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$.

L'insieme così trovato è un intorno di 0 e il nostro scopo è raggiunto.

6) Vogliamo verificare che è $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x-1} = \infty$. Fissiamo un numero reale M e cerchiamo un intorno U di 1 tale che da $x \in U \setminus \{1\}$ segua $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| > M$. La disequazione può essere scritta nella forma $|x+1| > M|x-1|$ e anche semplicemente $x+1 > M|x-1|$, dato che è lecito supporre $x > -1$. Si ottiene il sistema

$$\begin{cases}-1 < x < 1 \\ x+1 > M(1-x)\end{cases} \vee \begin{cases}x > 1 \\ x+1 > M(x-1)\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}-1 < x < 1 \\ (1+M)x > M-1\end{cases} \vee \begin{cases}x > 1 \\ (M-1)x < M+1.\end{cases}$$

Essendo lecito supporre $M > 1$, si ottiene

$$\begin{cases}-1 < x < 1 \\ x > \frac{M-1}{M+1}\end{cases} \vee \begin{cases}x > 1 \\ x < \frac{M+1}{M-1}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{M-1}{M+1} < x < \frac{M+1}{M-1}.$$

Abbiamo effettivamente trovato un intorno di 1, dato che è $0 < \frac{M-1}{M+1} < 1 < \frac{M+1}{M-1}$.

7) Vogliamo verificare che è $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$. Fissiamo un $\varepsilon > 0$ e cerchiamo un intorno U di ∞ tale che da $x \in U$ segua $\frac{x+1}{x-1} \in V =]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$. Consideriamo dunque la disequazione

$$\left|\frac{x+1}{x-1} - 1\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{|x-1|} < \varepsilon \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\varepsilon} < |x-1| \quad \Leftrightarrow \quad \left(x < 1 - \frac{2}{\varepsilon}\right) \vee \left(x > 1 + \frac{2}{\varepsilon}\right).$$

Abbiamo così effettivamente trovato un intorno di ∞.

§ 3. I TEOREMI SUI LIMITI DELLE FUNZIONI

Analogamente al caso delle successioni, si prova il

TEOREMA 7. *Siano dati una funzione f*: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *e un punto* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ *di accumulazione per E.*

1) *(Permanenza del segno) - Se f ha limite positivo* [*negativo*]*, finito o infinito, per x che tende ad* α*, allora esiste un intorno U di* α *tale che, per ogni* $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$*, si ha* $f(x) > 0$ [$f(x) < 0$].

2) *(Limitatezza locale) - Se f ha limite finito per x che tende ad* α*, allora esiste un intorno U di* α *dove la f è limitata* [*cioè tale che f(U) è un insieme limitato*]. ∎

TEOREMA 8. *(Limite della restrizione) - Siano dati una funzione f*: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$*, un sottoinsieme A di E e un punto* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ *di accumulazione per A. Se f ha limite* β ($\in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$) *per x che tende ad* α*, allora tende a* β*, al tendere di x ad* α*, anche la restrizione della f ad A.*

DIM. Per ipotesi si ha che, dato $V \in \mathcal{U}(\beta)$, esiste $U \in \mathcal{U}(\alpha)$ tale che da $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$ segue $f(x) \in V$. È dunque, in particolare, $f(x) \in V$ per ogni $x \in A \cap U \setminus \{\alpha\}$. ∎

TEOREMA 8'. *Siano dati una funzione f*: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *e un punto* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ *di accumulazione per E. Se esistono due sottoinsiemi A e B di E tali che le restrizioni di f ad A e B hanno limiti diversi per x che tende ad* α*, allora f non ha limite per x che tende ad* α*.*

DIM. Se esistesse il $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$, dovrebbero tendere a β anche le restrizioni di *f* ad *A* e a *B*, ma ciò non può essere. Dunque *f* non può avere limite. ∎

ESEMPIO. 1) Vogliamo provare che, posto $f(x) = \sin x$, non esiste il $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Consideriamo i due insiemi di numeri reali $A = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Se $x \to \infty$, la restrizione di *f* ad *A* tende a 0, mente la restrizione di *f* a *B* tende a 1. La tesi segue dal Teorema precedente.

Questo risultato si generalizza molto facilmente:

Una funzione periodica non costante non può avere limite per x che tende a $+\infty$ [$-\infty, \infty$].

TEOREMA 9. *(Limite del valore assoluto) - Siano dati una funzione f*: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *e un punto* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ *di accumulazione per E. Se è* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l \in \mathbb{R}$*, allora si ha* $\lim\limits_{x\to\alpha} |f(x)| = |l|$*. Se è* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$ [$-\infty, \infty$]*, allore è* $\lim\limits_{x\to\alpha} |f(x)| = +\infty$.

DIM. Sia $f(x) \to l \in \mathbb{R}$. Dato $\varepsilon > 0$, esiste $U \in \mathcal{U}(\alpha)$ tale che da $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$ segue $|f(x) - l| < \varepsilon$. Per gli stessi *x* si ha $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < \varepsilon$. L'altro caso è ancora più facile. ∎

Si tenga presente che non sussiste l'implicazione opposta di questo Teorema. Per constatarlo, basta considerare la funzione f: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Questa funzione non ha limite per $x \to 0$, mentre la funzione $|f|$ tende banalmente a 1.

TEOREMA 10. *(Limite della somma) - Siano dati due funzioni f,g: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ di accumulazione per E.*

1) *Se è $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$ e $\lim_{x\to\alpha} g(x) = m$, con $l, m \in \mathbb{R}$, allora si ha anche $\lim_{x\to\alpha}(f(x) + g(x)) = l + m$.*

2) *Se è $\lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$ [$-\infty, \infty$] e se g è inferiormente limitata* [rispettivamente: *superiormente limitata, limitata*] *in un intorno di α, allora si ha $\lim_{x\to\alpha}(f(x) + g(x)) = +\infty$* [$-\infty, \infty$].

DIM. 1) Dobbiamo dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intorno U di α tale che da $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$ segue $|f(x) + g(x) - (l + m)| < \varepsilon$. Sappiamo che, per ipotesi, esistono $U',U'' \in \mathfrak{U}(\alpha)$ tali che da $x \in E \cap U' \setminus \{\alpha\}$ segue $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ e da $x \in E \cap U'' \setminus \{\alpha\}$ segue $|g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sia ora $U = U' \cap U''$. Se è $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$, si h:

$$|f(x) + g(x) - (l + m)| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) Caso $f \to +\infty$ e g inferiormente limitata. Esistono un intorno U' di α e un numero reale K tali che da $x \in E \cap U'$ segue $g(x) > K$. Fissiamo ora un numero reale M. Esiste un intorno U'' di α tale che da $x \in E \cap U'' \setminus \{\alpha\}$ segue $f(x) > M - K$. Sia ora $U = U' \cap U''$. Se è $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$, si h:

$$f(x) + g(x) > (M - K) + K = M. \blacksquare$$

Si ha, per esempio, $\lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) = +\infty$, dato che la funzione identica tende a $+\infty$ e che la funzione $\frac{1}{\sin^2 x}$, pur non ammettendo limite, è inferiormente limitata.

Vediamo, mediante semplici esempi, che se è $\lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$, nulla si può dire, in generale, del $\lim_{x\to\alpha}(f(x) + g(x))$; il problema va perciò studiato di caso in caso.

ESEMPIO. 2) Consideriamo le funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$: $f(x) = 2x$, $g_1(x) = -x$, $g_2(x) = -3x$, $g_3(x) = -2x + 1$, $g_4(x) = -2x + \sin x$. Si ha banalmente $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g_1(x) = \lim_{x\to+\infty} g_2(x) = \lim_{x\to+\infty} g_3(x) = \lim_{x\to+\infty} g_4(x) = -\infty$. Ora: $f + g_1$ tende a $+\infty$, $f + g_2$ tende a $-\infty$, $f + g_3$ tende a 1 e $f + g_4$ non ha limite.

Si badi che può ben accadere che la somma di due funzioni abbia limite senza che abbiano limite le due funzioni date. Basta sommare una funzione senza limite con la sua opposta. Per esempio, si pone $f(x) = \sin x$ e $g(x) = -\sin x$ e si fa tendere x a $+\infty$.

TEOREMA 11. *Siano dati una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, un punto $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ di accumulazione per E e un numero reale k.*

1) *Se è $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l \in \mathbb{R}$, allora si ha $\lim_{x\to\alpha} kf(x) = kl$.*

2) *Se è $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \infty$ e se è $k \neq 0$, allora si ha $\lim_{x\to\alpha} kf(x) = \infty$.*

3) *In ogni caso, si ha $\lim_{x\to\alpha} 0f(x) = 0$.*

DIM. 1) Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Per ipotesi esiste un intorno U di α tale che, da $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$ segue $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{|k|}$. Per gli stessi x si ha $|kf(x) - kl| = |k|\,|f(x) - l| < |k|\,\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$.

La (2) si prova in modo analogo. La (3) è ovvia. ▮

In particolare, si ha:

Da $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$ *segue* $\lim_{x\to\alpha} -f(x) = -l$.

DEFINIZIONE. Una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è detta *discosta da* 0 *in E* se esiste un numero reale $k > 0$ tale che risulti $|f(x)| > k$ per ogni $x \in E$.

La funzione esponenziale è sempre diversa da 0, ma non è discosta da 0. È invece discosta da 0 la funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definita da $f(x) = 0{,}00001 + |x|$.

TEOREMA 12. *(Limite del prodotto) - Siano dati due funzioni f,g*: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *e un punto* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ *di accumulazione per E.*

1) *Se è* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$ *e* $\lim_{x\to\alpha} g(x) = m$, *con* $l, m \in \mathbb{R}$, *allora si ha* $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x) = lm$.

2) *Se è* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \infty$ *e se g è discosta da* 0 *in un intorno di* α, *allora si ha anche* $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x) = \infty$.

3) *Se è* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$ *e se g è limitata in un intorno di* α, *allora è* $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x) = 0$.

DIM. 1) Per il Teorema della limitatezza locale, esistono un numero reale $K > 0$ e un intorno V di α tali che da $x \in E \cap V$ segue $|g(x)| < K$. Fissiamo un $\varepsilon > 0$.

Sappiamo che, per ipotesi, esistono $U', U'' \in \mathcal{U}(\alpha)$ tali che da $x \in E \cap U' \setminus \{\alpha\}$ segue $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2K}$ e da $x \in E \cap U'' \setminus \{\alpha\}$ segue $|g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2(|l| + 1)}$. Sia $U = V \cap U' \cap U''$. Se è $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$, si h:

$$|f(x)g(x) - lm| = |f(x)g(x) - lg(x) + lg(x) - lm| \leq |f(x) - l|\,|g(x)| + |l|\,|g(x) - m| \leq$$
$$\leq |f(x) - l|\,K + |l|\,|g(x) - m| < |f(x) - l|\,K + (|l| + 1)|g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) Esistono un intorno U' di α e un numero reale $K > 0$ tali che da $x \in E \cap U' \setminus \{\alpha\}$ segue $|g(x)| > K$. Fissiamo un numero reale M. Esiste un intorno U'' di α tale che da $x \in E \cap U'' \setminus \{\alpha\}$ segue $|f(x)| > \frac{M}{K}$. Sia ora $U = U' \cap U''$. Se è $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$, si h:

$$|f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| > \frac{M}{K}K = M.$$

3) Esistono un intorno U' di α e un numero reale $K > 0$ tali che da $x \in E \cap U'$ segue $|g(x)| < K$. Fissiamo un numero reale $\varepsilon > 0$. Esiste un intorno U'' di α tale che da $x \in E \cap U'' \setminus \{\alpha\}$ segue $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$. Sia ora $U = U' \cap U''$. Se è $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$, si h:

$$|f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| < \frac{\varepsilon}{K}K = \varepsilon. \text{ ▮}$$

ESEMPI. 3) Si ha $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sin^2 x} = +\infty$, dato che la funzione identica tende a $+\infty$ e che la funzione $\dfrac{1}{\sin^2 x}$, pur non ammettendo limite, è discosta da 0 e positiva.

4) Si ha $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$, dato che la funzione $\dfrac{1}{x}$ tende a 0 e che la funzione $\sin x$, pur non ammettendo limite, è limitata.

Vediamo, mediante semplici esempi, che se è $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = 0$, nulla si può dire, in generale, del $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)\, g(x)$; il problema va perciò studiato di caso in caso.

ESEMPIO. 5) Consideriamo le funzioni di $\mathbb{R}^+$ in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x^2,\ g_1(x) = \frac{1}{x},\ g_2(x) = \frac{1}{x^3},\ g_3(x) = -2\frac{1}{x^2},\ g_4(x) = \frac{\sin x}{x^2}.$$

Si ha banalmente

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x \to +\infty} g_1(x) = \lim_{x \to +\infty} g_2(x) = \lim_{x \to +\infty} g_3(x) = \lim_{x \to +\infty} g_4(x) = 0.$$

Ora: $f\,g_1$ tende a $+\infty$, $f\,g_2$ tende a 0, $f\,g_3$ tende a -2 e $f\,g_4$ non ha limite.

Si badi che può ben accadere che il prodotto di due funzioni abbia limite senza che abbiano limite le due funzioni date. Infatti, la funzione f di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ in $\mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ non ha limite per x che tende a 0, mentre la funzione f^2 ha limite 1.

TEOREMA 13. *(Limite della reciproca) - Siano dati una funzione* f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *e un punto* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ *di accumulazione per E.*

1) *Se è* $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *allora si ha* $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l}$.

2) *Se è* $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \infty$, *allora si ha* $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

3) *Se è* $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = 0$ *e se* α *è di accumulazione per l'insieme* $E' = \{x \in E: f(x) \neq 0\}$, *allora è* $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$. ∎

La (1) si prova con tecniche simili a quelle usate in precedenza. Verifichiamo, come esercizio, la (2). Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Esistono un intorno U di α tale che da $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$ segue $|f(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Per tali x si ha $\dfrac{1}{|f(x)|} < \varepsilon$. Analogamente per la (3).

Osserviamo che se, per x tendente ad α, la f tende a $\beta \neq 0$, dalla definizione di limite si ottiene che esiste un intorno U di α in cui la f non si annulla. La funzione $\dfrac{1}{f}$ risulta definita almeno in $U \cap E$ e ha dunque senso ricercarne il limite per $x \to \alpha$. Invece, nel caso (3) è indispensabile aggiungere l'ipotesi che α sia di accumulazione per l'insieme $E' = \{x \in E: f(x) \neq 0\}$.

ESEMPIO. 6) Consideriamo infatti la funzione f di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 1, & \text{per } |x| > 1 \\ 0, & \text{per } |x| \leq 1 \end{cases}.$$

Si ha $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$; ma la funzione $\frac{1}{f}$ è definita solo per $|x| > 1$ e non ha quindi senso ricercarne il limite per $x \to 0$.

Siano dati due funzioni f,g: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ di accumulazione per E. Esista inoltre un intorno U di α tale che sia $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$. Ha dunque senso cercare il $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$. I relativi teoremi si ricavano da quelli precedenti osservando che è $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)}$. (Esercizio.)

Consideriamo ancora le funzioni dell'Esempio 5 e scriviamo le funzioni fg_i in una delle forme $\frac{f}{1/g_i}$, $\frac{g_i}{1/f}$. Si vede che i Teoremi sui limiti non ci aiutano nemmeno nel caso in cui si debba ricercare il limite dal rapporto di due funzioni che tendono entrambe a 0 o entrambe a ∞.

In generale, con le dovute cautele per non dividere per 0, si può passare da un'espressione in cui compare un prodotto di funzioni a un'altra in cui figura un quoziente di funzioni e viceversa:

$$fg = \frac{f}{1/g}; \quad \frac{f}{g} = \frac{1/g}{1/f} = f\frac{1}{g}.$$

Abbiamo così incontrato 4 casi in cui i teoremi sui limiti non ci soccorrono (li diremo *casi di indeterminazione*):

- Somma di due funzioni di cui una tende a $+\infty$ e l'altra a $-\infty$ (lo diremo *caso* $\infty - \infty$).
- Prodotto di due funzioni di cui una tende a ∞ e l'altra a 0 (lo diremo *caso* $\infty \times 0$).
- Quoziente di due funzioni che tendono entrambi a ∞ (lo diremo *caso* ∞/∞).
- Quoziente di due funzioni che tendono entrambi a 0 (lo diremo *caso* 0/0).

Incontreremo tra poco altri tre casi di indeterminazione:

- Funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$, con $f(x) \to 1$ e $g(x) \to \infty$ (lo diremo *caso* 1^∞).
- Funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$, con $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ (lo diremo *caso* 0^0).
- Funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$, con $f(x) \to \infty$ e $g(x) \to 0$ (lo diremo *caso* ∞^0).

Analogamente a quanto visto nel caso delle successioni, sussiste il seguente Teorema del quale omettiamo la dimostrazione:

TEOREMA 14. *(Limite delle funzioni monotone) - Siano* f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *una funzione monotona e* $\alpha = \sup E \notin E$ *(con* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*), allora esiste il limite della f per* $x \to \alpha$ *e si ha*

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \begin{cases} \sup f(E), & \text{se } f \text{ è non - decrescente} \\ \inf f(E), & \text{se } f \text{ è non - crescente} \end{cases}. \quad \blacksquare$$

Sussiste un analogo teorema nell'ipotesi $\alpha = \inf E \notin E$. In questo caso si avrà:

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \begin{cases} \inf f(E), & \text{se } f \text{ è non - decrescente} \\ \sup f(E), & \text{se } f \text{ è non - crescente} \end{cases}.$$

L'esistenza del limite fa parte della tesi del teorema e non dell'ipotesi; anzi è, in certo qual modo, la parte più importante della tesi.

L'ipotesi $\alpha = \sup E \notin E$ è essenziale. Infatti, se esiste il valore $f(\alpha)$, questo può avere influenza per la determinazione di $\sup f(E)$ o di $\inf f(E)$, mentre sappiamo che non ha alcuna influenza sul limite della f. Naturalmente, se è $\alpha = \sup E \in E$, si può sempre considerare la restrizione di f a $E \setminus \{\alpha\}$.

ESEMPIO. 7) Sia f: $[0, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{per } x < 1 \\ 2, & \text{per } x = 1 \end{cases}.$$

Si ha $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$, mentre è $\sup f(E) = 2$.

TEOREMA 15. *(Criteri del confronto) - Siano dati tre funzioni f, g, h: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ di accumulazione per E. Inoltre, esista $V \in \mathcal{U}(\alpha)$ tale che, per $x \in E \cap V \setminus \{\alpha\}$ sia $f(x) \le g(x \le h(x)$.*

1) *Se è $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = l \in \mathbb{R}$, allora è anche $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = l$.*
2) *Se è $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$, allora è anche $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$.*
3) *Se è $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$ allora è anche $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$.*

DIM. 1) Fissiamo un numero reale $\varepsilon > 0$. Per ipotesi, esistono U', $U'' \in \mathcal{U}(\alpha)$ tali che da $x \in E \cap U' \setminus \{\alpha\}$ segue $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ e da $x \in E \cap U'' \setminus \{\alpha\}$ segue $l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$. Sia ora $U = V \cap U' \cap U''$. Se è $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$, si ha

$$l - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < l + \varepsilon.$$

2) Fissiamo un numero reale M. Per ipotesi, esiste $U \in \mathcal{U}(\alpha)$ tale che da $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$ segue $f(x) > M$. Da $x \in E \cap V \cap U \setminus \{\alpha\}$ segue $g(x) \ge f(x) > M$. Analogamente per la (3). ∎

ESEMPIO. 8) Siano f, g, h: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ le tre funzioni definite da

$$f(x) = 1 - |x|,\ g(x) = 1 + x\sin\frac{1}{x},\ h(x) = 1 + |x|.$$

Per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si ha $f(x) \le g(x) \le h(x)$. Le funzioni f e h tendono a 1 per x che tende a 0; ne viene che tende a 1 anche g. In realtà, per arrivare a questo risultato ci bastavano i teoremi sul limite del prodotto e della somma. Esempi più istruttivi li vedremo nel § 6.

TEOREMA 16. *(Limite delle funzioni composte) - Siano date due funzioni componibili f: $E(\subset \mathbb{R}) \to E'(\subset \mathbb{R})$ e g: $E'(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Siano poi x_0, $u_0 \in \mathbb{R}$, con x_0 di accumulazione per E, u_0 di accumulazione per E' e si abbia $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = u_0$ e $\lim\limits_{u\to u_0} g(u) = \gamma$. In fine, esista $U^* \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che da $x \in E \cap U^* \setminus \{x_0\}$ segua $f(x) \ne u_0$. Allora esiste ed è uguale a γ anche il $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))$.*

DIM. Riscriviamo le ipotesi sull'esistenza dei limiti:

$$(\forall\ V \in \mathcal{U}(\gamma))(\exists\ W \in \mathcal{U}(u_0))(\forall\ u \in E')(u \in W \setminus \{u_0\} \Rightarrow g(u) \in V),$$
$$(\forall\ W \in \mathcal{U}(u_0))(\exists\ U' \in \mathcal{U}(x_0))(\forall\ x \in E)(x \in U' \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in W).$$

Sia $U = U' \cap U^*$. Prendiamo ora un $x \in E \cap U \setminus \{x_0\}$. Si ha $f(x) \in E' \cap W \setminus \{u_0\}$ e quindi $g(f(x)) \in V$. Ciò significa appunto che è $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \gamma$. ∎

Osserviamo che l'ipotesi che sia $f(x) \neq u_0$ almeno in un intorno di x_0 è essenziale per la validità del Teorema.

ESEMPIO. 9) Siano date le funzioni f: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad g(u) = \begin{cases} 1, & \text{se è } u = 0 \\ 0, & \text{se è } u \neq 0 \end{cases}.$$

Si ha $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{u \to 0} g(u) = 0$. D'altra parte, posto $B = \{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, si ha

$$g(f(x)) = \begin{cases} 1, & \text{se è } x \in B \\ 0, & \text{se è } x \notin B \end{cases}.$$

Ne viene che non esiste il $\lim_{x \to 0} g(f(x))$.

Il Teorema si estende in modo naturale al caso in cui x_0 o u_0 sono infiniti. Se u_0 è infinito, l'ipotesi $f(x) \neq u_0$ è ovviamente soddisfatta.

Osserviamo ancora che il Teorema sussiste anche se g non è definita in u_0, *purché* x_0 sia di accumulazione per il dominio della funzione composta.

ESEMPIO. 10) Siano date le funzioni f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 1, & \text{se è } |x| > 1 \\ 0, & \text{se è } |x| \leq 1 \end{cases}, \qquad g(u) = \log u.$$

Si ha $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{u \to 0} g(u) = -\infty$. D'altra parte, il dominio della funzione composta $g \circ f$ è dato dall'insieme $\{x: |x| > 1\}$. Ne viene che non ha senso ricercare il $\lim_{x \to 0} g(f(x))$.

Esiste una terza situazione in cui si può applicare il Teorema sul limite delle funzioni composte. Ne parleremo nel prossimo paragrafo (Ter. 16').

§ 4. LE FUNZIONI CONTINUE

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in E$ che sia di accumulazione per E. Si dice che la funzione f è *continua in* x_0 se è $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Se accettiamo di dire che una funzione è *continua* in ogni punto isolato del suo dominio, si vede subito che la definizione prcedente può essere così riformulata:

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in E$. Si dice che la funzione f è *continua in* x_0 se

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in E)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon),$$

ossia se e solo se

$$(\forall\ V \in \mathcal{U}(f(x_0)))(\exists\ U \in \mathcal{U}(x_0))(\forall\ x \in E)(x \in U \Rightarrow f(x) \in V).$$

DEFINIZIONE. Una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è detta *continua in E* se è continua in ogni punto di E.

Le nozioni di limite destro e limite sinistro di una funzione per $x \to x_0$ conducono a formulare analoghe definizioni per la continuità.

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in E$. Si dice che la funzione f è *continua a destra* [*a sinistra*] *in* x_0 se è continua in x_0 la restrizione d f a $E \cap [x_0, +\infty[$ o, rispettivamente, a $E \cap\ ]-\infty, x_0]$.

Si ha immediatamente che

Una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è continua in un punto $x_0 \in E$ se e solo se f è continua sia a destra che a sinistra in x_0.

OSSERVAZIONE (Prolungamento per continuità). Siano dati una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto x_0 di accumulazione per E, con $x_0 \notin E$. Se è $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l\ (\in \mathbb{R})$, si può prolungare f in modo naturale anche al punto x_0, definendo $f(x_0) := l$. La nuova funzione ottenuta, che continueremo a indicare con f, risulta, per costruzione, continua nel punto x_0. Questao procedimento prende il nome di *prolungamento per continuità della f in x_0*.

ESEMPIO. 1) Consideriamo la funzione f: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Vedremo nel § 6 che è $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. Prolungando la nostra funzione per continuità in 0, si ottiene la nuova funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{se è } x \neq 0 \\ 1, & \text{se è } x = 0 \end{cases}.$$

Quasi tutti i Teoremi sui limiti studiati nel § 3 possono essere riformulati in termini di funzioni continue. Rienunciamoli sinteticamente. Chi studia ne controlli la correttezza.

TEOREMA 17. *Sia f una funzione di $E(\subset \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$.*

1) *(Permanenza del segno) - Se f è continua in un punto $x_0 \in E$, ed è $f(x_0) > 0$ [< 0], allora esiste un intorno U di x_0 tale che, per ogni $x \in E \cap U$, si ha $f(x) > 0$ [$f(x) < 0$].*

2) *(Limitatezza locale) - Se f è continua in un punto $x_0 \in E$, allora esiste un intorno U di x_0 dove f è limitata.*

3) *(Continuità della restrizione) - Se la f è continua in un punto $x_0 \in E$, è continua in x_0 la restrizione della f ad un qualunque sottoinsieme A di E contenente x_0.*

4) *(Continuità del valore assoluto) - Se la funzione f è continua in $x_0 \in E$, è continua in x_0 anche la funzione $|f|$.* ∎

TEOREMA 18. *Siano f,g due funzioni di $E(\subset \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$.*

1) *(Continuità della somma e del prodotto) - Se f e g sono continue in un punto $x_0 \in E$, allora sono continue in x_0 anche le funzioni $f + g$ e fg, kf, con $k \in \mathbb{R}$.*

2) *(Continuità della reciproca e del quoziente) - Se f e g sono continue in un punto $x_0 \in E$, e se è $g(x_0) \neq 0$, allora sono continue in x_0 anche le funzioni $\dfrac{1}{g}$ e $\dfrac{f}{g}$.* ∎

Dunque: *Somma, prodotto, quoziente di funzioni continue sono ancora funzioni continue.*
E ancora, dato che le funzioni costanti sono banalmente continue, si ha che:
L'insieme delle funzioni continue di $E(\subset \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$ formano uno spazio vettoriale.

TEOREMA 16'. *(Limite delle funzioni composte) - Siano date due funzioni componibili $f: E(\subset \mathbb{R}) \to E'(\subset \mathbb{R})$ e $g: E'(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Siano poi $x_0, u_0 \in \mathbb{R}$, con x_0 di accumulazione per E, $u_0 \in E'$ e si abbia $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = u_0$. Allora, se g è continua in u_0, esiste anche il limite, per $x \to x_0$, della funzione composta e si ha $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g(u_0)$.* ∎

TEOREMA 19. *(Continuità delle funzioni composte) - Siano date due funzioni componibili $f: E(\subset \mathbb{R}) \to E'(\subset \mathbb{R})$ e $g: E'(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Se f è continua in $x_0 \in E$ e g è continua in $u_0 = f(x_0)$, allora è continua in x_0 anche la funzione composta $g \circ f$.* ∎

Menzioniamo ancora un risultato che ci sarà di una qualche utilità.

TEOREMA 20. *(Continuità della funzione inversa) - Siano I un intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona. Allora l'inversa di f è una funzione continua.* ∎

Si tenga presente che, per la validità di questo Teorema, l'ipotesi che il dominio sia un intervallo è essenziale, mentre non è affatto richiesto che *f* sia continua.

ESEMPIO. 2) Consideriamo la funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da

$$E = [0, 1] \cup]2, 3], \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{se è } 0 \le x \le 1 \\ x - 1, & \text{se è } 2 < x \le 3 \end{cases}.$$

Questa è una funzione crescente, ma non è definita su un intervallo. La sua inversa è la funzione $\varphi: E'(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da

$$E' = [0, 2], \quad \varphi(y) = \begin{cases} y, & \text{se è } 0 \le y \le 1 \\ y + 1, & \text{se è } 1 < y \le 2 \end{cases}.$$

La funzione φ non è continua nel punto 1, dato che è $\lim\limits_{y \to 1^+} \varphi(y) = 2 \neq 1 = \varphi(1)$. Per contro, φ è definita e crescente su un intervallo e, pur non essendo continua, ha inversa continua (la *f*).

OSSERVAZIONE. Dire che una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *non è continua*, significa dire che esiste almeno un punto x_0 *del suo dominio* dove la *f* non è continua. È dunque $x_0 \in E$, e x_0 di accumulazione per *E*; inoltre, o *f* non ha limite per $x \to x_0$, o è $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

E se x_0 non appartiene al dominio *E* della funzione? Allora in x_0 *f non è né continua né discontinua*, semplicemente in x_0 la funzione *non c'è*, e ciò anche se x_0 è di accumulazione per *E*.

Consideriamo, per esempio, la funzione di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ in $\mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$. Come vedremo fra un attimo, questa è una funzione continua. Ora il punto 0 non fa parte del dominio di *f*; non ha dunque senso dire che *f* è discontinua in 0: la funzione *f* in 0 *non c'è*; il problema della continuità in 0 non si pone. Quello che si può dire è che, in questo caso, *f non è* prolungabile per continuità in 0.

Consideriamo ancora la funzione $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Non ammettendo *f* limite per $x \to 0$, non può essere prolungata per continuità in tale punto. È però ovviamente possibile prolungarla in modo da renderla continua a destra o a sinistra in 0.

§ 5. CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

In questo paragrafo verificheremo che le funzioni elementari sono continue. Per farlo, ne constateremo la continuità in un generico punto del loro dominio, a meno che, si capisce, non sia possibile sfruttare i teoremi già noti.

Continuità delle funzioni razionali e delle funzioni radice

È banale osservare che le funzioni costanti e la funzione identica $f(x) = x$ sono continue. Dalla continuità del prodotto segue quella delle funzioni ax^n e dalla continuità della somma si ottiene poi quella delle funzioni razionali intere. In fine, dalla continuità del quoziente si ricava la continuità di tutte le funzioni razionali.

Sappiamo che la funzione radice n - ima è l'inversa di una funzione (la funzione potenza x^n) crescente e definita su un intervallo (tutto $\mathbb{R}$ se n è dispari, $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ se n è pari). Dunque, per il Teorema 20, la funzione radice è continua.

Per puro esercizio, dimostriamo direttamente che è continua la funzione $\sqrt{x}$. Siano dunque dati un punto $x_0 > 0$ e un numero reale positivo ε. Si ha

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}, \text{ che è } < \varepsilon \text{ se e solo se è } |x - x_0| < \varepsilon\sqrt{x_0}.$$

Basta dunque prendere $\delta = \varepsilon\sqrt{x_0}$. Se è $x_0 = 0$, si ha $\left|\sqrt{x} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow (0 \leq)\ x < \varepsilon^2$.

Continuità dell'esponenziale e del logaritmo

Fissiamo un numero reale positivo a e supponiamo, intanto, che sia $a > 1$. In virtù della densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ e della definizione di potenza con esponente reale, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\sup\{a^x: x < x_0, x \in \mathbb{R}\} = \sup\{a^r: r < x_0, r \in \mathbb{Q}\} = a^{x_0} =$$
$$= \inf\{a^s: s > x_0, s \in \mathbb{Q}) = \inf\{a^x: x > x_0, x \in \mathbb{R}).$$

In virtù del Teorema sul limite delle funzioni monotone, si ha

$$a^{x_0} = \lim_{x \to x_0^-} a^x = \lim_{x \to x_0^+} a^x = \lim_{x \to x_0} a^x.$$

E ciò prova la continuità della funzione esponenziale a^x con $a > 1$. Per $0 < a < 1$, si procede in modo analogo o, sfruttando l'uguaglianza $a^x = \dfrac{1}{(1/a)^x}$, si applica il Teorema sulla continuità della funzione reciproca. Per $a = 1$, la tesi è ovvia.

Il logaritmo è l'inversa di una funzione strettamente monotona e definita su un intervallo (= $\mathbb{R}$) ed è dunque continua per il Teorema 20.

Dalla continuità della funzione esponenziale e dal Teorema sul limite delle funzioni composte, si ha che la ricerca dei limiti di una funzione del tipo $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$, con $f(x) > 0$, è ricondotta alla ricerca dei limiti della funzione $g(x)\log f(x)$. Ci si riconduce così ad utilizzare i risultati sul limite di un prodotto. Questi cadono in difetto quando si ottiene una situazione di $\infty \times 0$. Ciò accade nei seguenti tre casi (che generano le forme indeterminate già annunciate):

se $f(x) \to 1$,	$(\Rightarrow \log f(x) \to 0)$	e $g(x) \to \infty$;	si ha la forma indeterminata 1^∞.
se $f(x) \to 0$,	$(\Rightarrow \log f(x) \to -\infty)$	e $g(x) \to 0$;	si ha la forma indeterminata 0^0.
se $f(x) \to +\infty$,	$(\Rightarrow \log f(x) \to +\infty)$	e $g(x) \to 0$;	si ha la forma indeterminata ∞^0.

Continuità delle funzioni goniometriche e delle loro inverse

Proviamo la continuità della funzione seno. Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ e un $\varepsilon > 0$. Dato che, per $u \neq 0$, è sempre $|\sin u| < |u|$, si ha

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| < 2\frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0|,$$

Basta dunque prendere $\delta = \varepsilon$.

La continuità della funzione coseno si può provare in modo perfettamente analogo, ma si può più comodamente osservare che è $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ ed applicare il Teorema sulla continuità dalla funzione composta.

La continuità della funzione tangente segue ora subito dalla continuità del quoziente.

La continuità delle funzioni arcoseno, arcocoseno e arcotangente segue, al solito, dal Teorema 20 sulla continuità dell'inversa.

§ 6. LIMITI NOTEVOLI

In questo paragrafo stabiliremo alcuni limiti di fondamentale importanza, la cui conoscenza è premessa indispensabile per affrontare un qualunque problema sui limiti che non sia del tutto banale.

Limiti delle funzioni razionali

Per $n > 0$, si ha intanto immediatamente:

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty; \quad \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty, & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}.$$

Consideriamo la funzione razionale intera

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Si ha

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \lim_{x\to\infty} x^n\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n}\right) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n = \infty.$$

Analogamente, per una funzione razionale fratta

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0},$$

si ha

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n}\right)}{x^m\left(b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \ldots + b_1\frac{1}{x^{m-1}} + b_0\frac{1}{x^m}\right)} = \frac{a_n}{b_m}\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{x^m}.$$

Si ottiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \infty, & \text{se è } n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{se è } n = m \\ 0, & \text{se è } n < m \end{cases}, \quad \text{con } n = \text{gr}P(x),\ m = \text{gr}Q(x).$$

L'unico altro caso in cui si pone il problema della ricerca di limiti per le funzioni razionali è quello in cui x tende a x_0, con x_0 radice di $Q(x)$. Ma questo è un falso problema. Infatti:

- Se è $P(x_0) \neq 0$, la funzione tende a ∞.
- Se è $P(x_0) = 0$, sia $P(x)$ che $Q(x)$ sono divisibili per $(x - x_0)$. Siccome per noi deve essere $x \neq x_0$, possiamo semplificare la frazione e ricominciare daccapo.

ESEMPI. 1) Si ha:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 - 17x^2 + 11}{8x^2 - 41x + 45} = \infty; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 7x + 1}{4x^3 - 6x^2 + 2} = 0; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4 - x^3 + 1}{3x^4 - x^2 + 2x} = \frac{2}{3}.$$

2) Si ha:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^3 - 8x^2 + 1}{x^2 - 1} = \infty; \qquad \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 8x + 5}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(3x - 5)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x\to 1} \frac{3x - 5}{x + 1} = -1.$$

Limiti relativi alle funzioni circolari

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}x}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\text{arctg}x}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 0} \frac{x + \sin x}{x} = 2$	$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = 0$	$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$

Cominciamo con il primo. La funzione $\frac{\sin x}{x}$ è pari; basta dunque cercarne il limite per x che tende a 0 da destra; è inoltre lecito supporre $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Per tali x si ha

$$\sin x < x < \text{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x} \iff 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \iff 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

La tesi segue ora subito dal Teorema del confronto, dato che la funzione $\cos x$, essendo continua, tende a 1 per $x \to 0$.

Per il secondo limite, si ha: $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = 1$.

Passiamo al terzo. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\sin u} = 1.$$

Si è, ovviamente, posto $u = \arcsin x$ e si è applicato il Teorema sul limite delle funzioni composte. La cosa è lecita, dato che, per $x \neq 0$ è $\arcsin x \neq 0$.

Il quarto limite si prova in modo perfettamente analogo.

Si ha poi

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Il sesto limite non ci dà problemi: $\lim_{x\to 0} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 2.$

Passiamo al settimo limite. Cerchiamo intanto il limite per $x \to 0^+$ e supponiamo $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Si ha:

$$0 < \frac{x - \sin x}{x^2} < \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^2 \cos x} = \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{\sin x}{\cos x} \to 0.$$

Per il Criterio del confronto, questo limite è 0. Essendo la funzione dispari, essa tende a 0 anche per $x \to 0^-$.

L'ultimo limite non può, per ora, essere giustificato. Lo faremo più avanti, quando avremo a disposizione le derivate. Ma è importante averlo già a disposizione.

ESEMPI. 3) Si ha: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3$. (Basta porre $3x = u$ e applicare il Teorema sul limite delle funzioni composte.)

4) Si ha: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{x}{\arcsin x} = 1.$

Limiti relativi alle funzioni esponenziali e logaritmiche

Cominciamo col provare che è

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

Ricordiamo che il simbolo $[x]$ indica la parte intera del numero reale x e che è $x - 1 < [x] \le x < [x] + 1$.

Sappiamo inoltre che è $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Ora, per $x > 0$, si ha:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \le \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x] + 1} = \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right);$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^x \ge \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} = \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x] + 1} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{-1}.$$

È dunque:

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x] + 1} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{-1} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right).$$

Per il Criterio del confronto, si ha intanto $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Sia ora $x < -1$. Si ha:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{-x} = \left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{-x} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right) = \left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(1+\frac{1}{y}\right),$$

con $y = -(x+1)$. Per $x \to -\infty$, è $y \to +\infty$ e … il gioco è fatto.

Stabiliamo ora i seguenti limiti:

$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}$
$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log a$

Cominciamo dal primo. Posto $y = \frac{1}{x}$ e tenuto conto della continuità del logaritmo, si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log(1+x) = \lim_{x\to 0}\log(1+x)^{1/x} = \lim_{y\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = \log e = 1.$$

Per il secondo, basta osservare che è $\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}\,\frac{\log(1+x)}{x}$.

Veniamo al terzo limite. Si ponga $e^x - 1 = u$, da cui $x = \log(1+u)$. Per $x \to 0$, si ha $u \to 0$, con $u \neq 0$ se è $x \neq 0$. È dunque:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{u\to 0}\frac{u}{\log(1+u)} = 1.$$

Per l'ultimo limite, si ha: $\frac{a^x-1}{x} = \frac{e^{x\log a}-1}{x} = \log a\,\frac{e^{x\log a}-1}{x\log a} \to \log a.$

Ciò spiega perché il numero e sia la base più naturale per esponenziali e logaritmi.

ESEMPI. 5) Si ha: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1+1-e^{bx}}{x} =$

$$= \lim_{x\to 0} a\,\frac{e^{ax}-1}{ax} + \lim_{x\to 0} b\,\frac{1-e^{bx}}{bx} = a - b.$$

6) Si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{(1/n)\log(x+1)}-1}{x} =$$

$$= \frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{e^{(1/n)\log(x+1)}-1}{(1/n)\log(x+1)}\,\frac{\log(x+1)}{x} = \frac{1}{n}.$$

Questo risultato si generalizza immediatamente. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^\alpha - 1}{x} = \alpha\,.}$$

E ancora:

Caso $a > 1$; con p reale positivo e n naturale positivo				
$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} a^x x^n = 0$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$	$\lim_{x\to 0} x^p \log_a x = 0$
Caso $0 < a < 1$; con p reale positivo e n naturale positivo				
$\lim_{x\to-\infty} \frac{a^x}{x} = -\infty$	$\lim_{x\to-\infty} \frac{a^x}{x^n} = \infty$	$\lim_{x\to+\infty} a^x x^p = 0$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$	$\lim_{x\to 0} x^p \log_a x = 0$

Primo limite. Cominciamo col provare che, per $a > 1$, se è $n \in \mathbb{N}^+$, si ha $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$. Infatti, essendo $a = 1 + h$, con $h > 0$, si ha:

$$\frac{a^n}{n} = \frac{(1+h)^n}{n} = \frac{1 + nh + \binom{n}{2}h^2 + K}{n}, \text{ con } K > 0.$$

È dunque

$$\frac{a^n}{n} = \frac{(1+h)^n}{n} > \frac{1 + nh + \binom{n}{2}h^2}{n} = \frac{1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2}{n} \to +\infty,$$

dato che il numeratore dell'ultima frazione ha grado maggiore del denominatore.

Passiamo al caso $x \in \mathbb{R}$ e sfruttiamo l'uguaglianza $\frac{a^x}{x} = \frac{a^x}{a^{[x]}} \frac{a^{[x]}}{[x]} \frac{[x]}{x}$. Si ha; $\frac{a^x}{a^{[x]}} \geq 1$; $1 \geq \frac{[x]}{x} > \frac{x-1}{x}$, da cui $\frac{[x]}{x} \to 1$; $\frac{a^{[x]}}{[x]} \to +\infty$, dato che, se $x \to \infty$, fa lo stesso anche $[x]$.

Secondo limite. Si ha: $\frac{a^x}{x^p} = \left[\frac{(a^{1/p})^x}{x}\right]^p \to +\infty$.

Terzo limite. Si ha: $\lim_{x\to-\infty} a^x x^n = \lim_{y\to+\infty} \frac{(-y)^n}{a^y} = 0$. (Ovviamente, si è posto $y = -x$.)

Quarto limite. Ponendo $\log_a x = u$, si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = \lim_{u\to+\infty} \frac{u}{(a^u)^p} = \lim_{u\to+\infty} \frac{u}{(a^p)^u} = 0$.

Quinto limite. Posto ancora $\log_a x = u$, si ha $\lim_{x\to 0} x^p \log_a x = \lim_{u\to-\infty} u(a^p)^u = 0$.

Passiamo agli ultimi limiti. Si ponga $b = \frac{1}{a}$ (> 1) e $y = -x$. Si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{xb^x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{b^y}{-y} = -\infty; \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n b^x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{b^y}{(-y)^n} = \infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x x^p = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{b^x} = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\log_b x}{x^p} = 0; \quad \lim_{x\to 0} x^p \log_a x = -\lim_{x\to 0} x^p \log_b x = 0.$$

Stabiliamo tre limiti notevoli riguardanti la funzione $n!$ (cfr. Cap. 3, §2, pg. 43).

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^p} = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty, \quad a > 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Primo limite. Se è $p \leq 0$, la tesi è ovvia. Sia dunque $p > 0$. Supponiamo, intanto, che p sia un numero naturale. Per $n > p$, si ha:

$$\frac{n!}{n^p} = \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \dots \frac{n-p+1}{n} (n-p)!.$$

I primi p fattori tendono a 1, l'ultimo a $+\infty$; in questo caso la tesi è raggiunta. Se p non è un numero intero, la tesi segue dal fatto che è

$$\frac{n!}{n^p} > \frac{n!}{n^{[p]+1}} \to +\infty.$$

Secondo limite. Se è $a \leq 1$, la tesi è ovvia. Sia dunque $a > 1$. Fissiamo un $n' > a$ e poniamo $K = \frac{n'!}{a^{n'}}$. Si ha:

$$\frac{n!}{a^n} = \frac{n}{a} \frac{n-1}{a} \frac{n-2}{a} \dots \frac{n'+1}{a} K > \frac{n}{a} K \to +\infty.$$

Terzo limite. Si ha:

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \dots \frac{2}{n} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \to 0.$$

Segnaliamo, in fine altri due limiti notevoli molto utili, dei quali non riportiamo però la dimostrazione.

Formula di Stirling	Formuma di Wallis
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{2\pi n}} = 1$

ESEMPI. 7) Si ha $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x - \sqrt{x^2+1}) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) = +\infty.$

8) Si ha: $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) =$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = 0.$$

9) Si ricerchi il $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2(\sqrt[4]{x^4+x} - \sqrt[4]{x^4-x})$. È lecito supporre $x < 0$. Si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2(\sqrt[4]{x^4+x} - \sqrt[4]{x^4-x}) = \lim_{x\to-\infty} |x|^3\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^3}} - \sqrt[4]{1-\frac{1}{x^3}}\right) =$$

$$= -\lim_{u\to 0^-}\frac{\sqrt[4]{1+u}-\sqrt[4]{1-u}}{u} = -\lim_{u\to 0^-}\left(\frac{\sqrt[4]{1+u}-1}{u}+\frac{-1+\sqrt[4]{1-u}}{-u}\right) = -2\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

10) Si voglia calcolare il $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{2x} = \lim_{x\to+\infty}\exp\left(2x\log\frac{x+1}{x+2}\right)$.

Avendosi

$$\lim_{x\to+\infty} 2x\log\frac{x+1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} 2x\log\left(1-\frac{1}{x+2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1-\frac{1}{x+2}\right)}{-\frac{1}{x+2}}\,\frac{-2x}{x+2} = -2,$$

e data la continuità della funzione esponenziale, il limite cercato è e^{-2}.

11) Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2(2n)\pi}}\,\frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{(n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n})^2}\,\frac{(n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n})^2}{(n!)^2} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{(n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n})^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n}\sqrt{\pi n}}{\pi n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} = +\infty.$$

12) Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}}}\,\sqrt[n]{n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[2n]{2\pi n}\,\frac{n}{e} = +\infty.$$

§ 7. I TEOREMI FONDAMENTALI SULLE FUNZIONI CONTINUE

In questo paragrafo stabiliremo tre importantissimi risultati riguardanti le funzioni continue. Partiamo dal seguente

PROBLEMA. Sia data una funzione f: $E(\subset\mathbb{R})\to\mathbb{R}$. Ci chiediamo:

– È vero che, se f assume in E due dati valori, allora assume in E anche tutti quelli fra essi compresi?

– È vero che f assume in E un valore massimo e uno minimo?

Se la risposta è negativa, quali condizioni si possono dare su f e su E in modo da renderla positiva?

La risposta alle prime due domande è effettivamente negativa. Basta infatti considerare la funzione f: $\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\frac{1}{x}$. Questa non ha né massimo né minimo e non assume mai il valore 0, pur assumendone di negativi e di positivi. Vediamo dunque di stabilire delle condizioni sufficienti per il verificarsi delle nostre richieste.

TEOREMA 21. *(Degli zeri) - Siano* $I=[a,b]$ *un intervallo e* f: $I\to\mathbb{R}$ *una funzione continua, con* $f(a)=\alpha<0$ $[>0]$ *e* $f(b)=\beta>0$ $[<0]$. *Allora esiste almeno un punto* $\xi\in I$ *tale che* $f(\xi)=0$.

DIM. Supponiamo $\alpha < 0$ e $\beta > 0$. Per comodità, ribattezziamo l'intervallo I ponendo $I = I_0 = [a_0, b_0]$ e diciamo m_0 il suo punto medio. Se è $f(m_0) = 0$, abbiamo finito. Se è $f(m_0) \neq 0$, in uno e uno solo dei due sottointervalli $[a_0, m_0]$ e $[m_0, b_0]$ f assume, agli estremi, valori di segno opposto. Ribattezziamo questo sottointervallo con $I_1 = [a_1, b_1]$. A questo punto, ricominciamo daccapo. Diciamo m_1 il punto medio di I_1. Se è $f(m_1) = 0$, abbiamo finito. Se è $f(m_1) \neq 0$, in uno e uno solo dei due sottointervalli $[a_1, m_1]$ e $[m_1, b_1]$ f assume, agli estremi, valori di segno opposto. Ribattezziamo questo sottointervallo con $I_2 = [a_2, b_2]$, … e così via. Se dopo un numero finito di passi troviamo un punto dove f si annulla, abbiamo finito. Se ciò non accade, si ottiene una successione $(I_n)_n$ di intervalli chiusi, per costruzione, e decrescenti per inclusione, ossia tali che $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ In ciascuno degli I_n f assume, agli estremi, valori di segno opposto. Se si pone $l = b - a$, l'ampiezza dell'intervallo n - imo è $l_n = \frac{l}{2^n} \to 0$ per $n \to \infty$. Per il Teorema di Cantor, esiste uno ed un solo punto ξ appartenente a tutti gli I_n. Vogliamo provare che è $f(\xi) = 0$. Supponiamo, per assurdo, che sia $f(\xi) > 0$ [< 0]. Essendo f continua, per il Teorema della permanenza del segno, esiste un intorno U di ξ, con $U =]\xi - \delta, \xi + \delta[$, in cui f è positiva [negativa]. Ora, preso un n per cui sia $\frac{l}{2^n} < \delta$, si ha $I_n \subset U$. Si ottiene così un assurdo, dato che, per costruzione, f cambia segno in I_n. ∎

TEOREMA 22. *(Di connessione) - Siano $I = [a, b]$ un intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f assume in I ogni valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$.*

Da ciò segue che: *Una funzione continua muta intervalli in intervalli.*

DIM. Sia, per esempio, $f(a) = \alpha < f(b) = \beta$ e fissiamo un γ tale che $\alpha < \gamma < \beta$. Consideriamo la funzione $g: I \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x) - \gamma$. Anche g è una funzione continua sull'intervallo I e si ha $g(a) = \alpha - \gamma < 0$ e $g(b) = \beta - \gamma > 0$. Per il Teorema degli zeri, esiste un punto $\xi \in I$ tale che $g(\xi) = 0$, da cui $f(\xi) = \gamma$. ∎

Riesaminiamo i Teoremi 10 e 16 del Capitolo 4. La funzione f definita da $f(x) = x^n$ è continua in $[0,+\infty[$, assume il valore 0 in 0 ed è superiormente illimitata. Fissato un $\alpha > 0$, esiste un punto $b > 0$ con $f(b) > \alpha$. Dunque in f assume in $[0, b]$ anche il valore α e lo assume una volta sola, dato che si tratta di una funzione crescente. In modo perfettamente analogo si prova che la funzione a^x, con $0 < a \neq 1$, assume una e una sola volta tutti i valori positivi.

Se la funzione non è continua o se il dominio non è un intervallo, la tesi del teorema di connessione (e di quello degli zeri che ne è un caso particolare) può cadere in difetto.

ESEMPI. 1) Consideriamo ancora la funzione $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$. Questa è una funzione continua, ma non è definita su un intervallo; assume valori positivi e negativi, ma non si annulla mai.

2) Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se è } x \geq 0 \\ -1, & \text{se è } x < 0 \end{cases}$. Questa funzione è definita su un intervallo, ma non è continua in 0; assume valori positivi e negativi, ma non si annulla mai.

3) Consideriamo ancora la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{se è } x \neq 0 \\ 0, & \text{se è } x = 0 \end{cases}$.
Questa funzione è definita su un intervallo, ma non è continua in 0. Proviamo che per essa sus-

siste comunque la tesi del teorema di connessione; ciò mostra che il detto teorema fornisce una condizione sufficiente ma non necessaria.

Fissiamo due numeri reali a e b, con $a < b$. Se è $f(a) = f(b)$ non c'è niente da dimostrare. Sia dunque $f(a) \neq f(b)$ e sia γ un valore compreso fra $f(a)$ e $f(b)$. Dobbiamo provare che esiste un c compreso fra a e b dove f assume il valore γ. Se è $0 < a$ oppure $b < 0$, la tesi segue dal Teorema di connessione, dato che f è continua in $[a, b]$. Sia dunque $a < 0 < b$. Esiste un numero naturale n per cui è $\frac{1}{n\pi} < b$. Nell'intervallo $\left[\frac{1}{(n+2)\pi}, \frac{1}{n\pi}\right]$ la funzione f assume tutti i valori compresi fra -1 e 1 e quindi anche il valore γ. Lo stesso ragionamento si applica anche alla restrizione di f a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ che è continua ma non definita su un intervallo.

Ricordiamo che un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è detto compatto se è chiuso e limitato. Ricordiamo anche che (Teorema 4): *Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ è compatto se e solo se ogni successione di elementi di E ha una sottosuccessione convergente ad un elemento di E.*

Teniamo inoltre presente che

LEMMA 23. *Ogni sottoinsieme chiuso e limitato C di $\mathbb{R}$ ha massimo e minimo.*

DIM. Essendo C limitato esistono $\inf C = m$ e $\sup C = M$ con m e M numeri reali. Se fosse $m \notin C$ [$M \notin C$], questo, per la seconda proprietà dell'estremo inferiore [superiore] sarebbe un punto di accumulazione per C, ma allora dovrebbe appartenere a C, visto che l'insieme è chiuso. Assurdo. ∎

TEOREMA 24. *(Di Weierstrass) - Siano E un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$ e f: $E \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f assume in E un valore minimo e uno massimo.* ∎

DIM. Proviamo che $f(E)$ è compatto. Prendiamo una successione $(y_n)_n$ di punti di $f(E)$. Per ogni indice n, esiste un $x_n \in E$ tale che $f(x_n) = y_n$. Essendo E compatto, la successione $(x_n)_n$ ha una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ convergente a un punto $x^* \in E$. Per la continuità di f; la sottosuccessione $(f(x_{n_k}))_k = (y_{n_k})_k$ di $(y_n)_n$ converge a $f(x^*) \in f(E)$. Dunque $f(E)$ è compatto. La tesi segue ora dal Lemma 23. ∎

ESEMPIO. 4) Consideriamo la funzione f: $[0, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{x + \sin x}{2 + \sqrt{1 + x}}$. È immediato che f è continua e assume il valore minimo 0. Dal Teorema di Weierstrass segue che f assume anche un valore massimo, anche se constatarlo direttamente non è del tutto banale.

Se la funzione non è continua o se il dominio non è compatto, la tesi del Teorema di Weierstrass può cadere in difetto.

ESEMPI. 5) Consideriamo ancora la funzione f: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$. È una funzione continua, ma non è definita su un insieme compatto; non ha né massimo né minimo.

6) Consideriamo la funzione f: $[0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{se è } x \neq \pi/2 \\ 0, & \text{se è } x = \pi/2 \end{cases}$. Questa è una funzione definita su un insieme compatto, ma non è ivi continua. Essa ha minimo, ma non ha massimo.

7) Consideriamo ancora la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se è } x \geq 0 \\ -1, & \text{se è } x < 0 \end{cases}$. Questa funzione non è definita su un insieme compatto e non è continua in 0; tuttavia assume un

valore massimo e uno minimo. Anche il Teorema di Weierstrass esprime dunque una condizione sufficiente ma non necessaria.

Consideriamo ora le due funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definite da $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x^2$. Sappiamo che esse sono entrambe continue. Fissiamo un $\varepsilon > 0$ che possiamo pensare minore di1, e cerchiamo, per ogni x_0 reale, un $\delta > 0$ che soddisfi alla condizione di continuità. Sappiamo che, nel caso della funzione $\sin x$, basta prendere $\delta = \varepsilon$.

Facciamo i conti per la funzione x^2 e partiamo da un $x_0 > 1$. Se è $|x - x_0| < 1$, si ha:

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0|\,(x + x_0) \geq |x - x_0|\,(2x_0 - 1).$$

Se è $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$, deve essere anche $|x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{2x_0 - 1}$. Dato ε, si trova che il δ corrispondente deve essere minore o uguale a $\dfrac{\varepsilon}{2x_0 - 1}$ che tende a 0 al tendere di x_0 a $+\infty$. Si vede che, a differenza di prima, ora δ dipende non solo da ε, ma anche da x_0. Anzi, al tendere di x_0 a infinito, δ tende a 0. Non c'è dunque un δ che, dato ε, vada bene per tutti gli x_0.

DEFINIZIONE. Si dice che una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è *uniformemente continua in E* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $x_0 \in E$, da $|x - x_0| < \delta$ segue $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Siccome questa condizione deve valere per *ogni* $x_0 \in E$, il punto x_0 non ha un ruolo diverso da quello di x. Dunque la condizione di continuità uniforme può essere così riformulata:

DEFINIZIONE. Si dice che una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è *uniformemente continua in E* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $x_1, x_2 \in E$, da $|x_1 - x_2| < \delta$ segue $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. In simboli:

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta > 0)(\forall\ x_1 \in E)(\forall\ x_2 \in E)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon).$$

Ovviamente, ogni funzione uniformemente continua su E è ivi continua, mentre non sussiste il viceversa. Le funzioni x, $\sin x$ sono uniformemente continue, mentre si è visto che la funzione x^2, non lo è. Si vede che non è uniformemente continua nemmeno la funzione $\dfrac{1}{x}$. (Esercizio!)

Sussiste il seguente risultato del quale tralasciamo la dimostrazione.

TEOREMA 25. *(Di Heine) - Ogni funzione continua definita su un insieme compatto è uniformemente continua.* ∎

Anche il Teorema di Heine dà una condizione solo sufficiente per l'uniforme continuità.

ESEMPIO. 8) Proviamo che la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è uniformemente continua in $[0, +\infty[$. Per $x_0 \geq 1$ si ha

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{2},$$ che è $< \varepsilon$ se e solo se è $|x - x_0| < 2\varepsilon$.

Dunque la f è uniformemente continua in $[1, +\infty[$. Essa è uniformemente continua anche in $[0, 1]$ per il Teorema di Heine. Mettendo assieme questi due risultati, si prova facilmente che la f è uniformemente continua su tutto $[0, +\infty[$. Ne lasciamo la verifica a chi studia.

§ 8. ESERCIZI

1) La funzione $f(x) = \frac{x+2}{|x| - 2}$ non è definita in due punti di $\mathbb{R}$. Per ciascuno di essi, si veda se è possibile prolungare f per continuità.

2) Cosa può dirsi circa la continuità di una successione?

3) Determinare, attraverso l'individuazione dei punti di annullamento, i segni delle seguenti funzioni (continue):

$$x^3 - 3x^2; \quad \frac{x(x-1)}{(x+2)^3}; \quad (x-1)\cos x; \quad (x-\pi)\sin^2 x; \quad (3 - 2\mathrm{srctg}\, x)\,\mathrm{arctg}\, x; \quad x + 2\sqrt{x^2 - 6}.$$

4) Sfruttando la definizione di limite, si constati che è:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+2} = 0; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{n}+1}{1-\sqrt{n}} = -2; \quad \lim_{n\to+\infty} \left[n - \sqrt{n^2+2}\right] = 0;$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-1}{2n} = +\infty; \quad \lim_{x\to 2} \frac{2x-1}{x+1} = 1.$$

5) Si ricerchino i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 + \mathrm{arctg}\, x); \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1-3x^3}{x+2x^3}; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-2}; \quad \lim_{x\to\infty} x \arcsin\frac{1}{x}; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x\sin\frac{\sin x}{x}}{\sin x};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\mathrm{arctg}\, x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{arctg}\, x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x\cos x}{(\mathrm{arctg}\, x)^2}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\, x}{\sqrt{x\sin(\pi x)}}; \quad \lim_{x\to\pi/2} \frac{\mathrm{tg}\, x}{2x-\pi};$$

$$\lim_{x\to\pi/2} (2x-\pi)\mathrm{tg}\, x; \quad \lim_{x\to\pi/2} \mathrm{tg}^2 x\,(1-\sin x); \quad \lim_{x\to 1} \mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}(x-1); \quad \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{arctg}\, x)^2}{\sin x - \sqrt{1-\cos x}});$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+\sin x - x^2\mathrm{tg}\, x}{3x - \mathrm{tg}\, x + \sin^2 x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\, x - \sin x}{\sin^3 x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x} - x^2}{\sqrt{1-\cos x} + x^2}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x};$$

$$\lim_{x\to+\infty} (2x - \sqrt{x^2+1}); \quad \lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2+1}); \quad \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+1});$$

$$\lim_{x\to-\infty} x(\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x}); \quad \lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}); \quad \lim_{x\to 0} \left(1+\frac{x}{2}\right)^{1/x};$$

$$\lim_{x\to e} \frac{\log x - 1}{x-e}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-5^x}{1-e^x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - \sin 2x}{\log(x+1)}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}; \quad \lim_{x\to 0} x^{\log x};$$

$$\lim_{x\to 0} (\sin x + \cos x)^{1/x}; \quad \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}; \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}; \quad \lim_{x\to 0} x^x; \quad \lim_{x\to+\infty} x^{1/x};$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}; \quad \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}; \quad \lim_{x\to+\infty} \log_{x^2}(x+1); \quad \lim_{x\to+\infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x-1});$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3};\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\log(e^x - 1)};\quad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2 + x}{x^2 - 1}\right)^x;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin^2 x)}{1-\cos x}.$$

6) Si dimostri che non esistono i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\infty}\cos x;\quad \lim_{x\to\infty} x\sin x;\quad \lim_{x\to\infty}\sin x^2;\quad \lim_{x\to 0} x\,\mathrm{tg}\frac{1}{x}.$$

7) Si dimostri il seguente Teorema:

Se $f\colon I = [a, b] \to \mathbb{R}$ *è una funzione strettamente monotona ed assume tutti i valori compresi tra f(a) e f(b), allora f è continua.*

8) Si dimostri che una funzione continua, periodica e non costante ha minimo periodo.

9) Si dimostri che la funzione $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$ non è uniformemente continua.

10) Si provi che la composta di due funzioni uniformemente continue è uniformemente continua.

11) Sua f una funzione continua di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e sia $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \alpha$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \beta$. Si dimostri che f assume tutti i valori compresi (in senso stretto) tra α e β.

12) Sia $f\colon I =]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x) = +\infty$. Si dimostri che allora f assume in I un valore minimo.

13) Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione monotona definita sull'intervallo I e sia x_0 un punto interno di I. Si dimostri che esistono i limiti di f per x che tendere a x_0 da destra e per x che tendere a x_0 da sinistra. Si dica che relazione c'è fra questi due limiti e il valore $f(x_0)$.

Capitolo Sesto

INFINITI E INFINITESIMI

§ 1. ORDINI DI INFINITO

DEFINIZIONE. Sia data una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e sia α ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$) di accumulazione per E. Diremo che f è *infinita per x che tende ad* α, o, brevemente, *in* α, se è

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \infty \text{ (o, eventualmente, } +\infty \text{ o } -\infty).$$

In questo caso, diremo anche che *f è un infinito* per x che tende ad α.

ESEMPIO. 1) Sono infinite le funzioni:

$$x^n, \text{ per } x \to \infty, \quad e^x, \text{ per } x \to +\infty, \quad \operatorname{tg} x, \text{ per } x \to \frac{\pi}{2},$$
$$\frac{1}{x - 2}, \text{ per } x \to 2, \quad \log x, \text{ per } x \to +\infty \text{ e per } x \to 0^+.$$

Consideriamo le funzioni (di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$) x, $2x$, $x(2 + \sin x)$, e^x. Tutte queste funzioni sono infinite per $x \to +\infty$, ma tendono tutte a infinito con la stessa *rapidità*? Per poter rispondere alla domanda, abbiamo bisogno di un criterio per misurare questa 'rapidità'. Dobbiamo cioè decidere quand'è che due funzioni tendono all'infinito con la stessa velocità e quando una funzione tende a infinito più rapidamente di un'altra. Le scelte possibili sono, a priori diverse. Qui adottiamo una delle possibili scelte che, pur non essendo la più generale possibile, è più che sufficiente ai nostri scopi.

DEFINIZIONE. Siano f,g: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ due infiniti per $x \to \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$). Diremo che f è *equivalente* a g, e scriveremo $f \sim g$, se è

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$ [1]

OSSERVAZIONE. Si ha dunque, in particolare, $f \sim g$ se è $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma non è vero il viceversa. Può cioè succedere che risulti $f \sim g$ senza che esista il $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$, come appare dal seguente

ESEMPIO. 2) Siano f,g: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, con $f(n) = 2n$ e $g(n) = (-1)^n n$. Si ha: $\lim_{n\to+\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} = 2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, da cui $f \sim g$, pur *non esistendo* il $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$.

---

[1] Una definizione più generale è la seguente: Due funzioni f,g, infinite per $x \to \alpha$ sono equivalenti se esiste un intorno di α dove, per ogni $x \neq \alpha$ è $f(x) = g(x)\,\varphi(x)$, con φ funzione limitata e discosta da zero..

TEOREMA 1. *Quella sopra definita è una relazione di equivalenza nell'insieme delle funzioni infinite per* $x \to \alpha$.

DIM. Essendo $\lim_{x\to\alpha} \frac{|f(x)|}{|f(x)|} = 1$, si ha $f \sim f$. Da $\lim_{x\to\alpha} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ottiene $\lim_{x\to\alpha} \frac{|g(x)|}{|f(x)|} = \frac{1}{l} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; dunque, da $f \sim g$ segue $g \sim f$. In fine, da $\lim_{x\to\alpha} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = l$ e $\lim_{x\to\alpha} \frac{|g(x)|}{|h(x)|} = m$, con $l, m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ottiene $\lim_{x\to\alpha} \frac{|f(x)|}{|h(x)|} = \lim_{x\to\alpha} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \frac{|g(x)|}{|h(x)|} = lm \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; dunque, da $f \sim g$ e $g \sim h$ segue $f \sim h$. ▮

DEFINIZIONE. Le classi dell'equivalenza ora definita prendono il nome di *ordini di infinito*. La classe di equivalenza alla quale appartiene la funzione f si indica con $\mathrm{Ord}_\alpha f$ o, semplicemente, $\mathrm{Ord}\, f$ se non ci possono essere equivoci riguardo al punto α. È dunque, per definizione,

$$\mathrm{Ord}_\alpha f = \mathrm{Ord}_\alpha g \text{ se e solo se è } f \sim g.$$

ESEMPIO. 3) Si ha: $\mathrm{Ord}_{+\infty}\, x^2 = \mathrm{Ord}_{+\infty}\, (2x^2 - 3x + 1)$.

E anche:

$$\mathrm{Ord}_{\pi/2}\, \mathrm{tg}\, x = \mathrm{Ord}_{\pi/2} f(x), \text{ con } f(x) = \frac{1}{\pi/2 - x};$$

infatti, si ha:

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\mathrm{tg}\, x}{f(x)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\left[\frac{\pi}{2} - x\right] \sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = 1.$$

DEFINIZIONE. Siano f,g: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ due infiniti per $x \to \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$). Diremo che f è *strettamente equivalente* a g e scriveremo $f \approx g$, se è

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

È di immediata verifica il

TEOREMA 2. *Quella ora definita è una relazione di equivalenza nell'insieme delle funzioni infinite per* $x \to \alpha$. *Inoltre da* $f \approx g$ *segue* $f \sim g$, *mentre non sussiste l'implicazione opposta.* ▮

Ciò si esprime dicendo che l'equivalenza "$\approx$" è *strettamente più fine* dell'equivalenza "$\sim$".

ESEMPI. 4) Riesaminando le funzioni dell'Esempio 3, si vede che, per $x \to \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{tg}\, x$ è strettamente equivalente a $\frac{1}{\pi/2 - x}$, mentre, per $x \to \infty$, x^2 *non* è strettamente equivalente a $2x^2 - 3x + 1$.

5) Posto $f(x) = x$ e $g(x) = [x]$, si ha $f \approx g$. Lo si ricava immediatamente osservando che è

$$1 \geq \frac{[x]}{x} \geq \frac{x - 1}{x} \to 1.$$

Confronto fra gli ordini di infinito

DEFINIZIONE. Siano f,g: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ due infiniti per $x \to \alpha$ $(\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\})$. Diremo che è $\mathrm{Ord}_\alpha f > \mathrm{Ord}_\alpha g$ se è

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty, \text{ o, ciò che è lo stesso, se è } \lim_{x\to\alpha} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty.$$

TEOREMA 3. *La definizione appena date è coerente, ossia: da* $f \sim f_1$, $g \sim g_1$, $\mathrm{Ord}_\alpha f > \mathrm{Ord}_\alpha g$ *segue* $\mathrm{Ord}_\alpha f_1 > \mathrm{Ord}_\alpha g_1$.

DIM. Per ipotesi, si ha:

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{|f(x)|}{|f_1(x)|} = l; \quad \lim_{x\to\alpha} \frac{|g(x)|}{|g_1(x)|} = m, \quad \text{con } l, m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \lim_{x\to\alpha} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty.$$

Si ottiene:
$$\lim_{x\to\alpha} \frac{|f_1(x)|}{|g_1(x)|} = \lim_{x\to\alpha} \frac{|f_1(x)|}{|f(x)|} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \frac{|g(x)|}{|g_1(x)|} = +\infty,$$

dato che $\frac{|f_1(x)|}{|f(x)|} \to \frac{1}{l} \neq 0$. ▮

TEOREMA 4. *Quella appena definita è una relazione d'ordine fra gli ordini di infinito (sempre con $x \to \alpha$).* ▮

Ciò significa che *non è mai* $\mathrm{Ord}_\alpha f > \mathrm{Ord}_\alpha f$ (proprietà *antiriflessiva*), che se è $\mathrm{Ord}_\alpha f > \mathrm{Ord}_\alpha g$, non può essere $\mathrm{Ord}_\alpha g > \mathrm{Ord}_\alpha f$ (proprietà *antisimmetrica* in forma *forte*) e, in fine, che da $\mathrm{Ord}_\alpha f > \mathrm{Ord}_\alpha g$ e $\mathrm{Ord}_\alpha g > \mathrm{Ord}_\alpha h$ segue $\mathrm{Ord}_\alpha f > \mathrm{Ord}_\alpha h$ (proprietà *transitiva*). La verifica è immediata.

ESEMPIO. 6) Per $x \to +\infty$, si ha: $\mathrm{Ord}\, x^3 > \mathrm{Ord}\, x^2 > \mathrm{Ord}\, x$.

$$\mathrm{Ord}\, e^x > \mathrm{Ord}\, x^r > \mathrm{Ord} \log x, \text{ per ogni } r \in \mathbb{R}^+.$$

Inoltre,
$$\mathrm{Ord}_{0^+} \log x < \mathrm{Ord}_{0^+} \frac{1}{x^r}, \text{ per ogni } r \in \mathbb{R}^+.$$

OSSERVAZIONE. L'ordinamento così stabilito nell'insieme degli ordini di infinito *non è totale.* Esistono cioè elementi *inconfrontabili.*

ESEMPI. 7) Le funzioni $f(x) = x + x^2\sin^2 x$ e $g(x) = x$ sono entrambi infinite per $x \to +\infty$. Ma, non esistendo il $\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$, non può essere né $\mathrm{Ord} f = \mathrm{Ord}\, g$, né $\mathrm{Ord} f > \mathrm{Ord}\, g$, né $\mathrm{Ord}\, g > \mathrm{Ord} f$. Per verificare che, effettivamente, il limite non esiste, basta osservare che, per gli x del tipo $k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, è $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, mentre per gli x del tipo $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, è $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x + x^2}{x}$ che tende a $+\infty$.

8) Sono del pari inconfrontabili gli ordini di infinito, sempre per $x \to +\infty$, delle funzioni x e $x(2 + \sin x)$.

§ 2. ORDINI DI INFINITESIMO

DEFINIZIONE. Sia data una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e sia α ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$) di accumulazione per E. Diremo che f è *infinitesima per x che tende a* α, o, brevemente, *in* α, se è

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0.$$

In questo caso, diremo anche che *f è un infinitesimo* per x che tende ad α.

ESEMPIO. 1) Sono infinitesime le funzioni:

$$x^n, \text{ per } x \to 0, \quad e^x, \text{ per } x \to -\infty, \quad \operatorname{tg} x, \text{ per } x \to \pi,$$

$$\frac{1}{x - 2}, \text{ per } x \to \infty, \quad \log x, \text{ per } x \to 1.$$

Per semplicità, ci limiteremo al caso di funzioni che tendono a 0 al tendere di x a α ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$) e che non si annullano in *tutto un intorno* di α (salvo, eventualmente, nel punto stesso se è $\alpha \in \mathbb{R}$).

DEFINIZIONE. Siano f,g: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, due infinitesimi per $x \to \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$). Diremo che f è *equivalente* a g, e scriveremo $f \sim g$, se è

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$[2]

OSSERVAZIONE. Si ha dunque, in particolare, $f \sim g$ se è $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma non è vero il viceversa. Può cioè succedere che risulti $f \sim g$ senza che esista il $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$, come appare dal seguente

ESEMPIO. 2) Siano f,g: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, con $f(n) = \frac{2}{n}$ e $g(n) = \frac{(-1)^n}{n}$. Si ha: $\lim_{n\to+\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} = 2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, da cui $f \sim g$, pur *non esistendo* il $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$.

Ragionando come nel caso degli infiniti, si prova subito il

TEOREMA 5. *Quella sopra definita è una relazione di equivalenza nell'insieme delle funzioni infinitesime per* $x \to \alpha$. ▮

DEFINIZIONE. Le classi dell'equivalenza ora definita prendono il nome di *ordini di infinitesimo*. La classe di equivalenza alla quale appartiene la funzione f si indica con $\operatorname{ord}_\alpha f$ o, semplicemente, $\operatorname{ord} f$ se non ci possono essere equivoci riguardo al punto α. È dunque, per definizione,

---

[2] Anche in questo caso, una definizione più generale è la seguente: Due funzioni f,g, infinitesime per $x \to \alpha$ sono equivalenti se esiste un intorno di α dove, per ogni $x \neq \alpha$ è $f(x) = g(x)\, \varphi(x)$, con φ funzione limitata e discosta da zero..

$$\mathrm{ord}_\alpha f = \mathrm{ord}_\alpha g \text{ se e solo se è } f \sim g.$$

ESEMPIO. 3) Si ha: $\mathrm{ord}_0\, x = \mathrm{Ord}_0\,(2x + 3\sin x) = \mathrm{ord}_0\, \mathrm{tg}\, x$;

$$\mathrm{ord}_0\,(1 - \cos x) = \mathrm{ord}_0\, x^2, \text{ essendo } \lim_{n\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2};$$

$$\mathrm{ord}_0\,(e^x - 1) = \mathrm{ord}_0\, x = \mathrm{ord}_0\, \log(x+1);$$

$$\mathrm{ord}_0\,(x - \sin x) = \mathrm{ord}_0\, x^3, \text{ dato che è } \lim_{n\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

DEFINIZIONE. Siano f,g: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ due infinitesimi per $x \to \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$). Diremo che f è *strettamente equivalente* a g, e scriveremo $f \approx g$, se è

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

TEOREMA 6. *Quella ora definita è una relazione di equivalenza nell'insieme delle funzioni infinitesime per $x \to \alpha$. Inoltre da $f \approx g$ segue $f \sim g$, mentre non sussiste l'implicazione opposta.* ∎

Ciò si esprime dicendo che l'equivalenza "$\approx$" è *strettamente più fine* dell'equivalenza "$\sim$".

ESEMPI0. 4) Riesaminando le funzioni dell'Esempo 3, si vede che, per $x \to 0$, è

$$x \approx \sin x \approx \mathrm{tg}\, x \approx e^x - 1 \approx \log(x+1);$$
$$1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}; \quad x - \sin x \approx \frac{x^3}{6}.$$

Confronto fra gli ordini di infinitesimo

DEFINIZIONE. Siano f,g: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ due infinitesimi per $x \to \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$). Diremo che è $\mathrm{ord}_\alpha f > \mathrm{ord}_\alpha g$ se è

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Procedendo come nel caso degli infiniti, si provano i seguenti Teoremi:

TEOREMA 7. *La definizione appena date è coerente, ossia: da $f \sim f_1$, $g \sim g_1$,* $\mathrm{ord}_\alpha f > \mathrm{ord}_\alpha g$ *segue* $\mathrm{ord}_\alpha f_1 > \mathrm{ord}_\alpha g_1$. ∎

TEOREMA 8. *Quella appena definita è una relazione d'ordine fra gli ordini di infinitesimo (sempre con $x \to \alpha$).* ∎

ESEMPIO. 5) Si ha: $\mathrm{ord}_0\, x^3 > \mathrm{ord}_0\, x^2 > \mathrm{ord}_0\, x$.

$$\mathrm{ord}_{-\infty}\, e^x > \mathrm{ord}_{-\infty} \frac{1}{x^n}, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}^+.$$

OSSERVAZIONE. L'ordinamento così stabilito nell'insieme degli ordini di infinitesimo *non è totale.* Esistono cioè elementi *inconfrontabili.*

ESEMPIO. 6) Le funzioni $f(x) = x + x\sin^2(1/x)$ e $g(x) = x$ sono entrambi infinitesime per $x \to 0$. Ma, non esistendo il $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$, non può essere né $\operatorname{ord} f = \operatorname{ord} g$, né $\operatorname{ord} f > \operatorname{ord} g$, né $\operatorname{ord} g > \operatorname{ord} f$. Per accertare che, in effetti, il limite non esiste, basta osservare che, per gli x del tipo $\frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, è $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, mentre per gli x per cui è $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, è $\frac{f(x)}{g(x)} = 2$.

§ 3. ORDINI DI INFINITO O DI INFINITESIMO E OPERAZIONI FRA FUNZIONI

Dai Teoremi sul limite del prodotto e delle funzioni composte, segue subito il seguente

TEOREMA 9. *Siano* $f, f_1, g, g_1 \colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *infinite per* $x \to \alpha$ $(\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\})$.

1) *Se è* $f \sim f_1$ *e* $g \sim g_1$, *allora è anche* $fg \sim f_1g_1$.

2) *Se* f, f_1 *sono positive in un intorno di* α *e se è* $f \sim f_1$, *allora, per ogni numero reale positivo* k *è anche* $f^k \sim f_1^k$.

3) *Si ha* $\operatorname{Ord}_\alpha fg > \operatorname{Ord}_\alpha f$.

4) *Le funzioni* $\frac{1}{f}$ *e* $\frac{1}{g}$ *sono infinitesime per* $x \to \alpha$ *e si ha* $\operatorname{Ord}_\alpha f = \operatorname{Ord}_\alpha g$ *se e solo se è* $\operatorname{ord}_\alpha \frac{1}{f} = \operatorname{ord}_\alpha \frac{1}{g}$ *e* $\operatorname{Ord}_\alpha f > \operatorname{Ord}_\alpha g$ *se e solo se è* $\operatorname{ord}_\alpha \frac{1}{f} > \operatorname{ord}_\alpha \frac{1}{g}$. ∎

Le Proposizioni (1) e (2) si esprimono dicendo che la relazione di equivalenza è *compatibile* con il prodotto di funzioni e l'elevamento a potenza.

Dal Teorema sul limite della somma, segue poi subito il seguente

TEOREMA 10. *Siano* $f, g \colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *infinite per* $x \to \alpha$ $(\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\})$.

1) *Se è* $\operatorname{Ord}_\alpha f > \operatorname{Ord}_\alpha g$, *allora anche* $f + g$ *è infinita per* $x \to \alpha$ *e si ha* $\operatorname{Ord}_\alpha(f + g) = \operatorname{Ord}_\alpha f$; *si ha anzi:* $f + g \approx f$. *La stessa tesi sussiste anche se la funzione* g *è limitata.*

2) *Se è* $\operatorname{Ord}_\alpha f = \operatorname{Ord}_\alpha g$ *e se anche* $f + g$ *è infinita per* $x \to \alpha$, *si ha* $\operatorname{Ord}_\alpha(f + g) \le \operatorname{Ord}_\alpha f$, *valendo il segno "<" se e solo se* f *è strettamente equivalente a* $-g$. ∎

Principio di sostituzione degli infiniti

TEOREMA 11. *Siano* $f, f_1, g, g_1 \colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *infinite per* $x \to \alpha$ $(\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\})$; *con* $f \approx f_1$ *e* $g \approx g_1$; *allora, se esiste il* $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, *esiste ed è uguale a* l *anche il* $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

DIM. Si ha:

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f_1(x)}{f(x)} \frac{f(x)}{g(x)} \frac{g(x)}{g_1(x)} = 1 \times l \times 1 = l. \blacksquare$$

ESEMPIO. 1) Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{2x^3 + x \operatorname{arctg} x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}.$$

Passiamo agli infinitesimi. Dai Teoremi sui limiti del prodotto e delle funzioni composte, segue subito il seguente

TEOREMA 12. *Siano* f, f_1, g, g_1: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *infinitesime per* $x \to \alpha$ $(\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\})$.

1) *Se è* $f \sim f_1$ *e* $g \sim g_1$, *allora è anche* $fg \sim f_1 g_1$.

2) *Siano* f, f_1 *positive in un intorno di* α*; se è* $f \sim f_1$, *allora, per ogni numero reale positivo* k *è anche* $f^k \sim f_1$.

3) *Si ha* $\operatorname{ord}_\alpha fg > \operatorname{ord}_\alpha f$.

4) *Le funzioni* $\frac{1}{f}$ *e* $\frac{1}{g}$ *sono infinite per* $x \to \alpha$ (dato che, per ipotesi, f e g non si annullano in tutto un intorno di α). *Si ha* $\operatorname{ord}_\alpha f = \operatorname{ord}_\alpha g$ *se e solo se è* $\operatorname{Ord}_\alpha \frac{1}{f} = \operatorname{Ord}_\alpha \frac{1}{g}$ *e* $\operatorname{ord}_\alpha f > \operatorname{ord}_\alpha g$ *se e solo se è* $\operatorname{Ord}_\alpha \frac{1}{f} > \operatorname{Ord}_\alpha \frac{1}{g}$. ▮

Le Proposizioni (1) e (2) si esprimono dicendo che la relazione di equivalenza è *compatibile* con il prodotto di funzioni e con l'elevamento a potenza.

Dal Teorema sul limite della somma, segue poi subito il seguente

TEOREMA 13. *Siano* f, g: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *infinitesime per* $x \to \alpha$ $(\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\})$.

1) *Se è* $\operatorname{ord}_\alpha f < \operatorname{ord}_\alpha g$, *allora anche* $f + g$ *non si annulla in tutto un intorno di* α *e si ha* $\operatorname{ord}_\alpha(f + g) = \operatorname{ord}_\alpha f$*; si ha anzi:* $f + g \approx f$.

2) *Se è* $\operatorname{ord}_\alpha f = \operatorname{ord}_\alpha g$ *e se anche* $f + g$ *non si annulla in tutto un intorno di* α, *si ha* $\operatorname{ord}_\alpha(f + g) \geq \operatorname{ord}_\alpha f$, *valendo il segno* ">" *se e solo se* f *è strettamente equivalente a* $-g$. ▮

Principio di sostituzione degli infinitesimi

In modo analogo a quanto fatto per gli infiniti, si prova il

TEOREMA 14. *Siano* f, f_1, g, g_1: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *infinitesime per* $x \to \alpha$ $(\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\})$*; con* $f \approx f_1$ *e* $g \approx g_1$*; allora, se esiste il* $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, *esiste ed è uguale a* l *anche il* $\lim_{x\to\alpha} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$. ▮

ESEMPI. 2) Si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + 3x^3 + 2(1 - \cos x)}{3\sin x + x \operatorname{arctg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{3\sin x} = \frac{1}{3}.$$

3) Ricordando che è $x - \sin x \approx \frac{x^3}{6}$ e $1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}$, si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x(1 - \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}(e^{x - \sin x} - 1)}{x(1 - \cos x)} = 2\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

§ 4. ORDINI D'INFINITO O D'INFINITESIMO REALI, SOPRAREALI, SOTTOREALI, INFRAREALI

Sappiamo che l'insieme degli ordini di infinito per $x \to \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$) è solo parzialmente ordinato. Vogliamo ora occuparci di un suo sottoinsieme totalmente ordinato e contenente le funzioni elementari.

Siccome la funzione identica è infinita per $x \to \infty$, è naturale cominciare con il caso $\alpha = +\infty$.

Sappiamo che l'equivalenza fra infiniti è compatibile con il prodotto e con l'innalzamento a potenza. Perciò, assunto

$$\mathrm{Ord}_{+\infty} x = 1,$$

è naturale assumere anche

$$\mathrm{Ord}_{+\infty} x^k = k, \quad \forall k > 0.$$

Ora si ha $$\mathrm{Ord}_{+\infty} x^h\, x^k = \mathrm{Ord}_{+\infty} x^{h+k} = h + k$$

e $$\mathrm{Ord}_{+\infty} (x^h)^k = \mathrm{Ord}_{+\infty} x^{hk} = hk.$$

Generalizzando questo fatto, si accetta la seguente

DEFINIZIONE. Detti f,g: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ due infiniti per $x \to +\infty$, si assume

$$\mathrm{Ord}_{+\infty} fg = \mathrm{Ord}_{+\infty} f + \mathrm{Ord}_{+\infty} g$$

e, se f è positiva in un intorno di $+\infty$,

$$\mathrm{Ord}_{+\infty} f^k = k\, \mathrm{Ord}_{+\infty} f.$$

Se f è infinita per x che tende a $-\infty$, si assume

$$\mathrm{Ord}_{-\infty} f(x) = \mathrm{Ord}_{+\infty} f(-x).$$

Passiamo agli infiniti per x che tende ad $x_0 \in \mathbb{R}$ (in particolare $x_0 = 0$). Dal Teorema sul limite delle funzioni composte si ottiene subito il

TEOREMA 15. *Se f,g: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sono due infiniti equivalenti per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$, allora sono equivalenti, per $x \to \infty$, gli infiniti $f(x_0 + \frac{1}{x})$ e $g(x_0 + \frac{1}{x})$.* ∎

È dunque naturale accettare la seguente

DEFINIZIONE. Se f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è infinita per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$, si pone:

$$\mathrm{Ord}_{x_0} f(x) = \mathrm{Ord}_{\infty} f(x_0 + \frac{1}{x}).$$

È dunque, in particolare:

$$\mathrm{Ord}_{x_0} \frac{1}{|x - x_0|^k} = \mathrm{Ord}_{+\infty} \frac{1}{|x_0 + 1/t - x_0|^k} = \mathrm{Ord}_{+\infty} t^k = k,$$

da cui $$\mathrm{Ord}_0 \frac{1}{|x|^k} = k.$$

Sappiamo che è $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$; è dunque

$$\mathrm{Ord}_{+\infty} e^x > \mathrm{Ord}_{+\infty} x^n \ (= n),\ \forall\, n \in \mathbb{N}^+.$$

DEFINIZIONE. Sia f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ infinita per $x \to \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$). Se, per ogni numero reale $k > 0$, è $\mathrm{Ord}_\alpha f > k$, si dice che l'ordine di infinito di f per $x \to \alpha$ è *soprareale.* Se, per ogni numero reale $k > 0$, è $\mathrm{Ord}_\alpha f < k$, si dice che l'ordine di infinito di f per $x \to \alpha$ è *sottoreale.* Se esiste numero reale $k > 0$ tale che $k < \mathrm{Ord}_\alpha f < k + \varepsilon$, per ogni $\varepsilon > 0$, si dice che l'ordine di infinito di f per $x \to \alpha$ è *infrareale.*

ESEMPIO. 1) Sia $a > 1$; allora $\mathrm{Ord}_{+\infty} a^x$ è soprareale e $\mathrm{Ord}_{+\infty} \log_a x$ è sottoreale, mentre è infrareale $\mathrm{Ord}_{+\infty}\, x \log_a x$, dato che, $\forall\, \varepsilon > 0$ è

$$1 = \mathrm{Ord}_{+\infty} x < \mathrm{Ord}_{+\infty} x \log_a x < \mathrm{Ord}_{+\infty} x^{1+\varepsilon} = 1 + \varepsilon.$$

Osserviamo ancora che non c'è un unico ordine di infinito soprareale né un unico ordine di infinito sottoreale. Si ha, infatti:

$$\mathrm{Ord}_{+\infty} e^x < \mathrm{Ord}_{+\infty} e^{2x} < \mathrm{Ord}_{+\infty} e^{3x} < \cdots;$$

$$\mathrm{Ord}_{+\infty} \log x > \mathrm{Ord}_{+\infty} \log \log_a x > \mathrm{Ord}_{+\infty} \log\log\log_a x > \ldots$$

Ne viene, fra l'altro, che non esiste né un ordine di infinito massimo, né uno minimo.

Passiamo agli infinitesimi.

Anche l'insieme degli ordini di infinitesimo per $x \to \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$) è solo parzialmente ordinato. Come già fatto per gli infiniti, vogliamo occuparci di un suo sottoinsieme totalmente ordinato e contenente le funzioni elementari.

Siccome la funzione identica è infinitesima per $x \to 0$, è naturale cominciare con il caso $\alpha = 0$.

Sappiamo che l'equivalenza fra infinitesimi è compatibile con il prodotto e con l'innalzamento a potenza. Perciò, assunto

$$\mathrm{ord}_0\, x = 1,$$

è naturale assumere anche

$$\mathrm{ord}_0\, |x|^k = k, \quad \forall k > 0.$$

Ragioni analoghe a quelle viste per gli infiniti, ci portano ad accettare la

DEFINIZIONE. Detti f,g: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ due infinitesimi per $x \to 0$, si assume

$$\mathrm{ord}_0\, fg = \mathrm{ord}_0\, f + \mathrm{ord}_0\, g$$

e, se f è positiva in un intorno di 0,

$$\mathrm{ord}_0\, f^k = k\, \mathrm{ord}_0\, f,\ \ \forall\, k > 0.$$

Si ammette poi che, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, sia

$$\mathrm{ord}_{x_0} |x - x_0|^k = k, \quad \text{per ogni } k > 0.$$

Passiamo agli infinitesimi per x che tende a $+\infty$ (a $-\infty$). Dal Teorema sul limite delle funzioni composte si ottiene subito il

TEOREMA 16. *Se* f,g: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *sono due infinitesimi equivalenti per* $x \to +\infty$ [per $x \to -\infty$], *allora sono equivalenti, per* $x \to 0$, *gli infinitesimi*

$$f\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad e \quad g\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \left[f\left(\frac{-1}{|x|}\right) \quad e \quad g\left(\frac{-1}{|x|}\right)\right]. \blacksquare$$

È dunque naturale accettare la seguente

DEFINIZIONE. Se f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è infinitesima per $x \to +\infty$ [per $x \to -\infty$], si pone:

$$\mathrm{ord}_{+\infty} f(x) = \mathrm{ord}_0 f\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \left[\mathrm{ord}_{-\infty} f(x) = \mathrm{ord}_0 f\left(\frac{-1}{|x|}\right)\right].$$

È dunque, in particolare:

$$\mathrm{ord}_\infty \frac{1}{|x|^k} = \mathrm{ord}_0 |x|^k = k.$$

Analogamente a quanto fatto per gli infiniti, si dà la nozione di ordini di infinitesimo soprareale, sottoreale e infrareale.

DEFINIZIONE. Sia f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ infinitesima per $x \to \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$). Se, per ogni numero reale $k > 0$ è $\mathrm{ord}_\alpha f > k$, si dice che l'ordine di infinitesimo di f per $x \to \alpha$ è soprareale. Se, per ogni numero reale $k > 0$ è $\mathrm{ord}_\alpha f < k$, si dice che l'ordine di infinitesimo di f per $x \to \alpha$ è sottoreale. Se esiste un numero reale $k > 0$ tale che $k < \mathrm{ord}_\alpha f < k + \varepsilon$, per ogni $\varepsilon > 0$, si dice che l'ordine di infinitesimo di f per $x \to \alpha$ è *infrareale.*

ESEMPIO. 2) Tenendo conto dei limiti notevoli, si ottiene che $\mathrm{ord}_{-\infty} e^x$ è soprareale, $\mathrm{ord}_0 \dfrac{1}{\log x}$ è sottoreale, $\mathrm{ord}_0\, x \log x$ è infrareale.

Si ha, inoltre:

$$\mathrm{ord}_0\, x = \mathrm{ord}_0 \sin x = \mathrm{ord}_0 \operatorname{arctg} x = \mathrm{ord}_0 (e^x - 1) = \mathrm{ord}_0 \log(1 + x) = 1;$$
$$\mathrm{ord}_0 (1 - \cos x) = 2; \ \mathrm{ord}_0 (x - \sin x) = 3.$$

Legami fra ordini di infinito e ordini di infinitesimo

Dalle definizioni sopra adottate segue subito il

TEOREMA 17. *Sia* f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *un infinito* [*un infinitesimo*] *per* $x \to \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$). *Si ha*

$$\mathrm{Ord}_\alpha f(x) = \mathrm{ord}_\alpha \frac{1}{f(x)} \qquad \left[\mathrm{ord}_\alpha f(x) = \mathrm{Ord}_\alpha \frac{1}{f(x)}\right]. \blacksquare$$

Nella pratica è comoda la seguente

DEFINIZIONE. Gli ordini di infinito [di infinitesimo] si assumono come ordini di infinitesimo [di infinito] *negativi*. Le funzioni limitate e discoste da 0 si assumono come infinite e infinitesime di ordine 0.

ESEMPIO. 3) Si ha:

$$\mathrm{Ord}_{+\infty}\frac{x\sqrt{2x}\,\mathrm{arctg}\,x}{x^2+1} = 1 + \frac{1}{2} + 0 - 2 = -\frac{1}{2};$$

dunque, la nostra funzione è infinitesima di ordine $\frac{1}{2}$.

§ 5. ESERCIZI

1) Determinare gli ordini di infinito, per $x \to +\infty$ delle seguenti funzioni:

$$\sqrt[3]{x^2};\quad \frac{x^5+x^2-1}{x^2-3x};\ (1+2x)\sqrt{x};\quad \frac{1+2x}{\sqrt[3]{x^2}};\quad \frac{x^2}{\log(1+x)};\ x^2\mathrm{arctg}\,x + x\sin x;$$

$$\frac{x^2(1+\sin^2 x)}{x+\log x};\ \frac{x^2+x(1+\sin x)}{\sqrt{x+1}};\ x^3(x+1)^5 - x^8;\quad \frac{x^2\sqrt{2+\sin x}}{(x+1)\mathrm{arctg}\,x};$$

$$x\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}} + \sqrt{x^3+2} - x;\qquad \sqrt{x^2\sqrt{\frac{x^3+\sin x}{x^3-\sin x}} + (x^2-1)\mathrm{arctg}\,x + x\sqrt{x}}.$$

2) Determinare gli ordini di infinitesimo, per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:

$$\arcsin^3 x;\quad \sqrt{\mathrm{tg}\,x};\quad x^2(e^x-1);\quad x^3-5x^2;\quad \sin^2 x + \mathrm{tg}^2 x;\quad \sin^4 x\cos^3 x;$$

$$x+\sin x;\quad 1-e^{2x};\ \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{\sin x}};\quad \frac{x^2(\mathrm{arctg}\,x+x)}{\sqrt{1-\cos x}};\quad \frac{\log(1+\sin x)}{\sqrt{|\sin x|}}.$$

3) Disporre in ordine crescente gli ordini di infinito per $x \to +\infty$ delle seguenti funzioni:

$$x;\ x\log x;\ \frac{x}{\log x};\quad x\log^2 x;\quad \frac{x\log x}{\log\log x};$$

$$x\log x\,(\log\log x)^2;\ \frac{x\log x\,(\log\log x)^3}{\log x};\ x\log(x\log x).$$

4) Si provi che, se *f(x)* è una funzione che tende a $+\infty$ [a $-\infty$] per $x \to \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$) e se Ord *f non* è sottoreale, allora $e^{f(x)}$ è un infinito di ordine soprareale [un infinitesimo di ordine soprareale]. Si provi, mediante esempi, che se Ord *f è* sottoreale, allora la funzione $e^{f(x)}$ può avere ordine di infinito [di infinitesimo] sottoreale, reale, soprareale.

[Caso $f \to +\infty$, con $\alpha = +\infty$.. Essendo Ord *f* non sottoreale, esiste un numero positivo *k* per cui è $\mathrm{Ord} f > k$. È dunque $\dfrac{f(x)}{x^k} \to +\infty$. Esiste perciò un intorno di $+\infty$ in cui si ha $f(x) > x^k$. Per ogni numero naturale n si ha dunque

$$\frac{e^{f(x)}}{x^n} = \frac{e^{f(x)}}{e^{x^k}}\,\frac{e^{x^k}}{x^n} = e^{f(x)\,-\,x^k}\,\frac{e^{x^k}}{(x^k)^{n/k}} \to +\infty.$$

Controesempi, sempre con $f \to +\infty$ e $\alpha = +\infty$. Siano $f_1(x) = \log^2 x$, $f_2(x) = \log x$, $f_3(x) = \log\log x$. Tutte tre queste funzioni sono degli infiniti di ordine sottoreale, ma $\exp f_1$ è di ordine soprareale, $\exp f_2$ è di ordine 1 e, in fine, $\exp f_3$ è di ordine sottoreale. Per verificare che, effettivamente, $\exp f_1$ è di ordine soprareale, basta osservare che è

$$\frac{\exp f_1(x)}{x^n} = \exp(\log^2 x - n\,\log x) \to +\infty.]$$

5) Si provi che, se $f(x)$ è una funzione che tende a $+\infty$ per $x \to \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$) e se $\mathrm{Ord} f$ *non* è soprareale, allora $\log f(x)$ è un infinito di ordine sottoreale. Si provi, mediante esempi, che se $\mathrm{Ord} f$ *è* soprareale, allora la funzione $\log f(x)$ può avere ordine di infinito sottoreale, reale, soprareale.

[Caso $f \to +\infty$, con $\alpha = +\infty$. Essendo $\mathrm{Ord} f$ non soprareale, esiste un numero positivo k per cui è $\mathrm{Ord} f < k$. È dunque $\dfrac{f(x)}{x^k} \to 0$. Esiste perciò un intorno di $+\infty$ in cui si ha $f(x) < x^k$ e, di conseguenza, anche $\log f(x) < \log x^k$. Per ogni numero reale h si ha dunque

$$\frac{\log f(x)}{x^h} = \frac{\log f(x)}{\log x^k}\,\frac{\log x^k}{x^h} < k\,\frac{\log x}{x^h} \to 0.$$

Controesempi, sempre con $\alpha = +\infty$. Siano $f_1(x) = \exp(\exp x)$, $f_2(x) = e^x$, $f_3(x) = \exp(\log^2 x)$. Tutte tre queste funzioni sono degli infiniti di ordine soprareale, ma $\log f_1$ è di ordine soprareale, $\log f_2$ è di ordine 1 e, in fine, $\log f_3$ è di ordine sottoreale.]

Capitolo Settimo

CALCOLO DIFFERENZIALE PER LE FUNZIONI DI UNA VARIABILE

§ 1. IL RAPPORTO INCREMENTALE E LA NOZIONE DI DERIVATA

Siano dati una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in E$ che sia di accumulazione per E. Vogliamo studiare il comportamento della f nei punti vicini a x_0. Il modo più naturale per affrontare questo studio è quello di misurare l'incremento dei valori della funzione con l'incremento della variabile.

Dato $x \in E \setminus \{x_0\}$, si ponga $\Delta x := x - x_0$, da cui $x = x_0 + \Delta x$. Ci si esprime dicendo che, passando da x_0 a x, si è dato alla variabile indipendente un *incremento* Δx ($\neq 0$). Naturalmente Δx può anche essere negativo. In corrispondenza all'incremento Δx della variabile indipendente, si trova un incremento dei valori della funzione $\Delta f := f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Anche l'incremento Δf può essere negativo; anzi, mentre Δx è, per definizione, diverso da zero, l'incremento Δf può risultare nullo (si pensi alla funzione seno e ad un incremento $\Delta x = 2\pi$). Come si è detto, interessa misurare Δf assumendo come unità di misura Δx.

DEFINIZIONE. Dati una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in E$ che sia di accumulazione per E, si chiama *rapporto incrementale della f, relativamente al punto iniziale* x_0, la funzione $R^f_{x_0}$ di $E \setminus \{x_0\}$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$R^f_{x_0}(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Posto, come sopra, $x = x_0 + \Delta x$, la funzione rapporto incrementale assume la forma

$$R^f_{x_0}(\Delta x) := \frac{\Delta f}{\Delta x}(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

definita nell'insieme $\{\Delta x: x_0 + \Delta x \in E \setminus \{x_0\}\}$. Spesso, in luogo di Δx, si preferisce usare una sola lettera, per esempio la h, scrivendo la funzione rapporto incrementale nella forma

$$R^f_{x_0}(h) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

ESEMPI. 1) Consideriamo la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = mx + q$. Si ha:

$$R^f_{x_0}(x) := \frac{mx + q - mx_0 - q}{x - x_0} = m.$$

La funzione rapporto incrementale $R^f_{x_0}(x)$ è dunque costante. Viceversa, se è $R^f_{x_0}(x) = m$, si ottiene subito $f(x) = m(x - x_0) + f(x_0)$. Dunque, le funzioni con rapporto incrementale costante sono tutte e sole le funzioni del tipo $f(x) = mx + q$.

2) Consideriamo la funzione f: $\mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$. Posto $x_0 = 2$, si ha:

$$R^f_2(x) = \frac{\dfrac{x+2}{x-1} - \dfrac{2+2}{2-1}}{x-2} = \frac{x+2-4x+4}{(x-1)(x-2)} = \frac{-3(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{-3}{x-1}.$$

Il rapporto incrementale ha un'interpretazione geometrica (cfr. l'Es. del § 2 del Cap. 5); esso dà il coefficiente angolare della retta *secante* (il grafico della f) per $P_0(x_0, f(x_0))$ e $P(x, f(x))$.

Interpretazione cinematica. Se $f(x)$ esprime lo spazio (orientato) percorso, in dipendenza del tempo x, da un corpo che si muove di moto rettilineo, il rapporto incrementale dà la *velocità media* del moto nell'intervallo di tempo $[x_0, x]$.

È ora naturale chiedersi che cosa succede quando l'incremento Δx tende a 0.

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in E$ che sia di accumulazione per E. Se esiste il limite del rapporto incrementale della f, al tendere di x a x_0, questo è detto la *derivata* della f in x_0 ed è indicato con $f'(x_0)$ o con $\dfrac{df}{dx}(x_0)$. È dunque

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Posto, come sopra, $x - x_0 = \Delta x$, oppure $x - x_0 = h$, si ha anche

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Se il limite del rapporto incrementale della f, al tendere di x a x_0, esiste ed è finito, ossia se è $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, si dice che la f è *derivabile* in x_0.

Dunque l'espressione "*f è derivabile in x_0*" ha un significato diverso da "esiste $f'(x_0)$".

ESEMPI. 3) Se è $f(x) = mx + q$, si ha $f'(x_0) = m$. La f è derivabile in x_0, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

4) Se è $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$, si ha $f'(2) = -3$. La f è dunque derivabile in $x_0 = 2$.

5) Consideriamo la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Si ha

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

Esiste dunque $f'(0) = +\infty$, ma la f non è derivabile in 0.

6) Consideriamo la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{se è } x \neq 0 \\ 0, & \text{se è } x = 0 \end{cases}$ e sia $x_0 = 0$. Si ha

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \sin \frac{1}{x},$$

che non ha limite per $x \to 0$. La f non ha dunque derivata in 0, né finita, né infinita.

7) Consideriamo la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|$, ancora con $x_0 = 0$. Si ha

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x}.$$

Anche in questo caso, il rapporto incrementale non ha limite per $x \to 0$. Questa volta però esistono i limiti per $x \to 0^-$ (= -1) e per $x \to 0^+$ (= 1).

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in E$ che sia di accumulazione per E. Se esiste il limite del rapporto incrementale della f, al tendere di x a x_0^- [a x_0^+] questo è detto la *derivata sinistre* [*destra*] della f in x_0 ed è indicato con $f'(x_0^-)$ [$f'(x_0^+)$].

Nel caso della funzione dell'Esempio 7, si ha dunque $f'(0^-) = -1$ e $f'(0^+) = 1$.

ESEMPI. 8) Consideriamo la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{se è } x > 0 \\ 0, & \text{se è } x \le 0 \end{cases}$$

e sia $x_0 = 0$. Si ha $f'(0^-) = 0$, mentre sappiamo che non esiste $f'(0^+)$.

9) Consideriamo la funzione f: $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{x}$. Si ha, come subito si vede, $f'(0) = f'(0^+) = +\infty$, mentre non ha ovviamente senso ricercare la derivata sinistra in 0.

TEOREMA 1. *Siano dati una funzione* f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *e un punto* $x_0 \in E$ *che sia di accumulazione per E. Se la f è derivabile in* x_0*, allora f è continua in tale punto.*

DIM. Dobbiamo provare che è $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$. Ora si ha:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0).$$

Da ciò si ricava immediatamente la tesi, dato che, per ipotesi, il rapporto $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ha un limite finito. ∎

N.B. *Non sussiste l'implicazione opposta di questo Teore.*
Inoltre, dal fatto che la f ha in un punto x_0 del suo dominio derivata infinita, nulla si può dedurre circa la sua continuità in x_0.

ESEMPI. 10) La funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|$ è continua in 0 ma, come si è visto, non è ivi derivabile.

11) La funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ha in 0 derivata infinita ed è ivi continua.

12) La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{se è } x \neq 0 \\ 0, & \text{se è } x = 0 \end{cases}$ non è continua in 0, ma si ha

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x^2} = +\infty.$$

Si è già detto che, da un punto di vista geometrico, il rapporto incrementale $R^f_{x_0}(x)$ dà il coefficiente angolare della retta *secante* $r(x)$ per $P_0(x_0, f(x_0))$ e $P(x, f(x))$. Esso è dunque la tangente dell'angolo acuto $\alpha(x) = s\hat{P_0}r$ che la r forma con la retta s passante per P_0 e parallela all'asse delle ascisse. Qual è il significato della derivata?

Supponiamo dunque che una funzione f sia derivabile in un punto x_0 del suo dominio. Sia poi β l'angolo $s\hat{P_0}t$ che la retta t passante per P_0 e di coefficiente angolare $f'(x_0)$ forma con la retta s. Ora si ha:

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha(x)) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha(x)}{1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\alpha(x)} = \frac{f'(x_0) - R^f_{x_0}(x)}{1 + f'(x_0)\, R^f_{x_0}(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0.$$

Ne viene che l'angolo $r(x)\hat{P_0}t$ tende a 0. Ciò si esprime dicendo che la retta secante *r(x) tende* alla retta t che, come è ben noto, viene detta *tangente* al grafico della f nel punto P_0. Si potrebbe provare che sussiste anche l'implicazione opposta, cioè che se esiste la tangente al grafico della f nel punto P_0 e questa non è parallela all'asse delle ordinate, allora la f è derivabile in x_0 e il coefficiente angolare della retta tangente è dato da $f'(x_0)$.

DEFINIZIONE. Sia data una funzione $f\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Se la f è derivabile in ogni punto $x \in E$, si dice che la f è *derivabile* in E. Associando ad ogni $x \in E$ il valore $f'(x)$, si definisce una nuova funzione $f'\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che è detta la *funzione derivata.*

Può naturalmente accadere che la f non sia derivabile in *tutto E*, ma solo in un sottoinsieme E' di E. Si otterrà dunque una funzione $f' = D(f) = \frac{df}{dx}\colon E'(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Per esempio, se si parte dalla funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|$, si ottiene una funzione derivata $f'\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE. Sia data una funzione $f\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ derivabile in E. Se anche la funzione f' è derivabile in E, la sua derivata è detta *derivata seconda della f* e si indica con f''. Se anche f'' è derivabile, si ottiene la *derivata terza* f'''. Se f''' è derivabile, si ottiene la *derivata quartta* $f^{(4)}$, e così via. La derivata *n - ima* si indica con $f^{(n)}$.

ESEMPIO. 13) Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Essendo (cfr. anche Cap. 5, § 2), $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h \to 2x$, per $h \to 0$, si ottiene che è $f'(x) = 2x$. Ma allora, per quanto visto più su, è $f''(x) = 2$, $f'''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = 0$.

DEFINIZIONE. Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Una funzione continua $f\colon I \to \mathbb{R}$ è detta di *classe* C^0 in I. Una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ è detta di *classe* C^1 in I se è derivabile in I con derivata continua; f è detta di *classe* C^n [C^∞] in I se è n volte derivabile in I e la sua derivata n - ima è continua [se è infinite volte derivabile in I, ossia se ammette in I le derivate di tutti gli ordini]. L'insieme delle funzioni di classe C^n [C^∞] in I si indica con $C^n(I)$[$C^\infty(I)$].

§ 2. REGOLE DI DERIVAZIONE

Derivata della somma e del prodotto

TEOREMA 2. *Siano date due funzioni f,g*: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *derivabili in un punto* $x_0 \in E$ *e sia c un numero reale. Allora:*

1) *La funzione cf è derivabile in* x_0 *e si ha* $D(cf)(x_0) = cf'(x_0)$.

2) *La funzione* $f + g$ *è derivabile in* x_0 *e si ha* $D(f+g)(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

3) *La funzione fg è derivabile in* x_0 *e si ha* $D(fg)(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

DIM. 1) Si ha $$\frac{cf(x) - cf(x_0)}{x - x_0} = c\,\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to cf'(x_0).$$

2) Si ha

$$\frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0) + g'(x_0).$$

3) Si ha $$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \ \blacksquare$$

Le affermazioni (1) e (2) del Teor. 2 dicono che *La combinazione lineare di funzioni derivabili è derivabile e la sua derivata è la combinazione lineare delle derivate con gli stessi coefficienti.*

Naturalmente, questi risultati si estendono alla somma e al prodotto di più di due funzioni:

$$D(f + g + h)(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) + h'(x_0);$$
$$D(f\,g\,h)(x_0) = f'(x_0)g(x_0)h(x_0) + f(x_0)g'(x_0)h(x_0) + f(x_0)g(x_0)h'(x_0).$$

Derivata della reciproca e del quoziente

TEOREMA 3. *Siano date due funzioni f,g*: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *derivabili in un punto* $x_0 \in E$, *con* $g(x_0) \neq 0$. *Allora:*

1) *La funzione* $\frac{1}{g}$ *è derivabile in* x_0 *e si ha* $D(\frac{1}{g})(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

2) *La funzione* $\frac{f}{g}$ *è derivabile in* x_0 *e si ha* $D(\frac{f}{g})(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$.

DIM. 1) La g è continua in x_0 ed è $g(x_0) \neq 0$; quindi, per il Teorema della permanenza del segno, esiste un intorno di questo punto in cui è $g(x) \neq 0$. Ora si ha:

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{g(x) - g(x_0)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} \to \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

2) Tenuto conto del risultato precedente e di quello sulla derivata del prodotto, si ha:

$$D(\frac{f}{g})(x_0) = D(f\,\frac{1}{g})(x_0) = f'(x_0)\,\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\,\frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}. \ \blacksquare$$

Derivata della funzione composta

TEOREMA 4. *Siano date due funzioni componibili* f: $E(\subset \mathbb{R}) \to E'(\subset \mathbb{R})$ *e* g: $E'(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. *Siano poi* $x_0 \in E$, $u_0 = f(x_0) \in E'$. *Se la* f *è derivabile in* x_0 *e la* g *è derivabile in* u_0, *allora la funzione composta* $g \circ f$ *è derivabile in* x_0 *e si ha* $(g \circ f)'(x_0) = g'(u_0) f'(x_0)$.

DIM. Poniamo $y = g(u)$. Il rapporto incrementale della funzione composta può essere scritto nella forma $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. La prima idea è quella di scrivere

$$(*) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Questa uguaglianza ha senso solo se è $\Delta x \neq 0 \neq \Delta u$. Sappiamo che è $\Delta x \neq 0$, ma può ben accadere che, assegnato Δx ($\neq 0$), si ottenga $\Delta u = 0$; in questo caso, il primo fattore del secondo membro della (*) non ha senso. D'altra parte, sappiamo che la funzione g è derivabile in u_0; possiamo perciò prolungare per continuità la funzione $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ nel punto 0 assegnandole il valore $g'(u_0)$. La validità della (*) sussiste ora anche se è $\Delta u = 0$, dato che in tal caso è anche $\Delta y = 0$. A questo punto i giochi sono fatti. In vero, da $\Delta x \to 0$ segue $\Delta u \to 0$, per la continuità della f; inoltre, per il Teorema sul limite delle funzioni composte (Cap. 5, Teor. 16'), si ha

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(\Delta u)}{\Delta u}(\Delta x) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y(\Delta u)}{\Delta u} = g'(u_0). \blacksquare$$

ESEMPIO. 1) La funzione g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = |x|$ è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e si ha $g'(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}$. Sia ora data una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Dal Teorema precedente si deduce che:

Se f è derivabile in un punto $x_0 \in E$, con $f(x_0) \neq 0$, allora è derivabile in x_0 anche la funzione $|f|$ e si ha: $D(|f|)(x_0) = \frac{|f(x_0)|}{f(x_0)} f'(x_0)$.

(Si tenga presente che in un punto $x_0 \in E$ in cui è $f(x_0) = 0$ la funzione $|f|$ è derivabile se e solo se è $f'(x_0) = 0$.)

Se f è derivabile in un punto $u_0 \in E \setminus \{0\}$, con $u_0 > 0$, e se è $|x_0| = u_0$, con $x_0 \in E$, allora la funzione $f(|x|)$ è derivabile in x_0 e la derivata è data da $f'(u_0) \frac{|x_0|}{x_0}$.

Derivata della funzione inversa

Sussiste il seguente Teorema del quale omettiamo la dimostrazione.

TEOREMA 5. *Siano* I *un intervallo,* f: $I \to \mathbb{R}$ *una funzione strettamente monotona e* φ *la funzione inversa della* f. *Siano poi* x_0 *un punto di* I *e* $y_0 = f(x_0)$.

1) *Se la* f *è derivabile in* x_0 *ed è* $f'(x_0) \neq 0$, *allora la* φ *è derivabile in* y_0 *e si ha* $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

2) *Se la* f *è derivabile in* x_0 *ed è* $f'(x_0) = 0$, *allora si ha* $\varphi'(y_0) = \infty$. $\blacksquare$

Il risultato di questo Teorema non è quanto di meglio si possa desiderare; infatti esso afferma che "*la derivata della* φ *in un punto y è data da* 1 *fratto la derivata della f calcolata in un altro punto x*". La cosa funziona bene se siamo capaci di esprimere x in funzione di y.

ESEMPIO. 2) Sappiamo (Esempio 1, §1) che la funzione $f(x) = x^2$ è derivabile e che la sua derivata è data da $f'(x) = 2x$. Ristretta la funzione f agli $x \geq 0$, vogliamo determinare la derivata della funzione inversa $\varphi(y) = \sqrt{y}$. Per il Teorema precedente, si ha:

$$D(\sqrt{y}) = \frac{1}{D(x^2)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \text{ se è } y > 0; \quad \varphi'(0) = +\infty.$$

3) Consideriamo la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^5 + x + 1$. Essa è monotona crescente e derivabile in $\mathbb{R}$. Scopriremo presto che la sua derivata è data da $f'(x) = 5x^4 + 1$. Per il Teorema precedente, la funzione inversa φ è derivabile e si ha $\varphi'(y) = \dfrac{1}{5x^4 + 1}$ con $x = \varphi(y)$ o, se più piace, $y = f(x)$. Ma, se è $y = 17$, chi sarà x? Bisognerebbe saper risolvere l'equazione $x^5 + x + 1 = 17$…

§ 3. DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

Vediamo ora in che misura le funzioni elementari sono derivabili e di stabilire le derivate delle singole funzioni, ottenendo la tabella riportata a pg. 133.

Derivata di x^n e di $\sqrt[n]{x}$

Si constata immediatamente che una funzione costante è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e che la sua derivata è la funzione nulla.

Abbiamo altresì visto che anche le funzioni x e x^2 sono derivabili su tutto $\mathbb{R}$ e che le loro derivate sono, rispettivamente, 1 e $2x$.

Cerchiamo ora, più in generale, la derivata della funzione x^n, con $n \geq 2$. Si ha:

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \ldots + x_0^{n-1}.$$

Il rapporto incrementale è dunque dato dalla somma di n addendi ciascuno dei quali, per la continuità della funzione potenza, tende a x_0^{n-1}.

Si ha dunque, per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{D(x^n) = nx^{n-1}.}$

Passiamo alla derivata della funzione radice n - ima. Generalizzando quanto visto più su, poniamo $y = \varphi(x) = \sqrt[n]{x}$, da cui $x = y^n$. Si ottiene subito $\varphi'(0) = +\infty$ e inoltre:

$$D(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{D(y^n)} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \text{ per } x > 0 \text{ (anche per } x < 0 \text{ se } n \text{ è dispari).}$$

La funzione radice è dunque derivabile per $x > 0$ (anche per $x < 0$ se n è dispari) e si ha:

$$\boxed{D(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.}$$

Derivate delle funzioni circolari e delle loro inverse

Cerchiamo la derivata del seno. Si ha:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2}{x - x_0} \cos\frac{x + x_0}{2} \sin\frac{x - x_0}{2} =$$

$$= \cos x_0 \lim_{x\to x_0} \frac{2}{x - x_0} \sin\frac{x - x_0}{2} = \cos x_0.$$

Si ha dunque, per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{D(\sin x) = \cos x.}$

Si tenga ben presente che per calcolare la derivata di $\sin x$ si è sfruttato il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, che deve dunque essere calcolato senza far uso delle derivate.

La derivata del coseno si può calcolare in modo analogo, ma si può anche osservare che è

$$D(\cos x) = D(\sin(\pi/2 - x)) = -\cos(\pi/2 - x) = -\sin x.$$

Si ha dunque, per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{D(\cos x) = -\sin x.}$

Per la tangente, si ha che, per ogni x reale diverso da $\pi/2 + k\pi$, risulta

$$D(\mathrm{tg}x) = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x.$$

È dunque: $\boxed{D(\mathrm{tg}x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x.}$

Si vede analogamente che, per ogni x reale diverso da $k\pi$ è

$$\boxed{D(\mathrm{ctg}x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \mathrm{ctg}^2 x.}$$

Venendo alle derivate delle funzioni inverse, cominciamo dall'arcoseno, Sia dunque $x = \sin y$, con $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, e quindi $y = \varphi(x) = \arcsin x$, con $x \in [-1, 1]$. Per la (2) del Teor. 5, si ha intanto $\varphi'(-1) = \varphi'(1) = +\infty$. Tenuto poi conto che, per $y \in\,]-\pi/2, \pi/2[$, è $\cos y > 0$, si ha:

$$D(\arcsin x) = \frac{1}{D(\sin y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

È dunque, per $-1 < x < 1$: $\boxed{D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.}$

In modo analogo, si trova la derivata dell'arcocoseno. Posto $x = \cos y$, con $y \in [0, \pi]$, e $y = \cos x$, con $x \in [-1, 1]$ e tenuto conto che, per $y \in\,]0, \pi[$, è $\sin y > 0$, si ha, per $x \in\,]-1, 1[$:

$$\boxed{D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

Il risultato non deve stupire, dato che è $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.

Per l'arcotangente le cose sono ancora più facili. Siano $x = \mathrm{tg}\,y$, con $y \in\ ]-\pi/2, \pi/2[$, e quindi $y = \mathrm{arctg}\,x$, con $x \in \mathbb{R}$. Si ha:

$$D(\mathrm{arctg}\,x) = \frac{1}{D(\mathrm{tg}\,y)} = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

È dunque, per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{D(\mathrm{arctg}\,x) = \frac{1}{1+x^2}.}$

Analogamente si ottiene: $\boxed{D(\mathrm{arcctg}\,x) = \frac{-1}{1+x^2}.}$

Derivata dell'esponenziale, del logaritmo e della funzione x^α

Si ha:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

È dunque, per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{D(e^x) = e^x.}$

Anche in questo caso si è sfruttato il limite notevole $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, che deve dunque essere calcolato senza far uso delle derivate.

Essendo poi $a^x = e^{x \log a}$, si ottiene

$$\boxed{D(a^x) = a^x \log a.}$$

Veniamo alla derivata del logaritmo. Posto $y = \log x$, con $x > 0$, da cui $x = e^y$, si ha:

$$D(\log x) = \frac{1}{D(e^y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Essendo poi $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$, si ottiene:

$$\boxed{D(\log x) = \frac{1}{x}; \qquad D(\log_a x) = \frac{1}{x \log a}.}$$

Consideriamo, in fine, la funzione $f(x) = x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$. Si ha:

$$D(x^\alpha) = D(e^{\alpha \log x}) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \log x} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

È dunque $\boxed{D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha - 1}.}$

N.B. Non ci si lasci prendere la mano dall'euforia e si tenga ben presente che la derivata di e^x ***non è*** xe^{x-1}.

ESEMPI. 1) Si ha: $D(e^{\sin x}) = e^{\sin x}\cos x$; $D(\arcsin(\sqrt{x} - 1)) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x}-1)^2}}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

$$D(x^x) = D(e^{x\log x}) = x^x(\log x + 1); \qquad D(x\sqrt{\arcsin x}) = \sqrt{\arcsin x} + \frac{x}{2\sqrt{\arcsin x}\sqrt{1-x^2}};$$

$$D(xe^x\sin x) = e^x\sin x + xe^x\sin x + xe^x\cos x; \qquad D(e^{e^x}) = e^{e^x}e^x;$$

$$D(\log_x(x+1)) = D\left(\frac{\log(x+1)}{\log x}\right) = \frac{\dfrac{\log x}{x+1} - \dfrac{\log(x+1)}{x}}{\log^2 x};$$

$$D\Big(\frac{e^{1/x}}{x^2-1}\Big) = \frac{-\dfrac{e^{1/x}(x^2-1)}{x^2} - 2xe^{1/x}}{(x^2-1)^2} = -\frac{e^{1/x}(2x^3+x^2-1)}{x^2(x^2-1)^2}.$$

2) Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{se è } x \neq 0 \\ 0, & \text{se è } x = 0 \end{cases}$.

Cerchiamone la derivata. Si ha subito $f'(0) = 0$. Per $x \neq 0$, si ha:

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Si vede subito che non esiste il $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$. Dunque la nostra f è di classe C^0 su $\mathbb{R}$, ma, pur essendo derivabile, non è di classe C^1.

Per avere un esempio di funzione di classe C^n, ma non di classe C^{n+1}, basta considerare la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x^{2n+2}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{se è } x \neq 0 \\ 0, & \text{se è } x = 0 \end{cases}$. (Esercizio!)

Relazione fra i coefficienti di un polinomio e le sue derivate

Consideriamo un polinomio $P(x)$ di grado $n > 0$:

(1) $$P(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0.$$

Fissiamo un punto x_0. Se interessa studiare la funzione razionale intera rappresentata da $P(x)$ in vicinanza del punto x_0, è più comodo esprimerla nella variabile $x - x_0$ anziché nella variabile x. Inoltre dato che un addendo del tipo $a_n(x - x_0)^n$ è infinitesimo di ordine n per x che tende a x_0, conviene ordinare i monomi in ordine crescente rispetto al grado, cioè al contrario di quanto si fa di solito. Si ottiene dunque la scrittura

(2) $$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n.$$

Come si fa a passare dalla forma (1) alla forma (2)? Il procedimento più naturale è analogo a quello che si usa nel cambiamento di base dei numeri naturali: si fanno successive divisioni per $x - x_0$. Chiariamo con un esempio.

ESEMPIO. 3) Si ha: $x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 3 + (x^2 + 4x + 2)(x - 1) =$

$$= 3 + (7 + (x + 5)(x - 1))(x - 1) = 3 + 7(x - 1) + (6 + (x - 1))(x - 1)^2 =$$

$$= 3 + 7(x - 1) + 6(x - 1)^2 + (x - 1)^3.$$

Consideriamo un polinomio $P(x)$ e calcoliamone le derivate. Si ha:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots + a_n(x - x_0)^n;$$
$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1};$$
$$P''(x) = 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x - x_0) + 3\cdot 4a_4(x - x_0)^2 + \ldots + (n - 1)na_n(x - x_0)^{n-2};$$
$$\ldots\ldots$$
$$P^{(n-1)}(x) = 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n - 1)a_{n-1} + 2\cdot 3\ldots(n - 1)na_n(x - x_0);$$
$$P^{(n)}(x) = n!a_n.$$

Si ottiene:

$$P(x_0) = a_0;\ \ P'(x_0) = a_1;\ \ P''(x_0) = 2a_2;\ \ldots;\ \ P^{(n-1)}(x_0) = (n - 1)!a_{n-1};\ \ P^{(n)}(x_0) = n!a_n.$$

È dunque, per ogni intero k, con $0 \le k \le n$, $\boxed{P^{(k)}(x_0) = k!a_k}$,

ossia:

$$\boxed{a_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}.} \qquad (*)$$

Da ciò si ricava, fra l'altro, il seguente

TEOREMA 6. *Fissati un punto* $x_0 \in \mathbb{R}$ *e* $n + 1$ *numeri reali* $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$, *esiste uno ed un solo polinomio di grado formale n che soddisfa alle seguenti condizioni (iniziali)*

$$P(x_0) = \eta_0;\ \ P'(x_0) = \eta_1;\ \ldots;\ \ P^{(n)}(x_0) = \eta_n.$$

DIM. Dalla validità della (*), si ha intanto l'unicità. Per l'esistenza, basta osservare che un polinomio che fa al caso è

$$P(x) = \eta_0 + \eta_1(x - x_0) + \frac{\eta_2}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{\eta_n}{n!}(x - x_0)^n. \blacksquare$$

ESEMPIO. 4) Si ricerchi un polinomio di grado ≤ 4 che soddisfi alle condizioni:

$$P(1) = 2;\ \ P'(1) = 0;\ \ P''(1) = -1;\ \ P'''(1) = 4;\ \ P^{(4)}(1) = 1.$$

Il polinomio cercato è dato da

$$P(x) = 2 + \frac{-1}{2}(x - 1)^2 + \frac{4}{6}(x - 1)^3 + \frac{1}{24}(x - 1)^4.$$

A questo punto, passere dalla forma (1) alla forma (2) è molto più facile, essendo immediato il calcolo delle derivate di un polinomio.

ESEMPIO. 5) Si voglia esprimere il polinomio $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ mediante potenze di $x - 2$. Invece di procedere come nell'Esempio 3, basta osservare che è:

$$P(2) = 17;\ \ P'(2) = 22;\ \ P''(2) = 18;\ P'''(2) = 6.$$

Si ottiene:

$$P(x) = 17 + 22(x - 2) + 9(x - 2)^2 + (x - 2)^3.$$

§ 4. LE FUNZIONI IPERBOLICHE

Anche le seguenti funzioni elementari di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, dette funzioni *iperboliche*, sono di notevole importanza:

il *seno iperbolico* $\qquad \sinh x = \mathrm{Sh}x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$;

il *coseno iperbolico* $\qquad \cosh x = \mathrm{Ch}x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;

la *tangente iperbolica* $\qquad \mathrm{tgh}x = \mathrm{Th}x := \dfrac{\mathrm{Sh}x}{\mathrm{Ch}x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;

la *cotangente iperbolica* $\qquad \mathrm{ctgh}x = \mathrm{Cth}x = \dfrac{\mathrm{Ch}x}{\mathrm{Sh}x} = \dfrac{1}{\mathrm{Th}x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

Il coseno iperbolico è una funzione pari mentre le altre tre sono funzioni dispari. Il seno e il coseno iperbolici hanno, per $x \to +\infty$, un comportamento asintotico a quello della funzione $\frac{1}{2}e^x$, nel senso che si ha $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{Sh}x - \frac{1}{2}e^x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{Ch}x - \frac{1}{2}e^x) = 0$.

Sussiste la seguente identità fondamentale di immediata verifica:

$$\boxed{\mathrm{Ch}^2x - \mathrm{Sh}^2x = 1.}$$

Da questo fatto si deduce che il luogo geometrico dei punti $P(\mathrm{Ch}x, \mathrm{Sh}x)$ è dato dal ramo di iperbole equilatera di equazione $X^2 - Y^2 = 1$, $X > 0$. Ciò spiega il nome di funzioni iperboliche. I nomi di tangente e cotangente derivano dall'analogia con le funzioni circolari.

Le funzioni iperboliche sono ovviamente continue. Esse sono anche derivabili; Infatti, come si constata immediatamente, si ha:

$$\boxed{D(\mathrm{Ch}x) = \mathrm{Sh}x}, \quad \boxed{D(\mathrm{Sh}x) = \mathrm{Ch}x},$$

$$\boxed{D(\mathrm{Th}x) = \frac{1}{\mathrm{Ch}^2x} = 1 - \mathrm{Th}^2x}, \quad \boxed{D(\mathrm{Cth}x) = -\frac{1}{\mathrm{Sh}^2x} = 1 - \mathrm{Cth}^2x}.$$

Posto $y = \mathrm{Sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, si ottiene

$$e^{2x} - 1 = 2ye^x; \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0; \quad e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Dovendo essere $e^x > 0$, nell'ultima uguaglianza va preso il segno '+'. Dunque la funzione $\mathrm{Sh}x$ è invertibile. La sua funzione inversa e detta *arcoseno iperbolico* ed è indicata con arcsinh. È dunque:

$$\boxed{\mathrm{arcsinh}x := \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).}$$

La funzione $\mathrm{Ch}x$, essendo pari, non è invertibile. Restringiamola agli $x \geq 0$. Procedendo come sopra, da $y = \mathrm{Ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, si ottiene $e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$. Dovendo ora essere $e^x \geq 1$, si ottiene facilmente che nell'ultima uguaglianza va ancora preso il segno '+'. Dunque anche la restrizione della funzione $\mathrm{Ch}x$ agli $x \geq 0$ è invertibile. La sua funzione inversa e detta *arcoco-seno iperbolico* ed è indicata con arccosh. È dunque:

$$\boxed{\mathrm{arccosh}x := \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).}$$

Anche la funzione Thx è invertibile. I soliti conti conducono infatti all'uguaglianza $e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$, da cui si ottiene immediatamente l'espressione della funzione *arcotangente iperbolica*. Si ha:

$$\boxed{\operatorname{arctgh} x := \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}.}$$

Si vede poi immediatamente che anche le funzioni inverse ora definite sono derivabili e si ha, per esempio:

$$D(\operatorname{arcsinh} x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

In conclusione, si ottiene:

$$\boxed{D(\operatorname{arcsinh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}, \quad \boxed{D(\operatorname{arccosh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}, \quad \boxed{D(\operatorname{arctgh} x) = \frac{1}{1-x^2}}.$$

Tavola riassuntiva delle derivate

$f(x)$	$f\,'(x)$	$f(x)$	$f\,'(x)$
c	0	x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{ctg} x$	$-1-\operatorname{ctg}^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
e^x	e^x	a^x	$a^x \log a$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x\log a}$
$\operatorname{Sh} x$	$\operatorname{Ch} x$	$\operatorname{Ch} x$	$\operatorname{Sh} x$
$\operatorname{Th} x$	$1-\operatorname{Th} x = \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x}$	$\operatorname{Cth} x$	$1-\operatorname{Cth} x = \frac{-1}{\operatorname{Sh}^2 x}$
$\operatorname{arcsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arccosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arctgh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arcctgh} x$	$\frac{1}{x^2-1}$

§ 5. APPROSSIMANTE LINEARE

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto x_0 interno ad E. Si definisce *approssimante lineare della f relativamente ad* x_0 (o *in* x_0) una funzione lineare (ossia razionale intera di grado ≤ 1) $\overline{f}(x) = m(x - x_0) + q$, che soddisfi alle due seguenti condizioni:

1) $\overline{f}(x_0) = f(x_0)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - \overline{f}(x)}{x - x_0} = 0$.

Se la f ammette approssimante lineare in x_0, si dice che essa è *differenziabile* in x_0. La *forma lineare* (= polinomio omogeneo di grado ≤ 1) $m(x - x_0)$ è detta *differenziale della f in* x_0.

La (2), che può essere espressa mediante l'uguaglianza

$$f(x) = \overline{f}(x) + \varepsilon(x)(x - x_0), \text{ con } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0,$$

dice che la differenza $f(x) - \overline{f}(x)$ è un infinitesimo di ordine maggiore di 1 per $x \to x_0$.

TEOREMA 7. *Una funzione* f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *ammette approssimante lineare in un punto* x_0 *interno ad E se e solo se f è derivabile in* x_0 *e si ha*

$$\overline{f}(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

DIM. Se la f è derivabile in x_0, ha senso considerare la funzione razionale $\overline{f}$ definita da $\overline{f}(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Proviamo che questa funzione soddisfa alle condizioni (1) e (2) ed ha quindi il diritto di essere chiamata approssimante lineare della f in x_0. In effetti si vede subito che è $\overline{f}(x_0) = f(x_0)$. Inoltre si ha:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \overline{f}(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0.$$

Per provare il viceversa, supponiamo che la f ammetta in x_0 approssimante lineare $\overline{f}(x) = m(x - x_0) + q$. Dalla (1) si ha immediatamente $q = f(x_0)$. Dalla (2) si ottiene

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \overline{f}(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \right),$$

da cui $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m$. Ciò significa che la f è derivabile in x_0 che è $f'(x_0) = m$. ∎

Si ha in particolare che, *se esiste l'approssimante lineare, esso è unico.*

L'approssimante lineare di una funzione f in un punto x_0 del suo dominio è, per definizione, la funzione lineare che meglio approssima la f in un intorno di x_0.

ESEMPIO. 1) Qual è la retta che meglio approssima la funzione esponenziale $f(x) = e^x$ in un intorno del punto 2? Questa è, per definizione, l'approssimante lineare della f relativamente al punto 2, cioè la funzione $\overline{f}(x) = e^2(x - 2) + e^2$.

Da un punto di vista geometrico, l'approssimante lineare è la retta tangente di cui abbiamo parlato nel § 1, ma qui la cosa è vista con un'altra ottica e sarà il punto di partenza per un discorso più generale che affronteremo nel §8.

§ 6. PROPRIETÀ LOCALI DEL PRIMO ORDINE

Sono dati una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in E$ di accumulazione per E. Come dicevamo all'inizio, vogliamo studiare il comportamento della f nei punti vicini a x_0, sfruttando le nozioni di rapporto incrementale e di derivata. Le prime informazioni le possiamo già ricavare dal segno del rapporto incrementale della f. In vero, affermare che il rapporto incrementale è positivo [negativo] significa dire che gli incrementi Δf e Δx hanno lo stesso segno [hanno segno opposto].

Ma il fatto che la funzione rapporto incrementale abbia sempre lo stesso segno è una cosa abbastanza rara. Consideriamo, per esempio, la funzione seno, con $x_0 = 0$. Si vede subito che il rapporto incrementale, che è dato dall'espressione $\frac{\sin x}{x}$ non ha segno costante. Se però riduciamo le nostre pretese ai punti dell'intervallo $]-\pi, \pi[$ privato dello 0, si scopre che effettivamente il rapporto incrementale è sempre positivo.

Ciò ci induce, passando al caso generale, a richiedere che certe proprietà della funzione, quali appunto quella di avere il rapporto incrementale di segno costante, siano soddisfatte non per tutti gli $x \in E \setminus \{x_0\}$, ma soltanto per quelli appartenenti ad *un opportuno intorno* di x_0. Esprimeremo questo fatto dicendo che quelle che stiamo studiando sono *proprietà locali* delle funzioni.

DEFINIZIONE. Sono dati una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in E$.

Si dice che la f è *crescente in* x_0 se *esiste un intorno* U *di* x_0 tale che, per ogni $x \in U \cap E$, si ha che

$$\text{da } x < x_0 \text{ segue } f(x) < f(x_0) \text{ e da } x > x_0 \text{ segue } f(x) > f(x_0).$$

Si dice che la f è *decrescente in* x_0 se *esiste un intorno* U *di* x_0 tale che, per ogni $x \in U \cap E$, si ha che

$$\text{da } x < x_0 \text{ segue } f(x) > f(x_0) \text{ e da } x > x_0 \text{ segue } f(x) < f(x_0).$$

Si dice che x_0 è *punto di massimo (relativo)* per la f se *esiste un intorno* U *di* x_0 tale che da $x \in U \cap E \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) < f(x_0)$.

Si dice che x_0 è *punto di minimo (relativo)* per la f se *esiste un intorno* U *di* x_0 tale che da $x \in U \cap E \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) > f(x_0)$.

Si dice che x_0 è *punto di massimo* [*minimo*] *(relativo) in senso debole* per la f se *esiste un intorno* U *di* x_0 tale che da $x \in U \cap E \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) \le f(x_0)$ [$f(x) \ge f(x_0)$].

ESEMPI. 1) La funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} - x, & \text{se è } x \neq 0 \\ 0, & \text{se è } x = 0 \end{cases}$ è crescente in 0, dato che si ha $f(x) < 0 = f(0)$ per $-1 < x < 0$ e $f(x) > 0 = f(0)$ per $0 < x < 1$. E ciò anche se la funzione ristretta agli $x < 0$ [agli $x > 0$] è decrescente.

2) Si consideri la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & \text{se è } x \neq 0 \\ 0, & \text{se è } x = 0 \end{cases}$. Nel punto 0 la funzione non è né crescente né decrescente e non ha né massimo né minimo, nemmeno in senso debole.

3) Una funzione costante definita su un intervallo non è né crescente né decrescente in alcun punto e non ha né punti di massimo relativo né punti di minimo relativo; ogni punto del dominio è sia di massimo relativo in senso debole che di minimo relativo in senso debole.

Analogamente, per la funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che vale 1 se è $x \in \mathbb{Q}$ e 0 se è $x \notin \mathbb{Q}$, ogni $x \in \mathbb{Q}$ è di massimo relativo in senso debole e ogni $x \notin \mathbb{Q}$ è di minimo relativo in senso debole.

4) Consideriamo ancora la funzione seno. Tutti i punti del tipo $\pi/2 + 2k\pi$ sono di massimo relativo; tutti i punti del tipo $-\pi/2 + 2k\pi$ sono di minimo relativo; la funzione è crescente, per esempio, in ogni punto del tipo $2k\pi$ o del tipo $\pi/4 + 2k\pi$, mentre è decrescente in ogni punto del tipo $3\pi/4 + 2k\pi$.

È immediato constatare che se una funzione è monotona crescente [decrescente], allora è crescente [decrescente] in ogni punto del suo dominio. La funzione tg$x$ mostra che non sussiste l'implicazione opposta. Infatti essa è, come subito si vede, crescente in ogni punto del suo dominio ma, essendo periodica, non è monotona.

È anche interessante osservare che una funzione piò essere continua e crescente in un punto x_0 del suo dominio senza che, per questo, risulti monotona in tutto un intorno di x_0, come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO. 5) Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x\sin\frac{1}{x}, & \text{se è } x \neq 0 \\ 0, & \text{se è } x = 0 \end{cases}.$$

Essa è crescente in 0. Si vede poi facilmente che non esiste nessun intorno dello 0 in cui la f è monotona crescente.

A talee riguardo sussiste il seguente risultato del quale omettiamo la dimostrazione.

TEOREMA 8. *Se una funzione $f\colon I(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è crescente* [*decrescente*] *in ogni punto di un intervallo I, allora essa è monotona crescente* [*decrescente*] *in I.* ∎

È di estrema importanza il seguente

TEOREMA 9. 1) *Se una funzione $f\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ha in un punto $x_0 \in E$ derivata positiva (finita o no), allora la f è crescente in x_0.*

2) *Se una funzione $f\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ha in un punto $x_0 \in E$ derivata negativa (finita o no), allora la f è decrescente in x_0.*

3) *Se una funzione $f\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è crescente in un punto $x_0 \in E$ ed esiste $f'(x_0)$, allora si ha $f'(x_0) \geq 0$.*

4) *Se una funzione $f\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è decrescente in un punto $x_0 \in E$ ed esiste $f'(x_0)$, allora si ha $f'(x_0) \leq 0$.*

DIM. 1) Sia dunque $f'(x_0) > 0$. Ciò significa che è $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$. Per il Teorema della permanenza del segno, esiste un intorno di x_0 in cui la funzione rapporto incrementale è positiva. La f è dunque crescente in x_0. La (2) si prova in modo perfettamente analogo.

3) Se fosse $f'(x_0) < 0$, la f sarebbe decrescente in x_0; dato che ciò non può essere, si deduce che è $f'(x_0) \geq 0$. La (4) si prova in modo perfettamente analogo alla (3). ∎

N.B. Può accadere che la f sia crescente [decrescente] in $x_0 \in E$ e che sia $f'(x_0) = 0$.

ESEMPIO. 6) Basta considerare la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$, con $x_0 = 0$. Si ha $f'(0) = 0$, ma le f è crescente in 0, dato che è $x^3 < 0$ per $x < 0$ e $x^3 > 0$ per $x > 0$.

TEOREMA 10. *(di Fermat) - Se una funzione $f\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è derivabile in un punto x_0 interno ad E che sia di massimo o di minimo relativo (anche in senso debole), allora si ha necessariamente $f'(x_0) = 0$.*

DIM. Sia x_0 un punto di massimo relativo (anche in senso debole) interno ad E. Esiste dunque un intorno U di x_0 tale che da $x \in U \cap E \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) \leq f(x_0)$.

Prima dimostrazione. Supponiamo $f'(x_0) > 0$; la f è dunque crescente in x_0. Dato che x_0 è interno ad E, esiste un intorno destro V di x_0 tale che da $x \in V \cap E \setminus \{x_0\}$ segue $f(x) > f(x_0)$. Essendo $U \cap V \cap E \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$, si ottiene una contraddizione. Analogamente se è $f'(x_0) < 0$; in questo caso, la contraddizione si ha in un intorno sinistro di x_0.

Seconda dimostrazione. Sia $x \in U \cap E \setminus \{x_0\}$. Se è $x < x_0$, si ha $R^f_{x_0}(x) \geq 0$, da cui $f'(x_0^-) \geq 0$; se è $x > x_0$, si ha $R^f_{x_0}(x) \leq 0$, da cui $f'(x_0^+) \leq 0$. Siccome la f è derivabile in x_0, l'unica possibilità è dunque che sia $f'(x_0) = 0$. ∎

Facciamo alcune osservazioni importanti.

Può accadere che in un punto di massimo o minimo interno la f non abbia derivata. basta considerare la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|$; lo 0 è punto di minimo, ma non esiste $f'(0)$.

Se x_0 è un punto di massimo relativo non interno ad E, con la f derivabile in x_0, può accadere che sia $f'(x_0) \neq 0$.

ESEMPIO. 7) Basta considerare la funzione f: $I = [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$. Il punto $x_0 = 0$ è di minimo e il punto $x_1 = 1$ è di massimo; ciononostante, si ha $f'(0) = f'(1) = 1$.

Se x_0 è un punto di massimo o minimo relativo interno ad E, può accadere che la f abbia derivata infinita in x_0 ma, ovviamente, non può essere né $f'(x_0) = +\infty$, né $f'(x_0) = -\infty$.

ESEMPIO. 8) Basta considerare la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Il punto $x_0 = 0$ è di minimo e si ha $f'(0) = \infty$.

TEOREMA 4. *Siano* $I = [a, c]$, *b un punto interno ad I ed* f: $I \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e derivabile in* $I \setminus \{b\}$.

1) *Se è:* $f'(x) > 0$ *in* $]a, b[$ *e* $f'(x) < 0$ *in* $]b, c[$, *allora b è punto di massimo relativo per la f.*

2) *Se è:* $f'(x) < 0$ *in* $]a, b[$ *e* $f'(x) > 0$ *in* $]b, c[$, *allora b è punto di minimo relativo per la f.*

DIM. 1) La f è crescente in ogni punto di $]a, b[$ ed è quindi monotona crescente su tale intervallo. Dalla continuità della f in b e dal Teorema sul limite delle funzioni monotone, si ha $f(b) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup \{f(x): a < x < b\}$. È dunque $f(x) \leq f(b)$ per ogni $x \in]a, b[$. Risulta poi che, per ogni $x \in]a, b[$, è $f(x) < f(b)$, ancora per la crescenza della f. Allo stesso modo si prova che è $f(x) < f(b)$ per ogni $x \in]b, c[$.

La (2) si prova in modo perfettamente analogo. ∎

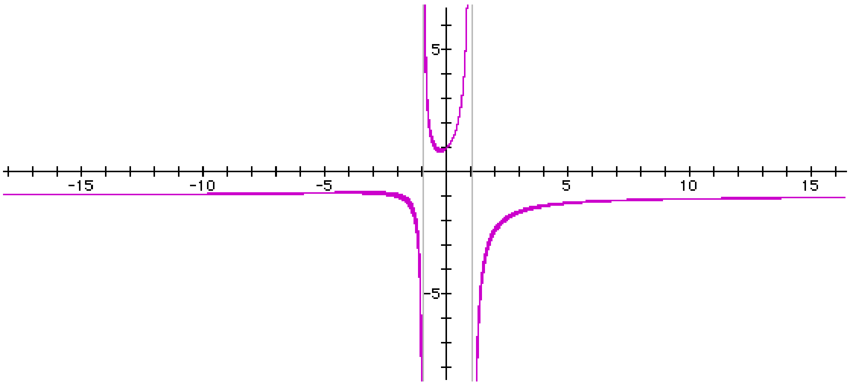
Possiamo ora affrontare i primi studi di funzione.

ESEMPI. 9) Studio della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{1 - x^2}$.

– *Dominio e segni*: $E = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; $f(x) > 0$ se e solo se è $|x| < 1$; $f(0) = 1$.
– *Limiti*: $\lim_{x \to \infty} f(x) = -1$; $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.
– *Segno di $f(x)$ - (-1)*: $f(x) > -1$ se e solo se è $(x < -2) \vee (-1 < x < 1)$.
– *Derivata prima*: $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{(1 - x^2)^2}$.
– *Segno di f' ed estremi di f*: $f'(x) > 0$ se e solo se è $(x < -2 - \sqrt{3}) \vee (-2 + \sqrt{3} < x \neq 1)$.
$x_1 = -2 - \sqrt{3}$ è punto di massimo relativo; $x_2 = -2 + \sqrt{3}$ è di minimo relativo;
$\inf f = -\infty$; $\sup f = +\infty$.

– *Limiti di* $f'(x)$: $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$; $\lim_{x\to -1} f'(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 1} f'(x) = +\infty$.

A questo punto è facile disegnare il grafico della funzione.



10) Studio della funzione $f(x) = \sin x \cos 2x$.

– *Dominio e simmetrie*: $E = \mathbb{R}$. La f è periodica di periodo 2π e dispari. Studiamola in $[0, \pi]$.

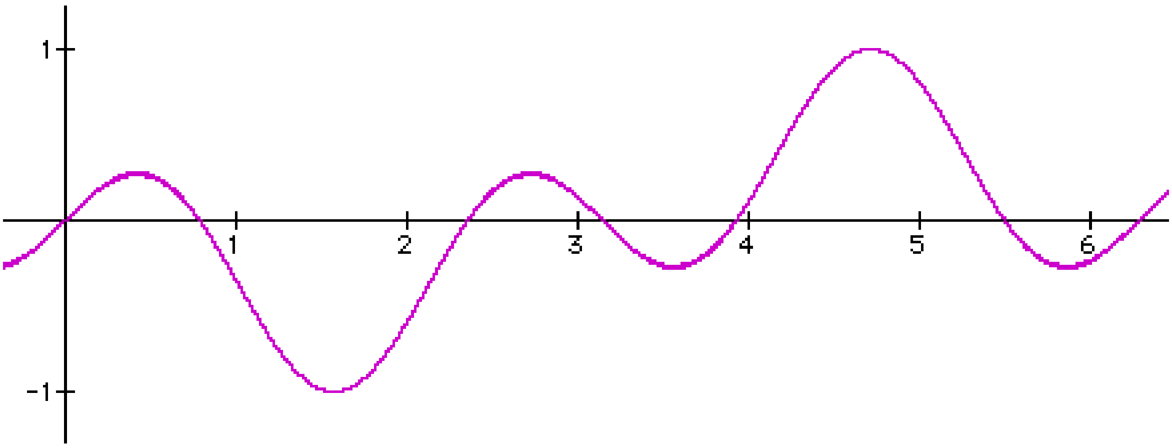
– *Segni* : Si ha $f(x) \geq 0$ se e solo se è $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}) \vee (\frac{3}{4}\pi \leq x \leq \pi)$.

– *Derivata prima*: $f'(x) = \cos x\,(1 - 6\sin^2 x)$.

– *Segno di f' ed estremi di f*: $f'(x) > 0$ se e solo se è $(x < x_1) \vee (\frac{\pi}{2} < x < x_2)$,

con $x_1 = \arcsin\sqrt{1/6}$ e $x_2 = \pi - x_1$.
x_1 e x_2 sono punto di massimo relativo; $x_3 = \pi/2$ è punto di minimo relativo;
$\min f = f(\pi/2) = -1$; $\max f = f(3\pi/2) = 1$.

A questo punto è facile disegnare il grafico della funzione.



11) Studio della funzione $f(x) = \frac{1}{5}(2 - x^2)e^{1+x}$.

– *Dominio e segni*: $E = \mathbb{R}$; $f(x) > 0$ se e solo se è $|x| < \sqrt{2}$; $f(0) = (2/5)e$.

– *Limiti*: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

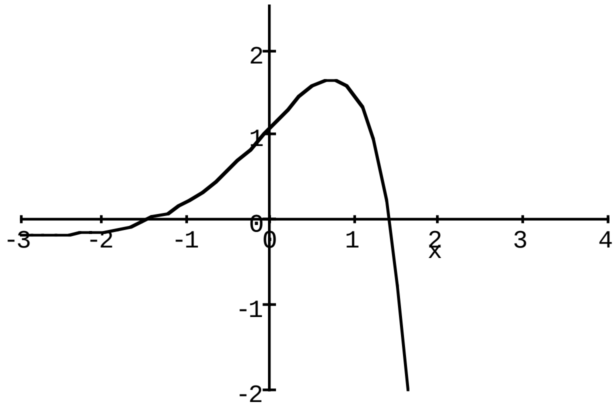
– *Derivata prima*: $f'(x) = -(1/5)(x^2 + 2x - 2)e^{1+x}$.

– *Segno di f' ed estremi di f*: $f'(x) > 0$ se e solo se è $-1 - \sqrt{3} < x < -1 + \sqrt{3}$).

$x_1 = -1 - \sqrt{3}$ punto di minimo relativo; $x_2 = -1 + \sqrt{3}$ punto di massimo relativo;
$\inf f = -\infty$; $\max f = f(x_2)$.

– *Limiti di* $f'(x)$: $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0$; $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$.

A questo punto è facile disegnare il grafico della funzione



Asintoti

Abbiamo detto a suo tempo che la funzione seno iperbolico ha un comportamento asintotico con la funzione $\frac{1}{2}e^x$, per $x \to +\infty$, dato che è $\lim_{x\to+\infty} (\mathrm{Sh}x - \frac{1}{2}e^x) = 0$; lo stesso per la funzione Chx. In generale, si dà la seguente

DEFINIZIONE. Date due funzioni continue f,g: $I = [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ [oppure $I =]-\infty,, a]$] sono *asintotiche* per $x \to +\infty$ [per $x \to -\infty$] se è

(*) $$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = 0; \quad [\lim_{x\to-\infty} (f(x) - g(x)) = 0].$$

In particolare, se è $g(x) = mx + q$, si dice che la retta $y = mx + q$ è un *asintoto* per la f.

TEOREMA 12. *Sia f: $I = [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $g(x) = mx + q$. La g è asintoto per la f se e solo se sono soddisfatte le due condizioni:*

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$; 2) $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = q$.

DIM. Si ha ovviamente $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx - q) = 0$ se e solo se è $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = q$. Ciò prova, in particolare, il "*se*". Per provare il "*solo se*", basta mostrare che dalla (*) segue la (1). Scritta la (*) nella forma $\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x}\right) = 0$, si ottiene che deve essere $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$, dato che è $\frac{q}{x} \to 0$. ∎

ESEMPI. 12) Consideriamo la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 + x$. Si ha $\frac{f(x)}{x} \to \infty$; non esiste asintoto.

13) Consideriamo la funzione f: $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + \log x$. Si ha $\frac{f(x)}{x} \to 1$ e $f(x) - x \to +\infty$: non esiste asintoto.

14) Consideriamo la funzione f: $[0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log(e^x + x)$. Essendo $f(x) = x + \log(1 + xe^{-x})$, si ha immediatamente che la funzione $g(x) = x$ è asintoto per $x \to +\infty$.

15) Consideriamo la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$. Si ha subito $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = 0$: la funzione $g(x) = x$ è asintoto per $x \to \infty$.

16) Consideriamo la funzione f: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + \frac{\sin x^2}{x}$. Si ha immediatamente $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = 0$: la funzione $g(x) = x$ è asintoto per $x \to \infty$.

Si noti che per le funzioni degli Esempi 14 e 15, si ha $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, mentre per la funzione dell'Esempio 16, che pure ammette asintoto, non esiste il $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$. La cosa verrà chiarita nel prossimo paragrafo.

§ 7.- FUNZIONI DERIVABILI SU UN INTERVALLO

TEOREMA 13. *(di Rolle) - Siano dati un intervallo $I = [a, b]$ e una funzione f: $I \to \mathbb{R}$. Se la f è derivabile in $]a, b[$, continua anche in a e b e se è $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $\xi \in \,]a, b[$ tale che $f'(\xi) = 0$.*

DIM. Se la f è costante, si ha $f'(x) = 0$ per ogni $x \in \,]a, b[$. Supponiamo dunque la f non costante. Essendo la f continua in $[a, b]$ che è un insieme chiuso e limitato, possiamo applicare il Teorema di Weierstrass. La f assume dunque un valore minimo m ed uno massimo M. Essendo inoltre $m < M$, dato che la f non è costante, al più uno di questi due valori può coincidere con $f(a) = f(b)$. Ne viene che o il minimo m o il massimo M deve essere assunto in un punto ξ interno ad I. Per il Teorema di Fermat, si ha $f'(\xi) = 0$. ∎

È importante rendersi conto che tutte le ipotesi fatte sono essenziali per la validità del teorema. Constatiamolo mediante esempi.

ESEMPI. 1) Sia f: $E = [0, \pi] \setminus \{\pi|2\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \mathrm{tg}x$. La f è derivabile in E, si ha $f(0) = f(\pi) = 0$, ma E non è un intervallo. La derivata non si annulla mai.

2) Sia f: $I = [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|$. La f è definita e continua su un intervallo, si ha $f(-1) = f(1) = 1$, ma la f non è derivabile in tutti i punti di $]-1, 1[$. La derivata non si annulla mai.

3) Sia f: $I = [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x - [x]$. (Si ha cioè $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se è } 0 \leq x < 1 \\ 0, \text{ se è } x = 1 \end{cases}$.) La f è definita su un intervallo, derivabile nei punti interni e si ha $f(0) = f(1) = 0$, ma la f non è continua in 1. La derivata non si annulla mai.

4) Sia f: $I = [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$. La f è definita e derivabile su un intervallo, ma si ha $f(0) \neq f(1)$. La derivata non si annulla mai.

5) Ciò non significa che se una funzione derivabile non soddisfa a tutte le ipotesi del Teorema di Rolle debbea avere la derivata sempre diversa da 0. Basta cosiderare la funzione f : $[0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(0) = 0$ e $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ per $x \neq 0$.

TEOREMA 8. *(di Cauchy) - Siano dati un intervallo $I = [a, b]$ e due funzioni f,g di I in $\mathbb{R}$. Se f e g sono derivabili in $]a, b[$ e continue anche in a e b, allora esiste almeno un punto $\xi \in \,]a, b[$ tale che*

$$(*) \qquad [f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi).$$

Se poi è $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \,]a, b[$, la (*) può essere scritta nella forma

$$(**) \qquad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

DIM. Consideriamo la funzione $\varphi: I \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x).$$

La φ è continua in I, dato che è combinazione lineare di funzioni continue in I ed è derivabile in $]a, b[$ perché combinazione lineare di funzioni derivabili in $]a, b[$. Inoltre si ha

$$\varphi(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = \varphi(b).$$

La φ soddisfa dunque a tutte le ipotesi del Teorema di Rolle. Esiste perciò almeno un punto $\xi \in \,]a, b[$ tale che $\varphi'(\xi) = [f(b) - f(a)]g'(\xi) - [g(b) - g(a)]f'(\xi) = 0$.

Supponiamo ora che sia $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \,]a, b[$. Deve essere anche $g(b) \neq g(a)$, dato che, in caso contrario, la g soddisferebbe a tutte le ipotesi del Teorema di Rolle e la sua derivata dovrebbe annullarsi in almeno un punto interno ad I, contro l'ipotesi. A questo punto, per avere la (**) basta dividere ambo i membri della (*) per $[g(b) - g(a)]g'(\xi)$ $(\neq 0)$. ∎

Un caso particolare molto importante del Teorema di Cauchy si ottiene ponendo $g(x) = x$.

TEOREMA 15. *(di Lagrange) - Siano dati un intervallo $I = [a, b]$ e una funzione f di I in $\mathbb{R}$. Se la f è derivabile in $]a, b[$ e continua anche in a e b, allora esiste almeno un punto $\xi \in \,]a, b[$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \ ∎$$

Da un punto di vista geometrico, il Teorema di Lagrange dice che data una funzione f continua in un intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile nei punti interni, esiste almeno un punto interno ad I in cui la retta tangente è parallela alla secante per $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$.

ESEMPIO. 6) Sia data la funzione f: $i = [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{se è } -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 + ax + b, & \text{se è } 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

Si chiede di determinare i parametri reali a e b in modo che alla f sia applicabile il Teorema di Lagrange e di determinare i punti di Lagrange.

Affinché la f sia continua anche nel punto 0 deve essere

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x) = b.$$

È dunque $\boxed{b = 1.}$ Si ha poi

$$f'(x) = \begin{cases} e^x, & \text{se è } -1 \le x < 0 \\ 2x + a, & \text{se è } 0 < x \le 1 \end{cases}.$$

E inoltre $f'(0^-) = 1$: $f'(0^+) = a$.

La f è derivabile in 0 se e solo se è $\boxed{a = 1}$.
Applicando il Teorema di Lagrange, si ha

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{e - 1}{2} = f'(\xi).$$

Cerchiamo intanto gli $\xi \in]-1, 0]$. Si ha $e^\xi = \frac{e-1}{2} \in]0, 1[$, da cui $\xi = \log\frac{e-1}{2} \in]-1, 0]$.

Cerchiamo poi gli $\xi \in [0, 1[$. Si ha $\frac{e-1}{2} = 2\xi + 1$, da cui $\xi = \frac{e-3}{4} \notin [0, 1[$.

C'è dunque un unico punto di Lagrange: $\xi = \log\frac{e-1}{2}$.

Formula del valor medio. Siano f una funzione derivabile in un intervallo I ed x_0 un punto di I. Per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$ sussiste la seguente *formula dal valor medio*, che si ricava immediatamente dell'uguaglianza espressa dal Teorema di Lagrange:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(\xi), \text{ con } \xi \text{ compreso tra } x \text{ e } x_0.}$$

ESEMPIO. 7) Si voglia dare un valore approssimato del numero $\log 3$. Sappiamo che è $\log e = 1$. Dalla formula del valor medio si ottiene

$$\log 3 = \log e + (3 - e)\frac{1}{\xi}.$$

Essendo $e < \xi < 3$, si ottiene

$$1 + \frac{3-e}{3} < \log 3 < 1 + \frac{3-e}{e},$$

da cui, essendo $2{,}718 < e < 2{,}719$,

$$1{,}093 < 2 - \frac{2{,}719}{3} < 1 + \frac{3-e}{3} < \log 3 < 1 + \frac{3-e}{e} < \frac{3}{2{,}718} < 1{,}104.$$

(In realtà è $\log 3 = 1{,}0986\ldots$)

Vediamo ora alcune importanti conseguenze del Teorema di Lagrange.

COROLLARIO 16. 1) *Siano dati un intervallo I e una funzione f di I in $\mathbb{R}$. Se la f è derivabile in I ed è $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$, allora la f è costante in I.*

2) *Siano dati un intervallo I e due funzioni f e g di I in $\mathbb{R}$. Se f e g sono derivabili in I ed è $f'(x) = g'(x)$ per ogni $x \in I$, allora esiste una costante reale c tale che, per ogni $x \in I$, si ha $f(x) = g(x) + c$.*

3) *Siano dati un intervallo I e una funzione f di I in $\mathbb{R}$. Se la f è derivabile in I, ed è $f'(x) > 0$ [< 0] per ogni x interno ad I, allora la f è monotona crescente* [*decrescente*] *in I.*

DIM. 1) Fissiamo un punto $x_0 \in I$. Per ogni $x \in I$, si ha, per il Teorema di Lagrange,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi) = 0,$$

da cui $f(x) = f(x_0)$.

2) Consideriamo la funzione h: $I \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = f(x) - g(x)$. Si ha $h'(x) = 0$ per ogni $x \in I$. Per la (1), esiste una costante reale c tale da aversi $h(x) = c$ per ogni $x \in I$.

3) Quali che siano $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, esiste, per il Teorema di Lagrange, un punto ξ, con $x_1 < \xi < x_2$, tale che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) > 0,$$

da cui $f(x_1) < f(x_2)$. ∎

Se il dominio non è un intervallo, le precedenti affermazioni possono risultare false.

ESEMPI. 8) La funzione f: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ha la derivata identicamente nulla, ma non è costante.

9) Le funzioni f,g: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definite da $f(x) = \log(|x|)$ e $g(x) = \log(|x|) + \frac{|x|}{x}$ hanno la medesima derivata, ma non differiscono per una costante.

10) La funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ ha la derivata positiva in ogni punto del suo dominio, ma non è ivi crescente.

TEOREMA 17. *(*1° *Teorema di de l'Hospital) - Siano dati un punto* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$, *un intorno (anche solo destro o solo sinistro) U di* α *e due funzioni f,g*: $U \setminus \{\alpha\} \to \mathbb{R}$. *Si supponga inoltre che f e g siano infinitesime per x che tende ad* α, *derivabili, con* $g'(x) \neq 0$ *per ogni x, ed esista il* $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, *allora esiste ed è uguale a* β *anche il* $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$.

DIM. Limitiamoci al caso $\alpha = x_0 \in \mathbb{R}$. È lecito supporre che U sia un intervallo. Prolunghiamo per continuità le due funzioni in x_0, ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Per ogni $x \in U \setminus \{x_0\}$, le restrizioni della f e della g all'intervallo di estremi x e x_0 soddisfano a tutte le ipotesi del Teorema di Cauchy. Per ogni siffatto x, sia $\xi(x)$ uno dei punti di Cauchy. Si ha dunque

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} .$$

Al tendere di x a x_0, anche $\xi(x)$ tende a x_0 ed è sempre $\xi(x) \neq x_0$. Per il Teorema sul limite delle funzioni composte, si ha dunque $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \beta$. È dunque anche $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$. ∎

Sussiste anche il seguente risultato del quale omettiamo la dimostrazione.

TEOREMA 18. *(*2° *Teorema di de l'Hospital) - Siano dati un punto* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$, *un intorno (anche solo destro o solo sinistro) U di* α *e due funzioni f,g*: $U \setminus \{\alpha\} \to \mathbb{R}$. *Si supponga inoltre che f e g siano infinite per x che tende ad* α, *derivabili, con* $g'(x) \neq 0$ *per ogni x, ed esista il* $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, *allora esiste ed è uguale a* β *anche il* $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$. ∎

Il primo Teorema di de l'Hospital sarà indicato come *caso* 0/0, il secondo come *caso* ∞/∞.

I Teoremi di de l'Hospital forniscono delle condizioni *sufficienti* per l'esistenza del limite del rapporto di due funzioni entrambe infinitesime o entrambe infinite. Tale condizione non è però necessaria. Può cioè accadere che esista il limite di f/g ma non quello di f'/g'. Per esprimere questo fatto, scriveremo

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} \Leftarrow \lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

ESEMPIO. 11) Si ha immediatamente $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\cos x} = 1$. Per contro, non esiste il limite del rapporto delle derivate $\frac{1+\cos x}{1+\sin x}$.

Può anche accadere che esistano sia il limite di f/g sia quello di f'/g', ma che ciò non ci aiuti affatto. In effetti, a priori, non è per nulla chiaro perché debba essere più facile ricercare il limite di f'/g' piuttosto che quello di f/g; torneremo su questo problema tra poco.

ESEMPIO. 12) Si voglia ricercare il $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. Applicando l'Hospital, si passa dal problema dato a quello di ricercare il $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, che è perfettamente equivalente a quello di partenza. Per contro si ha immediatamente

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+1/x^2}}{x} = 1.$$

Assodato che i Teoremi di de l'Hospital non forniscono la bacchetta magica per risolvere tutti i problemi sulla ricerca dei limiti, vediamo alcuni esempi sul loro utilizzo.

ESEMPI. 13) Si ha $\quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} \Leftarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}.$

14) Si ha:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{1-\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^2(1-\cos x)} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^4} \Leftarrow 2\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-2x}{4x^3} = -\frac{1}{6}.$$

15) Ma si ha: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1-\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{x^2}{1-\cos x}\right) = -1\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = -\infty.$

16) Si ha:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x^2}\log\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}.$$

Infatti si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\log\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\log\sin x-\log x}{x^2} \Leftarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3} \Leftarrow -\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{6x^2} = -\frac{1}{6}.$$

17) Si ha: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - x^2} + \sqrt[4]{x^4 - x^3}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x\sqrt[3]{1 - 1/x} - x\sqrt[4]{1 - 1/x}\right) =$

$$= \lim_{t \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{1 - t} - \sqrt[4]{1 - t}}{t} \Leftarrow \lim_{t \to 0^-} \left(\frac{-1}{3\sqrt[3]{(1 - t)^2}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{(1 - t)^3}}\right) = -\frac{1}{12}.$$

Perché funziona la regola di de l'Hospital? Ricordando che è $D(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha - 1}$, si intuisce che

La derivazione abbassa di una unità gli ordini di infinitesimo per x che tende a x_0 e gli ordini di infinito per x che tende a infinito, mentre innalza di una unità gli ordini di infinito per x che tende a x_0 e gli ordini di infinitesimo per x che tende a infinito.

Constatiamo questo fatto nel caso molto particolare che sia f: $U \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ infinitesima per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$, derivabile ed esista il $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{(x - x_0)^n} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. È dunque $\mathrm{ord}_{x_0} f' = n$. Si ha:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} \Leftarrow \frac{1}{n+1} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{l}{n+1}.$$

Ciò prova che è $\mathrm{ord}_{x_0} f = n + 1$.

Da questo fatto si ricava che in generale, a parità di altre condizioni, l'Hospital funziona meglio nel caso 0/0 per $x \to x_0$ e nel caso ∞/∞ per $x \to \infty$.

Ritorniamo brevemente a quanto osservato alla fine del § 6. Sia f: $I = [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e infinita per $x \to +\infty$. Volendo ricercare se la f ammette asintoto per $x \to +\infty$, si comincia con l'indagare se esiste il $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Ora, applicando l'Hospital, si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \Leftarrow \lim_{x \to +\infty} f'(x).$$

Ciò spiega perché, per determinare il valore del coefficiente m si può ricercare il limite di $f'(x)$ anziché quello di $\dfrac{f(x)}{x}$. L'Esempio 16 del § 6 mostra che però può esistere asintoto senza che esista il limite della derivata.

Chiudiamo il paragrafo con un'interessante conseguenza del Teorema di de l'Hospital

TEOREMA 19. *(Teorema sul limite della derivata) - Siano dati un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, un intorno (anche solo destro o solo sinistro) U di x_0 e una funzione f: $U \to \mathbb{R}$. Si supponga inoltre che f sia derivabile in $U \setminus \{x_0\}$, continua anche in x_0 ed esista il $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \beta$. Allora esiste anche la derivata della f in x_0 e si ha $f'(x_0) = \beta$.*

DIM. Si ha $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftarrow \lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \beta$. ∎

ESEMPIO. 18) Si consideri la funzione f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^x$. Si può prolungare la f per continuità anche in 0, ponendo $f(0) = 1 = \lim\limits_{x \to 0} x^x$. Per $x > 0$, si ha $f'(x) = x^x(\log x - 1)$. Essendo $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\infty$, si conclude che è anche $f'(0) = -\infty$.

Si tenga ben presente che, senza l'ipotesi della continuità della f in x_0, la tesi del teorema può cadere in difetto.

ESEMPIO. 19) Si consideri la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{se è } x \neq 0 \\ 0, & \text{se è } x = 0 \end{cases}$.

La f non è continua in 0. Ora si ha $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$, mentre risulta $f'(0) = +\infty$.

§ 8. LA FORMULA DI TAYLOR

Il problema che affronteremo in questo paragrafo è quello dell'approssimazione di funzioni mediante polinomi. In realtà ci sono almeno due problemi diversi che si presentano al riguardo:

– *Approssimazione globale*. Data una funzione f: $I = [a, b] \to \mathbb{R}$, si cerca in una determinata classe di funzioni '*semplici*', per esempio quella dei polinomi, una funzione φ che in alcuni punti di I abbia gli stessi valori della f e in modo che sia soddisfatta una maggiorazione, fissata a priori, dell'errore commesso; si chiede cioè che, per ogni $x \in I$, $|f(x) - \varphi(x)|$ risulti minore di un prefissato $\sigma > 0$.

– *Approssimazione locale*. Dati un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, un intorno (anche solo destro o solo sinistro) U di x_0 e una funzione f: $U \to \mathbb{R}$, si cerca in una determinata classe di funzioni '*semplici*', che per noi sarà quella dei polinomi, una funzione φ tale che la differenza $|f(x) - \varphi(x)|$ sia, per $x \to x_0$ infinitesima di ordine maggiore di un prefissato n.

Noi ci occuperemo esclusivamente di quest'ultimo problema.

Cominciamo con lo stabilire due importanti risultati preliminari.

TEOREMA 20. *(Lemma di Peano) - Siano dati un intervallo I, un punto $x_0 \in I$ e una funzione f: $I \to \mathbb{R}$, infinitesima per $x \to x_0$, n volte derivabile in I, con*

$$f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

DIM. Sia $g(x) = (x - x_0)^n$. La funzione g è di classe C^∞ e si ha

$$g^{(k)}(x) = (n)_k (x - x_0)^{n-k}, \qquad \text{per } k = 1, 2, \ldots, n.$$

È dunque

$$g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \ldots = g^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Le coppie di funzioni $(f(x), g(x))$, $(f'(x), g'(x))$, …, $(f^{(n-1)}(x), g^{(n-1)}(x))$ soddisfano alle ipotesi del Teorema di Cauchy. Esistono dunque $n - 1$ punti $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, tali che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{f'(\xi_1) - f'(x_0)}{g'(\xi_1) - g'(x_0)} =$$

$$= \frac{f''(\xi_2)}{g''(\xi_2)} = \dots = \frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{g^{(n-1)}(\xi_{n-1})} = \frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0)}.$$

Essendo ξ_{n-1} compreso fra x e x_0, si ha che, al tendere di x a x_0, anche ξ_{n-1} tende a x_0 ed è, per il Teorema di Cauchy, sempre diverso da x_0. L'ultimo membro delle uguaglianze sopra scritte non è altro che il rapporto incrementale della funzione $f^{(n-1)}(x)$ diviso per n! e, pertanto, tende a $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. ∎

Il risultato di questo Teorema si può anche esprimere con l'uguaglianza

$$\boxed{\frac{f(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \beta(x), \quad \text{con} \lim_{x \to x_0} \beta(x) = 0.}$$

Dal Lemma di Peano segue subito il seguente risultato utile per la determinazione degli ordini di infinitesimo:

COROLLARIO 21. *Siano dati un intervallo I, un punto* $x_0 \in I$ *e una funzione* f: $I \to \mathbb{R}$, *infinitesima per* $x \to x_0$, *n volte derivabile in I. Allora si ha* $\mathrm{ord}_{x_0} f = n$ *se e solo se è*

$$f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad .f^{(n)}(x_0) \neq 0. \ ∎$$

ESEMPIO. 1) La funzione $f(x) = x - \sin(e^x - 1)$ è infinitesima per $x \to 0$. Si constata facilmente che è

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1,$$

si conclude che è $\mathrm{ord}0_0 f(x) = 2$.

TEOREMA 22. *(Lemma di Lagrange) - Siano dati un intervallo I, un punto* $x_0 \in I$ *e una funzione* f: $I \to \mathbb{R}$, *infinitesima per* $x \to x_0$, *n volte derivabile in I, con*

$$f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

allora esiste un punto ξ *compreso fra* x *e* x_0 *tale che*

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

DIM. Procedendo come si è fatto per provare il Lemma di Peano, si ottiene:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \dots = \frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{g^{(n-1)}(\xi_{n-1})} = \frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0) - 0} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}. \ ∎$$

DEFINIZIONE. Siano dati un intervallo I, una funzione f: $I \to \mathbb{R}$ e un punto x_0 interno ad I. Si definisce *polinomio approssimante n - imo della f relativamente ad* x_0 un polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ che soddisfi alle due seguenti condizioni:

1) $P_n(x_0) = f(x_0)$;

2) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.

Per $n = 1$, si ha l'approssimante lineare studiato nel § 5. Stabiliamo ora un fondamentale risultato che dà una condizione sufficiente per l'esistenza del polinomio approssimante n - imo.

TEOREMA 23. *(di Taylor) - Siano dati un intervallo I, un punto x_0 interno ad I e una funzione f: $I \to \mathbb{R}$, n volte derivabile in I, Allora esiste ed è unico il polinomio approssimante n - imo $P_n(x)$ relativo al punto x_0.*

DIM. Supponiamo intanto che esista un polinomio P_n soddisfacente alle condizioni (1) e (2), definito da

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

Sia poi φ: $I \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $\varphi(x) = f(x) - P_n(x)$. Dovendo essere, per la (2), $\mathrm{ord}_{x_0}\varphi > n$, si ottiene dal Corollario 21 che deve essere

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = \dots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0,$$

da cui si ricava

$$f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0) = a_k\, k!, \quad \text{con } k = 0, 1, \dots, n.$$

Dunque, se un siffatto polinomio P_n esiste, esso è unico ed è definito da

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Resta solo da provare che questo polinomio soddisfa alle condizioni (1) e (2) ed ha quindi diritto di essere chiamato polinomio approssimante n - imo. La (1) è immediata e così la (2), dato che la funzione $\varphi = f - P_n$ si annulla in x_0 assieme alle sue prime n derivate ed è quindi infinitesima in x_0 di ordine maggiore di n. ∎

Si noti che il Teorema di Taylor fornisce, nel caso $n > 1$, solo una condizione sufficiente per l'esistenza del polinomio approssimante n - imo, come ora vedremo.

ESEMPI. 2) Si consideri la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se è } x \in \mathbb{Q} \\ -x^3, & \text{se è } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Si vede subito che, relativamente al punto $x_0 = 0$, esiste il polinomio P_2 e che questo è il polinomio nullo. È poi immediato che non può esistere in 0 la derivata seconda.

3) Qual è la parabola che meglio approssima la funzione esponenziale in un intorno del punto 1? Essa è espressa dal polinomio P_2 definito da $P_2(x) = e + e(x - 1) + \frac{e}{2}(x - 1)^2$.

Sostituendo $f(x)$ con $P_n(x)$, si commette un errore espresso da una funzione *resto* infinitesima di ordine maggiore di n per $x \to x_0$. Come si può valutare questo errore? Risolviamo il problema sotto l'ipotesi ulteriore che la f sia $n + 1$ volte derivabile in I.

TEOREMA 24. *(Formula di Taylor - Lagrange) - Siano dati un intervallo I, un punto x_0 interno ad I e una funzione f: $I \to \mathbb{R}$ $n + 1$ volte derivabile in I, allora esiste un punto ξ compreso fra x e x_0 tale che*

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

DIM. La funzione $\varphi = f - P_n$ è $n + 1$ volte derivabile in I e soddisfa alle ipotesi del Lemma di Lafrange. Applicando questo teorema, si ottiene:

$$\frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

dato che è $P_n^{(n+1)}(\xi) = 0$. Basta poi ricavare $f(x)$. ▮

Indicheremo con $T_{n+1}(x)$ il *resto* $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, (detto *resto di Lagrange*) che è un infinitesimo di ordine $\geq n + 1$ per $x \to x_0$.

A questo punto è facile scrivere le formule di Taylor - Lagrange per alcune funzioni elementari con punto iniziale $x_0 = 0$.

$f(x)$	$P_n(x)$	$\lvert T_{n+1}(x)\rvert$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$	$\frac{\lvert x\rvert^{2m+1}}{(2m+1)!}\lvert\cos\xi\rvert$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}$	$\frac{\lvert x\rvert^{2m+2}}{(2m+2)!}\lvert\cos\xi\rvert$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$	$\frac{\lvert x\rvert^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$
$\mathrm{Sh}x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$	$\frac{\lvert x\rvert^{2m+1}}{(2m+1)!}\mathrm{Ch}\xi$
$\mathrm{Ch}x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2m}}{(2m)!}$	$\frac{\lvert x\rvert^{2m+2}}{(2m+2)!}\mathrm{Ch}\xi$
$\log(1 + x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$	$\frac{\lvert x\rvert^{n+1}}{(n+1)}\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}$
$(1 + x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n$	$\binom{\alpha}{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}\lvert x\rvert^{n+1}$

Vediamo adesso di calcolare il polinomio P_{2n+1} della funzione $f(x) = \mathrm{arctg}x$.

È $f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$. Ora si ha

$$\frac{(1 - x^{2n+2}) + x^{2n+2}}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2}, \quad \text{con } \mathrm{ord}_0\frac{x^{2n+2}}{1 + x^2} = 2n + 2.$$

È ora immediato osservare che una funzione che ha $Q_{2n}(x)$ come derivata è data da

$$P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Proviamo che quello ora trovato è effettivamente il polinomio approssimante di grado $2n + 1$. Infatti, posto

$$\beta(x) = \operatorname{arctg} x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right),$$

si ha

$$|\beta'(x)| = \left| \frac{1}{1+x^2} - (1 - x^2 + x^3 + \ldots + (-1)^n x^{2n}) \right| = \frac{x^{2n+2}}{1+\xi^2},$$

che è un infinitesimo di ordine $2n + 2 > 2n$, da cui ord $\beta(x) > 2n + 1$. Si ha dunque

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + T_{2n+3}.}$$

Con ragionamenti simili si trova la formula di Taylor dell'arcoseno. (Si parte dal fatto che la derivata dell'arcoseno è $(1 - x^2)^{-1/2}$. Risulta

$$\boxed{\arcsin x = x + \frac{1x^3}{2\,3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + T_{2n+3}.}$$

Vediamo ora, con qualche esempio come si possano utilizzare queste formule. Ricordiamo, intanto, che l'espressione "*n cifre decimali esatte*" significa che l'errore commesso è minore di $5 \cdot 10^{-(n+1)}$.

ESEMPI. 4) Se per calcolare $\sin\frac{1}{10}$ utilizziamo $P_5 = P_6$, che errore commettiamo? Si ha:

$$\left|T_7\left(\frac{1}{10}\right)\right| = \frac{(1/10)^7}{7!} \cos\xi < \frac{1}{5040 \cdot 10^7} < \frac{1}{5 \cdot 10^{10}} = 2 \cdot 10^{-11}.$$

Posto

$$\sin\frac{1}{10} \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} + \frac{1}{12.000.000} \approx$$

$$\approx 0{,}1 - 0{,}000.166.666.67 + 0{,}000.000.083.33 = 0{,}099.833.416.67,$$

si hanno dunque almeno 10 cifre decimali esatte.

5) Calcolare $\sqrt[10]{e}$ con almeno 6 cifre decimali esatte. Essendo

$$\left|T_{n+1}\left(\frac{1}{10}\right)\right| = \frac{(1/10)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi} < \frac{(1/10)^{n+1}}{(n+1)!} e < \frac{(1/10)^{n+1}}{(n+1)!} 3,$$

basta cercare un n per cui sia $\frac{(1/10)^{n+1}}{(n+1)!} 3 < 5 \cdot 10^{-7}$. Ciò equivale a $3 \cdot 10^7 < 5(n+1)! \cdot 10^{n+1}$. Si vede facilmente che basta prendere $n = 4$. (Abbiamo maggiorato e^{ξ} con 3; in realtà avremmo potuto maggiorare e^{ξ} con 1,2). Dunque le prime 6 cifre decimali esatte di $\sqrt[10]{e}$ sono date da

$$P_4\left(\frac{1}{10}\right) = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} + \frac{1}{240.000} \approx$$

$$\approx 1 + 0{,}1 + 0{,}005 + 0{,}00.166.7 + 0{,}000.004.2 \approx 1{,}105.171.$$

6) Si vuole approssimare $\log(1 + x)$ con $P_5(x)$ in modo da commettere un errore inferiore a 0,003 per $|x| < h$. Qual è un possibile valore di h? Vogliamo dunque che, per ogni x, con $|x| < h$, risulti $|T_6(x)| < 0{,}003$. Deve naturalmente essere $h < 1$. Si ha

$$|T_6(x)| < \frac{h^6}{6(1 + \xi)^6} < \frac{h^6}{6(1 - h)^6}.$$

Affinché risulti $|T_6(x)| < 0{,}003$, basta che sia $\frac{h}{1 - h} < \sqrt[6]{0{,}018} = 0{,}511931\ldots$ È dunque sufficiente che sia $\frac{h}{1 - h} < 0{,}52$. L'ultima disuguaglianza equivale alla $h < \frac{0{,}52}{1{,}52} = 0{,}34210\ldots$ In conclusione, basta prendere, per esempio, un $h \leq 0{,}34$.

Si vede dagli esempi che il problema da risolvere è espresso dalle disequazioni

$$(|T_{n+1}(x)| < \varepsilon) \wedge (|x| < h).$$

In questo sistema ci sono, in sostanza, 3 quantità: l'errore ε, il numero n e il raggio h. Se ne fissano 2 e si cerca di valutare il terzo.

TEOREMA 25. *(Formula di Taylor - Peano) - Siano dati un intervallo I, un punto* x_0 *interno ad I e una funzione* $f: I \to \mathbb{R}$ $n + 1$ *volte derivabile in I, allora si ha*

$$f(x) = P_n(x) + \left[\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} + \beta(x)\right](x - x_0)^{n+1},$$

con $\beta(x) \to 0$ *per* $x \to x_0$.

DIM. Per ipotesi, esiste anche P_{n+1}. Si può pertanto scrivere

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \alpha(x),$$

con $\alpha(x)$ infinitesimo di ordine maggiore di $n + 1$. È dunque $\alpha(x) = \beta(x)(x - x_0)^{n+1}$, con $\beta(x) \to 0$ per $x \to x_0$. In conclusione, si ottiene:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \beta(x)(x - x_0)^{n+1} =$$

$$= P_n(x) + \left[\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} + \beta(x)\right](x - x_0)^{n+1}. \blacksquare$$

Come vedremo nel prossimo paragrafo, questa formula serve essenzialmente per studiare il segno della funzione resto (detto *resto di Peano*)

$$f(x) - P_n(x) = \left[\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} + \beta(x)\right](x - x_0)^{n+1} = \varphi(x)(x - x_0)^{n+1}.$$

Tutto si riduce a studiare il segno di $\varphi(x)$, dato che quello dell'altro fattore non ha certo bisogno di molti commenti.

§ 9. CONCAVITÀ, CONVESSITÀ, FLESSI

Ricordiamo che un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ è detto *convesso* se ogni volta che contiene due punti contiene anche tutto il segmento che li unisce.

Consideriamo le due funzioni di $\mathbb{R}^+$ in $\mathbb{R}$ definite da $f(x) = x + \frac{1}{x}$ e $g(x) = x - \frac{1}{x}$. Tutte due le funzioni tendono a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e tutte due ammettono la retta di equazione $y = x$ come asintoto. La f ha la concavità verso l'alto; risulta cioè convesso l'insieme (*sopragrafico*) $\{(x, y): x \in \mathbb{R}^+, y \geq f(x)\}$. Invece, la g ha la concavità verso il basso; risulta cioè convesso l'insieme (*sottografico*) $\{(x, y): x \in \mathbb{R}^+, y \leq f(x)\}$.

Ora, data una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ definita e continua su un intervallo I, si ha che l'insieme $\{(x, y): x \in I, y \geq f(x)\}$ [l'insieme $\{(x, y): x \in I, y \leq f(x)\}$] è convesso se e solo se, dati comunque tre punti $x_1 < x < x_2$ ($\in I$), si ha che il valore $f(x)$ è minore [maggiore] o uguale al valore della funzione lineare interpolatrice tra $P_1(x_1, f(x_1))$ e $P_2(x_2, f(x_2))$.

DEFINIZIONE. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo I.
Diremo che la f è *convessa* in I se, quali che siano i punti $x_1 < x < x_2$ ($\in I$), si ha:

$$f(x) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Diremo che la f è *concava* in I se, quali che siano i punti $x_1 < x < x_2$ ($\in I$), si ha:

$$f(x) > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

TEOREMA 26. *Siano dati un intervallo I e una funzione f: $I \to \mathbb{R}$ due volte derivabile in I. Se è $f''(x) > 0$ [< 0] per ogni x interno ad I, allora la f è convessa* [*concava*] *in I.*

DIM. Sia $f''(x) > 0$ per ogni x interno ad I e fissiamo tre punti $x_1 < x < x_2$ ($\in I$). Dobbiamo provare che è $f(x) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$, ossia che è

$$(f(x) - f(x_1))(x_2 - x_1) - (f(x_2) - f(x_1))(x - x_1) < 0.$$

Ora, con successive applicazione del Teorema di Lagrange, si ha:

$$\begin{gathered}
(f(x) - f(x_1))(x_2 - x_1) - (f(x_2) - f(x_1))(x - x_1) = \\
= (f(x) - f(x_1))(x_2 - x + x - x_1) - (f(x_2) - f(x) + f(x) - f(x_1))(x - x_1) = \\
= (f(x) - f(x_1))(x_2 - x) + (f(x) - f(x_1))(x - x_1) - (f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x - x_1) = \\
= (f(x) - f(x_1))(x_2 - x) - (f(x_2) - f(x))(x - x_1) = \\
= f'(\xi_1)(x - x_1)(x_2 - x) - f'(\xi_2)(x_2 - x)(x - x_1) = (f'(\xi_1) - f'(\xi_2))(x - x_1)(x_2 - x) = \\
= f''(\xi)(\xi_1 - \xi_2)(x - x_1)(x_2 - x) < 0.
\end{gathered}$$

Infatti è $\xi_1 - \xi_2 < 0$, dato che è $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$ e, per ipotesi, è $f''(\xi) > 0$. ∎

ESEMPIO. 1) La funzione esponenziale è convessa, essendo $f''(x) = e^x > 0$ per ogni x.
La funzione di $\mathbb{R}^+$ in $\mathbb{R}$ definite da $f(x) = x + 1/x$ è convessa, dato che è $f''(x) = 2/x^3 > 0$.
La funzione di $\mathbb{R}^+$ in $\mathbb{R}$ definite da $g(x) = x - 1/x$ è concava, dato che è $f''(x) = - 2/x^3 < 0$.

Passiamo allo studio delle cosiddette *proprietà locali del secondo ordine* di una funzione.
L'idea è semplice. Le proprietà locali del primo ordine di una funzione f riguardavano il confronto dei valori della f con $f(x_0)$; ora, supposta la f derivabile in x_0, confronteremo $f(x)$ con il valore dell'approssimante lineare della f relativo ad x_0.

DEFINIZIONE. Sono dati un intervallo I, una funzione f: $I \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in I$.
Si dice che la f è *convessa* in x_0 se esiste l'approssimante lineare della f in x_0 ed *esiste un intorno U di* x_0 tale che da $x \in U \cap I \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
Si dice che la f è *concava* in x_0 se esiste l'approssimante lineare della f in x_0 ed *esiste un intorno U di* x_0 tale che da $x \in U \cap I \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) < f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
Si dice che un punto x_0 interno ad I è di *flesso ascendente* per la f se esiste l'approssimante lineare della f in x_0 ed *esiste un intorno U di* x_0 tale che per ogni $x \in U \cap I$ si ha che

$$x < x_0 \Rightarrow f(x) < f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \text{e} \quad x > x_0 \Rightarrow f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Si dice che un punto x_0 interno ad I è di *flesso discendente* per la f se esiste l'approssimante lineare della f in x_0 ed *esiste un intorno U di* x_0 tale che per ogni $x \in U \cap I$ si ha che

$$x < x_0 \Rightarrow f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \text{e} \quad x > x_0 \Rightarrow f(x) < f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

ESEMPIO. 2) La funzione esponenziale è convessa in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Dalla formula di Taylor si ha, infatti, $e^x = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0) + \frac{e^\xi}{2}(x - x_0)^2 > e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0)$.

3) Consideriamo la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 - x$. Nel punto -1 la funzione è concava; infatti si ha $f(x) < f'(-1)(x + 1) + f(-1)$ per ogni $x < 0$, con $x \neq -1$, come si constata facilmente con un sommario studio della funzione $x^3 - x - 2(x + 1)$. Si vede analogamente che in 1 la funzione è convessa. Si constata, infine, che lo 0 è punto di flesso ascendente per la f.

TEOREMA 27. *Siano dati un intervallo I, una funzione* f: $I \to \mathbb{R}$ *due volte derivabile in I e un punto* $x_0 \in I$.
1) *Se è* $f''(x_0) > 0$ *allora la f è convessa in* x_0.
2) *Se è* $f''(x_0) < 0$ *allora la f è concava in* x_0.
3) *Se* x_0 *è punto di flesso per la f, allora si ha* $f''(x_0) = 0$.

DIM. 1) Utilizziamo la formula di Taylor - Peano. Si ha

$$f(x) - \overline{f}(x) = \left[\frac{f''(x_0)}{2!} + \beta(x)\right](x - x_0)^2, \text{ con } \beta(x) \to 0 \text{ per } x \to x_0.$$

Essendo $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\frac{f''(x_0)}{2!} + \beta(x)\right] = \frac{f''(x_0)}{2!} > 0$, per il Teorema della permanenza del segno esiste un intorno U di x_0 in cui la funzione entro parentesi quadra è positiva. Per ogni $x \in U \setminus \{x_0\}$ è dunque $f(x) - \overline{f}(x) > 0$.
La (2) si prova in modo perfettamente analogo. La (3) è un'immediata conseguenza delle altre due, dato che in un punto di flesso la f non può essere né concava né convessa. ∎

L'esistenza della derivata seconda in x_0 non è condizione necessaria per la convessità o concavità di una funzione in x_0 né affinché x_0 sia di flesso.

ESEMPIO. 4) Sia f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione che vale x^2 se è $x \leq 0$ e x^3 se è $x > 0$. La f è convessa in 0, ma non esiste $f''(0)$. La funzione $-f$ è concava in 0 ma non ha ivi derivata seconda. La funzione g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che vale x^3 se è $x \leq 0$ e x^2 se è $x > 0$ ha in 0 un punto di flesso ma, ancora una volta, non esiste derivata seconda in 0.

Osserviamo che in un punto di massimo o minimo x_0 interno ad I in cui la f è derivabile, si ha $\overline{f}(x) = f(x_0)$. Ne consegue che la f è, rispettivamente, concava o convessa in x_0. Dunque:

COROLLARIO 28.-*Siano dati un intervallo I, una funzione* f: $I \to \mathbb{R}$ *due volte derivabile in I e un punto* x_0 *interno ad I.*
1) *Se è* $f'(x_0) = 0$ *e* $f''(x_0) > 0$ *allora* x_0 *è punto di minimo relativo per la f.*
2) *Se è* $f'(x_0) = 0$ *e* $f''(x_0) < 0$ *allora* x_0 *è punto di massimo relativo per la f.* ∎

Siano dati un intervallo I, una funzione f: $I \to \mathbb{R}$ derivabile in un punto x_0 interno ad I e sia $f'(x_0) = 0$. Mostriamo con esempi che da queste ipotesi nulla si può dedurre circa le proprietà della f in x_0.

ESEMPIO. 5) Sia f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Si ha $f'(0) = 0$. Il punto 0 è di minimo.

Sia f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -x^2$. Si ha $f'(0) = 0$. Il punto 0 è di massimo.

Sia f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$. Si ha $f'(0) = 0$. Il punto 0 è di flesso.

Sia f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{se è } x \neq 0 \\ 0, & \text{se è } x = 0 \end{cases}$. Si ha $f'(0) = 0$. Il punto 0 non è né di massimo, né di minimo, né di flesso.

Stabiliamo, in fine, due condizioni sufficienti affinché un punto sia di flesso.

TEOREMA 29. *Siano dati un intervallo I, una funzione* f: $I \to \mathbb{R}$ *due volte derivabile in I e un punto* x_0 *interno ad I, con* $f''(x_0) = 0$.

1) *Se esiste un intorno U di* x_0 *dove si ha* $f''(x) < 0$ *per* $x < x_0$, $f''(x) > 0$ *per* $x > x_0$, *allora* x_0 *è punto di flesso ascendente per la f.*

2) *Se esiste un intorno U di* x_0 *dove si ha* $f''(x) > 0$ *per* $x < x_0$, $f''(x) < 0$ *per* $x > x_0$, *allora* x_0 *è punto di flesso discendente per la f.*

DIM. 1) Usando la formula di Taylor - Lagrange; per $x \in U \cap I \setminus \{x_0\}$ si ha

$$f(x) - \overline{f}(x) = \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)^2.$$

Dunque $f(x) - \overline{f}(x)$ ha il segno di $f''(\xi)$ che è il segno di $x - x_0$.
La (2) si prova in modo analogo. ∎

TEOREMA 30. *Siano dati un intervallo I, una funzione* f: $I \to \mathbb{R}$ *due volte derivabile in I e un punto* x_0 *interno ad I con* $f''(x_0) = 0$. *Se esiste anche* $f'''(x_0)$ *ed è* $f'''(x_0) > 0$ [$f'''(x_0) < 0$], *allora* x_0 *è punto di flesso ascendente* [*discendente*] *per la f.*

DIM. Sia, per esempio, $f'''(x_0) > 0$. La derivata seconda esiste in un intorno U di x_0 ed è crescente in x_0. Essendo $f''(x_0) = 0$, la derivata seconda è negativa in un intorno sinistro e positiva in un intorno destro di x_0. Sono dunque soddisfatte le ipotesi del teorema precedente. ∎

Segnaliamo che alcuni risultati dei Teoremi precedenti possono essere generalizzati.

TEOREMA 31. *Siano dati un intervallo I e una funzione* f: $I \to \mathbb{R}$ *n volte derivabile in un punto* x_0 *interno ad I. Se è* $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, *allora:*
1) *se n è dispari,* x_0 *è punto di flesso per la f.*
2) *se n è pari,* x_0 *è punto di convessità se è* $f^{(n)}(x_0) > 0$, *di concavità se è* $f^{(n)}(x_0) < 0$. ∎

Possiamo ora affrontare gli studi di funzione in modo più completo.

ESEMPI. 6) Studio della funzione $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

– *Dominio e segni*: $E = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in\ ]-1, 0[\cup]1, +\infty[$; $f(0) = 0$.

– *Limiti*: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.

– *Asintoto*: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$; $\lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = 0$; asintoto; $y = x$.

– *Segno di f(x) - x*: $f(x) - x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$.

– *Derivata prima*: $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$.

– *Segno di f' ed estremi di f*: $f'(x) > 0$ se e solo se è $|x| > \sqrt{3}$. Qui la f è crescente.

$x_1 = -\sqrt{3}$ è punto di massimo relativo; $x_2 = \sqrt{3}$ è di minimo relativo;

$\inf f = -\infty$; $\sup f = +\infty$.

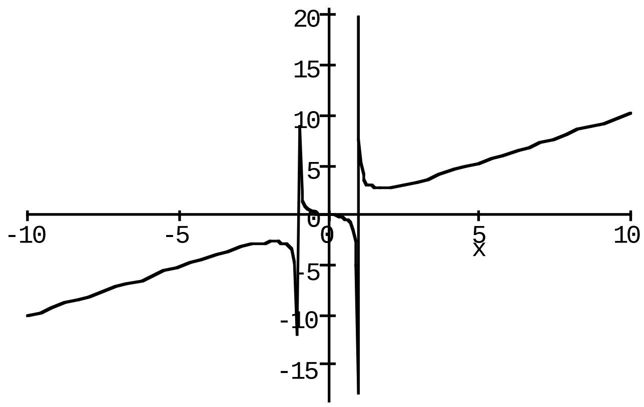
– *Limiti di f'(x)*: $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 1$; $\lim_{x\to-1} f'(x) = \lim_{x\to1} f'(x) = -\infty$.

– *Derivata seconda*: $f''(x) = \dfrac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$.

– *Segno di f''; Convessità, flessi*: $f''(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$.

La f è convessa per $x \in\ ]-1, 0[\cup]1, +\infty[$; 0 è punto di flesso discendente con $f'(0) = 0$.

A questo punto è facile disegnare il grafico della funzione.



7) Studio della funzione $f(x) = \text{arctg}x - \log(1 + x^2)$.

– *Dominio*: $E = \mathbb{R}$; $f(0) = 0$.

– *Limiti*: $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

– *Derivata prima*: $f'(x) = \dfrac{1 - 2x}{1 + x^2}$.

– *Segno di f' ed estremi di f*: $f'(x) > 0$ se e solo se è $x < \dfrac{1}{2}$. Qui la f è crescente.

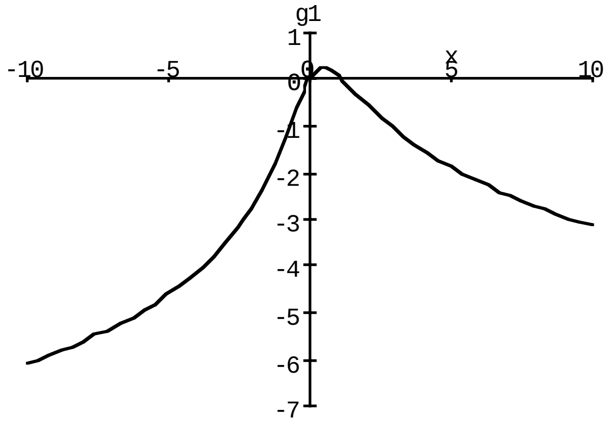
$x_0 = \dfrac{1}{2}$ è punto di massimo relativo; $\inf f = -\infty$; $\max f = f(1/2)$.

– *Limiti di f'(x)*: $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

– *Derivata seconda*: $f''(x) = -2\dfrac{x^2 - x - 1}{(x^2 + 1)^2}$.

– *Segno di f'', convessità, flessi*: $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in A =]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$, con $x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Qui la f è convessa. I punto x_1 e x_2 sono punti di flesso.

A questo punto è facile disegnare il grafico della funzione.



8) Studio della funzione $f(x) = \frac{\log x}{(1 + x)^2}$.

– *Dominio e segni*: $E = \{x: x > 0\}$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

– *Limiti*: $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

– *Derivata prima*: $f'(x) = \dfrac{\frac{x+1}{x} - 2\log x}{(1 + x)^3} = \dfrac{\varphi(x)}{(1 + x)^3}$.

– *Segno di* f': $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$.

– Studio sommario di $\varphi(x)$. Dominio: E. $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$;

$\varphi'(x) = -\frac{2x + 1}{x^2} < 0$. La φ è continua e decrescente; si annulla in un punto $\alpha \in\ ]2; 3[$,

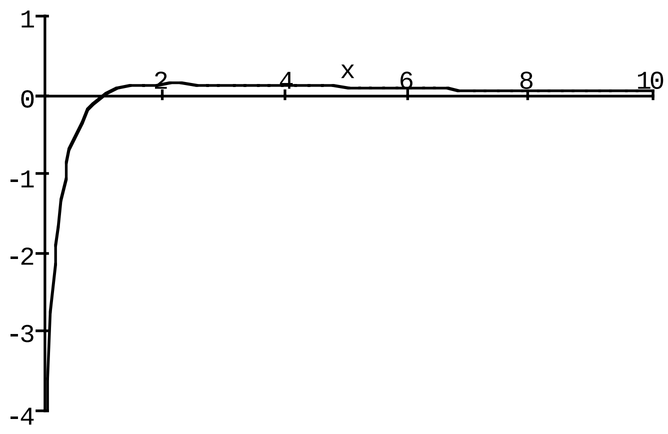
dato che è $\varphi(2) > 0$ e $\varphi(3) < 0$.

Si ha dunque $f'(x) > 0$ per $x \in\ ]0; \alpha[$; α è punto di massimo relativo;

$\inf f = -\infty$; $\sup f = f(\alpha)$.

– *Limiti di* $f'(x)$: $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Non è il caso di affrontare lo studio della derivata seconda. Ora comunque è facile disegnare il grafico della funzione.



§ 10. E S E R C I Z I

1) Si calcolino le derivate delle seguenti funzioni:

$$(1 + x^3)^5; \quad \sin^3 x; \quad (1 + e^x)^{2/3}; \quad \sqrt[3]{\sin x + 2\cos x}; \quad \log \operatorname{tg}(x/2); \quad \operatorname{Ch}(\operatorname{Sh} x);$$

$$\arcsin\sqrt{x - 1}; \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x; \quad \log\log\log x; \quad \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}\right); \quad \log 5x;$$

$$(x^2 + x - 1)e^x; \quad x\sqrt{\arcsin x}; \quad x \operatorname{arctg}\frac{1}{x}; \quad xe^{x/2}\cos x; \quad (x - \cos x)\sqrt{x + \sin x};$$

$$\frac{1 + \cos x}{x - \sin x}; \quad \frac{1}{x^4 + x - 1}; \quad \frac{e^x}{\sin x - \cos 2x}; \quad \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} + x}{x \log x}; \quad \operatorname{arctg}\frac{2 - x^2}{2 + x^2}.$$

2) Scrivere le espressioni delle approssimanti lineari delle funzioni

$$\arcsin 2x; \quad \operatorname{tg} x; \quad \operatorname{arctg} x, \ \operatorname{Sh}(x + 1); \quad \sqrt{\sin x + 2\cos x}; \qquad \text{con } x_0 = 0.$$

$$\log x; \quad \operatorname{arctg} x; \quad \sqrt{x}; \quad x^x; \quad (x^2 + x - 1)e^x; \qquad \text{con } x_0 = 1.$$

3) Si studino, senza calcolare la derivata seconda, le seguenti funzioni:

$$f(x) = \sin^3 x - \cos^3 x; \qquad f(x) = \cos x \cos 2x; \quad f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}; \quad f(x) = \log(1 + |x|) - \frac{1}{x}.$$

4) Per ciascuna delle seguenti funzioni si determinino $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che sia applicabile il Teorema di Lagrange e si calcolino i punti di Lagrange.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{per } -1 \le x \le 0 \\ x^2 + ax + b, & \text{per } 0 < x \le 1 \end{cases}; \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a, & \text{per } -1 \le x \le 0 \\ be^x - 2, & \text{per } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{per } 0 \le x \le 2\pi/3 \\ a + b\cos x, & \text{per } 2\pi/3 < x \le \pi. \end{cases}$$

5) Si ricerchino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to -\infty} (x + \sqrt{x^2 + x}); \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \log(1 + x)}; \quad \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x});$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{\log^2 x + \log x + 1} - \sqrt{\log^2 x - \log x + 1}); \qquad \lim_{x \to 0} \frac{2\sin x - 2x + x^2}{x - \operatorname{tg} x - 2x^2};$$

$$\lim_{x \to +\infty} x\left[\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}\right]; \qquad \lim_{x \to \infty} x^2\left[x - \sqrt[3]{x^3 + 1}\right];$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - 2}{(1 - \sqrt{2}\sin x)(1 - \sqrt{2}\cos x)}; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x - \frac{1}{3}x^3}{2x^2 + 2x + 1 - e^{2x}}.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + 2\cos^3 x - 3\sqrt{\cos 2x}}{\sin^4 x}; \quad \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2 + x}{x^2 - 1}\right]^x.$$

6) Si dica se è derivabile nel punto $x_0 = 0.$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}.$$

7) Si studino, il più accuratamente possibile le seguenti funzioni:

$$f(x) = x\,(1 - \log x)^2; \quad f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 3x + 2)^2}; \quad f(x) = \frac{|x - 1|}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}; \quad f(x) = x^2(\log|x| - 1); \quad f(x) = \frac{x}{x + \log x}.f(x) = (x - 1)\, e^{1/x};$$

$$f(x) = x\,(1 - e^{-x}); \quad f(x) = (x^2 + 1)\, e^{-|x-1|}; \quad f(x) = \sqrt[3]{x}\;\; e^x;$$

$$f(x) = \log|x^2 - 1| - \frac{1}{x^2 - 1}; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 + 2\cos^3 x - 3\sqrt{\cos 2x}}{\sin^4 x}; \; f(x) = \frac{x}{3} + \sqrt[3]{2 - x}.$$

8) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ è concava su tutto $\mathbb{R}^+$ la funzione

$$f(x) = \log x + k x^2?$$

9) Si scriva il polinomio approssimante $P_4(x)$ di ciascuna delle funzioni

$$f(x) = x\cos x, \text{ con } x_0 = \pi; \quad f(x) = \cos 2x, \text{ con } x_0 = 0; \quad f(x) = e^x \cos x, \text{ con } x_0 = 0.$$

10) Si ricerchi l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0$ delle funzioni:

$$x^3 - 3x + 3\,\mathrm{arctg}\, x; \quad \log(1 + x) - x - \frac{x^2}{2}; \quad \frac{1 - x^x}{\log x}; \quad \sqrt[3]{\cos x} - \cos\sqrt[3]{x}.$$

11) Due vetrai debbono trasportare una lastra di vetro attraverso un corridoio che è formato da due tratti tra loro perpendicolari e di larghezza a e b rispettivamente. Qual è la lunghezza massima di una lastra che si può far passare attraverso il corridoio?

12) Fra tutti i coni circolari retti di dato volume si ricerchi quello che ha superficie laterale minima.

13) - Supposto $a > 0$, si veda se esistono e quante sono le soluzioni dell'equazione $a^x = x^a$.

14) - Si calcoli $\log 2$ con 4 cifre decimali esatte.

Capitolo Ottavo

L'INTEGRALE INDEFINITO

§ 1. IL PROBLEMA DELLE PRIMITIVE, INTEGRALI IMMEDIATI

Ricordiamo che un insieme A ($\subset \mathbb{R}$) è detto *aperto* se è intorno di ogni suo punto, ossia se, per ogni $x \in A$, esiste un intervallo aperto di centro x contenuto in A.

DEFINIZIONE. Siano dati un insieme aperto A ($\subset \mathbb{R}$) e una funzione f: $A \to \mathbb{R}$. Diremo che una funzione F: $A \to \mathbb{R}$ è una *primitiva* della f se F è derivabile in A e risulta $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in A$.

Una funzione f: $A \to \mathbb{R}$ è detta *primitivabile* se è *dotata di primitive*, ossia se esiste una funzione F: $A \to \mathbb{R}$ che sia una primitiva della f.

Se f: $A \to \mathbb{R}$ è primitivabile, l'insieme di tutte le sue primitive è detto l'*integrale indefinito* della f e si indica con il simbolo $\int f(x)dx$.

È dunque

$$\int f(x)dx := \{F \colon F'(x) = f(x), \forall\, x \in A\}.$$

L'integrazione indefinita è il problema inverso di quello della derivazione.

Assegnato un insieme aperto A, la derivazione è un'applicazione D dell'insieme delle funzioni reali derivabili in A in quello di tutte le funzioni di A in $\mathbb{R}$. Questa applicazione non è né iniettiva né suriettiva. Sappiamo, infatti, che due funzioni derivabili che differiscono per una costante additiva hanno la medesima derivata. Inoltre, si può dimostratore che, in accordo con l'intuizione, la funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che vale 1 nei punti razionali e vale 0 in quelli irrazionali non è la derivata di nessuna funzione.

Si pone in modo naturale il problema seguente: Data una funzione f: $A \to \mathbb{R}$, ricercare la sua controimmagine $D^{-1}(f)$. Dobbiamo, in altre parole, rispondere alle due seguenti questioni:

– Esistenza di primitive della f.
– Ricerca di *tutte* le primitive della f.

Quanto al primo problema, ci limitiamo a enunciare un risultato che verrà dimostrato solo nel Capitolo 13, dopo aver studiato l'integrale di Riemann.

TEOREMA 1. *Ogni funzione f: $A(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita e continua in un aperto A è dotata di primitive in A.* ▮

Segnaliamo che la continuità della f non è condizione necessaria per la sua primitivabilità.

ESEMPIO. 1) La funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & \text{se è } x \neq 0 \\ 0, & \text{se è } x = 0 \end{cases}$$

non è continua in 0, ma sappiamo che essa è la derivata della funzione F: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{se è } x \neq 0 \\ 0, & \text{se è } x = 0 \end{cases}.$$

Passiamo al secondo problema. Anche in questo caso le nostre ambizioni sono molto modeste. Ci limiteremo alla ricerca di primitive di particolari classi di funzioni *continue* e definite su *intervalli* aperti.

Cominciamo con il richiamare un risultato già noto (cfr. Cap. 7, Corollario 16 , Prop. 2).

TEOREMA 2. *Siano dati un intervallo I, una funzione f: $I \to \mathbb{R}$ e una sua primitiva F: $I \to \mathbb{R}$. Sono allora primitive della f (tutte e) sole le funzioni G: $I \to \mathbb{R}$ che differiscono dalla F per una costante additiva, ossia le funzioni definite da $G(x) = F(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$.*

DIM. Sia G: $I \to \mathbb{R}$ una qualunque primitiva dalla f. Consideriamo la funzione H: $I \to \mathbb{R}$ definita da $H(x) = G(x) - F(x)$. La H è derivabile in I e si ha $H'(x) = 0$ per ogni $x \in I$. Applicando il Teorema di Lagrange, si ottiene che esiste un $c \in \mathbb{R}$ tale che $H(x) = c$ per ogni $x \in I$. È dunque, sempre per ogni $x \in I$, $G(x) = F(x) + c$. Il viceversa è ovvio. ∎

È importante tener presente che, per la validità del teorema è essenziale che il dominio della f sia un intervallo.

Supponiamo infatti che il dominio A sia dato dalla riunione di due aperti disgiunti A_1 e A_2. Detta F una primitiva della f, consideriamo la funzione G: $A \to \mathbb{R}$ definita da

$$G(x) = \begin{cases} F(x) + 1, & \text{se è } x \in A_1 \\ F(x) + 2, & \text{se è } x \in A_2 \end{cases}.$$

La G è una primitiva della f, ma non differisce dalla F per una costante additiva.

Vediamo la cosa in un caso particolare.

ESEMPIO. 2) Consideriamo la funzione f: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$. Le primitive della f sono tutte e sole le funzioni $F_{a,b}$: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definite da

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} \log|x| + a, & \text{se è } x < 0 \\ \log|x| + b, & \text{se è } x > 0 \end{cases}.$$

Ci permetteremo tuttavia, per ragioni di comodità, espressioni del tipo $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$, pur sapendo che non si tratta di un'uguaglianza vera e propria, ma solo di un modo comodo di esprimersi.

Quanto sopra visto è riassunto dalle due seguenti uguaglianze:

– Se f: $I \to \mathbb{R}$ è primitivabile, allora si ha

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x),\ \forall\ F \in \int f(x)\ dx.$$

– Se F: $I \to \mathbb{R}$ è derivabile, allora si ha

$$\int \frac{d}{dx}F(x)\ dx = \{F(x) + c,\ \text{con } c \in \mathbb{R}\}.$$

Per cominciare, osserviamo che è immediato trovare una primitiva di un certo numero di funzioni elementari, in quanto basta leggere al contrario la tavola delle derivate. Si ottiene così la seguente Tabella.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
x^α; con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + c$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c = -\arccos x + c'$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arcctg} x + c'$
$\operatorname{Ch} x$	$\operatorname{Sh} x + c$
$\operatorname{Sh} x$	$\operatorname{Ch} x + c$
$\dfrac{1}{\operatorname{Ch}^2 x}$	$\operatorname{Th} x + c$
$\dfrac{1}{\operatorname{Sh}^2 x}$	$-\operatorname{Cth} x + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arcsinh} x + c = \log(x + \sqrt{x^2+1}) + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arccosh} x + c = \log(x + \sqrt{x^2-1}) + c$, per $x > 0$ $-\operatorname{arccosh}(-x) + c = -\log(-x + \sqrt{x^2-1}) + c$, per $x < 0$
e^x	$e^x + c$
a^x	$\dfrac{1}{\log a} a^x + c$

In questa Tabella abbiamo indicato l'integrale indefinito nella forma $F(x) + c$. Ricordiamo che la formula è esatta solo se il dominio A della funzione integranda f è un intervallo; in caso contrario, si intende che si pensa la f ristretta ad *uno* degli intervalli che compongono A. Si tenga presente che un insieme aperto A o è un intervallo aperto o è la riunione di intervalli aperti a due a due disgiunti (in numero finito o infinito). Per trovare *tutte* le primitive, bisognerebbe assegnare in modo *indipendente* una costante per ciascuno degli intervalli che compongono A.

A proposito dell'integrale di $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e di $\frac{1}{x^2+1}$, ricordiamo che è $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ e $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$.

Prima di proseguire, facciamo un'osservazione importante, anche se la cosa può apparire banale. Per controllare l'esattezza del calcolo di un integrale indefinito basta effettuare la derivata del risultato.

§ 2. I METODI D'INTEGRAZIONE

Vogliamo ora stabilire delle regole di integrazione che, come vedremo, si deducono da quelle di derivazione. È però indispensabile mettere subito in chiaro una cosa. Mentre il calcolo delle derivate è di tipo meccanico, nel senso che, data una funzione derivabile espressa mediante funzioni elementari, è immediato calcolare la sua derivata e questa è espressa ancora mediante funzioni elementari, ben diversa è la situazione per quanto riguarda il calcolo degli integrali indefiniti. Esistono infatti funzioni elementari continue e quindi primitivabili che non si possono integrare con metodi semplici, ma solo, eventualmente, con tecniche più raffinate quali, per esempio, gli sviluppi in serie.

ESEMPIO. 1) Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definite da $f(x) = \frac{e^x}{x}$. Malgrado l'aspetto innocuo, questa funzione non si lascia integrare per via elementare.

Vedremo che, per contro, la funzione $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $g(x) = \frac{x}{e^x}$ è integrabile elementarmente.

Non è dunque possibile acquisire una tecnica universale per il calcolo degli integrali indefiniti, come si fa per quello delle derivate. Si possono però stabilire alcuni *metodi* o *regole* d'integrazione che risultano applicabili in moltissimi casi.

Metodo d'integrazione per decomposizione

Dai Teoremi sulla derivata della somma e di cF si ottiene subito il

TEOREMA 3. *Se le due funzioni f,g: $I \to \mathbb{R}$ sono primitivabili su un intervallo I e se F,G: $I \to \mathbb{R}$ sono due primitive, rispettivamente di f e di g, allora, quali che siano $a,b \in \mathbb{R}$, è primitivabile anche la funzione h: $I \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = af(x) + bg(x)$ e una primitiva di h è data dalla funzione H: $I \to \mathbb{R}$ definita da $H(x) = aF(x) + bG(x)$.*

Ciò si esprime con la scrittura

$$\int (af(x) + bg(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx.$$

DIM. Basta osservare che è $D(aF(x) + bG(x)) = af(x) + bg(x)$. ∎

Il risultato di questo teorema si esprime dicendo che: *La combinazione lineare di funzioni primitivabili è primitivabile e che le sue primitive sono date dalla combinazione lineare, con gli stessi coefficienti, delle primitive delle funzioni date.*

ESEMPIO. 2) Si ha: $\int (3\cos x + \frac{2}{x})dx = 3\int \cos x\,dx + 2\int \frac{1}{x}dx =$
$= 3\sin x + c_1 + 2\log|x| + c_2 = 3\sin x + 2\log|x| + c.$

Metodo d'integrazione per parti

Dal Teorema sulla derivata del prodotto si ottiene il

TEOREMA 4. *Siano F,G: $I \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1 su un intervallo I e siano f,g: $I \to \mathbb{R}$ le corrispondenti derivate. Allora sono primitivabili in I anche le funzioni Fg e fG e se H: $I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di fG, una primitiva di Fg è data da $FG - H$.*
Ciò si esprime con la scrittura:

$$\int F(x)\, g(x)\, dx = F(x)\, G(x) - \int f(x)\, G(x)\, dx.$$

DIM. Le funzioni Fg e fG sono continue e quindi primitivabili. Detta H: $I \to \mathbb{R}$ una primitiva di fG, si ha:

$$D(F(x)\, G(x) - H(x)) = f(x)\, G(x) + F(x)\, g(x) - f(x)\, G(x) = F(x)\, g(x). \blacksquare$$

ESEMPIO. 3) Si vuol calcolare $\int x\log x\,dx$. Posto $F(x) = \log x$ e $g(x) = x$, si può assumere $G(x) = \frac{x^2}{2}$. Applicando la formula di integrazione per parti, si ottiene

$$\int x\log x\,dx = \int \log x\, D(\frac{x^2}{2})\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + c.$$

Vediamo di capire bene come si usa questo risultato.
Supponiamo di dover calcolare l'integrale indefinito del prodotto delle due funzioni f e g definite su un intervallo I e di conoscere una primitiva G della funzione g. Possiamo allora scrivere

$$\int f(x)\, g(x)\, dx = \int f(x)\, G'(x)\, dx.$$

Diamo, in tal caso, al fattore $f(x)$ il nome di *fattore finito* e a $g(x) = G'(x)$ quello di *fattore differenziale*. Se poi la f è derivabile in I, possiamo applicare il metodo di integrazione per parti. Se anche g è derivabile e conosciamo sia una primitiva F della f, sia una primitiva G della g, è, almeno a priori, indifferente scegliere la f come fattore finito e la g come fattore differenziale o viceversa. Molto spesso però, nella pratica, la scelta è obbligata o almeno favorita da ragioni di opportunità.

ESEMPI. 4) Si vuol calcolare $\int xe^x dx$. Assunto e^x come fattore finito, si ha:

$$\int xe^x dx = \int D(\frac{x^2}{2})e^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \frac{1}{2}\int x^2 e^x dx.$$

Ci si riduce così ad un problema più difficile di quello di partenza. Assunto, invece, come fattore finito x, si ha facilmente

$$\int xe^x dx = \int x D(e^x) dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c.$$

5) Si vuol calcolare $\int \log x\,dx = \int 1\cdot\log x\,dx$. Assunto $\log x$ come fattore finito, si ha:

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}dx = x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x + c.$$

6) $$\int xe^x\cos x\,dx = \int xe^x D(\sin x)\,dx = xe^x\sin x - \int (e^x + xe^x)\sin x\,dx =$$

$$= xe^x\sin x + \int (e^x + xe^x)D(\cos x)\,dx = xe^x\sin x + (e^x + xe^x)\cos x - \int (2e^x + xe^x)\cos x\,dx =$$

$$= xe^x(\sin x + \cos x) + e^x\cos x - 2\int e^x\cos x\,dx - \int xe^x\cos x\,dx.$$

Si ricava così l'espressione

$$\int xe^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}xe^x(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}e^x\cos x - \int e^x\cos x\,dx.$$

Ora, con la solita tecnica, si ottiene:

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x\,dx,$$

da cui $$\int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + c.$$

Si conclude così finalmente che è:

$$\int xe^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}xe^x(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}e^x\sin x + c.$$

7) Si ha $$\int \frac{x}{e^x}dx = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c.$$

N. B. Non sempre un tale procedimento ha successo. Lo si constata facilmente tentando di applicarlo a funzioni come $\frac{e^x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$ e simili.

Metodi d'integrazione per sostituzione

Dal Teorema sulla derivazione delle funzioni composte si ricava il

TEOREMA 5. *Sono date due funzioni componibili* $f: I =]a, b[\to \mathbb{R}$, $g: J =]c, d[\to I$, *con* f *continua e* g *derivabile. Allora, se* $F: I \to \mathbb{R}$ *è una primitiva della* f, *la funzione* $F(g(x)): J \to \mathbb{R}$ *è una primitiva di* $f(g(x))g'(x)$. *Ciò si esprime scrivendo:*

(*) $$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du, \text{ con } u = g(x).$$

DIM. Se $F: I \to \mathbb{R}$ è tale che $F'(u) = f(u)$, allora, per il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ha $D(F(g(x))) = f(g(x))g'(x)$. ∎

Il Teorema ora dimosrtrato ci permette di calcolare l'integrale posto a primo membro della (*) a patto di saper calcolare ilsecondo.

ESEMPI. 8) Si voglia calcolare $\int \sin^2 x\cos x\,dx$. Posto $u = g(x) = \sin x$, $g'(x) = \cos x$, si ha

$$\int \sin^2 x\cos x\,dx = \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{3}\sin^3 x + c.$$

9) Si voglia calcolare $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$. Posto $u = g(x) = x^2 + 1$, da cui $g'(x) = 2x$, si ha

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\log|u| + c = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c.$$

10) Si voglia calcolare $\int \cos^2 x\,dx$. Posto $u = 2x$, si ha

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\int \cos u\,du =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin u + c = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c = \frac{x + \sin x\cos x}{2} + c.$$

Si trova, in modo analogo, che è

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x - \sin x\cos x}{2} + c.$$

11) Si voglia calcolare $\int \operatorname{tg} x\,dx$. Posto $u = g(x) = \cos x$, si ha

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{du}{u} = -\log|u| + c = -\log|\cos x| + c.$$

In modo analogo si calcolano gli integrali indefiniti delle funzionei cotangente, tangente e cotangente iperboliche (cfr. la Tabella di pg. 166).

12) Si voglia calcolare $\int \arcsin x\,dx = \int 1\cdot\arcsin x\,dx$. Integrando per parti e ponendo $u = x^2$, si ha

$$\int 1\cdot\arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= x\arcsin x + \int \frac{-du}{2\sqrt{1-u}} = x\arcsin x + \sqrt{1-u} + c = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

In modo analogo si calcolano gli integrali indefiniti delle funzionei arcocoseno, arcotangente, arcotangente iperbolica, etc. (cfr. la Tabella di pg. 166).

Ma l'uguaglianza (*) letta al contrario permette, sotto opportune ipotesi, anche di calcolare il secondo membro, a patto di saper calcolare il primo.

TEOREMA 6. *Sono date due funzioni componibili* $f: I =]a, b[\to \mathbb{R}$, $g: J =]c, d[\to I$, *con f continua e g biiettiva e di classe* C^1 *assieme alla sua inversa* $\varphi: I \to J$. *Allora, se* $F(t): J \to \mathbb{R}$ *è una primitiva di* $f(g(t))\,g'(t)$, *la funzione* $F(\varphi(x)): I \to \mathbb{R}$ *è una primitiva di* $f(x)$. *Ciò si esprime con la scrittura*

(**) $$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt, \text{ con } t = \varphi(x).$$

DIM. Sia dunque $F(t): J \to \mathbb{R}$ una primitiva di $f(g(t))\,g'(t)$. Tenuto conto che si ha $g'(t) = 1/\varphi'(x)$, con $x = g(t)$, si ottiene

$$\frac{d}{dx}F(\varphi(x)) = F'(t)\,\varphi'(x) = f(g(t))\,g'(t)\,\varphi'(x) = f(g(t)) = f(x). \blacksquare$$

Questo risultato ci dice che, se si deve calcolare l'integrale indefinito di una funzione continua f: $I =]a, b[\to \mathbb{R}$, si può cercare una funzione g: $J =]c, d[\to I$ biiettiva e di classe C^1 assieme alla sua inversa, calcolare $\int f(g(t))\, g'(t)\, dt$ e sostituire poi $\varphi(x)$ a t.

ESEMPI. 13) Si voglia calcolare $\int\sqrt{1 - x^2}dx$. Deve essere $x \in [-1,1]$. Si può allora porre $x = g(t) = \sin t$, con $t \in [-\pi/2, \pi|2]$, da cui $g'(t) = \cos t$. Si ottiene:

$$\int\sqrt{1 - x^2}dx = \int\sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\, dt = \int\sqrt{\cos^2 t}\cos t\, dt = \int\cos^2 t\; dt =$$

$$= \frac{t + \sin t\cos t}{2} + c = \frac{1}{2}(t + \sin t\sqrt{1 - \sin^2 t}) + c = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}) + c.$$

14) Si volglia calcolare $\int e^{\sqrt{x}}dx$. Deve essere $x \geq 0$. Posto $x = g(u) = u^2$, con $u \geq 0$, si ha

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int e^u\, u\, du = u e^u - e^u + c = \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} + c.$$

Possiamo così ampliare la lista degli integrali indefiniti delle funzioni elementari:

$f(x)$	$\int f(x)\, dx$
$\log x$	$x \log x - x + c$
$\log_a x$	$\frac{1}{\log a}(x \log x - x) + c$
$\mathrm{tg} x$	$- \log \lvert\cos x\rvert + c$
$\mathrm{ctg} x$	$\log \lvert\sin x\rvert + c$
$\mathrm{arctg} x$	$x\, \mathrm{arctg} x - (1/2) \log(x^2 + 1) + c$
$\mathrm{arcctg} x$	$x\, \mathrm{arcctg} x + (1/2) \log(x^2 + 1) + c$
$\arcsin x$	$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$
$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + c$
$\mathrm{Th} x$	$\log \mathrm{Ch} x + c$
$\mathrm{Cth} x$	$\log \lvert\mathrm{Sh} x\rvert + c$
$\mathrm{arcsinh} x$	$x\, \mathrm{arcsinh} x - \sqrt{x^2 + 1} + c$
$\mathrm{arccosh} x$	$x\, \mathrm{arccosh} x - \sqrt{x^2 - 1} + c$
$\mathrm{arctgh} x$	$x\, \mathrm{arctgh} x + (1/2) \log\lvert 1 - x^2\rvert + c$
$\mathrm{arcctgh} x$	$x\, \mathrm{arcctg} x - (1/2) \log\lvert x^2 - 1\rvert + c$

§ 3. INTEGRALE INDEFINITO DELLE FUNZIONI RAZIONALI

In questo paragrafo ci occuperemo del problema dell'integrazione delle funzioni razionali.

Per quanto riguarda le funzioni razionali intere, ossia quelle rappresentate da polinomi, non ci sono difficoltà. Occupiamoci delle funzioni razionali non intere. Supponiamo dunque di dover calcolare

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx,$$

con $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi. Se il grado di $P(x)$ è maggiore o uguale a quello di $Q(x)$, effettuando la divisione si ottiene

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

dove il grado di $R(x)$ è minore di quello di $Q(x)$. Il problema è così ricondotto a quello dell'integrazione di una funzione razionale in cui il numeratore ha grado minore del denominatore.

Supponiamo dunque che nell'integrale di partenza sia $\mathrm{gr}\, P(x) < \mathrm{gr}\, Q(x)$.

L'idea è quella di scomporre la frazione $\frac{P(x)}{Q(x)}$ nella somma di funzioni razionali di più facile integrazione.

ESEMPIO. 1) Supponiamo di voler calcolare $\int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}\, dx$. Si ha immediatamente

$$\frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+1},$$

da cui

$$\int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}\, dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = \log|x| + \mathrm{arctg}\, x + c.$$

Passiamo al caso generale. Sappiamo (cfr. Cap. 4, Teor. 9) che un polinomio a coefficienti reali può essere scomposto in fattori di primo e secondo grado con discriminante negativo.

Sussiste ora il seguente risultato del quale omettiamo la dimostrazione.

TEOREMA 7. *(di Hermite) - È data una funzione razionale* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, *con*

$$Q(x) = a(x-a_1)^{r_1}(x-a_2)^{r_2}\dots(x-a_h)^{r_h}(x^2+b_1x+c_1)^{s_1}(x^2+b_2x+c_2)^{s_2}\dots(x^2+b_kx+c_k)^{s_k},$$

essendo $r_1 + r_2 + \dots + r_h + 2(s_1 + s_2 + \dots + s_k) = n = \mathrm{gr}\, Q > \mathrm{gr}\, P(x)$. *Esistono allora* n *costanti reali* A_i, B_j, C_j, D_l, *con* $i = 1, 2, \dots, h$, $j = 1, 2, \dots, k$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, *con* $m = n - h - 2k$, *per cui si ha*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{h} \frac{A_i}{x-a_i} + \sum_{j=1}^{k} \frac{B_jx + C_j}{x^2+b_jx+c_j} + \frac{d}{dx}\frac{D_0 + D_1x + D_2x^2 + \dots + D_{m-1}x^{m-1}}{T(x)},$$

essendo

$$T(x) = (x-a_1)^{r_1-1}\dots(x-a_h)^{r_h-1}(x^2+b_1x+c_1)^{s_1-1}\dots(x^2+b_kx+c_k)^{s_k-1}. \blacksquare$$

ESEMPI. 2) Data la funzione $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-1)(x^2+1)}$, cerchiamo tre costanti A, B, C tali che:

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Si ottiene $$x + 2 = (A + B)x^2 + (C - B)x + A - C,$$

da cui, per il *Principio di identità dei polinomi*, si ricava il sistema $\begin{cases} A + B = 0 \\ C - B = 1 \\ A - C = 2 \end{cases}$,

che ha per soluzioni: $A = \dfrac{3}{2}$, $B = -\dfrac{3}{2}$, $C = -\dfrac{1}{2}$.

Si conclude così con l'uguaglianza

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{3}{2(x-1)} - \frac{3x+1}{2(x^2+1)}.$$

3) Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2+2}{(x^2-1)^2}$, cerchiamo quattro costanti A, B, C, D tali che:

$$\frac{x^2+2}{(x^2-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{d}{dx}\frac{Cx+D}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{-Cx^2-2Dx-C}{(x^2-1)^2} =$$
$$= \frac{(A+B)x^3+(A-B-C)x^2-(A+B+2D)x-(A-B+C)}{(x^2-1)^2}.$$

Per il *Principio di identità dei polinomi*, si ricava il sistema $\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B - C = 1 \\ A + B + 2D = 0 \\ A - B + C = -2 \end{cases}$,

che ha per soluzioni: $A = -\dfrac{1}{4}$, $B = \dfrac{1}{4}$, $C = -\dfrac{3}{2}$ $D = 0$.

Si conclude così con l'uguaglianza

$$\frac{x^2+2}{(x^2-1)^2} = \frac{-1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} - \frac{d}{dx}\frac{3x}{2(x^2-1)}.$$

4) Data la funzione $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2(x^2+1)}$, cerchiamo quattro costanti A, B, C, D tali che:

$$\frac{x+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\frac{D}{x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} - \frac{D}{x^2} =$$
$$= \frac{(A+B)x^3+(C-D)x^2+Ax-D}{x^2(x^2+1)}.$$

Per il *Principio di identità dei polinomi*, si ricava il sistema $\begin{cases} A + B = 0 \\ C - D = 0 \\ A = -D = 1 \end{cases}$,

che ha per soluzioni: $A = 1$, $B = C = D = -1$.

Si conclude così con l'uguaglianza

$$\frac{x+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{d}{dx}\frac{1}{x}.$$

Il problema dell'integrazione delle funzioni razionali è dunque ricondotto a quello dell'integrazione di funzioni di uno dei seguenti tipi:

$$\frac{A}{x-a}; \qquad \frac{Bx + C}{x^2+px+q}, \text{ con } p^2 - 4q < 0; \qquad \frac{d}{dx}\frac{D(x)}{T(x)}, .$$

Per le funzioni del primo e del terzo tipo non ci solo difficoltà. Resta il problema di integrare le funzioni del secondo tipo. Possiamo scrivere

$$\frac{Bx + C}{x^2+px+q} = \frac{B}{2}\frac{2x + 2C/B}{x^2+px+q} = \frac{B}{2}\frac{2x + p}{x^2+px+q} + \frac{2C - Bp}{2(x^2+px+q)}.$$

Essendo $$\int\frac{2x + p}{x^2+px+q}\,dx = \log(x^2+px+q) + c,$$

il tutto si riduce a al calcolo dell'integrale di una funzione del tipo $\frac{1}{x^2+px+q}$, con $p^2 - 4q < 0$. Ora si ha:

$$x^2+px+q = x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+\frac{4q-p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4} = \frac{4q-p^2}{4}\left[\left(\frac{2(x+p/2)}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2+1\right].$$

È dunque

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{4}{4q-p^2}\int\frac{dx}{\left(\frac{2(x+p/2)}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg} t + c,$$

dove si è posto $$t = \frac{2(x+p/2)}{\sqrt{4q-p^2}}.$$

In conclusione, si ha $$\int\frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2(x+p/2)}{\sqrt{4q-p^2}} + c.$$

ESEMPI. 5) Si ha: $$\int\frac{(x+2)dx}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{3x+1}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\log|x-1| - \frac{3}{4}\int\frac{2x}{x^2+1}dx - \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}\log|x-1| - \frac{3}{4}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c.$$

6) Si ha: $$\int\frac{(x+5)dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} + \frac{9}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{9}{2}\int\frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4} =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + 3\sqrt{3}\int\frac{(2/\sqrt{3})dx}{(4/3)(x+1/2)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + 3\sqrt{3}\operatorname{arctg}[(2/\sqrt{3})(x+1/2)] + c.$$

7) Si ha: $$\int\frac{(x^2+2)dx}{(x^2-1)^2} = \frac{-1}{4}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1} - \int\left(\frac{d}{dx}\frac{3x}{2(x^2-1)}\right)dx =$$

$$= \frac{-1}{4}\log|x - 1| + \frac{1}{4}\log|x + 1| - \frac{3x}{2(x^2 - 1)} + c.$$

8) Si ha: $$\int \frac{x + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{(x + 1)dx}{x^2 + 1} - \int \left(\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= \log|x| - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2 + 1} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} - \frac{1}{x} = \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2 + 1) - \operatorname{arctg}x - \frac{1}{x} + c.$$

§ 4. INTEGRAZIONE DI ALCUNE CLASSI DI FUNZIONI

Prima di esporre ancora qualche altro esempio e di mostrare qualche altro 'trucco' per il calcolo degli integrali indefiniti di particolari classi di funzioni irrazionali o trascendenti, ricordiamo che, come abbiamo già detto, ci sono delle funzioni continue che non si lasciano integrare con metodi elementari, ossia utilizzando i teoremi visti nel § 2. Fra queste funzioni ribelli ce ne sono alcune molto importanti; ne segnaliamo qualcuna:

$$\frac{e^x}{x}; \quad \frac{\sin x}{x}; \quad \sin x^2; \quad e^{x^2}; \quad \frac{1}{\log x}.$$

In moltissimi casi, per integrare funzioni irrazionali o trascendenti, si effettua una sostituzione *razionalizzante*, ossia tale da ricondurre il problema a quello dell'integrazione di funzioni razionali che, almeno in teoria, sappiamo effettuare. Diciamo "almeno in teoria", dato che il primo passo per integrare una funzione razionale è quello di scomporre in fattori il polinomio al denominatore e già questo può risultare tutt'altro che banale.

ESEMPIO. 1) Su voglia calcolare $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{x + 1}}\,dx$. Posto $\frac{x}{x + 1} = t^2$, si ha

$$x = \frac{t^2}{1 - t^2}; \qquad dx = \frac{2t\,dt}{(1 - t^2)^2}.$$

Si ottiene $$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{x + 1}}\,dx = -2\int \frac{dt}{t^2 - 1} = \log|t + 1| - \log|t - 1| + c =$$

$$= \log\left|\sqrt{\frac{x}{x + 1}} + 1\right| - \log\left|\sqrt{\frac{x}{x + 1}} - 1\right| + c.$$

Più in generale, se si deve calcolare $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)dx$, essendo f una funzione razionale e $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, si effettua la sostituzione $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = t^n$. Se è invece $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, basta osservare che deve essere $\alpha = \rho\gamma$ e $\beta = \rho\delta$; il radicando è dunque costante e uguale a $\sqrt[n]{\rho}$.

ESEMPIO. 2) Si voglia calcolare $\int \sqrt{-x^2 + 3x - 2}\,dx$. Si ha:

$$\sqrt{-x^2 + 3x - 2} = \sqrt{(x - 1)(2 - x)} = (x - 1)\sqrt{\frac{2 - x}{x - 1}}.$$

Si ottiene dunque $\int\sqrt{-x^2 + 3x - 2}\,dx = \int(x - 1)\sqrt{\dfrac{2 - x}{x - 1}}\,dx$ che è del tipo dell'Esempio precedente e si tratta allo stesso modo.

E così per calcolare $\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$, con f funzione razionale e $b^2 - 4ac > 0$.

ESEMPIO. 3) Si voglia calcolare $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$. Si ha

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = \int\frac{(2x - 1)\,dx}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} + \int\frac{dx}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} = \sqrt{x^2 - x + 1} + \int\frac{dx}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

Effettuando la sostituzione $x^2 - x + 1 = (x + t)^2$, si ha:

$$x = -\frac{t^2 - 1}{2t + 1};\qquad dx = -2\frac{t^2 + t + 1}{(2t + 1)^2}dt;\qquad \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{t^2 + t + 1}{2t + 1}.$$

Si ottiene $\displaystyle\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = -\frac{1}{2}\int\frac{2dt}{2t + 1} = -\frac{1}{2}\log|2t + 1| + c$, con $t = \sqrt{x^2 - x + 1} - x$.

In conclusione, si ha: $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = \sqrt{x^2 - x + 1} - \frac{1}{2}\log|2\sqrt{x^2 - x + 1} - 2x + 1| + c.$

E così per calcolare $\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$, con f funzione razionale, $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$.

ESEMPIO. 4) Si voglia calcolare $\displaystyle\int\frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}\,dx$. Posto $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, si ha:

$x = 2\operatorname{arctg} t$; $dx = \dfrac{2dt}{1 + t^2}$. È dunque: $\displaystyle\int\frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}\,dx = \int\frac{t^2 + 2t + 1}{t^2(1 + t^2)}dt =$

$$= \int\frac{2}{t}dt - \int\frac{2t\,dt}{1 + t^2} + \int\frac{dt}{t^2} = 2\log|t| - \log(t^2 + 1) - \frac{1}{t} + c = 2\log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \log\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) - \operatorname{ctg}\frac{x}{2} + c.$$

E così per calcolare $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$, con f funzione razionale.

Occupiamoci ora dei cosiddetti *integrali binomi*. Si tratta di integrare una funzione del tipo

$$f(x) = x^m(a + bx^n)^p,\quad \text{con } m = \frac{m'}{m''},\ n = \frac{n'}{n''},\ p = \frac{p'}{p''} \text{ numeri razionali.}$$

Il problema è risolto dal seguente Teorema, del quale omettiamo la dimostrazione, che dà una condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità per via elementare di queste funzioni.

TEOREMA 8. *Una funzione* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x) = x^m(a + bx^n)^p,\ \text{con } m, n, p \text{ numeri razionali,}$$

è integrabile elementarmente se e solo se risulta intero uno dei tre seguenti numeri

$$p,\quad \frac{m + 1}{n},\quad \frac{m + 1}{n} + p.\ \blacksquare$$

Vediamo, con esempi come si procede in ciascuno dei tre casi. Se p è un intero ≥ 0, non ci sono problemi, dato che il tutto si riduce ad integrare funzioni del tipo x^r.

ESEMPIO. 5) Si voglia calcolare $\int x^{(1/2)}(1 + x^{(1/3)})^{-1}dx$.

Si pone $x = t^6 = m.c.m.(2, 3) = m.c.m.(m'', n'')$. Risulta:

$$\int x^{(1/2)}(1 + x^{(1/3)})^{-1}dx = 6\int \frac{t^8}{1 + t^2}dt = 6\int \frac{t^8 - 1}{1 + t^2}dt + 6\int \frac{dt}{1 + t^2} =$$

$$= 6\int (t^6 - t^4 + t^2 - 1)dt + 6\,\mathrm{arctg}\,t = \frac{6}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 + 2t^3 - 6t + 6\,\mathrm{arctg}\,t + c = \dots \text{con } t = x^{(1/6)}.$$

6) Si voglia calcolare $\int x^{(1/2)}(1 + x^{(1/4)})^{(1/3)}dx$.

Si ha $\dfrac{m + 1}{n} = 6$. Si pone $1 + x^{(1/4)} = t^3 = t^{p''}$. Risulta:

$$x^{(1/4)} = t^3 - 1;\ x^{(1/2)} = (t^3 - 1)^2;\ \frac{1}{4}x^{(-3/4)}dx = 3t^2dt;\ \ dx = 12t^2x^{(3/4)}dt = 12t^2(t^3 - 1)^3dt.$$

Si ottiene $\int x^{(1/2)}(1 + x^{(1/4)})^{(1/3)}dx = 12\int t^3(t^3 - 1)^5dt = \dots$ con $t = (1 + x^{(1/4)})^{(1/3)}$.

7) Si voglia calcolare $\int x^{(2/3)}(1 - x^{(1/2)})^{(-1/3)}dx$.

Si ha $\dfrac{m + 1}{n} + p = 3$. Si pone $(1 - x^{(1/2)})/x^{(1/2)} = x^{(-1/2)} - 1 = t^3 = t^{p''}$. Risulta:

$$x^{(-1/2)} = t^3 + 1;\ x^{(2/3)} = (t^3 + 1)^{(-4/3)};$$

$$(1 - x^{(1/2)})^{(-1/3)} = (t^3x^{(1/2)})^{(-1/3)} = t^{-1}x^{(-1/6)} = t^{-1}(t^3 + 1)^{(1/3)};$$

$$-\frac{1}{2}x^{(-3/2)}dx = 3t^2dt;\quad dx = -6t^2x^{(3/2)}dt = -6t^2(t^3 + 1)^{-3}dt.$$

Si ottiene $\int x^{(2/3)}(1 - x^{(1/2)})^{(-1/3)}dx = -6\int t(t^3 + 1)^{-4}dt = \dots$ con $t = (x^{(1/2)} - 1)^{(1/3)}$.

§ 5. E S E R C I Z I

1) Si calcolino gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}};\quad \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}};\quad \frac{\log^2 x}{x^3};\quad \frac{x + 1}{x^2 + 4x};\quad \frac{2x + 1}{x^4}e^{(1/x)};\quad \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x + 1}{x}};\quad \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}};$$

$$\frac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}};\quad \frac{1}{1 + \sin x + \cos x};\quad \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x};\quad \frac{\sqrt{1 - x}}{x};\quad \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^4};\quad \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}};\quad \frac{\log^2 x}{\sqrt{x^3}};$$

$$\mathrm{arctg}\frac{x}{x + 1};\quad \frac{x}{(x + 1)^2};\quad \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}};\quad \frac{x - \sqrt{\mathrm{arctg}\,x}}{1 + 4x^2};\quad \frac{1}{\sin x\cos x};\quad \frac{1 + x}{1 + \sqrt{x}};\quad \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}};$$

$$\sin 2x\sin 3x;\quad x^2e^{2x};\quad x\log x - 2x;\quad xe^{-\sqrt{x}};\quad 4^{2 - 3x};\quad x\sqrt[5]{5 - x^2};\quad e^{\sin^2 x}\sin 2x.$$

2) Si ricerchino le funzioni per cui è $f''(x) = \mathrm{arctg}\,x + 1$.

3) Fra le primitive della funzione $\dfrac{x^2}{x^2 + 2}$ si ricerchi quella che in 0 assume il valore 1.

Che risposta si può dare ad un'analoga domanda per la funzione $\dfrac{x^2}{x^2 - 2}$?

APPUNTI

DEL CORSO DI

ANALISI MATEMATICA

PER IL DIPLOMA UNIVERSITARIO

PARTE SECONDA

INDICE

Capitolo Quattordicesimo: EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Capitolo Quindicesimo: CURVE IN $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$)

Capitolo Sedicesimo: CENNO SULLE SUPERFICI

Capitolo Diciasettesimo: RICHIAMI DI GEOMETRIA ANALITICA

Capitolo Nono

SERIE NUMERICHE

§ 1. RICHIAMI SULLE SUCCESSIONI

Ricordiamo che si chiama *successione di numeri reali* ogni applicazione f di $\mathbb{N}$ (o $\mathbb{N}^+$) in $\mathbb{R}$. Per indicare la successione $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ (ossia la successione per cui è $f(n) = a_n$), scriveremo $(a_n)_n$; indicheremo invece con $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ l'insieme immagine $f(\mathbb{N})$. L'elemento a_n è detto il *termine generale* o *n - imo* della successione. Se $M = \{n_0, n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$, con $n_k < n_{k+1}$, è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$, la restrizione della f a M è ancora una successione $a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots = (a_{n_k})_k$, che prende il nome di *sottosuccessione*. Se, in particolare, M è un insieme del tipo $\{n : n > m\}$, la sottosuccessione è detta anche *coda*.

Sappiamo che una successione $(a_n)_n$ è detta *convergente* se esiste finito il $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, è detta *divergente* se il $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ è infinito ($+\infty$, $-\infty$ o ∞) mentre, se il limite non esiste, si dice che la successione è *oscillante* o *indeterminata*. Ricordiamo che è $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ se, per ogni intorno V di l, esiste un intero ν tale che, per ogni n maggiore di ν, è $a_n \in V$, ossia se

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \nu \in \mathbb{N})(\forall\ n \in \mathbb{N})(\ n > \nu \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon).$$

Analogamente, si ha: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ se

$$(\forall\ M \in \mathbb{R})(\exists\ \nu \in \mathbb{N})(\forall\ n \in \mathbb{N})(n > \nu \Rightarrow a_n > M).$$

(Chi studia rienunci anche le definizioni di $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ e di $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$.)

Gioverà tenere ben presente i seguenti risultati sui limiti delle successioni (cfr. Cap. 5, §1):

TEOREMA 1. 1) *(Unicità del limite) - Se una successione ha limite, esso è unico.*
2) *(Limite delle sottosuccessioni) - Se una successione ha limite, allora ha lo stesso limite ogni sua sottosuccessione e, in particolare, ogni sua coda.*
2') *(Limite delle code) - Una successione ha limite se e solo se lo ha una delle sue code.*
3) *(Permanenza del segno) - Se una successione ha limite positivo* [*negativo*]*, esiste un* ν *tale che, per* $n > \nu$, *è* $a_n > 0$ [risp. $a_n < 0$].
4) *(Limitatezza delle successioni convergenti) - Se una successione* $(a_n)_n$ *è convergente allora è limitata* (ossia: *l'insieme immagine* $f(\mathbb{N}) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *è limitato*).
5) *(Limite delle successioni monotone) - Una successione monotona ha sempre limite (finito o no) che coincide con* $\sup f(\mathbb{N})$*, se la successione è non - decrescente, ed è dato da* $\inf f(\mathbb{N})$*, se la successione è non - crescente.* ∎

OSSERVAZIONI ED ESEMPI. 1) Non sussiste l'implicazione opposta della (2), ossia: se una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ di una successione $(a_n)_n$ ha limite β, non è detto che la successione abbia limite; quello che si può dire è che, se $(a_n)_n$ ha limite, questo non può che essere β. Dalla (5) si ottiene che: *Una successione monotona ha limite* β *se e solo se ha questo limite una qualunque delle sue sottosuccessioni.*

2) La successione di termine generale $(-1)^n$ è oscillante, ma la sottosuccessione dei termini di indice pari è costantemente uguale a 1 ed è, quindi, convergente.

3) Sappiamo che la successione di termine generale $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente, superiormente limitata e, quindi, convergente; il suo limite è il numero e.

4) Data la successione $(a_n)_n$, se accade che la sottosuccessione dei termini di posto pari e quella dei termini di posto dispari hanno lo stesso limite l, allora anche la successione data ha limite l. Infatti, fissato un intorno V di l, in esso cadono, per ipotesi, tutti i termini di indice dispari maggiore di un opportuno n' e tutti i termini di indice pari maggiore di un opportuno n''; in conclusione, in V cadono tutti gli a_n con $n > \max\{n', n''\}$.

§ 2. SERIE NUMERICHE

Consideriamo il numero reale (razionale) $a = 2{,}345$; questo può essere scritto nella forma $a = 2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000}$. Lo stesso procedimento, applicato al numero $b = 1{,}2323232323\ldots$ porta alla scrittura $1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \ldots + \frac{2}{10^{2n-1}} + \frac{3}{10^{2n}} + \ldots$ che ha l'aspetto di una somma di *infiniti addendi*. Si pone dunque, in modo naturale, il seguente

PROBLEMA. Come si può estendere il significato di addizione al caso di infiniti addendi, assegnati come termini di una successione? Il semplice procedimento aritmetico non è sufficiente, dato che questo insegna a sommare solo un numero *finito* di termini. È perciò necessaria una qualche forma di *passaggio al limite.*

Ora, l'aritmetica ci dice che, per definizione, è

$$2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} = \left(\left(2 + \frac{3}{10}\right) + \frac{4}{100}\right) + \frac{5}{1000}\,.$$

Ossia: se si devono sommare n addendi, si sommano i primi due, poi al risultato così trovato si aggiunge il terzo, poi il quarto e così via. E se gli addendi sono infiniti? L'idea precedente ci porta a sommare i primi 2 addendi, ad aggiungere al risultato il terzo, poi il quarto, …, poi l'n - imo, poi… Così facendo, si ottiene una successione di *somme parziali* di cui possiamo cercare il limite per n che tende a infinito.

DEFINIZIONE. Data una successione $(a_n)_n$ di numeri reali, si definisce una nuova successione $(S_n)_n$ ponendo:

$$S_0 := a_0;\ \ S_1 := a_0 + a_1;\ \ S_2 := a_0 + a_1 + a_2;\ \ \ldots\ S_n := a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n;\ \ \ldots\ldots$$

ossia:

$$S_0 := a_0;\ \ S_1 := S_0 + a_1;\ \ \ S_2 := S_1 + a_2;\ \ \ldots\ S_n := S_{n-1} + a_n;\ \ \ldots\ldots$$

La successione $(S_n)_n$ così definita è detta *successione delle somme parziali* o *delle ridotte*. La coppia $((a_n)_n, (S_n)_n)$ si dice *serie (di numeri reali).* La indicheremo scrivendo

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots\,,\ \text{oppure} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Si dice che a_n è il *termine generale* o *n - imo* della serie.

OSSERVAZIONE. Una serie $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ è, in sostanza, una successione: quella delle sue ridotte $(S_n)_n = S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ Viceversa, una qualunque successione può essere espressa come serie; in vero, data la successione $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$, questa può essere pensata come successione delle ridotte della serie:

$$S_0 + (S_1 - S_0) + (S_2 - S_1) + \dots + (S_{n+1} - S_n) + \dots$$

La distinzione fra successioni e serie è dunque più di forma che di sostanza.

DEFINIZIONE. Diremo che una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è:
- *convergente*, se la successione $(S_n)_n$ delle sue ridotte ha limite finito;
- *divergente a* $+\infty$, se la successione $(S_n)_n$ delle sue ridotte ha limite $+\infty$;
- *divergente a* $-\infty$, se la successione $(S_n)_n$ delle sue ridotte ha limite $-\infty$;
- *divergente a* ∞, se la successione $(S_n)_n$ delle sue ridotte ha limite ∞;
- *indeterminata*, se non esiste il limite della successione $(S_n)_n$ delle sue ridotte.

Se è $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, il numero reale S è detto la *somma* della serie; in tal caso si scrive $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$. Per esprimere il fatto che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è divergente, si scrive $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \infty$ (e, quando è il caso, $+\infty$ o $-\infty$).

La proprietà di una serie di essere convergente, divergente o indeterminata è detta il suo *carattere*.

PRIMI ESEMPI. 1) La serie "apparente" $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots$ è ovviamente convergente ed ha per somma $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Le serie che ci interessano sono quelle "vere", cioè quelle con infiniti termini diversi da zero.

2) La serie $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ diverge a $+\infty$. Più in generale, la serie $a + a + a + a + \dots$ diverge a $+\infty$ se è $a > 0$, diverge a $-\infty$ se è $a < 0$, converge a 0 se è $a = 0$.

3) La serie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ è indeterminata; infatti le ridotte di indice pari ($n \geq 0$) valgono tutte 1, mentre quelle di indice dispari valgono tutte 0; non esiste perciò il limite di $(S_n)_n$.

4) La serie $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$ diverge a ∞; infatti la successione delle ridotte è data da: 1, -1, 2, - 2, 3, - 3, …

5) La serie $1 - 1 + 2 - 2 + 3 - 3 + \dots$ è indeterminata, avendo le ridotte pari ($n \geq 0$) divergenti a $+\infty$ e quelle dispari costantemente nulle.

§ 3. TRE ESEMPI IMPORTANTI

1) **Le serie geometriche.** Sono così dette le serie del tipo

$$a + ak + ak^2 + ak^3 + ak^4 + \dots + ak^n + \dots, \text{ con } a \neq 0,$$

dove il numero reale k è detto la *ragione* della serie geometrica.
- Se è $k = 1$, si ha la serie $a + a + a + a + \dots$ che, essendo $a \neq 0$, è divergente.
- Se è $k = -1$, si ha la serie $a - a + a - a + \dots$ che, essendo $a \neq 0$, è indeterminata.

Sia dunque $|k| \neq 1$. La ridotta n - ima della serie è data da

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} ak^i = a\,\frac{1 - k^{n+1}}{1 - k}\,.$$

- Se è $|k| < 1$, la serie è convergente, con somma $a\dfrac{1}{1-k}$.
- Se è $|k| > 1$, la serie diverge (a ∞ se è $k < -1$; a $+\infty$ per $k > 1$, $a > 0$; a $-\infty$ per $k > 1$, $a < 0$).

2) **La serie di Mengoli.** Si chiama così la serie

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Dall'uguaglianza $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, si ottiene che la serie data può essere riscritta nella forma

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots ,$$

dalla quale si ricava subito l'uguaglianza

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1};$$

dunque $(S_n)_n$ tende a 1 al tendere di n a $+\infty$.

3) **La serie armonica.** È detta così la serie ottenuta sommando i reciproci dei numeri naturali positivi:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \ (n \in \mathbb{N}^+).$$

Si ha:

$$S_1 = 1 > \frac{1}{2};\ \ S_2 = 1 + \frac{1}{2} > 2\cdot\frac{1}{2};\ \ S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{2}{4} > 3\cdot\frac{1}{2};\ \ \ldots\ldots$$

$$S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} > S_{2^n} + 2^n\frac{1}{2^{n+1}} > n\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = (n+1)\frac{1}{2};\ \ldots\ldots$$

Ne viene che è $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2^n} = +\infty$, da cui anche $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ (cfr. § 1, Es. 1).

§ 4. TEOREMI FONDAMENTALI SULLE SERIE

TEOREMA 2. *Se una serie* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge, allora il suo termine generale* a_n *tende a* 0 *al tendere di* n *a* $+\infty$.

DIM. Sia $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = S$. Si ha: $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$, da cui la tesi, dato che S_{n+1} e S_n tendono entrambi a S. ∎

N.B. Non sussiste l'implicazione opposta di questo Teorema; cioè; *Se il termine generale di una serie tende a* 0, *non è detto che la serie sia convergente*. Un controesempio è fornito dalla *serie armonica* vista nel paragrafo precedente.

Una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di una serie è data dal seguente Teorema del quale omettiamo la dimostrazione.

TEOREMA 3. *(di Cauchy) - Una serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge se e solo se è verificata la seguente condizione:*

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \nu \in \mathbb{N})(\forall\ n \in \mathbb{N})(\forall\ p \in \mathbb{N})(n > \nu \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon).\ \blacksquare$$

TEOREMA 4. *(Aut - Aut per le serie a termini di segno costante) - Una serie a termini di segno costante* (≥ 0, o ≤ 0) *o è convergente o è divergente,* (ossia: *non può essere indeterminata*).

DIM. Sia, per esempio, $a_n \geq 0$ per ogni n. Dall'uguaglianza $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, si ottiene $S_{n+1} \geq S_n$; dunque la successione $(S_n)_n$ è monotona non - decrescente ed è quindi dotata di limite (finito o no!), dato dall'estremo superiore dell'insieme dei suoi valori. ∎

Da ciò segue che: *Una serie a termini di segno costante è convergente se e solo se è limitata.* (Si tenga ben presente che una tale affermazione non è vera per le serie qualunque; la serie 1 - 1 + 1 - 1 + … è limitata ma non è convergente.)

DEFINIZIONE. Data una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, si dice suo *resto k - imo* la *serie* che si ottiene tralasciando i suoi primi $k + 1$ termini, ossia la serie

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+p} + \ldots \quad \left(= \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n\right).$$

TEOREMA 5. *Il resto k - imo di una serie ha lo stesso carattere della serie data.*

DIM. Data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, indichiamo con $S_n^{(k)}$ ($n \geq 0$) la ridotta n - ima del suo resto k - imo; è dunque:

$$S_n^{(k)} = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+n+1}.$$

Si ha:

$$S_n^{(k)} := S_{k+n+1} - S_k.$$

Se la serie data è convergente, si ha $\lim_{n\to+\infty} S_{k+n+1} = S$, da cui $\lim_{n\to+\infty} S_n^{(k)} = S - S_k$. Si vede parimenti che, se la serie data è divergente, è tale anche la serie resto. Si procede poi in modo analogo per provare le implicazioni opposte. ∎

DEFINIZIONE. Date le serie

$$(1)\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{e} \quad (2)\ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n,$$

restano definite: la serie *"somma"*

$$(3)\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n := \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)$$

e, per ogni numero reale c, la serie *"prodotto per una costate"*

$$(4)\ c \sum_{n=0}^{+\infty} a_n := \sum_{n=0}^{+\infty} c a_n.$$

Per studiare il carattere di queste nuove serie, basta tener presente i Teoremi sui limiti delle funzioni:

TEOREMA 6. 1) *Se le serie* (1) *e* (2) *sono convergenti con somme rispettive A e B, allora la* (3) *converge con somma A + B.*
2) *Se le serie* (1) *e* (2) *sono entrambi divergenti a* $+\infty$ [*a* $-\infty$], *è tale anche la* (3).
3) *Se la* (1) *è divergente e la* (2) *è convergente, la* (3) *è divergente.*
4) *Se la* (1) *converge con somma A, la* (4) *converge con somma cA.*
5) *Se la* (1) *diverge ed è* $c \neq 0$, *la* (4) *diverge (mentre, per* $c = 0$, *la* (4) *converge in ogni caso a* 0). ∎

Si tenga presente che se la (1) diverge a $+\infty$ e la (2) diverge a $-\infty$, nulla si può dire, in generale, della serie somma, che va quindi studiata di caso in caso.

ESEMPIO. 1) Si consideri la serie

$$\frac{11}{100} + \frac{101}{100^2} + \frac{1001}{100^3} + \ldots + \frac{10^n + 1}{100^n} + \ldots$$

Questa è la serie somma delle due serie geometriche $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n}{100^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{100^n}$ che convergono con somma $\frac{1}{10} \times \frac{1}{1 - 1/10} = \frac{1}{9}$ e, rispettivamente, $\frac{1}{100} \times \frac{1}{1 - 1/100} = \frac{1}{99}$. La serie data è dunque convergente con somma $\frac{1}{9} + \frac{1}{99} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$.

DEFINIZIONE. Date le due serie (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e (2) $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, si chiama loro *incastro* ogni serie ottenuta alternando in modo arbitrario i termini della (1) e della (2), in modo che questi compaiano tutti, una volta sola ciascuno e senza che si alteri l'ordine degli a_n e dei b_n.

Per esempio, sono incastri della (1) e della (2) le serie:

$$a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots + a_n + b_n + \ldots$$
$$a_0 + a_1 + b_0 + a_2 + a_3 + b_1 + a_4 + a_5 + b_2 + \ldots + a_{2n} + a_{2n+1} + b_n + \ldots$$

L'ultima serie si può pensare come somma delle due serie

(*) $$a_0 + a_1 + 0 + a_2 + a_3 + 0 + a_4 + a_5 + 0 + \ldots + a_{2n} + a_{2n+1} + 0 + \ldots$$
(°) $$0 + 0 + b_0 + 0 + 0 + b_1 + 0 + 0 + b_2 + \ldots + 0 + 0 + b_n + \ldots$$

Questa tecnica può essere generalizzata. Date le due serie (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e (2) $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, consideriamo un loro incastro (3) $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$. Tutti i c_n provengono dalla (1) o dalla (2), ossia sono degli a_p o dei b_q; sostituiamo dapprima tutti i c_n del secondo tipo con degli zeri: si ottiene una serie (1') in cui compaiono i termini della (1) … diluiti… in mezzo a degli zeri. Poi si fa lo stesso con i c_n che provengono dalla (1), ottenendo una serie (2') fatta di zeri e dai b_n. Non è difficile convincersi che la (1) e la (1') [la (2) e la (2')] hanno lo stesso carattere e, se convergenti, anche la stessa somma. A questo punto, la (3) diventa la somma della (1') e della (2') e possiamo applicare ad essa i teoremi sulla somma di due serie visti più su. (Il discorso qui fatto è volutamente impreciso, dato che, per renderlo rigoroso, avremmo bisogno di un po' di formalismo in più.) Otteniamo così il

TEOREMA 7. *Siano date le due serie* (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* (2) $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

1) *Se le serie* (1) *e* (2) *sono convergenti con somme rispettive A e B, allora ogni loro incastro converge con somma A + B.*

2) *Se le serie* (1) *e* (2) *sono entrambi divergenti a* $+\infty$ [a $-\infty$], *è tale anche ogni loro incastro.*

3) *Se la* (1) *è divergente e la* (2) *è convergente, ogni loro incastro è divergente.* ▮

Si tenga presente che se la (1) diverge a $+\infty$ e la (2) diverge a $-\infty$, nulla si può dire, in generale, delle serie incastro, che vanno quindi studiate di caso in caso.

ESEMPIO. 2) Si consideri la serie prospettata all'inizio del § 2:

$$1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \dots + \frac{2}{10^{2n-1}} + \frac{3}{10^{2n}} + \dots$$

Siccome il carattere di una serie coincide col carattere di ogni suo resto, possiamo intanto tralasciare il primo termine. La serie che così si ottiene, è incastro delle due serie:

$$(1) \qquad \frac{2}{10} + \frac{2}{10^3} + \frac{2}{10^5} + \dots + \frac{2}{10^{2n-1}} + \dots = \frac{2}{10}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \dots\right);$$

$$(2) \qquad \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^6} + \dots + \frac{3}{10^{2n}} + \dots = \frac{3}{10^2}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \dots\right).$$

Si tratta di due serie convergenti con somme rispettive $\frac{20}{99}$ e $\frac{3}{99}$. La serie data è dunque convergente con somma $1 + \frac{20}{99} + \frac{3}{99} = \frac{122}{99}$.

OSSERVAZIONE. Si tenga presente che *non è lecito associare tra loro i termini di una serie*. Per esempio, sappiamo che la serie 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + … è indeterminata; se però associamo i suoi termini a 2 a 2, otteniamo la serie 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + … che è convergente. In generale, se partiamo da una serie (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e associamo in qualche modo i suoi termini, otteniamo una nuova serie (2) $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$; ebbene, si vede subito che la successione delle ridotte della (2) è una sottosuccessione di quella delle ridotte della (1). Conclusione: *Se la* (2) *converge* [*diverge*], *la* (1) *o converge con la stessa somma o è indeterminata* [risp. *o diverge o è indeterminata*]. Se però sappiamo che la (1) non può essere indeterminata, allora (1) e (2) si comportano allo stesso modo.

Sottolineiamo ancora che: *In generale, non è lecito cambiare l'ordine dei termini di una serie*. Questo problema che si chiama *permutabilità* delle serie è di soluzione meno immediata di quello dell'associabilità e perciò lo tralasciamo.

§ 5. SERIE A TERMINI POSITIVI

Sfrutteremo sistematicamente il fatto che, come già sappiamo, una serie a termini positivi non può essere indeterminata, perché la successione delle sue ridotte è monotona. Per analoghe ragioni e per quanto visto a proposito del resto di una serie, si ha subito che tutti i risultati che ora stabiliremo valgono, con i dovuti aggiustamenti, anche per le serie a termini negativi e per quelle che hanno un resto a termini di segno costante. Chi studia si faccia carico di tutte queste varianti.

DEFINIZIONE. Siano date due serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$; se, per ogni n, è $a_n \leq b_n$, si dice che la prima serie è una *minorante* della seconda e che, simmetricamente, la seconda è una *maggiorante* della prima.

TEOREMA 8. *(Criterio del confronto) - Siano date due serie* (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* (2) $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, *a termini non negativi e sia, per ogni n,* $(0 \leq)\ a_n \leq b_n$; *allora, se la serie* (2) *converge, converge anche la* (1) *e, se la* (1) *diverge, diverge anche la* (2). In altre parole: *Se una serie a termini non negativi converge, converge ogni sua minorante che sia ancora a termini non negativi e, se una serie a termini non negativi diverge, diverge ogni sua maggiorante (che è, ovviamente, a termini non negativi).*

DIM. Indichiamo con A_n e con B_n le ridotte delle due serie e supponiamo la (2) convergente. Dall'ipotesi $0 \leq a_n \leq b_n$ segue che, per ogni n, è anche $A_n \leq B_n$. Essendo la (2) a termini non negativi e convergente, si ha che la successione $(B_n)_n$ ha un limite finito B che, per il Teorema sul limite delle funzioni monotone, è uguale al $\sup \{B_n: n \in \mathbb{N}\}$. È dunque, per ogni n, $A_n \leq B_n \leq B$. Ne viene che anche la successione $(A_n)_n$ è superiormente limitata da B. D'altra parte anche la successione $(A_n)_n$ è non - decrescente, essendo non negativi gli a_n. Ne viene che anche la (1) è convergente, sempre per il Teorema sul limite delle funzioni monotone.

Supponiamo ora la (1) divergente; la (2) non può convergere perché, in tal caso, dovrebbe convergere anche la (1) per quanto appena visto, né può essere indeterminata, essendo a termini non negativi; quindi è anch'essa divergente. ∎

ESEMPIO. 1) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente; infatti, essendo per ogni $n > 1$, $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$, si ha che la nostra serie ha un resto che è una minorante (a termini positivi) della serie di Mengoli che sappiamo essere convergente.

TEOREMA 9. *(Criterio del rapporto) - Sia* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *una serie a termini positivi. Se esiste una costante* $k < 1$, *tale che, per ogni n, si abbia* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k$, *allora la serie è convergente. Se è* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, *la serie è divergente.*

DIM. Dall'ipotesi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k$, si ha: $a_1 \leq k a_0$; $a_2 \leq k a_1 \leq k^2 a_0$; $a_3 \leq k a_2 \leq k^3 a_0$; … e, in generale,

$$a_n \leq k a_{n-1} \leq \ldots \leq k^n a_0.$$

Si ottiene che la serie data è una minorante della serie geometrica

$$a_0(1 + k + k^2 + k^3 + k^4 + \ldots + k^n + \ldots)$$

che, essendo $0 < k < 1$, è convergente; dunque, per il Criterio del confronto, è anch'essa convergente. La seconda parte della tesi è ovvia, dato che, se è $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, il termine generale della serie non è infinitesimo. ∎

N.B. Si badi che dall'ipotesi $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, nulla si può concludere circa il carattere della serie. In vero, questa ipotesi dice solo che la successione $(a_n)_n$ è decrescente (e non si può nemmeno sapere se è infinitesima!).

Nella pratica è molto utile il

COROLLARIO 10. *Sia data una serie a termini positivi* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e si supponga che esista il* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Se questo limite è minore di* 1, *la serie converge, se è maggiore di* 1, *la serie è divergente.*

DIM. Sia $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$. Dunque:

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \nu \in \mathbb{N})(\forall\ n \in \mathbb{N})(n > \nu \Rightarrow l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon).$$

Preso un $\varepsilon < 1 - l$ e posto $k = l + \varepsilon$, da quanto sopra scritto si ottiene che, per $n > \nu$, è $\frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon = k < 1$. C'è dunque un resto della nostra serie che soddisfa alle ipotesi del Criterio del rapporto; essendo questo resto convergente, converge anche la serie. Se è $l > 1$, si vede con un ragionamento analogo che c'è un resto della serie per cui è $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$; il termine generale non è perciò infinitesimo e la serie diverge. ∎

N.B. Dall'ipotesi $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ nulla si può dedurre circa il carattere della serie. In effetti, sia la serie armonica sia la serie di Mengoli soddisfano a questa condizione, ma sappiamo che la prima è divergente, mentre l'altra converge.

ESEMPIO. 2) Si consideri la serie di termine generale $\frac{n!}{n^n}$. Si tratta di una serie a termini positivi per la quale è $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n!}{(n+1)(n+1)^n} \frac{n^n}{n!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$ che tende a $1/e < 1$, al tendere di n a $+\infty$. Dunque la serie converge.

TEOREMA 11. *(Criterio della radice) - Sia* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *una serie a termini positivi (o anche solo* ≥ 0*). Se esiste una costante* $k < 1$, *tale che, per ogni n, si abbia* $\sqrt[n]{a_n} \leq k$, *allora la serie è convergente. Se è* $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, *la serie è divergente.*

DIM. Dall'ipotesi $\sqrt[n]{a_n} \leq k < 1$, si ha: $a_n \leq k^n$. Dunque, la serie data è una minorante di una serie geometrica convergente (ha una ragione $k < 1$) e pertanto, per il Criterio del confronto, è anch'essa convergente. La seconda parte della tesi è ovvia, dato che, se è $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, il termine generale della serie non è infinitesimo. ∎

N.B. Si badi che dall'ipotesi $\sqrt[n]{a_n} < 1$, nulla si può concludere circa il carattere della serie. In vero, questa ipotesi dice solo che il suo termine generale è minore di 1 (e non si può nemmeno sapere se è infinitesimo!).

Nella pratica è molto utile il:

COROLLARIO 12. *Sia data una serie a termini non negativi* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e si supponga che esista il* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$. *Se questo limite è minore di* 1, *la serie converge, se è maggiore di* 1, *la serie è divergente.*

DIM. Sia $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$. Dunque:

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \nu \in\ \mathbb{N})(\forall\ n \in\ \mathbb{N})(n > \nu \Rightarrow l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon).$$

Preso un $\varepsilon < 1 - l$ e posto $k = l + \varepsilon$, da quanto sopra scritto si ottiene che, per $n > \nu$, è $\sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon = k < 1$. C'è dunque un resto della nostra serie che soddisfa alle ipotesi del Criterio della radice; essendo convergente tale resto, converge anche la serie. Se è $l > 1$, si vede con un ragionamento analogo che c'è un resto della serie per cui è $\sqrt[n]{a_n} > 1$; il termine generale non è perciò infinitesimo e la serie diverge. ∎

N.B. Dall'ipotesi $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ nulla si può dedurre circa il carattere della serie. In effetti, si vede subito che la serie armonica e la serie di Mengoli soddisfano a questa condizione e sappiamo che una di esse è divergente, mentre l'altra converge.

ESEMPIO. 3) Si consideri la serie di termine generale $\dfrac{2^n + 1}{3^n + 1}$. Si tratta di una serie a termini positivi per la quale è $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{2^n + 1}{3^n + 1}} = \sqrt[n]{\dfrac{2^n(1 + 1/2^n)}{3^n(1 + 1/3^n)}} = \dfrac{2}{3}\sqrt[n]{\dfrac{1 + 1/2^n}{1 + 1/3^n}}$ che tende a $\dfrac{2}{3} < 1$, al tendere di n a $+\infty$. Dunque la serie converge.

TEOREMA 13. *La serie* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^s}$ $(s > 0)$, *detta serie armonica generalizzata, converge per* $s > 1$ *e diverge per* $s \leq 1$.

DIM. Per $s = 1$ si ha la serie armonica e per $s < 1$ una sua maggiorante; dunque, per $s \leq 1$, la serie data è divergente. Veniamo al caso $s > 1$. Si ha:

$$S_1 = 1;\ \ S_3 = 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) < 1 + 2\,\frac{1}{2^s};$$
$$S_7 = 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}\right) < 1 + 2\,\frac{1}{2^s} + 4\,\frac{1}{4^s};\ \ldots$$

In generale, è

$$S_{2^{k+1}-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{1}{(2^k)^s} + \frac{1}{(2^k + 1)^s} + \ldots + \frac{1}{(2^k + 2^k - 1)^s}\right) < 1 + 2\,\frac{1}{2^s} + 4\,\frac{1}{4^s} + \ldots + 2^k\,\frac{1}{(2^k)^s} =$$
$$= 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{4^{s-1}} + \frac{1}{8^{s-1}} + \ldots + \frac{1}{(2^k)^{s-1}} =$$
$$= 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{(2^{s-1})^2} + \frac{1}{(2^{s-1})^3} + \ldots + \frac{1}{(2^{s-1})^k} <$$
$$< \frac{1}{1 - (1/2)^{s-1}} = \frac{2^{s-1}}{2^{s-1} - 1}.$$

La successione delle ridotte è (crescente e) superiormente limitata dal numero $\dfrac{2^{s-1}}{2^{s-1} - 1}$; quindi la serie è convergente. ∎

Sappiamo che la condizione $a_n \to 0$ è necessaria ma non sufficiente per la convergenza di una serie. È abbastanza naturale pensare che il carattere della serie dipenda dalla rapidità con cui il suo termine generale tende a zero.

Ricordiamo la nozione di ordine di infinitesimo da noi adottata (Cfr. Cap 6, § 2): Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni che tendono a zero per x che tende ad α, e che non si annullano in tutto un intorno di α, diremo che è $\mathrm{ord}_\alpha f = \mathrm{ord}_\alpha g$ se è $\lim\limits_{n\to\alpha}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mentre diremo che $\mathrm{ord}_\alpha f > \mathrm{ord}_\alpha g$ se è $\lim\limits_{n\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Qui ci interessa il caso $\alpha = +\infty$ ed è n in luogo di x con $f(n) = a_n$. Ricordiamo ancora che, per definizione, è $\mathrm{ord}_{+\infty}\frac{1}{n^r} = r$.

LEMMA 14. *Siano date due serie a termini positivi* (1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* (2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$, *entrambi col termine generale infinitesimo; sia, inoltre* $\mathrm{ord}\, a_n \geq \mathrm{ord}\, b_n$. *Allora, se la* (2) *converge, converge anche la* (1) *e, se la* (1) *diverge, diverge anche la* (2).

DIM. Supponiamo la (2) convergente. Essendo ord $a_n \geq$ ord b_n, esiste finito il $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = l$ (nullo se è ord $a_n >$ ord b_n, e non nullo se gli ordini sono uguali). Fissato un ε positivo, esiste un intero ν tale che, per $n > \nu$, è $\frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon$ e quindi $a_n < (l + \varepsilon)b_n$. Siccome la (2) converge, converge anche la serie di termine generale $(l + \varepsilon)b_n$; converge quindi anche la (1) che è, almeno da un certo punto in poi, una sua minorante.

Se la (1) diverge, la (2) non può convergere, per quanto ora visto, né può essere indeterminata per l'«*aut* - *aut*»; deve dunque divergere. ∎

Possiamo ora stabilire quello che è forse il più utile criterio di convergenza per le serie a termini positivi:

TEOREMA 15. *(Criterio dell'ordine di infinitesimo) - Sia data una serie a termini positivi* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *col termine generale infinitesimo. Allora, se esiste un* $s > 1$ *tale che* $\mathrm{ord}\, a_n \geq s$, *la serie converge, se è* $\mathrm{ord}\, a_n \leq 1$, *la serie diverge.*

DIM. Siccome la serie armonica diverge, divergono, per il Lemma 14, tutte le serie col termine generale positivo e infinitesimo di ordine minore o uguale a 1. La serie armonica generalizzata $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$ ha il termine generale infinitesimo di ordine s e sappiamo che, per $s > 1$, è convergente. Dunque, se una serie ha il termine generale positivo e infinitesimo di ordine maggiore o uguale a s (> 1), essa è convergente, sempre in virtù del Lemma 14. ∎

ESEMPI. 4) La serie di termine generale $a_n = \frac{2\sqrt{n}}{n^2 + n + 1}$ è convergente, essendo a_n positivo e infinitesimo di ordine $\frac{3}{2}$.

5) La serie di termine generale $a_n = \sqrt{1 - \cos\frac{1}{n}}$ è divergente, essendo $a_n > 0$ e ord $a_n = 1$.

6) Nulla possiamo dire, per ora, sul carattere della serie di termine generale $a_n = \frac{1}{n \log n}$, dato che l'ordine di infinitesimo è sì maggiore di 1, ma è minore di ogni numero reale mag-

giore di 1. In realtà, come vedremo dopo aver parlato di integrali impropri, la serie è divergente.

Osserviamo ancora che, se una serie di termine generale $a_n > 0$ soddisfa alle ipotesi del criterio del rapporto o di quello della radice, allora essa è, come sopra visto, maggiorata da una serie geometrica, il cui termine generale è infinitesimo di ordine soprareale; è dunque soprareale anche ord a_n. È perciò perfettamente inutile usare questi criteri quando si sa che il termine generale a_n non può essere infinitesimo di ordine soprareale.

§ 6. SERIE A TERMINI DI SEGNO QUALUNQUE

Si è già detto che i risultati stabiliti per le serie a termini positivi valgono anche per le serie che hanno un numero finito di termini negativi. Infatti, se una serie ha un numero finito di termini negativi, esiste un suo resto a termini tutti positivi o nulli e sappiamo che un resto ha lo stesso carattere della serie. Occupiamoci dunque delle serie che hanno infiniti termini positivi e infiniti termini negativi. Diremo che una serie siffatta è a termini *misti.*

DEFINIZIONE. Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è detta *assolutamente convergente* se è convergente la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ formata con i valori assoluti dei termini della serie di partenza.

TEOREMA 16 *Ogni serie assolutamente convergente è convergente.*

DIM.- Sia data una serie a termini misti e assolutamente convergente (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e indichiamo con (2) la serie dei valori assoluti $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$. Per ipotesi, la (2) è convergente. Se nella (1) sostituiamo tutti i termini negativi con degli zeri, troviamo una serie (3), a termini ≥ 0, che è una minorante della (2) e che è quindi convergente. Analogamente, se nella (1) sostituiamo tutti i termini positivi con degli zeri e cambiamo i segni a quelli negativi, troviamo una nuova serie (4), a termini ≥ 0, che è ancora una minorante della (2) e che, pertanto, converge. Ora la (1) si ottiene sommando la (3) con l'opposta della (4) e quindi è anch'essa convergente. ∎

Non sussiste l'implicazione opposta. Può cioè accadere che una serie sia convergente, mentre diverge quella dei valori assoluti. Un esempio in tal senso verrà dato tra poco.

DEFINIZIONE. Una serie convergente per cui risulta divergente la corrispondente serie dei valori assoluti è detta *semplicemente convergente*.

I Teoremi sulle serie a termini positivi visti nel Paragrafo precedente diventano, in questo nuovo contesto, criteri per la convergenza assoluta. In particolare:

Una serie che ha il termine generale infinitesimo di ordine maggiore o uguale a un numero reale s > 1, *è assolutamente convergente.*

L'Osservazione (4) fatta alla fine del §1 assume, nel caso delle serie, la forma seguente:

Se le successioni delle ridotte pari e delle ridotte dispari di una serie convergono ad uno stesso limite S, allora S è la somma della serie data.

Da questo fatto, si ricava il seguente

TEOREMA 17. *Sia data la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. *Se è* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ *e se la serie*

$$(a_0 + a_1) + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \ \dots + (a_{2n} + a_{2n+1}) + \ \dots$$

risulta convergente, allora converge anche la serie data.

DIM. Per ipotesi, è $(S_{2n+1})_n \to S$ e $(a_n)_n \to 0$. Essendo $S_{2n+2} = S_{2n+1} + a_{2n+2}$, si ottiene che è anche $(S_{2n+2})_n \to S$, da cui la tesi per l'osservazione precedente. ∎

Un caso particolare è costituito dalle serie a termini *di segno alternato* per le quali stabiliamo il seguente risultato.

TEOREMA 18 . *(Criterio di Leibniz) - Sia data una serie a termini di segno alternato*

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots + (-1)^n a_n + \dots, \ \text{con } a_n > 0;$$

se è $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ *e se è* $a_{n+1} \leq a_n$, *per ogni n, allora la serie è convergente.*

DIM. Dalla disuguaglianza $a_{n+1} \leq a_n$, si ottiene:

$$S_{2n+2} = S_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq S_{2n} \quad \text{e} \quad S_{2n+1} = S_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} \geq S_{2n-1} .$$

Dunque, la successione delle ridotte pari è non - crescente, mentre quella delle ridotte dispari è non - decrescente. Inoltre, comunque si fissino un numero pari p e un numero dispari d, posto $m = d + p + 2$ (num. dispari!), si ha $S_d \leq S_m < S_{m-1} \leq S_p \leq S_0$. La successione delle ridotte dispari è superiormente limitata da S_0; esiste perciò finito il $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = S$. Avendosi poi $S_{2n+2} = S_{2n+1} + a_{2n+2}$, si ha anche $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+2} = S$, dato che a_{2n+2} tende a 0. ∎

Possiamo ora dare un esempio di serie semplicemente convergente:

ESEMPIO. 1) La serie (di Leibniz)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$$

è convergente, per il Criterio di Leibniz, ma *non è* assolutamente convergente, dato che la serie dei valori assoluti è la serie armonica.

Più in generale, si vede che è semplicemente convergente la serie di termine generale $\frac{(-1)^n}{n^s}$, anche per $s < 1$.

Si tenga ben presente che è ord $\frac{(-1)^n}{n^s} = s$ e che, quindi:

Una serie a termini misti può convergere anche se ha il termine generale infinitesimo di ordine minore o uguale a 1.

ESEMPIO. 2) Si consideri la serie:

$$1 - \sin\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \sin\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \sin\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \dots - \sin\frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \dots$$

Questa, pur essendo una serie a termini di segno alternato, non soddisfa alle ipotesi del Criterio di Leibniz. Ma, d'altra parte, si ha subito $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$; inoltre la serie:

$$1 + \left(-\sin\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\sin\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\sin\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(-\sin\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) + \dots$$

è una serie convergente dato che il suo termine generale è, per $n > 0$, dato da $\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$ ed è quindi infinitesimo di ordine 3. La serie converge per il Teorema 17; la convergenza non è però assoluta, dato che il termine generale della serie è infinitesimo di ordine 1.

Ricordiamo un importante risultato sui limiti (cfr. Cap. 5, § 6) di cui non diamo la dimostrazione, ma che può essere utile in taluni casi:

TEOREMA 19. *(Formula di Stirling) - Si ha:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1. \blacksquare$$

ESEMPIO. 3) Si consideri la serie: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$. È una serie a termini positivi e si ha:

$$\sqrt[n]{n!} \approx \sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \frac{n}{e} \times \sqrt[2n]{2\pi n} \approx \frac{n}{e},$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che $\sqrt[2n]{2\pi n} = e^{[\log(2\pi n)/2n]}$ tende a 1 al tendere di n a $+\infty$. È dunque $a_n \sim \frac{1}{n^2}$, da cui ord $a_n = 2$; la serie converge.

§ 7. SERIE NUMERICHE NEL CAMPO COMPLESSO

Le nozioni di successione e di serie si estendono in modo del tutto naturale al campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Ricordiamo, intanto la

DEFINIZIONE. Dati due numeri complessi $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, si definisce loro *distanza* il numero *reale non negativo*

$$d(z_1,z_2) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Inoltre, dato il numero complesso $z = x + yi$, si chiama suo *modulo* il numero *reale non negativo*

$$|z| := d(z,0) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si ha subito:

$$d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|.$$

DEFINIZIONE. Data una successione $(z_n)_n$ di numeri complessi, si dice che essa *tende* o *converge* a un numero $z^* \in \mathbb{C}$ se

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \nu \in \mathbb{N})(\forall\, n \in \mathbb{N})(\, n > \nu \Rightarrow |z_n - z^*| < \varepsilon).$$

In tal caso, si scrive $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z^*$ o $z_n \to z^*$.

Osserviamo che, se è $z_n = x_n + y_n i$ e $z^* = x^* + y^* i$, si ha $z_n \to z^*$ se e solo se è $x_n \to x^*$ e $y_n \to y^*$. Da ciò segue immediatamente che anche per le successioni in $\mathbb{C}$ sussistono le Proposizioni (1), (2), (2') e (4) del Teorema 1. Perdono invece significato le Proposizioni (3) e (5) del medesimo Teorema dato che, come è ben noto, l'insieme $\mathbb{C}$ non è ordinato. La Proposizione 1.3 assume la seguente forma più debole:

Se una successione di numeri complessi converge a un limite diverso da zero, allora esiste una sua coda formata da elementi diversi da zero.

DEFINIZIONE. Data la successione $(z_n)_n$ di numeri complessi, si ponga:

$$S_0 := z_0 \text{ e, per ogni } n > 0,\ S_n := z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1}.$$

La coppia $((z_n)_n, (S_n)_n)$ è detta *serie* di numeri complessi. La si indica scrivendo $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$.

Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ è detta *convergente* se la successione $(S_n)_n$ delle sue *ridotte* (o *somme parziali*) ha un limite finito. Se è $S_n \to S$, si dice che S è la *somma* della serie; in tal caso, si scrive $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = S$.

TEOREMA 20. *Data la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} (x_n + y_n i)$, *si ha* $\sum_{n=0}^{+\infty} (x_n + y_n i) = x^* + y^* i$ *se e solo se è* $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = x^*$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n = y^*$. ∎

DEFINIZIONE. Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ è detta *assolutamente convergente* se è convergente la serie a termini reali non negativi $\sum_{n=0}^{+\infty} |z_n|$.

TEOREMA 21. *Ogni serie assolutamente convergente è convergente.*

DIM. Supponiamo che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (x_n + y_n i)$ sia assolutamente convergente. È dunque convergente la serie a termini reali non negativi $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$. Convergono allora le due serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|$ che sono due sue minoranti a termini non negativi. Dal Teorema 16 sappiamo che sono convergenti anche le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$; converge perciò anche la serie di partenza. ∎

Sappiamo già dal caso delle serie a termini reali che non sussiste l'implicazione opposta.

È ovvio che, per studiare la convergenza assoluta di una serie a termini complessi, ci si riconduce allo studio di una serie a termini reali non negativi per la quale valgono naturalmente tutti i teoremi stabiliti nei paragrafi 4 e 5.

Quanto alla convergenza *semplice* (ossia *non assoluta*) delle serie a termini complessi, ci limitiamo a segnalare il seguente risultato, del quale omettiamo la dimostrazione, che generalizza il criterio di Leibniz (Teor. 18):

TEOREMA 22 (di *Brunacci, Abel, Dirichlet*) - *Sia data la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sigma^n$, con $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $|\sigma| = 1$, $a_n \in \mathbb{R}$. *Se* $(a_n)_n$ *è non - crescente e tendente a* 0, *allora la serie data è convergente.* ∎

ESEMPI. 1) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n$, con $\vartheta \in [-\pi, \pi[$, converge per ogni $\vartheta \neq 0$.

2) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ converge assolutamente per ogni z con $|z| < 1$ e converge semplicemente se è $|z| = 1$, ma con $z \neq 1$.

3) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ converge assolutamente per ogni z con $|z| < 1$, mentre non converge se è $|z| \geq 1$.

4) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (n!)z^n$ converge soltanto in $z = 0$.

§ 8. E S E R C I Z I

1) Si studi, in dipendenza dal parametro reale x, il carattere delle seguenti serie:

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty}(1 + 3x)^n; \quad b)\ \sum_{n=0}^{+\infty}(3 - 2 \log x)^n; \quad c)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\left(2 - \frac{1}{|\log x|}\right)^n \quad d)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

[$\Re$. Le prime 3 sono serie del tipo $\sum_{n=0}^{+\infty}(f(x))^n$; per ogni x appartenente al dominio della f, si ha una serie geometrica che converge se è $|f(x)| < 1$: $a)$ $E = \{x : -2/3 < x < 0\}$; $b)$ $E = \{x : e < x < e^2\}$; $c)$ $E = \{x : e^{-1} < x < e^{-1/3}\} \cup \{x : e^{1/3} < x < e\}$; $d)$ si ha $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{n+1}$ che tende a 0 per ogni x; la serie è dunque convergente per ogni x reale.]

2) Si studi il carattere delle seguenti serie:

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}; \quad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}; \quad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{n^n}; \quad d)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e}{n}\right)^n; \quad e)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^n + \cos^2 n}{1 + \pi^n}.$$

[$\Re$. Sono serie a termini positivi. *a*) Diverge (Crit. rapporto); *b*) converge (Crit. radice); *c*) diverge (Crit. rapporto); *d*) converge (Crit. radice); *e*) converge (il termine generale è strettamente equivalente a $(e/\pi)^n$ che tende a zero con ordine soprareale).]

3) Si studi il carattere delle seguenti serie:

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n+1};\quad b)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^\alpha}{2^n}\ (\alpha\in\mathbb{R});\quad c)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}+\operatorname{arctg} n}{n^2+n+1};\quad d)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{n+1};$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\sin\frac{1}{n}\right)^3;\quad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right);\quad g)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log(1+1/n)}{\sqrt{n}};\quad h)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n}}.$$

[$\mathfrak{R}$. Sono serie a termini positivi, tranne l'ultima che è a termini negativi. Criterio dell'ordine di infinitesimo. *a*) Converge (ord a_n soprareale); *b*) converge per ogni α (ord a_n soprareale); *c*) converge (ord a_n = 3/2); *d*) diverge (ord a_n = 1/2); *e*) converge (ord a_n = 2); *f*) converge (ord a_n = 2); *g*) converge (ord a_n = 3/2); *h*) converge (ord a_n = 3/2; lo si vede moltiplicando sopra e sotto per $n+\sqrt{n^2+1}$).]

4) Si studi il carattere delle seguenti serie:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\quad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\arccos\left(1-\frac{1}{n}\right)\quad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

[$\mathfrak{R}$. Convergono; sono tutte serie di Leibniz. Convergono tutte semplicemente, perché, per tutte 3, è ord $a_n \le 1$.]

5) Si studi il carattere delle seguenti serie:

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}^{-1};\quad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\quad c)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+n+1}\right)^n;$$

$$d)\ \sum_{n=0}^{+\infty} n[\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg} n];\quad e)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{n}\log\frac{1+n+n^3}{1+n^3};\quad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}-\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}\right)$$

[$\mathfrak{R}$. Sono serie a termini positivi. *a*) Converge (Crit. del rapporto); *b*) converge (Crit. dell'ordine di infinitesimo); *c*) converge (Crit. della radice); *d*) diverge (Crit. dell'ordine di infinitesimo); *e*) converge (Crit. dell'ordine di infinitesimo); *f*) converge (Crit. dell'ordine di infinitesimo; sostituendo $1/n$ con x, si ottiene, al posto di a_n, la funzione $f(x) = x^x - \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ che è infinitesima di ordine 2 per x che tende a 0).]

6) Si studino le due seguenti serie:

a) $1 + x - x^2 + x^3 + x^4 - x^5 + \ldots + x^{3n} + x^{3n+1} - x^{3n+2} + \ldots$

b) $1 - a + \frac{1}{2} - a^2 + \frac{1}{3} - a^3 + \ldots + \frac{1}{n} - a^n + \ldots \quad (0 < a < 1).$

[$\mathfrak{R}$. *a*) È incastro delle tre serie geometriche $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$; $x\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ e $-x^2\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$; tutte 3 convergono per $|x| < 1$; la somma della serie è $\frac{1+x-x^2}{1-x}$; *b*) è incastro della serie armonica con una serie geometrica convergente ($0 < a < 1$) e quindi è divergente.]

7) Si studi il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos(n\pi)$.

[$\Re$. Diverge. *Non* è una serie di Leibniz, malgrado il fattore $(-1)^n$; è la serie armonica!]

8) Si studi il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n n}{n^2+1}$.

[$\Re$. È incastro delle due serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$. La prima è a termini positivi e infinitesimi di ordine 2: converge. La seconda è una serie di Leibniz col termine generale infinitesimo di ordine 1: converge semplicemente. La serie data è semplicemente convergente.]

9) Si studi il carattere della serie

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - \frac{1}{n} + \ldots$$

[$\Re$. È una serie a termini di segno alternato e infinitesimi di ordine 1: non converge assolutamente. Non è una serie di Leibniz, essendo $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} < \dfrac{1}{n}$. Associando i termini a 2 a 2, si ottiene una serie di termine generale

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - \frac{1}{n} = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n\sqrt{n^2+1}} = \frac{-1}{n\sqrt{n^2+1}(n+\sqrt{n^2+1})}$$

che è negativo e infinitesimo di ordine 3; questa nuova serie è dunque convergente. Per il Teorema 17, si conclude che è (semplicemente) convergente anche la serie data.]

10) Si studino le seguenti serie di numeri complessi:

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right)^n;\quad b)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{n!};\quad c)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{(3i)^n}{1+4^n} + \frac{1+2^n}{(3i)^n}\right].$$

[$\Re$. *a*) È una serie geometrica; converge assolutamente, essendo $\left|\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}i\right| = \dfrac{\sqrt{13}}{6} < 1$; *b*) converge assolutamente; *c*) converge assolutamente; pensiamola come somma di due serie Σa_n e Σb_n; a ciascuna di esse basta applicare il Criterio della radice.]

11) Si provi la convergenza della serie

$$1 - \log 2 + \frac{1}{2} - \log\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \log\frac{4}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n} + \ldots$$

La somma di questa serie è la costante γ di Eulero - Mascheroni. (Si ha $\gamma = 0{,}5772156649\ldots$). Si provi poi che, detta H_n la ridotta n - ima della serie armonica, si ha $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\log(n+1)} = 1$.

[$\Re$. Associando i termini a 2 a 2, si ottiene una serie convergente, essendo il suo termine generale $a_n = \dfrac{1}{n} - \log\dfrac{n+1}{n}$ infinitesimo di ordine 2; la serie data converge per il Teor. 17. Essendo $H_n - \log(n+1) - \gamma \to 0$, si ottiene poi subito anche la seconda parte della tesi.]

Capitolo Decimo

SERIE DI FUNZIONI

§ 1. SUCCESSIONI DI FUNZIONI

I concetti di successione e di serie possono essere estesi in modo molto naturale al caso delle funzioni.

DEFINIZIONE. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e, per ogni numero naturale n, sia f_n una funzione a valori reali definita in E. Si ottiene così una *successione* $(f_n)_n$ *di funzioni di E in* $\mathbb{R}$ (ossia un'applicazione di $\mathbb{N}$ nell'insieme $\mathbb{R}^E$ di tutte le funzioni di E in $\mathbb{R}$).

Per ogni $x_0 \in E$, resta definita una successione di numeri reali $(f_n(x_0))_n$ che potrà essere convergente o no. Sia $E'(\subset E)$ l'insieme dei punti $x \in E$ per i quali la successione numerica $(f_n(x))_n$ è convergente. Posto, per ogni $x \in E'$, $\varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, si ottiene una funzione $\varphi: E' \to \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE. Data una successione $(f_n)_n$ di funzioni a valori reali e definite in un insieme E, diremo che essa *converge (puntualmente)* a una funzione $\varphi: E \to \mathbb{R}$ se, per ogni $x \in E$, la successione numerica $(f_n(x))_n$ è convergente a $\varphi(x)$. Scriveremo $f_n \to \varphi$, o $\varphi = \lim_{n\to+\infty} f_n$.

Si pone allora un problema. Se le funzioni f_n godono di una data proprietà (continuità, derivabilità, integrabilità, …) e se è $f_n \to \varphi$, gode di tale proprietà anche la φ? In generale, la risposta è negativa.

ESEMPIO. 1) Siano: $E = [0,1]$, $f_n : E \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. La successione $(f_n)_n$ converge in E alla funzione φ che vale 1 per $x = 1$ e 0 per $x \neq 1$. Le f_n sono continue, mentre la φ non lo è.

Si cercano allora condizioni che assicurino il trasferimento delle proprietà delle f_n alla funzione limite.

La condizione $f_n \to \varphi$ in E significa:

$$(\forall\, x \in E)(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \nu(x, \varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall\, n \in \mathbb{N})(n > \nu(x, \varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon).$$

Interessa il caso in cui il numero ν dipende solo da ε e non dal punto x.

DEFINIZIONE. Si dice che la successione $(f_n)_n$ di funzioni di E in $\mathbb{R}$ *converge uniformemente* ad una funzione $\varphi: E \to \mathbb{R}$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un numero naturale ν, dipendente solo da ε, tale che, per ogni $n > \nu$ e per ogni $x \in E$, si ha $|f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$.

Non intendiamo insistere ulteriormente su questo concetto, ma ci limitiamo a dimostrare, a titolo di esempio, il seguente

TEOREMA 1. *Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni continue di E in $\mathbb{R}$; se $(f_n)_n$ converge uniformemente alla funzione $\varphi: E \to \mathbb{R}$, allora anche la funzione φ è continua in E.*

DIM. Fissiamo un $x_0 \in E$ e proviamo che la φ è continua in x_0. Assegniamo dunque un $\varepsilon > 0$. In virtù della convergenza uniforme, esiste un ν tale che, per ogni $n > \nu$ e per ogni $x \in E$, si ha $|f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon/3$. Fissato un $m > \nu$, esiste un intorno U di x_0 per ogni x del quale si ha $|f_m(x) - f_m(x_0)| < \varepsilon/3$. Dunque, per ogni $x \in U$, si ha:

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |\varphi(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(x_0) + f_m(x_0) - \varphi(x_0)| \leq$$
$$\leq |\varphi(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - \varphi(x_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \blacksquare$$

§ 2. SERIE DI FUNZIONI

DEFINIZIONE. Data una successione $(f_n)_n$ di funzioni di E in $\mathbb{R}$, si definisce una nuova successione di funzioni $(S_n)_n$, sempre di E in $\mathbb{R}$, ponendo:

$$S_0(x) := f_0(x),\quad S_1(x) := f_0(x) + f_1(x),\quad S_2(x) := f_0(x) + f_1(x) + f_2(x),\ \ldots,$$
$$S_n(x) := f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x),\ \ldots\ldots$$

ossia:
$$S_0(x) := f_0(x),\quad S_1(x) := S_0(x) + f_1(x),\quad S_2(x) := S_1(x) + f_2(x),\ \ldots,$$
$$S_n(x) := S_{n-1}(x) + f_n(x),\ \ldots\ldots$$

La successione $(S_n)_n$ così definita è detta *successione delle somme parziali* o *delle ridotte*. La coppia $((f_n)_n, (S_n)_n)$ si dice *serie di funzioni*. La indicheremo scrivendo $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

DEFINIZIONE. Diremo che una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, con $f_n\colon E \to \mathbb{R}$, *converge (puntualmente)* a una funzione $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ se, per ogni $x \in E$, si ha $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \varphi(x)$. In tal caso, diremo che la funzione $\varphi(x)$ è la *somma* della serie.

Anche nel caso delle serie, come già nel caso delle successioni, ci si può chiedere se le proprietà delle funzioni f_n si trasmettono alla funzione somma (supposta esistente).

La risposta è, in generale, negativa. Sappiamo che la somma di un numero finito di funzioni continue su un dato insieme è ancora una funzione continua; analogamente per le funzioni derivabili e le funzioni integrabili. Ne viene che, se le f_n godono di una di queste proprietà, ne godono anche le funzioni S_n. Ci si riconduce così al caso delle successioni di funzioni. Per quanto visto nel paragrafo precedente, si ha, per esempio, che non sempre la somma di una serie di funzioni continue è ancora una funzione continua.

Anche nel caso delle serie si introduce il concetto di convergenza uniforme. Precisamente:

DEFINIZIONE. Diremo che una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, con $f_n\colon E \to \mathbb{R}$, *converge uniformemente* a una funzione $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > \nu$, e per ogni $x \in E$, si ha $|\varphi(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

Il Teorema visto nel paragrafo precedente ci dice che:

TEOREMA 1'. *Se una serie di funzioni continue converge uniformemente, allora ance la funzione somma è continua.* $\blacksquare$

PROBLEMA. È dato un sistema infinito di funzioni $\Phi := \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\}$ con $\varphi_n : I = [a,b] \to \mathbb{R}$. Si vuol vedere se, data una funzione $g : I \to \mathbb{R}$, esiste una successione numerica $(a_n)_n$ tale che

$$(\forall x \in I)(g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_n(x)).$$

In caso affermativo, si dice che g è *sviluppabile in serie di funzioni* rispetto al sistema Φ.

Ci sono due casi particolari di fondamentale importanza:
- *Sviluppabilità in serie di potenze* (o di *Taylor*), se è $\varphi_n(x) = (x - x_0)^n,\ n \in \mathbb{N},\ x_0 \in I$.
- *Sviluppabilità in serie di Fourier,* se è:

$$\varphi_0(x) = 1;\ \varphi_{2n-1}(x) = \sin(nx);\ \varphi_{2n}(x) = \cos(nx),\ n \in \mathbb{N}^+.$$

Noi ci occuperemo esclusivamente del primo caso.

§ 3. SERIE DI POTENZE

DEFINIZIONE. Fissiamo un $x_0 \in \mathbb{R}$. Si dice *serie di potenze* di $(x - x_0)$ una serie del tipo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

dove i numeri reali $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ sono detti i *coefficienti* della serie.

ESEMPIO. 1) Consideriamo le tre serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n!\,x^n$. La prima converge per ogni x reale con $|x| < 1$; la seconda converge per ogni x reale; la terza converge solo per $x = 0$.

TEOREMA 2. (*Lemma di Abel*) - *Se la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ *converge per* $x = x_1$, *allora converge assolutamente per ogni* x *per cui è* $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$. *La stessa tesi sussiste anche sotto l'ipotesi più debole che la successione* $(a_n(x_1 - x_0)^n)_n$ *risulti limitata.*

DIM. Sappiamo che, se la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ converge, allora la successione $(a_n(x_1 - x_0)^n)_n$ tende a 0 ed è, pertanto, limitata. Supponiamo dunque $|a_n(x_1 - x_0)^n| < M$, per ogni n. Sia $(0 \le) |x - x_0| < |x_1 - x_0|$; si ha:

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n| \cdot |x - x_0|^n = |a_n| \cdot |x_1 - x_0|^n \cdot \frac{|x - x_0|^n}{|x_1 - x_0|^n} \le M \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^n,$$

da cui la tesi, essendo convergente la serie a termini reali positivi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^n. \ \blacksquare$$

DEFINIZIONE. Sia $A = \{|x - x_0|: \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ converge$\}$ e sia $R := \sup A$, con $0 \le R \le + \infty$. R è detto *raggio di convergenza* della serie.

TEOREMA 3. *Data la serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$, *sia R il suo raggio di convergenza. Allora:*
1) *La serie converge assolutamente per ogni x tale che* $|x - x_0| < R$.
2) *La serie non converge per ogni x per cui è* $|x - x_0| > R$.

DIM. Se è $|x - x_0| < R$, esiste un x_1, con $|x - x_0| < |x_1 - x_0| \le R$, tale che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ risulta convergente. Per il Teorema precedente, si ha subito la prima parte della tesi. La seconda segue dal fatto che, per la stessa definizione di R, la serie non può convergere per nessun x per cui sia $|x - x_0| > R$. ∎

OSSERVAZIONE. Sussiste anche l'implicazione opposta di quest'ultimo Teorema, cioè:

Se un numero reale R soddisfa alle proprietà (1) *e* (2) *del precedente Teorema, allora R è il raggio di convergenza della serie di potenze.*

COROLLARIO 4. *Data la serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$, *sia R il suo raggio di convergenza. Se è* $R = 0$, *la serie converge solo in* x_0; *se è* $R = + \infty$, *la serie converge per ogni numero reale x; se è* $0 < R < + \infty$, *la serie converge in ogni punto dell'intervallo aperto* $]x_0 - R, x_0 + R[$, *mentre non converge in ciascuno dei punti esterni a tale intervallo* ∎

N.B. I punti $x_0 - R$ *e* $x_0 + R$ vanno studiati a parte.

DEFINIZIONE. Se il raggio di convergenza R di una serie di potenze è finito e positivo, l'insieme $I_R =]x_0 - R, x_0 + R[$ è detto l'*intervallo di convergenza*, mentre è detto *insieme di convergenza* l'insieme D formato da tutti i punti di $\mathbb{R}$ in cui la serie converge. Si ha $I_R \subset D \subset \overline{I_R} = [x_0 - R, x_0 + R]$.

ESEMPIO. 2) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge per $-1 < x < 1$. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ converge per $-1 \le x < 1$. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$ converge per $-1 \le x \le 1$.

Stabiliamo due criteri per determinare il raggio R di convergenza di una serie di potenze.

TEOREMA 5. *Se esiste il* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, allora si ha:

$R = 0$, *se è* $L = + \infty$; $R = + \infty$, *se è* $L = 0$; $R = 1/L$, *se è* $0 < L < + \infty$.

DIM. Sia $0 < \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < + \infty$ e si fissi un x tale che $|x - x_0| < \frac{1}{L}$. Si ha:

$$\sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\, |x - x_0| \to L\, |x - x_0| = K < 1;$$

la serie converge per il Criterio dalla radice (caso del limite). Se, invece, è $|x - x_0| > \frac{1}{L}$, si ha:

$$\sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|x - x_0| \ \to\ L\,|x - x_0| = H > 1;$$

dunque la serie non converge (sempre per lo stesso Criterio).

Se è $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, si ha $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x - x_0| = 0$, per ogni x e quindi la serie converge per ogni numero reale.

Se, in fine, è $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, si ha $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x - x_0| = +\infty$, per ogni $x \neq x_0$ e quindi la serie non converge per alcun numero reale diverso da x_0. ∎

In modo perfettamente analogo, si prova il

TEOREMA 6. *Se esiste il* $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$, *allora si ha:*

$R = 0$, *se è* $L = +\infty$; $R = +\infty$, *se è* $L = 0$; $R = 1/L$, *se è* $0 < L < +\infty$. ∎

ESEMPI. 3) Si vuol studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\log(n+1)}(x - 2)^n$. Si ha:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^2}{\log(n+2)} \frac{\log(n+1)}{n^2} \to 1.$$

È dunque $R = 1$. La serie converge per $x \in\ ]1, 3[$. Per $x = 1$ o $x = 3$, la serie non converge, dato che per il suo termine generale b_n si ha $|b_n| = \frac{n^2}{\log(n+1)} \to +\infty$.

4) Si vuol studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n (x + 1)^n$. Si ha:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = 2 + \frac{1}{n} \to 2.$$

È dunque $R = \frac{1}{2}$. La serie converge per $x \in\ ]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$. Per $x = -\frac{3}{2}$ o $x = -\frac{1}{2}$, la serie non converge, dato che per il suo termine generale b_n si ha

$$|b_n| = \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}{2^n} > 1.$$

§ 4. SERIE DI POTENZE E DERIVAZIONE

TEOREMA 7. *Se la serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ *ha raggio di convergenza R, allora è R anche il raggio di convergenza della serie delle derivate* $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$.

DIM. Siano R e R' i raggi di convergenza delle due serie. Dato un x_1 tale che $0 < |x_1 - x_0| < R'$, la serie di termine generale $b_n = n \cdot a_n (x_1 - x_0)^{n-1} = \frac{n\, a_n}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0)^n$ converge assolutamente. Per n sufficientemente grande, si ha $|b_n| = \frac{n|a_n|}{|x_1 - x_0|}|x_1 - x_0|^n > |a_n| \cdot |x_1 - x_0|^n$. Per il criterio del confronto, si ottiene che per $x = x_1$ converge anche la serie di partenza. È dunque $R \geq R'$.

Sia ora x_1 tale che $0 < |x_1 - x_0| < R$; esiste pertanto un x_2 tale che $|x_1 - x_0| < |x_2 - x_0| < R$. Dunque la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot |x_2 - x_0|^n$ converge. Ora, per n sufficientemente grande, si ha:

$$n\, |a_n| \cdot |x_1 - x_0|^{n-1} = |a_n| \left[\frac{n}{|x_2 - x_0|} \left| \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} \right|^{n-1} \right] \cdot |x_2 - x_0|^n < |a_n| \cdot |x_2 - x_0|^n,$$

dato che il fattore $\left[\frac{n}{|x_2 - x_0|} \left| \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} \right|^{n-1} \right]$ tende a zero. Per il criterio del confronto, si ottiene che per $x = x_1$ converge anche la serie delle derivate. È dunque anche $R \leq R'$. ∎

Sussiste inoltre il seguente importante risultato:

TEOREMA 8. *(di derivabilità) - Data la serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$, *con raggio di convergenza* $R > 0$, *la funzione somma* $f(x)$ *è derivabile in* $]x_0 - R;\, x_0 - R[$ *e si ha* $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n (x - x_0)^{n-1}$.

DIM. Effettuando il cambio di variabile: $x - x_0 = u$, si ottiene la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$ che, ovviamente, ha ancora raggio di convergenza R. Sappiamo che anche la serie delle derivate $\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n u^{n-1}$ ha lo stesso raggio di convergenza. Fissiamo un u con $|u| < R$. Chiamiamo h e δ due numeri reali tali che $0 < |h| < \delta < R - |u|$. Si ha:

$$\left| \frac{f(u+h) - f(u)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n u^{n-1} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left((u+h)^n - u^n\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n u^{n-1} h \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h} \left(0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left[(u+h)^n - u^n - n\, h u^{n-1}\right] \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left[u^n + n\, u^{n-1} h + \binom{n}{2} u^{n-2} h^2 + \binom{n}{3} u^{n-3} h^3 + \ldots + h^n - u^n - n\, h u^{n-1} \right] \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} a_n \left[\binom{n}{2} u^{n-2} h^2 + \binom{n}{3} u^{n-3} h^3 + \ldots + h^n \right] \right) \right| =$$

$$= |h| \times \left| \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \left[\binom{n}{2} u^{n-2} + \binom{n}{3} u^{n-3} h + \ldots + h^{n-2} \right] \right| \leq$$

$$\leq |h| \times \left(\sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| \left[\binom{n}{2} |u|^{n-2} + \binom{n}{3} |u|^{n-3} \delta + \ldots + \delta^{n-2} \right] \right) =$$

$$= |h| \times \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|a_n|}{\delta^2} \left[\binom{n}{2} |u|^{n-2} \delta^2 + \binom{n}{3} |u|^{n-3} \delta^3 + \ldots + \delta^{n} \right] \right) \leq$$

$$\leq \frac{|h|}{\delta^2} \times \left(\sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| \, (|u| + \delta)^n \right).$$

Essendo, per ipotesi, $|u| + \delta < R$, la serie a termini positivi $\sum_{n=2}^{+\infty} |a_n|(|u| + \delta)^n$ è convergente ad un valore K dato dall'estremo superiore dell'insieme delle sue ridotte (Teor. sul limite delle funzioni monotone!). In conclusione, risulta:

$$\left| \frac{f(u+h) - f(u)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n u^{n-1} \right| \leq \frac{|h|}{\delta^2} \times K$$

che tende a 0 al tendere a 0 di h. ∎

COROLLARIO 9. *Se è* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$, *con raggio di convergenza* $R > 0$, *allora la funzione somma* $f(x)$ *è continua su* $]x_0 - R; x_0 + R[$. ∎

TEOREMA 10 *(di integrabilità) - Sia data la serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$, *con raggio di convergenza* $R > 0$ *e sia* $f(x)$ *la sua somma. Allora la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$ *ha ancora raggio di convergenza* R *e la sua somma* $F(x)$ *è una primitiva di* $f(x)$ *sull'intervallo* $]x_0 - R; x_0 + R[$.

DIM. La tesi segue dai Teoremi 7 e 8, dato che la prima serie sopra scritta si ottiene derivando termine a termine la seconda. ∎

Ricordiamo ancora un utile risultato di cui non riportiamo la dimostrazione:

TEOREMA 11 *(di Abel) - È data la serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$, *con raggio di convergenza* $R > 0$. *Se la serie converge per* $x = x_0 + R$ [*per* $x = x_0 - R$], *allora la funzione somma* $f(x)$ *è continua anche nel punto* $x_0 + R$ [*nel punto* $x_0 - R$]. ∎

§ 5. SVILUPPABILITÀ IN SERIE DI TAYLOR

Dal Teorema 8 segue subito il

TEOREMA 12. *Sia data la serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$, *con raggio di convergenza* $R > 0$. *La funzione somma* $f(x)$ *è derivabile infinite volte su* $I =]x_0 - R, x_0 + R[$ (ossia: $f \in C^{\infty}(I)$) *e si ha:*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x - x_0)^{n-k},$$

dove la serie a secondo membro ha ancora raggio di convergenza R. ∎

COROLLARIO 13. *Se è* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ *su* $]x_0 - R, x_0 + R[$, *si ha:* $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.
È dunque:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n . \blacksquare$$

DEFINIZIONE. Sia $f \in C^{\infty}(I)$, con $I =]x_0 - h, x_0 + h[$. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ prende il nome di *serie di Taylor generata da f* o *sviluppo di Taylor di f, con punto iniziale* x_0. Se la serie di Taylor generata da f converge in I alla funzione stessa, si dice che f è *sviluppabile su I in serie di Taylor.*

La ragione di questo nome è data dal fatto che la ridotta k - ima

$$S_k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

è il polinomio di Taylor di f di grado k con punto iniziale x_0.

Dunque, la somma di una serie di potenze è una funzione sviluppabile in serie di Taylor (che coincide con la serie di partenza). Si pone, per contro, il

PROBLEMA. Sotto quali condizioni una funzione f è sviluppabile in serie di potenze?

Intanto, la f deve essere infinitamente derivabile, ma questo *non basta.* Può cioè accadere che la serie di Taylor di una funzione non converga alla funzione che l'ha generata, come appare dal seguente

ESEMPIO. 1) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

Si ha $f^{(n)}(0) = 0$, per ogni n. Quindi la serie di Taylor generata da f, con punto iniziale $x_0 = 0$, è la serie *nulla* che non converge a f (tranne che in $x_0 = 0$).

TEOREMA 14. *Se è $f \in C^\infty(I)$, con $I =]x_0 - h, x_0 + h[$, e se esiste un $M > 0$ per cui risulti $|f^{(n)}(x)| \le M \frac{n!}{h^n}$, per $|x - x_0| < h$, allora, per tali x, è*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

dove la serie a secondo membro ha raggio di convergenza $R \ge h$.

DIM. Se è $|x - x_0| < h$, si ha:

$$|f(x) - S_{k-1}(x)| = \left| f(x) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right| = \left| \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x - x_0)^k \right| =$$

$$= \frac{|f^{(k)}(\xi)|}{k!} |x - x_0|^k \le M \frac{k!}{h^k} \frac{|x - x_0|^k}{k!} \le M \left| \frac{x - x_0}{h} \right|^k = M q^k \to 0,$$

essendo $0 \le q = \left| \frac{x - x_0}{h} \right| < 1$. ▮

TEOREMA 15. *Se è $f \in C^\infty(I)$, con $I =]x_0 - h, x_0 + h[$, e se esiste un $L > 0$ per cui risulti $|f^{(n)}(x)| \le L^n$, per $|x - x_0| < h$, allora la f è sviluppabile su I in serie di Taylor.*

DIM. Si ha: $|f(x) - S_{k-1}(x)| = \frac{|f^{(k)}(\xi)|}{k!} |x - x_0|^k \le \frac{L^k}{k!} |x - x_0|^k < \frac{(Lh)^k}{k!} \to 0$. ▮

COROLLARIO 16. *Se è $f \in C^\infty(I)$, con $I =]x_0 - h, x_0 + h[$, e se esiste un $H > 0$ per cui risulti $|f^{(n)}(x)| \le H$, per $|x - x_0| < h$, allora la f è sviluppabile su I in serie di Taylor.*

DIM. Per $n > 0$ si ha: $|f^{(n)}(x)| \le H < (H + 1)^n$, da cui la tesi per il Teorema precedente. ▮

DEFINIZIONE. Si dice che una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ è *analitica* in $x_0 \in I$ se esiste un $h > 0$ tale che la f risulti sviluppabile in serie di Taylor in $]x_0 - h, x_0 + h[$; la f è detta *analitica* in I se è tale in ogni punto di I.

§ 6. SVILUPP0 IN SERIE DI TAYLOR DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

A) L'esponenziale. $f(x) = e^x$; $x_0 = 0$.

Si ha: $f^{(n)}(x) = e^x$; $f^{(n)}(0) = 1$

e, inoltre: $|f^{(n)}(x)| \le e^h$, per ogni x per cui è $|x| \le h$.

È dunque: $$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{per } |x| < h .$$

Essendo h arbitrario, e^x è sviluppabile su tutto $\mathbb{R}$.

B) Il coseno. $f(x) = \cos x;\ x_0 = 0.$

Si ha: $f^{(4n)}(x) = \cos x$; $f^{(4n+1)}(x) = -\sin x$; $f^{(4n+2)}(x) = -\cos x$; $f^{(4n+3)}(x) = \sin x$;

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n;\ f^{(2n+1)}(0) = 0$$

e, inoltre: $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ per ogni x .

È dunque: $$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Dato che questo è vero in ogni intervallo $]-h, h[$, si conclude che la funzione $\cos x$ è sviluppabile su tutto $\mathbb{R}$.

C) Il seno. $f(x) = \sin x;\ x_0 = 0.$

Si procede esattamente come sopra. Si ottiene:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{su } \mathbb{R}.$$

D) Il coseno iperbolico. $f(x) = \mathrm{Ch}\,x = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $x_0 = 0$.

Si ha: $f^{(2n)}(x) = \cosh x$; $f^{(2n+1)}(x) = \sinh x$; $f^{(2n)}(0) = 1$; $f^{(2n+1)}(0) = 0$,

e, inoltre: $|f^{(n)}(x)| \leq \cosh x < \cosh h$, per $|x| < h$.

È dunque: $$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{per } |x| < h.$$

Essendo h arbitrario, $\cosh x$ è sviluppabile su tutto $\mathbb{R}$.

E) Il seno iperbolico. $f(x) = \mathrm{Sh}\,x = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $x_0 = 0$.

Procedendo come sopra, si trova che è:

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{su } \mathbb{R}.$$

F) La funzione potenza. $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$; $x_0 = 0$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si ha: $f^{(n)}(x) = (\alpha)_n (1 + x)^{\alpha - n} = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n}$;

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \binom{\alpha}{n} = \frac{(\alpha)_n}{n!} = \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}.$$

Lo sviluppo di Taylor di $(1 + x)^{\alpha}$ è dunque dato dalla *serie binomiale*: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.

Proviamo che: 1) Il raggio di convergenza di questa serie è $R = 1$.
2) La serie converge a $f(x)$ in $]-1, 1[$.

1) Si ha: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(\alpha)_{n+1}}{(n+1)!}\;\frac{n!}{(\alpha)_n}\right| = \left|\frac{\alpha - n}{n+1}\right|.$

È dunque, definitivamente, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n - \alpha}{n+1} \to 1 = L.$

Il raggio di convergenza è quindi $R = 1/L = 1$.

2) Posto $$g(x) := \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n;\ \text{per } |x| < 1,$$

si ha: $$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\alpha\binom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1} = \alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1};$$

$$x\,g'(x) = \alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n-1}x^n;$$

$$(1+x)g'(x) = \alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1} + \alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n-1}x^n = \alpha\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n + \alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n-1}x^n =$$

$$= \alpha + \alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1}\right]x^n = \alpha\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = \alpha\, g(x).$$

Si ha dunque: $(1+x)g'(x) = \alpha\, g(x);\quad g(0) = 1,$

ossia: $\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{1+x};\quad g(0) = 1.$

Si ottiene: $D(\log(g(x))) = D(\log(1+x)^\alpha);\ \log(g(0)) = 0,$

da cui: $\log(g(x)) = \log(1+x)^\alpha + c;\quad \log(g(0)) = 0 = \log(1+0)^\alpha + c = c,$

e, in fine, $\log(g(x)) = \log(1+x)^\alpha.$

Ma ciò equivale a $g(x) = (1+x)^\alpha.$

È dunque: $$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n;\ \text{per } |x| < 1,$$

Casi particolari di α per la funzione potenza. (Sempre con $|x| < 1$.)

1) La radice. $\boxed{\alpha = 1/2.}$ Si ha:

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{1/2}{n}x^n = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(1/2)_n}{n!}x^n =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(1-2\bullet1)(1-2\bullet2)(1-2\bullet3)\ldots(1-2(n-1))}{2^n n!}x^n =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n.$$

Si può provare che la serie converge anche per $x = 1$ (Leibniz); per il Teorema di Abel, si ha poi che la somma della serie è $\sqrt{2}$.

ESEMPIO. 1) Si ha

$$\sqrt{53} = \sqrt{49 + 4} = 7\sqrt{1 + \frac{4}{49}} = 7\left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{4}{49} - \frac{1}{4 \times 2}\left(\frac{4}{49}\right)^2 + \ldots\ldots\right) \approx$$

$$\approx 7\left[1 + \frac{2}{49} - \frac{2}{49^2}\right] = 7 \times \frac{2497}{2401} = 7{,}27988\ldots\ldots$$

(In realtà, è $\sqrt{53} = 7{,}2801\ldots\ldots$)

2) $\boxed{\alpha = -1.}$ Si ha: $\dfrac{1}{1 + x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.

2') Il logaritmo. Posto $g(x) = \log(1 + x)$, si ha:

$$g'(x) = \frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n ,$$

da cui $g(x) = \log(1 + x) = 0 + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1} x^{n+1}$.

La serie è convergente anche per $x = 1$ (Leibniz); inoltre essa converge a $\log 2$ per il Teorema di Abel. Lo sviluppo non è molto efficace, perché la convergenza è molto lenta.

Ora, avendosi $\log(1 - x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{n + 1} x^{n+1}$,

si ottiene: $\log\dfrac{1 + x}{1 - x} = \log(1 + x) - \log(1 - x) =$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{n + 1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n + 1} x^{2n+1} .$$

Siccome, per ogni $y > 0$ esiste uno ed un solo $x \in\ ]-1, 1[$ tale che $y = \dfrac{1 + x}{1 - x}$ $\left[x = \dfrac{y - 1}{y + 1}\right]$, si ha $\log y = \log \dfrac{1 + x}{1 - x}$. Sottolineiamo esplicitamente il fatto che questa formula permette il calcolo del logaritmo di un qualunque numero positivo.

ESEMPIO. 2) Si ha: $\log 2 = \log \dfrac{1 + 1/3}{1 - 1/3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n + 1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} =$

$$= 2\left[1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \ldots\right] \approx 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215}\right] \approx 0{,}693004.$$

(In verità, è $\log 2 = 0{,}69314\ldots$)

3) L'arcotangente. Si ha: $\dfrac{1}{1 + x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$.

Posto $g(x) = \operatorname{arctg} x$, si ha: $g'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$, da cui:

$$g(x) = \operatorname{arctg} x = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Per $x = -1$, la serie diverge, mentre, per $x = 1$, converge (Leibniz) e la sua somma è, per il Teorema di Abel, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Si ha, in particolare, $$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

e quindi $$\pi = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

4) $\boxed{\alpha = -\frac{1}{2}}$. Si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1/2)_n}{n!} x^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, 1(1+2)(1+2\cdot 2)(1+2\cdot 3)\ldots(1+2(n-1))}{2^n n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n.$$

4') L'arcoseno. Si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}.$$

Posto $g(x) = \arcsin x$, si ha:

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}.$$

Ne viene: $$g(x) = \arcsin x = 0 + x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} x^{2n+1}.$$

È immediato verificare che la serie converge anche per $x = -1$ (Leibniz). La convergenza per $x = 1$ segue dal fatto che, per la Formula di Wallis (cfr. Cap. 5, § 6), il termine generale della serie è strettamente equivalente a $\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2\pi n}}$ ed è quindi un infinitesimo di ordine $\frac{3}{2}$. Dal Teorema di Abel si ha poi che la somma della serie è data, rispettivamente, da $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

In particolare, si ha:

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} \frac{1}{2^{2n+1}},$$

da cui $$\pi = 3 + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Si ha così una formula per il calcolo di π più efficace di quella vista in precedenza. Per esempio, già con S_4 si ottiene un valore di π dato da

$$3 + 6\left[\frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \frac{15}{43008} + \frac{105}{1769472}\right] \approx 3{,}141511\ldots$$

§7. SERIE DI POTENZE NEL CAMPO COMPLESSO

Anche le nozioni di successione e di serie di funzioni si estendono in modo del tutto naturale al campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. È però necessario riadattare alcune note definizioni.

DEFINIZIONE. Dati un numero complesso z_0 e un numero reale positivo r, si chiama *sfera aperta di cento* z_0 e *raggio* r l'insieme $S(z_0, r) := \{z\colon d(z, z_0) < r\}$. Si chiama poi *intorno* di z_0 ogni sottoinsieme di $\mathbb{C}$ che contiene una sfera aperta di centro z_0.

DEFINIZIONE. Dati un sottoinsieme E di $\mathbb{C}$ e un numero complesso z_0, diremo che z_0 è un *punto di accumulazione* per E se in ogni intorno di z_0 cadono infiniti punti di E.

DEFINIZIONE. Dati una funzione f: E ($\subset \mathbb{C}$) $\to \mathbb{C}$ e un punto $z_0 \in E$, la f è *continua* in z_0 se, per ogni intorno V di $f(z_0)$, esiste un intorno U di z_0 tale che $f(U \cap E) \subset V$, ossia se

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, z \in E)(d(z, z_0) < \delta \Rightarrow d(f(z), f(z_0)) < \varepsilon).$$

Si dice che una funzione f: E ($\subset \mathbb{C}$) $\to \mathbb{C}$ è *continua* in E se è continua in ogni punto di E.

ESEMPIO. 1) Sono continue le funzioni di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$: z^n, ($n \in \mathbb{N}$), $|z|$, $\overline{z}$; è continua anche la funzione di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ in $\mathbb{C}$ definita da $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Posto $z = x + yi$, la funzione di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ definita da $f(z) = \operatorname{sign}(y)$ non è continua nei punti del tipo $z = x + 0i$.

DEFINIZIONE. Dati una funzione f: E ($\subset \mathbb{C}$) $\to \mathbb{C}$, un punto z_0 di accumulazione per E e un numero complesso l, si dice che l è il *limite della f per z che tende a* z_0 se, per ogni intorno V di l, esiste un intorno U di z_0 tale che $f(U \cap E \setminus \{z_0\}) \subset V$, ossia se

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, z \in E)(0 < d(z, z_0) < \delta \Rightarrow d(f(z), l) < \varepsilon).$$

In tal caso si scrive $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$.

DEFINIZIONE. Dati una funzione f: E ($\subset \mathbb{C}$) $\to \mathbb{C}$ e un punto $z_0 \in E$, la f è detta *derivabile* in z_0 se esiste finito il limite del rapporto incrementale della f relativamente a z_0, ossia se esiste finito il $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.

ESEMPI. 2) Sia $f(z) = z^n$, ($n \in \mathbb{N}^+$). si ha

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + z^{n-3}z_0^2 + \ldots + z_0^{n-1}$$

che tende a nz_0^{n-1}. Si ha dunque, per ogni $z \in \mathbb{C}$: $\boxed{D(z^n) = nz^{n-1}.}$

3) Sia $f(z) = \overline{z}$, con $z = x + yi$. Si ha

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(x - yi) - (x_0 - y_0 i)}{(x + yi) - (x_0 + y_0 i)} = \frac{x - x_0 - (y - y_0)i}{x - x_0 + (y - y_0)i}.$$

Se è $y = y_0$, e quindi $x \neq x_0$, il rapporto incrementale vale costantemente 1; se è $x = x_0$, e quindi

$y \neq y_0$, il rapporto incrementale vale costantemente -1. Non esiste dunque il limite del rapporto incrementale e la funzione non è derivabile in alcun punto del suo dominio.

Segnaliamo che continuano a sussistere le regole di derivazione studiate nel caso delle funzioni reali di variabile reale, come si constata molto facilmente ripercorrendo le dimostrazioni fatte a suo tempo.

DEFINIZIONE. Data una successione $(f_n)_n$ di funzioni a valori complessi e definite in un insieme $E \subset \mathbb{C}$, diremo che essa *converge (puntualmente)* a una funzione $\varphi: E \to \mathbb{C}$ se, per ogni $z \in E$, la successione numerica $(f_n(z))_n$ è convergente a $\varphi(z)$. Scriveremo $f_n \to \varphi$, o $\varphi = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$.

DEFINIZIONE. Data la successione di funzioni f_n: E $(\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, si definisce la successione $(S_n)_n$, ancora con S_n: E $(\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, delle *somme parziali* o *ridotte* ponendo

$$S_n(z) := f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z).$$

La coppia $((f_n)_n, (S_n)_n)$ si dice *serie di funzioni*. La indicheremo scrivendo $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.

DEFINIZIONE. Data la serie di funzioni $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$, con f_n: E $(\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, diremo che essa *converge (puntualmente)* a una funzione $\varphi: E \to \mathbb{C}$ se ciò accade per la successione $(S_n)_n$.

Ci limiteremo a studiare il caso delle serie di potenze.

DEFINIZIONE. Fissiamo uno $z_0 \in \mathbb{C}$. Si dice *serie di potenze* di $(z - z_0)$ una serie del tipo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots$$

dove i numeri complessi $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sono detti i *coefficienti* della serie.

Per le serie di potenze nel campo complesso continuano a valere tutti i risultati stabiliti nei § 3 e 4 per le analoghe serie nel campo reale. In particolare, si ha:

TEOREMA 2'. *Se la serie* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ *converge per* $z = z_1$, *allora converge assolutamente per ogni* z *per cui è* $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. *La stessa tesi sussiste anche sotto l'ipotesi più debole che la successione* $(a_n(z_1 - z_0)^n)_n$ *risulti limitata.* ∎

DEFINIZIONE. Sia $A = \{|z - z_0|: \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge$\}$, e sia $R = \sup A$, con $0 \leq R \leq +\infty$. R è detto *raggio di convergenza* della serie.

TEOREMA 3'. *Data la serie di potenze* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$, *sia* R *il suo raggio di convergenza. Allora:*

1) *La serie converge assolutamente per ogni* z *tale che* $|z - z_0| < R$.
2) *La serie non converge per ogni* z *per cui è* $|z - z_0| > R$. ∎

N.B. I punti dell'insieme $\{z: |z - z_0| = R\}$ *vanno studiati a parte.*

Continuano inoltre a sussistere i Criteri del rapporto e della radice per la ricerca del raggio di convergenza.

ESEMPI. 4) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ converge per $|z| < 1$.

5) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n+1}$ converge per $|z| \leq 1$, ma con $z \neq 1$ (Cap. 9, Teor. 22).

6) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2+1}$ converge per $|z| \leq 1$.

7) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (n!)z^n$ converge solo in $z = 0$.

8) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log(n+2)}{n^2+1}(z-2)^n$ ha raggio di convergenza $R = 1$ (Crit. del rapporto). Essa converge assolutamente per $|z - 2| < 1$. Sia ora $|z - 2| = 1$. Il modulo del termine generale della serie è $\frac{\log(n+2)}{n^2+1}$ che tende a 0 con un ordine poco minore di 2 (è, per esempio, maggiore di $\frac{3}{2}$); la serie è dunque assolutamente convergente anche per $|z - 2| = 1$.

§ 8. LE FUNZIONI ELEMENTARI NEL CAMPO COMPLESSO

Come possiamo definire le funzioni elementari (esponenziale, seno e coseno, funzioni iperboliche, logaritmo) nel campo complesso?

Sappiamo che in $\mathbb{R}$, si ha, per esempio, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. L'idea è quella di estendere, per definizione, questa uguaglianza anche al campo complesso.

DEFINIZIONE. Si definiscono nel campo complesso le seguenti funzioni:

Esponenziale: $$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Coseno iperbolico: $$\cosh z = \mathrm{Ch} z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Seno iperbolico: $$\sinh z = \mathrm{Sh} z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Coseno: $$\cos z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Seno: $$\sin z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Si tenga presente che anche nel campo complesso sussiste il seguente risultato:

TEOREMA 17. *Per ogni* $z, w \in \mathbb{C}$, *si ha* $e^{z+w} = e^z e^w$. ▮

TEOREMA 18. *Sussistono le seguenti Formule di Eulero:*

1) $e^{iy} = \cos y + i \sin y$; $\qquad e^{-iy} = \cos y - i \sin y$;

2) $\cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \mathrm{Ch}(yi)$ $\qquad \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \dfrac{\mathrm{Sh}(yi)}{i}$.

Inoltre:

3) *La funzione* e^z *è periodica di periodo* $2\pi i$.

DIM. 1) Si ha:

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots,$$

$$i \sin y = i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots\right) = iy + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \dots.$$

Per incastro, si ottiene l'uguaglianza:

$$\cos y + i \sin y = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} + \dots =$$

$$= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \dots = e^{iy}.$$

L'altra delle (1) si prova in modo analogo.
Le (2) si ottengono per somma e sottrazione dalle precedenti.
La (3) segue immediatamente dalla prima delle (1) e dall'uguaglianza $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. ▮

Evidenziamo ancora che, se è $z = x + iy$, si ha

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).}$$

$$\boxed{e^{\pi i} = -1.} \qquad \boxed{e^z \neq 0,\ \forall z.} \qquad \boxed{|e^{iy}| = |(\cos y + i \sin y)| = 1.}$$

$$\boxed{|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x |(\cos y + i \sin y)| = e^x .}$$

Si constata immediatamente che

TEOREMA 19. *Le funzioni di* $\mathbb{C}$ *in* $\mathbb{C}$ *sopra definite sono derivabili e, anzi, analitiche. Si ha inoltre, sempre analogamente al caso reale:*

$D(e^z) = e^z$; $\quad D(\mathrm{Ch} z) = \mathrm{Sh} z$; $\quad D(\mathrm{Sh} z) = \mathrm{Ch} z$; $\quad D(\cos z) = -\sin z$; $\quad D(\sin z) = \cos z$. ▮

Passiamo a definire il logaritmo nel campo complesso.
Dato $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, questo può essere scritto nella forma

$$w = \rho(\cos\vartheta + i \sin\vartheta) = \rho e^{i\vartheta}, \text{ con } \rho > 0.$$

Cerchiamo ora *tutti* i numeri complessi $z = x + iy$ per cui è

(*) $$e^z = w.$$

Essendo $e^z = e^{z + iy}$, la (*) può essere scritta nella forma

$$e^{x + iy} = \rho e^{i\vartheta}$$

o anche

$$e^x(\cos y + i \sin y) = \rho(\cos\vartheta + i \sin\vartheta),$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} e^x = \rho \\ \cos y = \cos\vartheta \\ \sin y = \sin\vartheta \end{cases}.$$

Si ottiene:

$$\begin{cases} x = \log\rho \\ y = \vartheta + 2k\pi \end{cases}.$$

L'equazione $e^z = w$ ha dunque infinite soluzioni, in accordo col fatto che, come si è visto, la funzione esponenziale è, nel campo complesso, periodica di periodo $2\pi i$. Essa non è dunque invertibile. Per renderla tale è necessario considerare la sua restrizione ad un opportuno sottoinsieme E di $\mathbb{C}$. Da quanto precede, si vede che la funzione esponenziale ristretta all'insieme $E = \{z = x + yi: -\pi < y \leq \pi\}$ è iniettiva ed assume tutti i valori complessi non nulli.

DEFINIZIONE. La funzione inversa della funzione esponenziale ristretta all'insieme $E = \{z = x + yi: -\pi < y \leq \pi\}$ è detta funzione logaritmo. Essa è dunque una funzione di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ in E. Il logaritmo di un numero complesso $w = \rho e^{i\vartheta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è dunque l'unico numero complesso $z = x + yi =: \log w$, con $-\pi < y \leq \pi$ per cui è $e^z = w$.

Osservazione. Si usa talvolta chiamare *logaritmo* del numero complesso $w = \rho e^{i\vartheta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ l'insieme (indicato con $\operatorname{Log} w$) di *tutti* i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $e^z = w$, ossia l'insieme dei numeri complessi della forma

$$z = \log\rho + (\vartheta + 2k\pi)i, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Prendendo $k \in \mathbb{Z}$ in modo che risulti $\vartheta + 2k\pi \in]-\pi, \pi]$, si ottiene un unico valore di z che prende il nome di *determinazione principale* del logaritmo di w e che è appunto quello che abbiamo indicato con $\log w$.

Si tenga ben presente che, con questa definizione di logaritmo, non si ottiene una funzione di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ in $\mathbb{C}$, ma un'applicazione di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nell'insieme $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ delle parti di $\mathbb{C}$.

ESEMPI. 1) Cerchiamo Log(-1). Essendo $-1 = 1\, e^{\pi i}$, si ha $\operatorname{Log}(-1) = \log 1 + (\pi + 2k\pi)i$ e, quindi, $\log(-1) = \pi i$.

2) Cerchiamo Log(1 + i). Essendo $1 + i = \sqrt{2}\, e^{(\pi/4)i}$, si ha:

$$\operatorname{Log}(1 + i) = \log\sqrt{2} + (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)i\ ; \quad \log(1 + i) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}i.$$

§ 9. ESERCIZI

1) Trovare lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(x) = \log\sqrt{1 + x^2}$.

[$\Re$. $f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x^2)^{n+1}$.]

2) Trovare una primitiva di ciascuna delle funzioni: $f(x) = e^{x^2}$; $g(x) = \frac{\sin x}{x}$.

[$\Re$. $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n!} \Rightarrow F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + F(0)$; $x \in \mathbb{R}$;

$g(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \Rightarrow G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + G(0)$; $x \in \mathbb{R}$.]

3) Trovare gli sviluppi di Taylor, con punto iniziale $x_0 = 0$, delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = e^{3x+1}$; *b*) $f(x) = \sin(x + \pi/4)$; *c*) $f(x) = \sin x \cos x$;
d) $f(x) = \cosh x - \cos x$; *e*) $f(x) = \sqrt{4 + x}$.

[$\Re$. *a*) $f(x) = e \cdot e^{3x} = e\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(3x)^n}{n!}$;

b) $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots\right)$;

c) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

d) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1 - (-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(4n+2)!}x^{4n+2}$;

e) $f(x) = 2\sqrt{1 + \frac{x}{4}} = 2\left[1 + \frac{x}{8} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!\,4^n}x^n\right]$, con raggio di converga. $R = 4$.]

4) Trovare gli sviluppi di Taylor delle funzioni:

a) $f(x) = e^{-2x}$; $x_0 = -1$; *b*) $f(x) = \sin x$; $x_0 = \frac{\pi}{2}$; *c*) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $x_0 = -2$.

[$\Re$. *a*) Posto $x = t - 1$, si ha $e^{-2x} = e^2 e^{-2t} = e^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2t)^n}{n!} \Rightarrow f(x) = e^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n (x+1)^n}{n!}$.

b) Posto $x = t + \frac{\pi}{2}$, si ottiene $\sin x = \sin(t + \frac{\pi}{2}) = \cos t \Rightarrow \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(x - \pi/2)^{2n}}{(2n)!}$.

c) Essendo $\frac{1}{x^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x}\right)$ e $-\frac{1}{x} = \frac{-1}{(x+2) - 2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{x+2}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x+2)^n}{2^{n+1}}$,

si ottiene $\frac{1}{x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(x+2)^{n-1}}{2^{n+1}}$, con raggio di convergenza $R = 2$.]

5). Calcolare, con 3 cifre decimali esatte i numeri:

$$a)\ \frac{1}{e};\quad b)\ \log(1{,}9);\quad c)\ \cos 5°;\quad d)\ \sin 80°.$$

[$\Re$. *a*) $\frac{1}{e} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$; serie di Leibniz; si ha: $|\frac{1}{e} - S_n| < \frac{1}{(n+1)!}$; basta che sia $\frac{1}{(n+1)!} < 5 \times 10^{-4} = \frac{1}{2000}$; è sufficiente $n = 6$.

b) $\log(1{,}9) = \log\frac{19}{10} = \log(1 + \frac{9}{10}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}$; è $|\log(1{,}9) - S_n| < \frac{1}{n+2}\left(\frac{9}{10}\right)^{n+2}$; basta che sia $\frac{1}{n+2}\left(\frac{9}{10}\right)^{n+2} < \frac{1}{2000}$; per questo è …sufficiente prendere $n = 26$.

Per contro, si ha:

$$\log(1{,}9) = \log\frac{1 + 9/29}{1 - 9/29} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n+1}\left(\frac{9}{29}\right)^{2n+1} = \frac{18}{29}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{81}{841}\right)^n = \frac{18}{29}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Essendo, per ogni n, $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$, si ha $\sum_{m=n+1}^{+\infty} a_m < 2a_{n+1} < a_n$, da cui si ottiene

$$\log(1{,}9) - S_n < \frac{18}{29}\, a_n = \frac{18}{29} \times \frac{1}{2n+1}\left(\frac{81}{841}\right)^n.$$

Questa differenza è minore di 5×10^{-4} se è $n \geq 2$.

c) $\cos 5° = \cos\frac{5\pi}{180} = \cos\frac{\pi}{36} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^{2n}$; è una serie di Leibniz; si ha:

$$|\cos 5° - S_n| \leq \frac{1}{(2(n+1))!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^{2(n+1)} < \frac{1}{(2(n+1))!}\left(\frac{1}{9}\right)^{2(n+1)}.$$

Quest'ultima espressione è minore di 5×10^{-4} se è $n \geq 1$.

d) Basta osservare che è $\sin 80° = \cos 10° = \cos\frac{\pi}{18}$ ……]

6) Trovare i raggi di convergenza delle seguenti serie e studiarne il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza:

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n;\quad b)\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(1 - \sqrt{n})^n};\quad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\log(n+1)};\quad d)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2n}}{\sqrt{n+1}};$$

$$e)\ \sum_{n=0}^{+\infty} (-3)^n (x+1)^n;\quad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n^3}(4 - x)^n;\quad g)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + 5^n}{n!} x^n.$$

[$\Re$. *a*) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{4}$; quindi è $R = 4$. Per $x = \pm 4$, si ottengono serie numericche per il cui termine generale si ha $|b_n| \approx \frac{n^{2n}e^{-2n}\ 2\pi n\ 4^n}{2^{2n}n^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}} = \sqrt{\pi n} \to +\infty$ e che quindi non convergono.

b) $\sqrt[n]{|a_n|} \to 0$; è quindi $R = +\infty$.

c) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$; è quindi $R = 1$. Per $x = 1$, è $b_n = \frac{1}{\log(n+1)}$; ordine di infinitesimo sottoreale, serie divergente. Per $x = -1$, è $b_n = \frac{(-1)^n}{\log(n+1)}$; serie convergente (Leibniz).

d) Posto $x^2 = y$, si ottiene la serie di termine generale $\dfrac{2^n y^n}{\sqrt{n+1}}$; per questa serie, è $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 2$; il suo raggio di convergenza è, perciò, $\dfrac{1}{2}$; di conseguenza, quello della serie data è $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Per $|x| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, si ottiene la serie numerica di termine generale $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ che è divergente.

e) $\sqrt[n]{|a_n|} = 3$; si ha quindi $R = \dfrac{1}{3}$. Se è $|x + 1| = \dfrac{1}{3}$, si ottengono serie numeriche il cui termine generale, in valore assoluto, è uguale a 1 e che, perciò, non convergono.

f) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to e$; è quindi $R = \dfrac{1}{e}$. Se $|4 - x| = \dfrac{1}{e}$, si ottengono serie numeriche il cui termine generale, in valore assoluto, è uguale a $\dfrac{1}{n^3}$ e che, perciò, convergono assolutamente.

g) Si ha $0 < a_n \approx \dfrac{5^n}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \left(\dfrac{5e}{n}\right)^n \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}} < \left(\dfrac{5e}{n}\right)^n = b_n$. Avendosi $\sqrt[n]{b_n} = \dfrac{5e}{n} \to 0$, si ha $R = +\infty$.

7) Trovare il raggio di convergenza e la somma delle seguenti serie:

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (4x)^n\ ;\quad b)\ \sum_{n=0}^{+\infty} (n+3)x^n\ ;\quad c)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+3};\quad d)\ \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)x^{2n}\ .$$

[$\Re$. *a*) Si ha $\sqrt[n]{|a_n|} = 4$ e, quindi, $R = \dfrac{1}{4}$. La somma è $f(x) = \dfrac{1}{1+4x}$. Per $|x| = \dfrac{1}{4}$, la serie non converge.

b) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 1 = R$. Per $|x| = 1$, la serie non converge. Per $x \neq 0$, si ha:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+3)x^n = \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty} (n+3)x^{n+2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=3}^{+\infty} n x^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[-1 - 2x + \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}\right] = \frac{1}{x^2}\left[\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) - 1 - 2x\right] = \frac{1}{x^2}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) - 1 - 2x\right] =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{(1-x)^2} - 1 - 2x\right] = \frac{1-(1+2x)(1-x)^2}{x^2(1-x)^2} = \frac{1}{x^2}\frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2} = \frac{3-2x}{(1-x)^2}\ .$$

Si constata poi che l'uguaglianza sussiste anche per $x = 0$.

c) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 1 = R$. Per $x = 1$, la serie diverge, mentre converge per $x = -1$. Per $x \neq 0$, si ha:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+3} = \frac{1}{x^3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{n+3} = \frac{1}{x^3}\left[-\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right] = \frac{1}{x^3}\left[-\log(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{x^3}\log(1-x) - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x}. = g(x).$$

Per $x = 0$, si ha la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{n+3} = \frac{1}{3} = \lim_{x\to 0} g(x)$.

d) Posto $x^2 = y$, si ha:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)x^{2n} =$$

$$= 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)y^n = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sum_{n=0}^{+\infty}(y^{n+1}) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{y}{1-y} = \frac{2}{(1-y)^2} = \frac{2}{(1-x^2)^2}.$$

Il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)y^n$ è $R = 1$, avendosi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$; è dunque 1 anche il raggio di convergenza della serie di partenza. Per $|x| = 1$, la serie diverge.]

8) Si studino le seguenti serie di potenze nel campo complesso:

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-i)^n}{1+4^n};\quad b)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(2z+i)^n}{2^n};\quad c)\ \sum_{n=0}^{+\infty}n^{2n}z^n;$$

$$d)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^n}{(n!)^2};\quad e)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(1+1/n)^n}(z-1)^n$$

[$\Re$. *a*) $\sqrt[n]{|a_n|} \to \frac{1}{4}$; $R = 4$; per $|z - i| = 4$, si ottengono serie il cui termine generale tende a 1; *b*) il termine generale della serie è $n(z + i/2)^n$; si h $R = 1$; per $|z + i/2| = 1$, la serie non converge; *c*) $\sqrt[n]{|a_n|} = n^2 \to +\infty$; $R = 0$; la serie converge solo in $z = 0$; *d*) $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to 0$; $R = +\infty$, la serie converge assolutamente per ogni z; *e*) $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1 = R$; per $|z - 1| = 1$, $z \neq 2$, la serie converge semplicemente, dato che si può applicare il Teor. 22 del Cap. 9.]

9) Si risolvano nel campo complesso le seguenti equazioni:

$$a)\ e^z = \frac{\pi}{4}i;\quad b)\ e^z = 1 + \pi i;\qquad c)\ \log z = \frac{\pi}{4}i;\quad d)\ \log z = 1 + \pi i.$$

[$\Re$. *a*) $\log\frac{\pi}{4} + (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i$; *b*) $\frac{1}{2}\log(1 + \pi^2) + (\mathrm{arctg}\,\pi + 2k\pi)i$; *c*) $e^{(\pi/4)i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$; *d*) $e^{(1+\pi i)} = -e$.]

10) Si studi la seguente serie di potenze:

$$1 - \frac{z}{2} + z^2 - \frac{z^3}{2} + z^4 - \frac{z^5}{2} + \ldots + z^{2n} - \frac{z^{2n+1}}{2} + \ldots$$

[$\Re$. Si ha $R = 1$ (Criterio della radice); si noti che per $z = 2$ si ottiene la serie indeterminata

$$1 - 1 + 2^2 - 2^2 + 2^3 - 2^3 + \ldots + 2^{2n} - 2^{2n} + \ldots]$$

11) Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-n} + i\sin n}{n+1}.$$

[$\Re$. Per il Teorema 20 del Cap. 9, basta studiare la serie di termine generale $\frac{i\sin n}{n+1}$. Per il Teor. 22 del Cap. 9, è semplicemente convergente la serie di termine generale $\frac{\cos n + i\sin n}{n+1}$ e quindi anche la serie data, ancora per il Teor. 20 del Cap. 9.]

Capitolo Undicesimo

LO SPAZIO $\mathbb{R}^n$

§ 1. STRUTTURA METRICA DI $\mathbb{R}^n$

È ben nota la definizione di $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n): x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Ci interesseranno i casi $n = 1, 2, 3$.
In $\mathbb{R}^n$ sono definite le due seguenti operazioni:

1) *Somma:*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

2) *Prodotto per uno scalare:*

$$\lambda\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n), \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Gli elementi di $\mathbb{R}^n$ possono dunque essere interpretati come vettori (cfr. § 3). Usando notazioni vettoriali, conviene pensare gli x_i disposti in colonna, anziché in riga. Poniamo perciò:

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}.$$

Si tenga ben presente che, se è $n > 1$, l'insieme $\mathbb{R}^n$ non è ordinato, ossia: *Se è $n > 1$, non è possibile definire in $\mathbb{R}^n$ una relazione d'ordine totale che sia compatibile con le operazioni di somma e di prodotto per un numero reale e in modo che continui a valere la proprietà di esistenza dell'estremo superiore.*
In $\mathbb{R}^n$ si introduce la *distanza euclidea* data dalla seguente

DEFINIZIONE. Dati $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\underline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, si definisce *distanza (euclidea)* tra $\underline{x}$ e $\underline{y}$ il numero reale

$$d(\underline{x}, \underline{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}\ .$$

Per $n = 1$, si ha: $\qquad d(x, y) = |x - y|.$

TEOREMA 1. *(Proprietà della distanza) - La distanza è un'applicazione di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ che gode delle seguenti proprietà:*

1) $d(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0,\ \forall\, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, (*non negatività*);
2) $d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y},\ \forall\, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, (*non degeneratezza*);
3) $d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{y}, \underline{x}),\ \forall\, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, (*simmetria*);
4) $d(\underline{x}, \underline{y}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y}),\ \forall\, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$, (*disuguaglianza triangolare*). ∎

Le prime affermazioni sono ovvie; l'ultima verrà provata nel § 3, dopo il Teor. 19.
Questo risultato si esprime dicendo che $\mathbb{R}^n$ *è uno spazio metrico.*

DEFINIZIONE.
L'insieme $S(\underline{x}^0, r) := \{\underline{x} : d(\underline{x}, \underline{x}^0) < r\}$ è detto *sfera aperta* di *centro* $\underline{x}^0$ e *raggio* r.
L'insieme $S[\underline{x}^0, r] := \{\underline{x} : d(\underline{x}, \underline{x}^0) \le r\}$ è detto *sfera chiusa* di *centro* $\underline{x}^0$ e *raggio* r.

Per $n = 1$, le sfere sono gli intervalli, per $n = 2$, i dischi, rispettivamente aperti o chiusi, di centro $\underline{x}^0$ e raggio r.

DEFINIZIONE. Un insieme $U \subset \mathbb{R}^n$ è detto un *intorno* di un punto $\underline{x}^0$ se esiste una sfera $S(\underline{x}^0, r)$ contenuta in U. L'insieme degli intorni del punto $\underline{x}$ sarà talvolta indicato con $\mathbb{U}(\underline{x})$.

TEOREMA 2. *Gli intorni di un punto godono delle seguenti proprietà:*
1) *Ogni intorno di un punto contiene il punto stesso.*
2) *Se U è un intorno di $\underline{x}^0$ e $V \supset U$, allora anche V è un intorno di $\underline{x}^0$.*
3) *Se U e V sono intorni di $\underline{x}^0$, allora è tale anche l'insieme $U \cap V$.*
4) *Se è $\underline{x}^0 \neq \underline{y}^0$, allora esistono un intorno U di $\underline{x}^0$ e uno V di $\underline{y}^0$ tali che $U \cap V = \emptyset$.*

DIM. Se U è in intorno di un punto $\underline{x}^0$, allora, per definizione, esiste una sfera aperta S di centro $\underline{x}^0$ contenuta in U; dunque $\underline{x}^0 \in U$ (Prop. 1). Se poi è $U \subset V$, si ha anche $S \subset V$, e quindi anche V è intorno di $\underline{x}^0$ (Prop. 2). Se U e V sono intorni di un punto $\underline{x}^0$, esistono una sfera S' contenuta in U e una sfera S'' contenuta in V, entrambi con centro in $\underline{x}^0$; quella delle due sfere che ha il raggio più piccolo è contenuta in $U \cap V$ che è dunque ancora un intorno del punto $\underline{x}^0$ (Prop. 3).

Passiamo alla (4). Siano $\underline{y}^0$ e $\underline{x}^0$ due punti distinti e sia δ un numero reale positivo e minore di $\frac{1}{2}\, d(\underline{y}^0, \underline{x}^0)$. Vogliamo mostrare che è $S(\underline{x}^0, \delta) \cap S(\underline{y}^0, \delta) = \emptyset$. Procediamo per assurdo. Se esistesse un $\underline{x} \in S(\underline{x}^0, \delta) \cap S(\underline{y}^0, \delta)$, si avrebbe:

$$d(\underline{y}^0, \underline{x}^0) \le d(\underline{y}^0, \underline{x}) + d(\underline{x}, \underline{x}^0) < 2\delta < d(\underline{y}^0, \underline{x}^0). \blacksquare$$

DEFINIZIONE. Si dice che un punto $\underline{x}$ è *interno* a un insieme E se esiste una sfera aperta di centro $\underline{x}$ contenuta in E. L'insieme dei punti interni a un insieme E si chiama *interno* di E e si indica con *int E* o con $\mathring{E}$. Un punto $\underline{x}$ si dice *esterno* a un insieme E se è interno al complementare di E, ossia se esiste una sfera di centro $\underline{x}$ contenuta in $\complement E$.

DEFINIZIONE. Un insieme E è detto *aperto* se ogni suo punto gli è interno o, equivalentemente, se E è intorno di ogni suo punto.
In altre parole, un insieme E è detto *aperto* se è $E = \operatorname{int} E$.

TEOREMA 3. *Una sfera aperta è un insieme aperto.*

DIM. Consideriamo una sfera aperta $S(\underline{x}^0, r)$ e un punto $\underline{y}^0 \in S$. Proviamo che S è intorno anche di $\underline{y}^0$. Sia δ un numero reale positivo e minore di $r - d(\underline{x}^0, \underline{y}^0)$; mostriamo che è $S(\underline{y}^0, \delta) \subset S(\underline{x}^0, r)$. Se è $\underline{x} \in S(\underline{y}^0, \delta)$, da cui $d(\underline{x}, \underline{y}^0) < \delta$, si ha:

$$d(\underline{x}, \underline{x}^0) \le d(\underline{x}, \underline{y}^0) + d(\underline{y}^0, \underline{x}^0) < \delta + (r - \delta) = r. \blacksquare$$

DEFINIZIONE. Un punto $\underline{x}$ è detto *di accumulazione* per un insieme E se in *ogni* intorno di $\underline{x}$ cadono infiniti punti di E. L'insieme dei punti di accumulazione per un insieme E è detto il *derivato* di E e si indica con $\mathbb{D}E$.

DEFINIZIONE. Un sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}^n$ è detto *limitato* se esiste una sfera S di centro nell'origine contenente E.

Sussiste al riguardo il seguente risultato del quale omettiamo la dimostrazione (cfr. Cap. 2, Teor. 22).

TEOREMA 4. *(di Bolzano - Weierstrass) - Ogni sottoinsieme infinito e limitato E di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno un punto di accumulazione.* ∎

L'ipotesi che E sia infinito è banalmente necessaria. Sappiamo poi già dal caso $n = 1$ che, se E non è limitato, il Teorema precedente può cadere in difetto: basta prendere $E = \mathbb{N}$.

DEFINIZIONE. Un punto $\underline{x}$ è detto *aderente* a un insieme E se in ogni intorno di $\underline{x}$ cade *almeno un* punto di E. L'insieme dei punti aderenti a un insieme E è detto la *chiusura* di E e si indica con $cl\, E$ o con $\overline{E}$. Un insieme E è detto *chiuso* se è $E = cl\, E$.

TEOREMA 5. *Si ha* $cl\, E = E \cup \mathbb{D}E$.

DIM. Sia, intanto, $\underline{x} \in E \cup \mathbb{D}E$. Se è $\underline{x} \in E$, in ogni intorno di $\underline{x}$ c'è certamente almeno un punto di E, lui stesso. Se è $\underline{x} \in \mathbb{D}E$, in ogni intorno di $\underline{x}$ ci sono addirittura infiniti punti di E.

Proviamo il viceversa. Sia dunque $\underline{x} \in cl\, E$. Per raggiungere la tesi, basta mostrare che, se $\underline{x} \notin E$, deve essere $\underline{x} \in \mathbb{D}E$, In ogni intorno di $\underline{x}$ ci sono punti di E diversi da $\underline{x}$. Supponiamo, per assurdo, che in un intorno U di $\underline{x}$ cada solo un numero finito di punti di E; siano questi $\underline{x}^1$, $\underline{x}^2$, …, $\underline{x}^m$. Diciamo S la sfera di centro $\underline{x}$ e raggio r, con

$$r < \min\{d(\underline{x}^1, \underline{x}^0), d(\underline{x}^2, \underline{x}^0), \dots, d(\underline{x}^m, \underline{x}^0)\}.$$

Si vede subito che si ha $S \cap E = \emptyset$, contro l'ipotesi $\underline{x} \in cl\, E$. ∎

DEFINIZIONE. Un punto $\underline{x} \in E$ che non sia di accumulazione per E è detto un punto *isolato* di E.

ESEMPI. 1) $n = 1$. Ogni intervallo aperto è un insieme aperto e ogni intervallo chiuso è un insieme chiuso. Sia $I = [0,1[$. Si ha $int\, I =]0,1[\neq I$, dunque I *non* è aperto; si ha $cl\, I = [0,1] \neq I$, dunque I *non* è nemmeno chiuso.

Da tale esempio, si vede che:

Esistono insiemi che non sono né aperti né chiusi!

2) $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono sia aperti che chiusi (Esercizio!). Si potrebbe anzi dimostrare che in $\mathbb{R}^n$ non ci sono altri insiemi che risultino contemporaneamente aperti e chiusi.

3) $n = 2$. Sia $E = [0,1[\times [0,1[\cup \{(x, 0)^T: 1 \le x \le 2\}$. Si ha

$$int\, E =]0, 1[\times]0, 1[; \; cl\, E = [0, 1] \times [0, 1] \cup \{(x, 0))^T: 1 \le x \le 2\}.$$

4) $n = 1$. $E = \mathbb{Q}$. Si ha $int\, \mathbb{Q} = \emptyset$; $cl\, \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

5) L'intervallo aperto $I =]0,1[$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}$, ma $I' = \{(x, 0)^T: x \in I\}$ *non* è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$. L'intervallo chiuso $J = [0,1]$ è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$ e l'insieme $J' = \{(x, 0)^T: x \in J\}$ è chiuso in $\mathbb{R}^2$, ma, mentre è $int\, J =]0,1[$, si ha $int\, J' = \emptyset$.

TEOREMA 6. 1) *Se A è un insieme aperto, il suo complementare $\complement A$ è un insieme chiuso.*
2) *Se C è un insieme chiuso, il suo complementare $\complement C$ è un insieme aperto.*

DIM. 1) Sia A un insieme aperto. Se è $\underline{x} \in A$, esiste una sfera aperta S di centro $\underline{x}$ contenuta in A. In S non ci sono perciò punti di $\complement A$. Dunque $\underline{x}$ non è aderente a $\complement A$. Ne viene che i punti aderenti a $\complement A$ devono appartenere a $\complement A$ e che, di conseguenza, quest'ultimo insieme è chiuso.
2) Sia C un insieme chiuso. Dunque C contiene tutti i punti che gli sono aderenti. Ma allora, se è $\underline{x} \in \complement C$, $\underline{x}$ non può essere aderente a C. Deve perciò esistere una sfera S di centro $\underline{x}$ priva di punti di C, ma allora è $S \subset \complement C$. Si conclude che ogni punto di $\complement C$ gli è interno e che, pertanto, tale insieme è aperto. ∎

TEOREMA 7. 1) *L'unione di quanti si vogliano insiemi aperti è un insieme aperto.*
2) *L'intersezione di un numero (finito) di insiemi aperti è un insieme aperto.*
3) *L'unione di un numero (finito) di insiemi chiusi è un insieme chiuso.*
4) *L'intersezione di quanti si vogliano insiemi chiusi è un insieme chiuso.*

DIM. 1) Sia data una famiglia di insiemi aperti e sia A la loro riunione. Se è $\underline{x} \in A$, $\underline{x}$ deve appartenere ad almeno uno degli aperti dati; indichiamolo con A'. Esiste allora una sfera di centro $\underline{x}$ contenuta in A' e, quindi, in A.
2) Siano A e B due insiemi aperti e sia $\underline{x} \in A \cap B$. Allora $\underline{x}$ deve appartenere ad entrambi gli insiemi. Esistono perciò due sfere di centro $\underline{x}$ contenute una in A e l'altra in B, quindi la più piccola delle due è contenuta in $A \cap B$. Il ragionamento può essere facilmente esteso al caso di un numero (finito) qualunque di insiemi aperti.
3) Se A e B sono chiusi, $\complement A$ e $\complement B$ sono aperti ed è quindi aperto anche $\complement A \cap \complement B$. Ricordando che, per le formule di De Morgan, è $\complement A \cap \complement B = \complement(A \cup B)$, si conclude che $\complement(A \cup B)$ è aperto e che, pertanto, $A \cup B$ è chiuso. Il ragionamento si estende al caso di un numero (finito) qualunque di insiemi chiusi.
4) Si prova come la (3), sfruttando la (1) e ricordando che il complementare dell'unione di quanti si vogliano insiemi è uguale all'intersezione dei complementari. ∎

Si badi che l'intersezione di infiniti insiemi aperti può ben non essere un insieme aperto e, similmente, la riunione di infiniti insiemi chiusi può non essere un insieme chiuso, come appare dai seguenti

ESEMPI. 6) Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $I_n =]0, 1 + 1/n[$; si ha: $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n =]0, 1]$ che non è un insieme aperto, pur essendo tali gli I_n.

7) Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $I_n = [0, 1 - 1/n]$; si ha: $\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n = [0, 1[$ che non è un insieme chiuso, pur essendo tali gli I_n.

DEFINIZIONE. Dicesi *frontiera di un insieme E* l'insieme $\mathcal{F}E = cl\, E \cap cl\, (\complement E)$.

L'insieme $\mathcal{F}E$ è dunque formato dagli elementi che non sono né interni né esterni all'insieme E; cioè: $\underline{x} \in \mathcal{F}E$ *se e solo se in ogni intorno di $\underline{x}$ cadono sia punti di E sia punti di $\complement E$.* Ne viene subito che è $\mathcal{F}E = \mathcal{F}(\complement E)$. Sfruttando la definizione e il Teorema 6 si può poi dimostrare che (cfr. Esercizio 5): *La frontiera di un insieme E è un insieme chiuso.*

ESEMPI. 8) $n = 1$. Siano $I =]0,1[$; $J =]0,1]$, $K = [0,1]$. si ha: $\mathcal{F}I = \mathcal{F}J = \mathcal{F}K = \{0, 1\}$.

9) $n = 2$. Sia $E = [0,1[\times [0,1[\cup \{(x, 0)^T : 1 \leq x \leq 2\}$. Si ha:

$$\mathcal{F}E = \{(x, 0)^T: 0 \le x \le 2\} \cup \{(x, 1)^T: 0 \le x \le 1\} \cup \{(x, y)^T: x \in \{0, 1\}; 0 \le y \le 1\}.$$

10) $n = 1$. $E = \mathbb{Q}$. Si ha $\mathcal{F}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

11) $n = 1$. Siano $E_1 = [-1, 0[$; $E_2 = [0, 1]$. Si ha:

$$\mathcal{F}E_1 = \{-1,\ 0\};\ \ \mathcal{F}E_2 = \{0,\ 1\};$$
$$\mathcal{F}E_1 \cup \mathcal{F}E_2 = \{-1,\ 0,\ 1\};\ \mathcal{F}(E_1 \cup E_2) = \{-1,\ 1\};$$
$$\mathcal{F}E_1 \cap \mathcal{F}E_2 = \{0\};\ \mathcal{F}(E_1 \cap E_2) = \emptyset.$$

Gli insiemi degli Esempi 8, 9, 11 sono limitati; quello dell'Esempio 10 non lo è.

DEFINIZIONE. Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^n$ è detto *compatto* se è *chiuso e limitato.*

ESEMPIO. 12) Sia $E = \{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}^+\}$ non è compatto perché, pur essendo limitato, non è chiuso. Infatti, 0 è un punto di accumulazione per E, ma non gli appartiene. Essendo 0 l'unico punto di accumulazione per E, si ha subito che $E \cup \{0\}$ è compatto. Più in generale, si vede subito che la chiusura *cl* E di un insieme limitato E è un insieme compatto (cfr. Esercizio 5).

§ 2. A P P L I C A Z I O N I

Ricordiamo che, dato un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$, si dice *applicazione* o *funzione* di E in $\mathbb{R}^m$ una *legge* che a *ogni* elemento $\underline{x}$ di E associa *uno (e un solo)* elemento di $\mathbb{R}^m$, detto *immagine* di $\underline{x}$ tramite la f e indicato con $f(\underline{x})$. L'insieme E è detto il *dominio* della f; $\mathbb{R}^m$ è detto il *codominio* della f; l'insieme $\{f(\underline{x}): \underline{x} \in E\}$ $(\subset \mathbb{R}^m)$ è detto l'*insieme immagine* di E tramite la f. Per esprimere il fatto che f è una *funzione* di $E(\subset \mathbb{R}^n)$ in $\mathbb{R}^m$ scriveremo $f: E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$.

Data $f: E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, ad ogni $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in E$ resta dunque associato un elemento $f(\underline{x}) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))^T \in \mathbb{R}^m$. È dunque:

$$f(\underline{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots, f_m(\underline{x}))^T = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots, \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Le funzioni $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n): E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, con $i = 1, 2, \dots, m$, sono dette le *componenti* di f.

Per determinare il dominio di una $f: E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, basta trovare i domini delle singole componenti e farne l'intersezione.

ESEMPIO. 1) Si cerca il dominio della funzione f di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$:

$$f(\underline{x}) = f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1} \\ \log(xy) \end{pmatrix}.$$

Il dominio di $f_1(x, y)$ è $\{(x, y))^T: |x| \le 1; |y| \ge 1\}$; quello di $f_2(x, y)$ è dato dal primo e dal terzo quadrante, assi esclusi. Il dominio della f è quindi:

$$E = \{(x, y)^T: 0 < x \leq 1, y \geq 1\} \cup \{(x, y)^T: -1 \leq x < 0, y \leq -1\}.$$

Le nozioni di limite e di funzione continua si estendono naturalmente al nuovo contesto.

DEFINIZIONE. Una funzione $f : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ è *continua* in un punto $\underline{x}^0 \in E$ se, per ogni intorno V di $f(\underline{x}^0)$, esiste un intorno U di $\underline{x}^0$ per cui si abbia $f(\underline{x}) \in V$ per ogni $\underline{x} \in E \cap U$, ossia se:

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta(\underline{x}^0, \varepsilon) > 0)(\forall\ x \in E)(d(\underline{x}, \underline{x}^0) < \delta \Rightarrow d(f(\underline{x}), f(\underline{x}^0)) < \varepsilon).$$

Ne viene che se $\underline{x}^0$ è un punto isolato di E, allora f è continua in $\underline{x}^0$.
La f è *continua in E* se è continua in ogni punto di E.

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione $f : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ e un punto $\underline{x}^0$ di accumulazione per E. Si dice che un punto $\underline{l} \in \mathbb{R}^m$ è il *limite di $f(\underline{x})$ per $\underline{x} \to \underline{x}^0$*, o che la *f tende a $\underline{l}$ per $\underline{x}$ che tende a $\underline{x}^0$*, se, per ogni intorno V di $\underline{l}$, esiste un intorno U di $\underline{x}^0$ per cui si abbia $f(\underline{x}) \in V$ per ogni $\underline{x} \in E \cap U \setminus \{\underline{x}^0\}$, ossia se:

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta(\underline{x}^0, \varepsilon) > 0)(\forall\ x \in E)(0 < d(\underline{x}, \underline{x}^0) < \delta \Rightarrow d(f(\underline{x}), \underline{l}) < \varepsilon).$$

In tal caso, si scrive $\displaystyle\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} f(\underline{x}) = \underline{l}.$

OSSERVAZIONE. Sia $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in S(\underline{x}^0, r) \subset \mathbb{R}^n$, con $\underline{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)^T$. Essendo $\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2} < r$, deve essere $|x_i - x_i^0| < r$, per ogni $i \leq n$.

Viceversa, affinché sia $\underline{x} \in S(\underline{x}^0, r)$, è sufficiente che, per ogni $i \leq n$, si abbia $|x_i - x_i^0| < \dfrac{r}{\sqrt{n}}$.

Infatti, se così è, risulta: $\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2} < \sqrt{\dfrac{n\, r^2}{n}} = r.$

Da questo fatto segue subito il

TEOREMA 8. 1) *Una funzione $f : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ è continua in un punto $\underline{x}^0 \in E$ se e solo se è tale ogni sua componente.*

2) *Per una funzione $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)^T : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ si ha* $\displaystyle\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} f(\underline{x}) = \underline{l}$, con $\underline{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_m)^T$, *se e solo se, per ogni $i \leq m$, si ha* $\displaystyle\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} f_i(\underline{x}) = l_i$. ∎

Per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, si pone $\|\underline{x}\| = d(\underline{x}, \underline{0}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. Torneremo su questo punto nel prossimo paragrafo. Per ora ci basta la notazione.

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione $f : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, con E insieme illimitato, e un punto $\underline{l} \in \mathbb{R}^m$. Diremo che la funzione *f tende a $\underline{l}$ per $\|\underline{x}\|$ che tende a infinito* se, per ogni intorno V di $\underline{l}$, esiste un $H \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $\underline{x}$ di E, con $\|\underline{x}\| > H$, si ha $f(\underline{x}) \in V$, ossia se:

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ H(\varepsilon) \in \mathbb{R})(\forall\ x \in E)(\|\underline{x}\| > H \Rightarrow d(f(\underline{x}), \underline{l}) < \varepsilon).$$

In tal caso, si scrive $\displaystyle\lim_{\|\underline{x}\| \to \infty} f(\underline{x}) = \underline{l}.$

La nozione di limite infinito può essere estesa al caso di funzioni di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$:

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione $f : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ e un punto $\underline{x}^0$ di accumulazione per E. Si dice che la f *tende a più infinito* $(+\infty)$ o che *ha limite più infinito* per $\underline{x}$ che tende a $\underline{x}^0$ se, per ogni $M \in \mathbb{R}$, esiste un intorno U di $\underline{x}^0$, tale che, per ogni $\underline{x} \in U \cap E \setminus \{\underline{x}^0\}$, risulti $f(\underline{x}) > M$, ossia se:

$$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, \delta(\underline{x}^0, M) > 0)(\forall\, \underline{x} \in E)(0 < d(\underline{x}, \underline{x}^0) < \delta \Rightarrow f(\underline{x}) > M).$$

In tal caso, si scrive $\displaystyle\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} f(\underline{x}) = +\infty.$

DEFINIZIONE. Sia data una funzione $f : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, con E insieme illimitato. Diremo che la funzione f *tende a più infinito per* $\|\underline{x}\|$ *che tende a più infinito* se per ogni $M \in \mathbb{R}$, esiste un $H \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $\underline{x}$ di E, con $\|\underline{x}\| > H$, si ha $f(\underline{x}) > M$; in simboli:

$$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, H(M) \in \mathbb{R})(\forall\, \underline{x} \in E)(\|\underline{x}\| > H \Rightarrow f(\underline{x}) > M).$$

In tal caso, si scrive $\displaystyle\lim_{\|\underline{x}\| \to \infty} f(\underline{x}) = +\infty.$

In modo analogo a quanto fatto nel caso $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dà anche la nozione di funzione che tende a $-\infty$ o a ∞ per $\underline{x}$ che tende a $\underline{x}^0$ o per $\|\underline{x}\|$ che tende a $+\infty$.

Per esempio, $\displaystyle\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} f(\underline{x}) = -\infty$ significa che:

$$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, \delta(\underline{x}^0, M) > 0)(\forall\, \underline{x} \in E)(0 < d(\underline{x}, \underline{x}^0) < \delta \Rightarrow f(\underline{x}) < M).$$

E ancora, $\displaystyle\lim_{\|\underline{x}\| \to \infty} f(\underline{x}) = \infty$ significa:

$$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, H(M) \in \mathbb{R})(\forall\, \underline{x} \in E)(\|\underline{x}\| > H \Rightarrow |f(\underline{x})| > M).$$

Chi studia completi la lista delle definizioni, esaminando tutti i casi possibili.

ESEMPIO. 2) Proviamo che per la funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(\underline{x}) = \left(\frac{x+1}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)^{\mathrm{T}}$$

è $\displaystyle\lim_{\underline{x} \to \underline{0}} \|f(\underline{x})\| = +\infty$. Infatti, se è $x > -\frac{1}{2}$, si ha:

$$\|f(\underline{x})\| = \frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1}}{x^2+y^2} > \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{1}{\|\underline{x}\|}$$

che tende a $+\infty$ se $\underline{x}$ tende a $\underline{0}$.

Molti dei Teoremi visti per le funzioni reali di una variabile reale conservano validità anche nel caso più generale di cui ci stiamo occupando e, in molti casi, la dimostrazione si ottiene semplicemente adattando quella vista nel caso particolare. (Naturalmente, la somma e il prodotto per una costante vanno intese in senso vettoriale.) Ci limitiamo, perciò, a fare qualche osservazione e a rienunciare qualcuno dei Teoremi.

TEOREMA 9. *(di Bolzano - Weierstrass) - Ogni successione limitata di* $\mathbb{R}^n$ *ha una sottosuccessione convergente.* ▮

TEOREMA 10. *Un sottoinsieme E di* $\mathbb{R}^n$ *è compatto se e solo se ogni successione di elementi di E ha una sottosuccessione convergente ad un elemento di E.* ∎

TEOREMA 11. *Sia data una funzione* $f : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, *e sia* $\underline{x}^0$ *un punto di accumulazione per E, Allora:*

1) *(Unicità del limite) - Se esiste il limite di* $f(\underline{x})$ *per* $\underline{x}$ *che tende a* $\underline{x}^0$, *esso è unico.*

2) *(Limite della restrizione) - Sia* $\underline{x}^0$ *di accumulazione per un sottoinsieme T di E, allora, se esiste il limite di* $f(\underline{x})$ *per* $\underline{x}$ *che tende a* $\underline{x}^0$, *esiste anche il limite, sempre per* $\underline{x}$ *che tende a* $\underline{x}^0$, *della restrizione della f a T e i due limiti coincidono.*

3) *(Limitatezza locale) - Se esiste finito il limite della f per* $\underline{x}$ *che tende a* $\underline{x}^0$, *allora esiste un intorno U di* $\underline{x}^0$ *in cui la f è limitata* [ossia: *è limitato l'insieme f(U)*].

4) *(Permanenza del segno) - Se una funzione* $f : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *ha un limite positivo* [*negativo*] *per* $\underline{x}$ *che tende a* $\underline{x}^0$, *esiste un intorno di* $\underline{x}^0$ *dove, per* $\underline{x} \neq \underline{x}^0$, *la f è ancora positiva* [risp. *negativa*]. ∎

TEOREMA 12. *Siano date due funzioni f, g :* $E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, *e sia* $\underline{x}^0$ *un punto di accumulazione per E, Allora:*

1) *Se è* $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} f(\underline{x}) = \underline{l}$ *e* $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} g(\underline{x}) = \underline{m}$, *si ha anche* $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} (f+g)(\underline{x}) = \underline{l} + \underline{m}$.

2) *Se è* $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} f(\underline{x}) = \underline{l}$ *e se* α *è un numero reale, si ha* $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} (\alpha f)(\underline{x}) = \alpha \underline{l}$. ∎

Il Teorema sul limite delle funzioni composte conserva inalterati il suo enunciato e la sua dimostrazione.

I Teoremi sul limite del prodotto, della reciproca e del quoziente, (come quello della permanenza del segno) conservano la loro validità solo nel caso $m = 1$.

Se è $n > 1$, non ha più senso parlare di limite destro o limite sinistro. Non si può parlare nemmeno di limite per $\underline{x}$ che tende a $+\infty$ o a $-\infty$, ma solo di limite per $\|\underline{x}\|$ che tende a $+\infty$..

In modo similare si estendono i Teoremi sulla continuità.

TEOREMA 13 *(di Compattezza) - Se* $f : K\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ *è una funzione continua definita su un insieme compatto K, allora l'insieme immagine f(K) è anch'esso un insieme compatto.*

DIM. Prendiamo una successione $(\underline{y}^n)_n$ di punti di *f(E)*. Per ogni indice *n*, esiste un $\underline{x}^n \in E$ tale che $f(\underline{x}^n) = \underline{y}^n$. Essendo *E* compatto, la successione $(\underline{x}^n)_n$ ha una sottosuccessione $(\underline{x}^{n_k})_k$ convergente a un punto $\underline{x}^* \in E$. Per la continuità dalla *f*; la sottosuccessione $(f(\underline{x}^{n_k}))_k = (\underline{y}^{n_k})_k$ di $(\underline{y}^n)_n$ converge a $f(\underline{x}^*) \in f(E)$. Dunque *f(E)* è compatto (Teorema 13). ∎

COROLLARIO 14. *(di Weierstrass) - Se* $f : K\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, *è una funzione continua definita su un insieme compatto K, allora la f assume su K un valore minimo e uno massimo. ;*∎

Si tenga ben presente che, come si è già visto nel caso $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se il dominio *K* non è compatto, il Teorema di Weierstrass cade in difetto.

DEFINIZIONE. Si dice che una funzione $f : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ è *uniformemente continua su E* se:

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta(\varepsilon) > 0)(\forall\, \underline{x}^1 \in E)(\forall\, \underline{x}^2 \in E)(d(\underline{x}^1, \underline{x}^2) < \delta \Rightarrow d(f(\underline{x}^1), f(\underline{x}^2)) < \varepsilon).$$

TEOREMA 15 *(di Heine) - Una funzione* $f : K\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, *definita e continua su un insieme compatto è uniformemente continua.* ∎

Del Teorema di Connessione ci occuperemo fra un attimo.

Faremo spesso uso delle seguenti locuzioni sulle applicazioni, (che saranno meglio precisate in seguito).

$f : E\ (\subset \mathbb{R}^2 \text{ o } \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$:	*campo scalare;*
$\gamma : E\ (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2 \text{ o } \mathbb{R}^3$:	*curva;*
$g : E\ (\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ o $g : E\ (\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$:	*campo vettoriale;*
$\varphi : E\ (\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$:	*superficie.*

ESEMPI. 3) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (curva): $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}$ (*elica*).

4) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (campo vettoriale): $g(u,v) = \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \end{pmatrix}$.

5) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (superficie): $\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} u + 1 \\ -v \\ 1 \end{pmatrix}$ (*piano*).

6) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (superficie): $\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}$ (*paraboloide*).

La terminologia qui usata è del tutto imprecisa; infatti, senza ulteriori ipotesi sulle funzioni coinvolte, si possono ottenere degli oggetti che non hanno affatto le sembianze di una curva o di una superficie come noi usualmente le immaginiamo. In realtà, la definizione corretta di curva è la seguente:

DEFINIZIONE. Data un'applicazione γ definita su un *intervallo* I ($\subset \mathbb{R}$) e a valori in $\mathbb{R}^2$ [o $\mathbb{R}^3$], la coppia $(\gamma; \gamma(I))$ prende il nome di *curva di* $\mathbb{R}^2$ [rispettivamente, di $\mathbb{R}^3$], di cui l'insieme $\gamma(I)$ costituisce il *sostegno* e la γ è una *rappresentazione parametrica.* Se l'intervallo I è chiuso e limitato, si parla di *arco di curva.* Se la γ è continua, si parla di curva o di arco di curva *continua.*

Si tenga inoltre presente che, nel caso degli archi di curva, non è restrittivo supporre che sia $I = [0, 1]$, dato che è immediato costruire un'applicazione (lineare) continua, biiettiva e crescente fra due intervalli chiusi qualunque, purché non ridotti a un solo punto.

Similmente, data un'applicazione $\varphi : E\ (\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$, con E soddisfacente a opportune condizioni di regolarità (che preciseremo a suo tempo), la coppia $(\varphi; \varphi(E))$ è detta *superficie*, di cui l'insieme $\varphi(E)$ costituisce il *sostegno* e la φ è una *rappresentazione parametrica.*

DEFINIZIONE. Dati due punti $\underline{x}^1$ e $\underline{x}^2$ di $\mathbb{R}^n$ e un intervallo $I = [a, b]$ ($\subset \mathbb{R}$), la curva continua di rappresentazione parametrica $\gamma(t) = \frac{b - t}{b - a}\,\underline{x}^1 + \frac{t - a}{b - a}\,\underline{x}^2$, $t \in I$, prende il nome di *segmento* di cui i punti $\underline{x}^1 = \gamma(a)$ e $\underline{x}^2 = \gamma(b)$ si dicono, rispettivamente, il *primo* e il *secondo estremo*.[1]

Una curva continua di rappresentazione parametrica $\gamma(t)$: $I = [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ si chiama *poligonale* se esistono m punti di I, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ tali che la restrizione di γ a ciascuno

---

[1] I punti del segmento sono quelli del tipo $\underline{x} = \underline{x}^1 + \tau(\underline{x}^2 - \underline{x}^1)$, con $\tau \in [0,1]$. Posto $\tau = \frac{t - a}{b - a}$, si ricava subito la rappresentazione parametrica sopra indicata.

dei sottointervalli $[a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, m - 1$, è un segmento. I punti $\underline{x}^i = \gamma(a_i)$, con $i = 0, 1, \ldots, m$, si dicono i *vertici* della poligonale.

DEFINIZIONE. Un insieme E $(\subset \mathbb{R}^n)$ è detto *connesso (per archi)* se, comunque si fissino due punti $\underline{x}$ e $\underline{y}$ in E, esiste un arco *continuo* di curva che li unisce e il cui sostegno sia totalmente contenuto in E.

È chiaro che:

In $\mathbb{R}$ sono connessi, oltre agli insiemi ridotti a un solo punto, tutti e soli gli intervalli (limitati o no).

Ogni sfera di $\mathbb{R}^n$ è un insieme connesso.

Un esempio di insieme non connesso è dato dall'unione di due intervalli chiusi di $\mathbb{R}$, privi di punti in comune. Possiamo ora provare il:

TEOREMA 16. *(di Connessione) - Se $f : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ è una funzione continua definita su un insieme connesso E, allora l'insieme immagine f(E) è un insieme connesso.*

DIM. Siano $\underline{y}^1$ e $\underline{y}^2$ due elementi di $f(E)$. Esistono allora due elementi $\underline{x}^1$ e $\underline{x}^2$ di E tali che $f(\underline{x}^1) = \underline{y}^1$ e $f(\underline{x}^2) = \underline{y}^2$. Per ipotesi, esiste un'applicazione continua γ: $:I = [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ tale che: $\gamma(0) = \underline{x}^1$, $\gamma(1) = \underline{x}^2$, $\gamma(I) \subset E$. Ma allora, si ha che l'applicazione composta $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^m$ è la rappresentazione di un arco continuo di curva di $\mathbb{R}^m$, con sostegno contenuto in $f(E)$, per cui è $(f \circ \gamma)(0) = \underline{y}^1$, $(f \circ \gamma)(1) = \underline{y}^2$. Si conclude che anche $f(E)$ è un insieme connesso. ▮

COROLLARIO 17. *Se $f : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua definita su un insieme connesso E, allora, l'insieme immagine f(E) è un intervallo* (ossia: *se la f assume due valori, assume anche tutti quelli fra essi compresi*). ▮

§ 3. STRUTTURA LINEARE DI $\mathbb{R}^n$

Rispetto alle operazioni in esso definite, $\mathbb{R}^n$ costituisce uno *spazio vettoriale* (o *lineare*) su $\mathbb{R}$; ciò significa che sono soddisfatte le seguenti proprietà (di immediata verifica):

1. $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$, *proprietà associativa*;
2. $\underline{x} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{x} = \underline{x}$, *esistenza dell'elem. neutro*;
3. $\forall \underline{x}$, $\exists (-\underline{x}) : \underline{x} + (-\underline{x}) = (-\underline{x}) + \underline{x} = \underline{0}$, *esistenza dell'opposto*;
4. $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$, *proprietà commutativa*;
[cioè: $\mathbb{R}^n(+)$ è un *gruppo abeliano*]

5. $\lambda(\underline{x} + \underline{y}) = \lambda\underline{x} + \lambda\underline{y}$,
6. $(\lambda + \mu)\underline{x} = \lambda\underline{x} + \mu\underline{x}$,
proprietà distributive;

7. $\lambda(\mu\underline{x}) = (\lambda\mu)\underline{x}$;
8. $1\underline{x} = \underline{x}$.

DEFINIZIONE. Dato $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, si definisce *norma* di $\underline{x}$ il numero reale

$$\|\underline{x}\| = d(\underline{x}, \underline{0}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\,.$$

Si vede subito che, per $n = 1$, si ha: $\|\underline{x}\| = |x|$.
Si constata immediatamente anche che: $d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$.

TEOREMA 18. *La norma è un'applicazione* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *che gode delle seguenti proprietà:*

1) $\|\underline{x}\| \geq 0,\ \forall\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n$, *(non negatività);*
2) $\|\underline{x}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$ *(non degeneratezza);*
3) $\|\lambda\underline{x}\| = |\lambda|\cdot\|\underline{x}\|,\ \forall\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \forall\lambda \in \mathbb{R}$, *(omogeneità);*
4) $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|.\ \forall\ \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, *(subadditività).* ▮

Le prime tre affermazioni sono di immediata verifica; la quarta verrà provata tra poco.
Il risultato sopra visto si esprime dicendo che: $\mathbb{R}^n$ *è uno spazio vettoriale normato.*

DEFINIZIONE. Dati due elementi $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $\underline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, si chiama loro *prodotto scalare* il numero reale

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n .$$

TEOREMA 19. *Il prodotto scalare è un'applicazione di* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *in* $\mathbb{R}$ *che gode delle seguenti proprietà:*

$$\left.\begin{array}{ll}
\mathbf{1.} & \langle \underline{x}^1 + \underline{x}^2, \underline{y}\rangle = \langle \underline{x}^1, \underline{y}\rangle + \langle \underline{x}^2, \underline{y}\rangle; \\
\mathbf{1'.} & \langle \underline{x}, \underline{y}^1 + \underline{y}^2\rangle = \langle \underline{x}, \underline{y}^1\rangle + \langle \underline{x}, \underline{y}^2\rangle; \\
\mathbf{2.} & \langle \lambda\underline{x}, \underline{y}\rangle = \lambda\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle; \\
\mathbf{2'.} & \langle \underline{x}, \lambda\underline{y}\rangle = \lambda\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle; \\
\mathbf{3.} & \langle \underline{x}, \underline{y}\rangle = \langle \underline{y}, \underline{x}\rangle;
\end{array}\right\}$$
[Il prodotto scalare è una forma bilineare simmetrica]

4. $\langle \underline{x}, \underline{x}\rangle \geq 0,\ \forall\underline{x}$; *(positiva definitezza)*

4'. $\langle \underline{x}, \underline{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$;

5. $\|\underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x}\rangle}$;

6. $|\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle| \leq \|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|$; *(Disuguaglianza di Cauchy - Schwarz)*

6'. $|\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle| = \|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\| \Leftrightarrow \underline{x} = \lambda\underline{y}$.

DIM. Tutte le proprietà sono di verifica immediata, tranne le ultime 2; proviamo queste.
Quali che siano $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, si ha:

$$(*) \qquad \langle \underline{x} + t\underline{y}, \underline{x} + t\underline{y}\rangle = \|\underline{x}\|^2 + 2t\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle + t^2\|\underline{y}\|^2 \geq 0.$$

Ne viene che il trinomio a secondo membro della (*), pensato nell'incognita t, deve avere discriminante minore o uguale a zero. È dunque:

$$\frac{\Delta}{4} = |\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle|^2 - \|\underline{x}\|^2\cdot\|\underline{y}\|^2 \leq 0,$$

che è equivalente alla (6).

Se è $\underline{x} = \lambda\underline{y}$, si ha: $|\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle| = |\langle \lambda\underline{y}, \underline{y}\rangle| = |\lambda|\cdot|\langle \underline{y}, \underline{y}\rangle| = |\lambda|\cdot\|\underline{y}\|\cdot\|\underline{y}\| = \|\lambda\underline{y}\|\cdot\|\underline{y}\| = \|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|$. Proviamo ora il viceversa. Se è $|\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle| = \|\underline{x}\|\cdot\|\underline{x}\|$, nel trinomio della (*) è $\Delta = 0$. Ma allora l'equazione $\|\underline{x}\|^2 + 2t\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle + t^2\|\underline{y}\|^2 = 0$ ha una e una sola soluzione $-\lambda$. Per un tale valore, si ottiene anche $\langle \underline{x} - \lambda\underline{y}, \underline{x} - \lambda\underline{y}\rangle = 0$. Per la (4'), si ha allora $\underline{x} - \lambda\underline{y} = \underline{0}$, che è quanto si voleva. ▮

Possiamo, finalmente, provare facilmente l'affermazione (4) del Teorema 18 nonché la (4) del Teorema 1.

DIM. della (18,4). Si ha:

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = \langle \underline{x} + \underline{y}, \underline{x} + \underline{y} \rangle = \|\underline{x}\|^2 + 2\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \|\underline{y}\|^2 \le$$

$$\le \|\underline{x}\|^2 + 2\|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\| + \|\underline{y}\|^2 = (\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|)^2. \blacksquare$$

DIM. della (1,4). Si ha:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\| = \|\underline{x} - \underline{z} + \underline{z} - \underline{y}\| \le \|\underline{x} - \underline{z}\| + \|\underline{z} - \underline{y}\| = d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, ,\underline{y}). \blacksquare$$

Ricordiamo la

DEFINIZIONE. Dati due spazi vettoriali E ed E' su $\mathbb{R}$, un'applicazione f di E in E' è detta *lineare* se:

$$f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y}); \;\; f(\lambda\underline{x}) = \lambda f(\underline{x}), \;\; \forall\, \underline{x}, \underline{y} \in E, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

A noi interessa il caso $E = \mathbb{R}^n$, $E' = \mathbb{R}^m$.

DEFINIZIONE. Indicheremo con $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ l'insieme delle applicazioni lineari di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$; cioè:

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) := \{L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, L \text{ lineare}\}.$$

Si constata facilmente che anche $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ *è uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$.

Una volta fissate le basi $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ e $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2 \dots, \underline{e}'_m\}$ di $\mathbb{R}^m$, ad ogni $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ si può associare univocamente una matrice $A \in \mathfrak{M}(m, n)$, con m righe e n colonne, ponendo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} := L(\underline{e}_1); \;\; \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} := L(\underline{e}_2), \;\; \dots\dots, \;\; \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} := L(\underline{e}_n).$$

Ciò si esprime scrivendo: $\qquad L(\underline{x}) = A\,\underline{x},$

dove $A\underline{x}$ indica il prodotto riga per colonna della matrice A per il vettore colonna $\underline{x}$.

DEFINIZIONE. Un'applicazione lineare L: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ prende il nome di *forma lineare di* $\mathbb{R}^n$. L'insieme $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ delle forme lineari di $\mathbb{R}^n$, prende il nome di *spazio duale di* $\mathbb{R}^n$.

La matrice associata ad una forma lineare L di $\mathbb{R}^n$ è una matrice di tipo $(1, n)$ (quindi a *una* riga e n colonne); è perciò: $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Dunque, per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, sussiste l'uguaglianza:

(*) $$L(\underline{x}) = A\underline{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n\,.$$

Da ciò segue che, posto $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, risulta $L(\underline{x}) = \langle \underline{a}, \underline{x} \rangle$. Ciò significa che:

TEOREMA 20 *(di Riesz) - Ogni forma lineare di* $\mathbb{R}^n$ *può essere rappresentata mediante il prodotto scalare.* $\blacksquare$

§ 4. ESERCIZI E COMPLEMENTI

1) Trovare il dominio delle seguenti funzioni di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$:

a) $f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)$; *b)* $f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}$; *c)* $f(x, y) = \log(x + 2)\sqrt{x^2 - 2x + y^2 - 8}$;

d) $f(x, y, z) = \log(xyz)$; *e)* $f(x, y, z) = \dfrac{x + y + z}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$; *f)* $f(x, y, z) = \sqrt{xy} + \sqrt{z - 1}$.

2) Per ciascuno dei seguenti sottoindicati E di $\mathbb{R}^2$, si descrivano gli insiemi:

$$int\, E; \quad cl\, E; \quad \mathcal{F}E; \quad int\,(cl\, E); \quad cl\,(int\, E).$$

a) $E = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 \le 1,\ x \ne 0,\ y > 0\} \cup \{(0,y)^T: -1 < y < 0\}$.

b) $E = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 < 1,\ x > 0,\ y \ne 0\} \cup \{(t,t)^T: -1 < t < 0\}$.

c) $E = \{(x,y)^T: -1 \le x \le 1,\ x \ne 0,\ 0 < y < 1,\ x, y \in \mathbb{Q}\}$.

[$\mathfrak{R}$. *a)* $int\, E = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 < 1,\ x \ne 0,\ y > 0\}$;
$cl\, E = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\} \cup \{(0,y)^T: -1 \le y \le 0\}$;
$\mathcal{F}E = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 = 1,\ y \ge 0\} \cup \{(0,y)^T: -1 \le y \le 1\} \cup \{(x,0)^T: -1 \le x \le 1\}$;
$int\,(cl\, E) = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 < 1,\ y > 0\}$; $cl\,(int\, E) = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$.

b) $int\, E = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 < 1,\ x > 0,\ y \ne 0\}$;
$cl\, E = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0\} \cup \{(t,t)^T: -1 \le t \le 0\}$.
$\mathcal{F}E = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 = 1, x \ge 0\} \cup \{(t,t)^T: -1 \le t \le 0\} \cup \{(x,0)^T: 0 \le x \le 1\} \cup \{(0,y)^T: -1 \le y \le 1\}$.
$int\,(cl\, E) = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 < 1,\ x > 0\}$; $cl\,(int\, E) = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0\}$.

c) $int\, E = \emptyset = cl\,(int\, E)$; $cl\, E = \mathcal{F}E = \{(x,y)^T: -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$;
$int\,(cl\, E) = \{(x,y)^T: -1 < x < 1, 0 < y < 1\}$.]

3) Si verifichino le seguenti affermazioni riguardanti limiti di funzioni di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$:

a) $\lim\limits_{\|\underline{x}\| \to \infty} (x^2 + 2y^2 - xy) = +\infty$; *b)* $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{0}} \dfrac{x \sin y}{(e^x - 1)y} = 1$; *c)* $\lim\limits_{\|\underline{x}\| \to \infty} \dfrac{x}{\|\underline{x}\|^2} = 0$; *d)* $\nexists \lim\limits_{\|\underline{x}\| \to \infty} \dfrac{x}{\|\underline{x}\|}$.

[$\mathfrak{R}$. *a)* Dalla formula del quadrato del binomio, si ottiene la disuguaglianza $|xy| \le \dfrac{x^2 + y^2}{2}$. È dunque: $f(x,y) \ge x^2 + 2y^2 - \dfrac{x^2 + y^2}{2} = \dfrac{x^2 + 3y^2}{2} \ge \dfrac{\|\underline{x}\|}{2}$.

b) $$\left|\frac{x \sin y}{(e^x - 1)y} - 1\right| = \left|\frac{x \sin y}{(e^x - 1)y} - \frac{\sin y}{y} + \frac{\sin y}{y} - 1\right| \le \left|\frac{\sin y}{y}\right| \left|\frac{x}{e^x - 1} - 1\right| + \left|\frac{\sin y}{y} - 1\right|.$$

Fissiamo un $\varepsilon > 0$ (con $\varepsilon < 1$). Esistono due numeri positivi δ' e δ'' tali che:

$$|x| < \delta' \Rightarrow \left|\frac{x}{e^x - 1} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad |y| < \delta'' \Rightarrow \left|\frac{\sin y}{y} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

È poi $\left|\dfrac{\sin y}{y}\right| < 1$ per ogni $y \ne 0$. A questo punto basta prendere $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

c) Si ha $|f(x,y)| = \frac{|x|}{\|\underline{x}\|^2} \le \frac{\|\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|^2} = \frac{1}{\|\underline{x}\|}$.

d) Per provare che la funzione $f(x,y) = \frac{x}{\|\underline{x}\|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ non ha limite per $\|\underline{x}\|$ che tende a infinito, basta mostrare che ci sono due restrizioni della f che hanno limiti diversi. Prima restrizione: $x = 0$; si ha $f(0,y) = 0$. Seconda restrizione: $y = x$, $x > 0$; si ha $f(x,x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.]

4) Si dimostri che l'applicazione φ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da $\varphi(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$ soddisfa alle proprietà (1), (2), (3) e (4) del Teorema 19. I valori $\varphi(\underline{x})$ possono quindi essere assunti come una nuova *norma* in $\mathbb{R}^2$. Posto ancora $d(\underline{x}, \underline{y}) = \varphi(\underline{x} - \underline{y})$, si ottiene una nuova *distanza* in $\mathbb{R}^2$. Si descrivano le sfere che si ottengono con questa nuova distanza.

Lo stesso problema per l'applicazione ψ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da $\psi(x, y) = |x| + |y|$.

[$\Re$. *a*) Per la (4), si ha: $\varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \max\{|x_1 + x_2|, |y_1 + y_2|\} \le \max\{|x_1|,|y_1|\} + \max\{|x_2|,|y_2|\} = \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2)$. Le *sfere* sono dei *quadrati* con i lati paralleli agli assi.

b) Per la (4), si ha: $\psi(x_1 + x_2, y_1 + x_2) = |x_1 + x_2| + |y_1 + y_2| \le |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2| = \psi(x_1, y_1) + \psi(x_2, y_2)$. Le *sfere* sono dei *quadrati* con le diagonali parallele agli assi.]

5) Si dimostri che: *L'applicazione che a ogni sottoinsieme A di* $\mathbb{R}^n$ *associa la sua chiusura cl A gode delle seguenti proprietà:*

1) $cl\ \emptyset = \emptyset$; 2) $A \subset cl\ A$; 3) $A \subset B \Rightarrow cl\ A \subset cl\ B$;
4) $cl\ (A \cup B) = cl\ A \cup cl\ B$; 5) $cl\ (cl\ A) = cl\ A$.

[$\Re$. Le prime 3 affermazioni sono di facile verifica. Dalla (3) ai ottiene $cl\ A \subset cl\ (A \cup B)$ e $cl\ B \subset cl\ (A \cup B)$. Per provare la (4), basta mostrare che se è $\underline{x} \notin cl\ A \cup cl\ B$, allora è $\underline{x} \notin cl\ (A \cup B)$. Se è $\underline{x} \notin cl\ A \cup cl\ B$, esistono una sfera S' di centro $\underline{x}$ in cui non cadono punti di A e una sfera S'', sempre di centro $\underline{x}$, in cui non cadono punti di B. Dunque in $S' \cap S''$ non cadono punti né di A né di B e, quindi non vi cadono punti di $A \cup B$. Passiamo alla (5). Per la (2), è sufficiente provare che è $cl\ (cl\ A) \subset cl\ A$. Siano, dunque, $\underline{x} \in cl\ (cl\ A)$ e U un intorno di $\underline{x}$. Esiste una sfera aperta S di centro $\underline{x}$ contenuta in U. S è un intorno di $\underline{x}$ e perciò in S cade almeno un punto $\underline{y} \in cl\ A$. Per il Teorema 5, S è intorno anche di $\underline{y}$ e quindi in S cadono punti di A; e ciò vale, di conseguenza, anche per U. Dunque $\underline{x} \in cl\ A$.]

6) Si provi che: *L'applicazione che a ogni sottoinsieme A di* $\mathbb{R}^n$ *associa il suo interno int A gode delle seguenti proprietà:*

1) $int\ \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$; 2) $int\ A \subset A$; 3) $A \subset B \Rightarrow int\ A \subset int\ B$;
4) $int\ (A \cap B) = int\ A \cap int\ B$; 5) $int\ (int\ A) = int\ A$.

[$\Re$. Le prime 4 affermazioni sono di facile verifica. Occupiamoci della (5). Per la (2), basta provare che è $int\ A \subset int\ (int\ A)$. Sia dunque $\underline{x} \in int\ A$. Esiste pertanto una sfera S di centro $\underline{x}$ contenuta in A. Proviamo che è $S \subset int\ A$. Ma ciò è immediato, dato che tutti i punti di S sono interni a S (Teor. 5) e, quindi, ad A.]

7) Si dimostri che, se un'applicazione δ: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, soddisfa alle proprietà (2), (3) e (4) del Teorema 1, allora soddisfa necessariamente anche alla (1).

[$\Re$. Quali che siano $\underline{x}$ e $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$, si ha:

$$0 = \delta(\underline{x}, \underline{x}) \le \delta(\underline{x}, \underline{y}) + \delta(\underline{y}, \underline{x}) = \delta(\underline{x}, \underline{y}) + \delta(\underline{x}, \underline{y}) = 2\delta(\underline{x}, \underline{y}).]$$

Capitolo Dodicesimo

CALCOLO DIFFERENZIALE PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

§ 1. CAMPI SCALARI

Sono dati: un insieme *aperto* $A \subset \mathbb{R}^n$, un punto $\underline{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T \in A$ e una funzione $f : A \to \mathbb{R}$. Si pone allora il

PROBLEMA. Come si può estendere al nuovo contesto la nozione di derivata, in modo da ritrovare, nel caso $n = 1$, quella usuale e da far salve le importanti conseguenze che da essa abbiamo a suo tempo dedotto (quale la Formula di Taylor)?

Si vede subito che non possiamo riscrivere pari pari la vecchia definizione, dato che la scrittura $\dfrac{f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0)}{\underline{x} - \underline{x}^0}$, avendo a denominatore un vettore, non ha alcun significato. Dobbiamo dunque seguire un'altra strada. Una possibilità è quella di considerare le restrizioni della f a sottoinsiemi di A formati da rette o segmenti per $\underline{x}^0$, ottenendo così funzioni di una variabile. Vediamo di essere un po' più precisi.

Derivate direzionali

Fissiamo un $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, con $\|\underline{v}\| = 1$, detto *versore* o *direzione orientata* e consideriamo un *segmento* del tipo $\{\underline{x} : \underline{x} = \underline{x}^0 + t\underline{v}$, con $t \in\ ]-\delta, \delta[, \delta > 0\}$ che sia contenuto in A. Un tale segmento esiste, dato che A è aperto.

DEFINIZIONE. Se la funzione $g :]-\delta, \delta[\ (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da $g(t) = f(\underline{x}^0 + t\underline{v})$ è derivabile in $t = 0$, si dice che f *ammette derivata* (o che è *derivabile*) *in* $\underline{x}^0$ *secondo la direzione* $\underline{v}$ e si scrive

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}^0) := g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}^0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}^0)}{t}.$$

Si tenga presente che, per ipotesi, la derivata della g esiste *finita*.

Caso particolare: le derivate parziali

Sia $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

DEFINIZIONE. La derivata direzionale calcolata nella direzione di uno dei versori $\underline{e}_i$ prende il nome di *derivata parziale (prima) calcolata rispetto alla variabile* x_i; è dunque:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}_i}(\underline{x}^0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0 + t, \dots, x_n^0) - f(\underline{x}^0)}{t}.$$

La derivata $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{e}_i}(\underline{x}^0)$ è spesso indicata con $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}^0)$ o con $f_{x_i}(\underline{x}^0)$.

Il calcolo delle derivate parziali è facile, in quanto basta considerare la f come funzione di una sola variabile, riguardando le altre come costanti, e utilizzare le ben note regole di derivazione. Quello delle derivate direzionali generiche è leggermente meno immediato.

ESEMPI. 1) Le derivate parziali della funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}$, con $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\underline{x}) = \frac{y(x^2 + y^2) - 2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \ ; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{x}) = \frac{x(x^2 + y^2) - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

2) Le derivate parziali delle funzioni, di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2ye^z$ e $g(x,y,z) = x^2 + |y| + z$ sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\underline{x}) = 2xye^z; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{x}) = x^2e^z; \quad \frac{\partial f}{\partial z}(\underline{x}) = x^2ye^z;$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\underline{x}) = 2x \ ; \quad \frac{\partial g}{\partial y}(\underline{x}) = \frac{|y|}{y} \ ; \quad \frac{\partial g}{\partial z}(\underline{x}) = 1.$$

[La $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ è, ovviamente, definita solo nei punti $(x,y,z)^T$ per cui è $y \neq 0$.]

3) Si vuole calcolare la derivata della funzione (di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$) $f(x,y) = x^2 + y^2$ nel punto $(x, y)^T$ secondo la direzione del versore $\underline{v} = (a, b)^T$; si vuole cioè la derivata della funzione $g(t) = (x + at)^2 + (y + bt)^2$ nel punto $t = 0$. Si ha: $g'(t) = 2a(x + at) + 2b(y + bt)$, da cui

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}) = g'(0) = 2ax + 2by.$$

4) Si vuole calcolare la derivata della funzione (di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$) $f(x,y) = \sin(xy)$ nel punto $(x, y)^T$ secondo la direzione del versore $\underline{v} = (a, b)^T$; si ottiene la funzione

$$g(t) = \sin[(x + at)(y + bt)] = \sin[xy + (bx + ay)t + abt^2],$$

la cui derivata è: $g'(t) = (bx + ay + 2abt)\cos[xy + (bx + ay)t + abt^2]$; è dunque:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}) = g'(0) = (bx + ay)\cos(xy).$$

DEFINIZIONE. Se $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ è dotata di derivata parziale (finita) rispetto alla variabile x_i in un punto $\underline{x} \in A$, diremo che f è *derivabile* in quel punto rispetto a tale variabile. Se la f è derivabile rispetto a x_i in ogni punto di A, diremo che essa è *derivabile in A* rispetto a x_i.

Derivate seconde e derivate di ordine superiore

Se $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ è derivabile rispetto a x_i in ogni punto di A, si costruisce una funzione $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, [o $f_{x_i} : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$].

DEFINIZIONE. Se la funzione $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ è derivabile rispetto a x_j in $\underline{x}^0$, si pone

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(\underline{x}^0) = f_{x_i x_j}(\underline{x}^0) := \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right)(\underline{x}^0).$$

A questo numero si dà il nome di *derivata seconda della f in* $\underline{x}^0$ *rispetto a* x_i *e* x_j (nell'ordine).

Anche in questo caso, se questa derivata seconda è definita per ogni punto $\underline{x}$ di A, si ottiene una funzione $f_{x_i x_j} : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ detta *derivata seconda della f rispetto a* x_i *e* x_j .

Quest'ultima funzione può, a sua volta, essere derivabile rispetto a x_k e si parlerà di derivata terza e così via. Le derivate ottenute con m derivazioni successive sono dette derivate di *ordine m.*

Le derivate successive fatte sempre rispetto alla stessa variabile sono dette *pure*, mentre le altre sono dette *miste*.

ESEMPI. 5) Le derivate parziali seconde della funzione $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ sono:

$$f_{xx}(\underline{x}) = \frac{-2xy(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}\,; \qquad f_{yy}(\underline{x}) = \frac{-2xy(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}\,; \qquad f_{xy}(\underline{x}) = f_{yx}(\underline{x}) = \frac{6x^2y^2 - x^4 - y^4}{(x^2 + y^2)^3}\,.$$

6) Le derivate parziali seconde della funzione $f(x,y,z) = x^2ye^z$ sono:

$$f_{xx}(\underline{x}) = 2ye^z\,;\ f_{yy}(\underline{x}) = 0;\ \ f_{zz}(\underline{x}) = x^2ye^z\,;$$
$$f_{xy}(\underline{x}) = f_{yx}(\underline{x}) = 2xe^z\,;\ \ f_{xz}(\underline{x}) = f_{zx}(\underline{x}) = 2xye^z\,; \qquad f_{yz}(\underline{x}) = f_{zy}(\underline{x}) = x^2e^z\,.$$

7) Le derivate seconde miste della funzione $f(x,y,z) = x \log x + y \log y + z \log z$ sono tutte nulle; quelle pure sono:

$$f_{xx}(\underline{x}) = \frac{1}{x}\,;\ f_{yy}(\underline{x}) = \frac{1}{y}\,;\ f_{zz}(\underline{x}) = \frac{1}{z}\,.$$

DEFINIZIONE. Sia data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con A sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Se f ha in A tutte le derivate fino all'ordine k e queste sono continue, si dice che la f è di *classe* C^k in A [$f \in C^k(A)$]; se ciò vale per ogni k, f è detta di *classe* C^∞ in A [$f \in C^\infty(A)$].

Si dice inoltre che una funzione $f : cl\,A \to \mathbb{R}$, con A sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, è di *classe* C^k in $cl\,A$ se f è di *classe* C^k in A e tutte le sue derivate parziali, fino all'ordine k, sono prolungabili per continuità su $cl\,A$.

Si constata subito che, in tutti gli esempi sopra prodotti, le derivate seconde miste che differiscono solo per l'ordine con cui si effettuano le derivazioni sono fra loro uguali. È dunque naturale chiedersi se ciò accade sempre o, eventualmente, sotto quali condizioni. Ebbene, esistono funzioni con le derivate seconde miste diverse.

ESEMPIO. 8) Sia f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se è } \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \text{se è } \underline{x} = \underline{0} \end{cases}.$$

Si ha:

$$f_x(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{y^3(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se è } \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \text{se è } \underline{x} = \underline{0} \end{cases}; \quad f_y(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{xy^2(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se è } \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \text{se è } \underline{x} = \underline{0} \end{cases};$$

da cui si ottiene:

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y^5}{y^5} = 1;$$
$$f_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_y(x,0) - f_y(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0.$$

Al riguardo sussiste il seguente Teorema di cui omettiamo la dimostrazione.

TEOREMA 1 *(di Schwarz) - Se la funzione* $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *è dotata in un intorno U di un punto* $\underline{x}^0$ *delle derivate seconde miste* $f_{x_i x_j}$ *e* $f_{x_j x_i}$ *e queste sono continue in* $\underline{x}^0$*, allora si ha* $f_{x_i x_j}(\underline{x}^0) = f_{x_j x_i}(\underline{x}^0)$. ∎

Il Teorema si estende anche alle derivate di ordine superiore; in particolare, si ha che:

Se la funzione $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *è di classe* C^k *in A, allora le derivate miste, di ordine minore o uguale a k, che differiscono solo per l'ordine di derivazione coincidono.*

Torneremo più avanti su questo argomento (Cfr. § 3).
Sappiamo che, per le funzioni di una variabile, la derivabilità in un punto implica la continuità nel punto stesso. Sussiste un'analoga proprietà anche per le funzioni di più variabili? La risposta è negativa. Esistono cioè funzioni dotate di derivate parziali in $\underline{x}^0$ e che, tuttavia, non sono continue in tale punto.

ESEMPIO. 9) Sia f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se è } xy = 0 \\ 0 & \text{se è } xy \neq 0 \end{cases}.$$

Si vede subito che la f non è continua in $\underline{0}$, pur essendo $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

Non solo, ma può accadere che una funzione sia dotata, in un punto $\underline{x}^0$, di derivate in tutte le direzioni, senza essere continua nel punto.

ESEMPIO. 10) Sia f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se è } \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \text{se è } \underline{x} = \underline{0} \end{cases}.$$

Si ha, intanto, $f_x(\underline{0}) = 0$. Dato poi il versore $\underline{v} = (a,b)^T$, con $b \neq 0$, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0 + at, 0 + bt) - f(\underline{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{a^2bt^3}{b^2t^3 + a^4t^5} = \frac{a^2}{b};$$

In $\underline{0}$ esistono dunque tutte le derivate direzionali. D'altra parte, se consideriamo la restrizione della f all'insieme $E = \{(x,x^2)^T : x \neq 0\}$, si vede subito che questa vale costantemente $\frac{1}{2} \neq 0 = f(\underline{0})$; pertanto la nostra funzione non è continua in $\underline{0}$.

Siamo perciò costretti a concludere che *la nozione di derivata parziale o direzionale non è la naturale estensione al caso delle funzioni di più variabili della nozione di derivata vista per le funzioni di una sola variabile.* Dobbiamo cercare un'altra strada.
Sappiamo che, per le funzioni di una variabile reale, la derivabilità in un punto x_0 equivale all'esistenza in x_0 dell'approssimante lineare. Quest'ultima nozione si estende in modo naturale al nuovo contesto.

DEFINIZIONE. Siano: A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, $\underline{x}^0$ un prefissato punto di A e f una funzione di A in $\mathbb{R}$. Una funzione $\overline{f}(\underline{x}) = L(\underline{x} - \underline{x}^0) + q$, con $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $q \in \mathbb{R}$, è detta *approssimante lineare di f in* $\underline{x}^0$ se

1) $\overline{f}(\underline{x}^0) = f(\underline{x}^0)$;
2) $f(\underline{x}) = \overline{f}(\underline{x}) + \varepsilon(\underline{x}) \cdot \|\underline{x} - \underline{x}^0\|$, con $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}^0} \varepsilon(\underline{x}) = 0$.

Se una siffatta funzione $\overline{f}$ esiste, si ha:

(*) $$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + L(\underline{x} - \underline{x}^0) + \varepsilon(\underline{x}) \cdot \|\underline{x} - \underline{x}^0\|, \text{ con } \varepsilon(\underline{x}) \to 0. \text{ se } \underline{x} \to \underline{x}^0.$$

DEFINIZIONE. La forma lineare L che compare nella (*) prende il nome di *differenziale di f in* $\underline{x}^0$. Per esprimere il fatto che la forma lineare L è il differenziale della funzione f *relativamente al punto* $\underline{x}^0$, si scrive $L = (df)(\underline{x}^0)$ o $L = df(\underline{x}^0)$.

DEFINIZIONE. Siano: A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, $\underline{x}^0$ un prefissato punto di A e f una funzione di A in $\mathbb{R}$. Se la f ammette approssimante lineare in $\underline{x}^0$, si dice che la f è *differenziabile* in questo punto. Se la f è differenziabile in ogni punto di A, si dice che f è *differenziabile in A.*

OSSERVAZIONE. Ricordiamo che, come visto alla fine del § 3 del Capitolo 11, la matrice associata ad una forma lineare L di $\mathbb{R}^n$ è una matrice M a *una* riga e n colonne: è cioè $M = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Dunque, per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, si ha:

(*) $$L(\underline{x}) = M\underline{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \langle \underline{a}, \underline{x} \rangle,$$

essendo $\underline{a} := (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$.
Notiamo che il differenziale della f, cioè la forma lineare L (o, equivalentemente, il vettore $\underline{a}$ che la individua) varia al variare dal punto $\underline{x}^0$. (Cfr. Teorema 3.)

TEOREMA 2. *Se* $f: A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *è differenziabile in un punto* $\underline{x}^0 \in A$, *allora f è continua in* $\underline{x}^0$.

DM. Se la f è differenziabile in $\underline{x}^0$, si ha $f(\underline{x}) = \overline{f}(\underline{x}) + \varepsilon(\underline{x}) \cdot \|\underline{x} - \underline{x}^0\|$, che tende a $f(\underline{x}^0)$ al tendere di $\underline{x}$ a $\underline{x}^0$. ∎

TEOREMA 3. *Se* $f: A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *è differenziabile in un punto* $\underline{x}^0 \in A$, *allora f ha in* $\underline{x}^0$ *tutte le derivate direzionali e si ha* $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}^0) = L(\underline{v})$.

DIM. Sia f differenziabile in $\underline{x}^0$. Qualunque sia il versore $\underline{v}$, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}^0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\underline{x}^0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}^0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\underline{x}^0) + L(t\underline{v}) + \varepsilon(t) \cdot |t| - f(\underline{x}^0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{tL(\underline{v})}{t} + \frac{\varepsilon(t)|t|}{t} \right) = L(\underline{v}). \blacksquare$$

COROLLARIO 4. *Se* $f: A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *è differenziabile in un punto* $\underline{x}^0 \in A$, *allora f ha in* $\underline{x}^0$ *tutte le derivate parziali e si ha:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}^0) = L(\underline{e}_i) = \langle \underline{a}, \underline{e}_i \rangle = a_i. \blacksquare$$

COROLLARIO 5. *Se il differenziale di una funzione* $f : A\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *esiste in un punto* $\underline{x}^0 \in A$*, allora esso è unico. Se è* $\underline{u} = (u_1, u_1, \ldots, u_n)^T$*, si ha:*

$$L(\underline{u}) = (df(\underline{x}^0))(\underline{u}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}^0)u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}^0)u_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}^0)u_n. \blacksquare$$

DEFINIZIONE. Se $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ è differenziabile in un punto $\underline{x}^0 \in A$, il vettore

$$\nabla f(\underline{x}^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}^0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}^0), \ \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}^0)\right)^T$$

è detto il *gradiente* di f in $\underline{x}^0$.

In base a tale definizione, si ha che, se $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile in un punto $\underline{x}^0 \in A$, allora:

$$(df(\underline{x}^0))(\underline{u}) = L(\underline{u}) = \langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{u} \rangle;$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}^0) = L(\underline{v}) = \langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{v} \rangle, \quad \text{se è } \|\underline{v}\| = 1;$$

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + \langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle + \varepsilon(\underline{x})\cdot\|\underline{x} - \underline{x}^0\|, \ \text{con} \lim_{\underline{x}\to\underline{x}^0} \varepsilon(\underline{x}) = 0.$$

ESEMPIO. 11) Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = e^x \cos y$. Vedremo tra poco che una funzione come questa è sicuramente differenziabile in ogni punto del suo dominio. Ammesso ciò, vediamo di calcolare il suo gradiente in un punto $\underline{x} = (x,y)^T$ e la derivata direzionale in tale punto secondo il versore $\underline{v} = (a,b)^T$. Si ha:

$$\nabla f(\underline{x}) = (e^x \cos y, -e^x \sin y)^T; \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}) = \langle \nabla f(\underline{x}), \underline{v} \rangle = ae^x \cos y - be^x \sin y.$$

N.B. Non si confondano le notazioni

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}^0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}^0)\right) \text{ e } \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}^0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}^0)\right)^T.$$

La prima è la *matrice* (a *una* riga e n colonne) associata alla forma lineare L del differenziale della f in $\underline{x}^0$; la seconda è il *vettore colonna* (matrice a n righe e *una* colonna) che è detto il *gradiente* della f in $\underline{x}^0$.

Può essere utile tener presente la seguente definizione che esprime l'interpretazione geometrica dell'approssimante lineare di una funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ in un punto $\underline{x}^0$ del suo dominio.

DEFINIZIONE. Siano $f : A(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in un punto $\underline{x}^0 \in A$ e $\overline{f}(\underline{x})$ il suo approssimante lineare in $\underline{x}^0$. La *superficie* di equazione

$$z = \overline{f}(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + \langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle$$

è detta *piano tangente* alla superficie di equazione $z = f(\underline{x})$ nel punto $P_0(\underline{x}^0, f(\underline{x}^0))$.

Si dimostra che questo piano contiene le rette per P_0 e tangenti alle curve di equazioni

$$\begin{cases} x = t \\ y = y_0 \\ z = f(t,y_0) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = x_0 \\ y = t \\ z = f(x_0,t) \end{cases} .$$

TEOREMA 6. *(del differenziale totale) - Se la funzione* $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$*, con A insieme aperto, è dotata in un intorno U di un punto* $\underline{x}^0 \in A$ *di derivate parziali prime e queste sono continue in* $\underline{x}^0$*, allora f è differenziabile in* $\underline{x}^0$*.*

DIM. Limitiamoci al caso di una funzione di due variabili. Dato $\underline{x}^0 = (x_0, y_0)^T \in A$, esiste una sfera $S(\underline{x}^0, r)$ contenuta in U. Se $\underline{x} = (x,y)^T$ è un arbitrario punto di S, la differenza $f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0)$ può essere scritta nella forma

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) = f(x,y) - f(x,y_0) + f(x,y_0) - f(x_0, y_0).$$

Tutti i punti della poligonale di vertici $\underline{x}^0 = (x_0, y_0)^T$, $\underline{x}^* = (x,y_0)^T$ e $\underline{x} = (x,y)^T$ appartengono ancora a S. La restrizione della f a ciascuno dei due segmenti di questa poligonale può essere vista come una funzione di una sola variabile che, per le nostre ipotesi, risulta derivabile. Si può quindi applicare in entrambe i casi il Teorema di Lagrange; si ottiene:

$$f(x,y) - f(x,y_0) = f_y(x,\eta)(y - y_0)$$

e

$$f(x,y_0) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi,y_0)(x - x_0).$$

Essendo le funzioni $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ continue in $\underline{x}^0$, si ha

$$f_y(x,\eta) = f_y(x_0,y_0) + \varepsilon_1(\underline{x}) \quad \text{e} \quad f_x(\xi,y_0) = f_x(x_0,y_0) + \varepsilon_2(\underline{x}),$$

con $\varepsilon_1(\underline{x})$ ed $\varepsilon_2(\underline{x})$ tendenti a zero al tendere di $\underline{x}$ a $\underline{x}^0$. Si ottiene:

$$f(x,y) - f(x,y_0) = [f_y(x_0,y_0) + \varepsilon_1(\underline{x})](y - y_0) \quad \text{e} \quad f(x,y_0) - f(x_0,y_0) = [f_x(x_0,y_0) + \varepsilon_2(\underline{x})](x - x_0).$$

In conclusione, è:

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) + \varepsilon_2(\underline{x})(x - x_0) + \varepsilon_1(\underline{x})(y - y_0).$$

Posto $\overline{f}(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$, si ha:

$$\frac{|f(\underline{x}) - \overline{f}(\underline{x})|}{\|\underline{x} - \underline{x}^0\|} = \frac{|\varepsilon_2(\underline{x})(x - x_0) + \varepsilon_1(\underline{x})(y - y_0)|}{\|\underline{x} - \underline{x}^0\|} \leq$$

$$\leq |\varepsilon_2(\underline{x})| \frac{|x - x_0|}{\|\underline{x} - \underline{x}^0\|} + |\varepsilon_1(\underline{x})| \frac{|y - y_0|}{\|\underline{x} - \underline{x}^0\|} \leq |\varepsilon_2(x)| + |\varepsilon_1(\underline{x})|,$$

che tende a zero al tendere di $\underline{x}$ a $\underline{x}^0$. ∎

Notiamo che non sussiste l'implicazione opposta di quest'ultimo Teorema; può anzi accadere che una funzione sia differenziabile in un punto $\underline{x}^0$ senza che *nessuna* delle sue derivate parziali sia continua in tale punto. Un controesempio è fornito dalla funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che vale 0 in 0 mentre vale $x^2 \sin\frac{1}{x}$ negli altri punti.

§ 2. CAMPI VETTORIALI

Il concetto di differenziale si estende in modo naturale anche ai campi vettoriali.

DEFINIZIONE. Data una funzione g: $A \to \mathbb{R}^m$, con A sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, e fissato un punto $\underline{x}^0 \in A$, una funzione $\overline{g}(\underline{x}) = L(\underline{x} - \underline{x}^0) + \underline{q}$, con $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $\underline{q} \in \mathbb{R}^m$, è detta *approssimante lineare della g in* $\underline{x}^0$ se:

1) $\overline{g}(\underline{x}^0) = g(\underline{x}^0)$;

2) $g(\underline{x}) = \overline{g}(\underline{x}) + \varepsilon(\underline{x})\cdot\|\underline{x} - \underline{x}^0\|$, con $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}^0} \varepsilon(\underline{x}) = \underline{0} \in \mathbb{R}^m$.

Se una siffatta funzione $\overline{g}$ esiste, si ha:

$$(*) \qquad g(\underline{x}) = g(\underline{x}^0) + L(\underline{x} - \underline{x}^0) + \varepsilon(\underline{x})\cdot\|\underline{x} - \underline{x}^0\|, \text{ con } \varepsilon(\underline{x}) \to \underline{0}. \text{ se } \underline{x} \to \underline{x}^0.$$

DEFINIZIONE. Se g: $A \to \mathbb{R}^m$ è dotata di approssimante lineare in un punto $\underline{x}^0 \in A$, si dice che g è *differenziabile in* $\underline{x}^0$ e l'applicazione lineare L che compare nella (*) è detta il *differenziale della g in* $\underline{x}^0$.

Dunque, se la funzione g: $A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in un punto $\underline{x}^0 \in A$, indicata con $M \in \mathfrak{M}(m, n)$ la matrice (a m righe e n colonne) associata all'applicazione lineare L, si ha:

$$g(\underline{x}) = g(\underline{x}^0) + M(\underline{x} - \underline{x}^0) + \varepsilon(\underline{x})\cdot\|\underline{x} - \underline{x}^0\|, \text{ con } \lim_{\underline{x}\to\underline{x}^0} \varepsilon(\underline{x}) = \underline{0} \in \mathbb{R}^m.$$

Se è:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

si ottiene:

$$g(\underline{x}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) = (g_1(\underline{x}), g_2(\underline{x}), \dots, g_m(\underline{x}))^T = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots, \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} g_1(\underline{x}^0) \\ g_2(\underline{x}^0) \\ \dots, \\ g_m(\underline{x}^0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 \\ \dots \\ x_n - x_n^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1(\underline{x})\cdot\|\underline{x} - \underline{x}^0\| \\ \varepsilon_2(\underline{x})\cdot\|\underline{x} - \underline{x}^0\| \\ \dots \\ \varepsilon_m(\underline{x})\cdot\|\underline{x} - \underline{x}^0\| \end{pmatrix}.$$

La componente i - ima della g è quindi espressa da:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_i(\underline{x}^0) + a_{i1}(x_1 - x_1^0) + a_{i2}(x_2 - x_2^0) + \dots + a_{in}(x_n - x_n^0) + \varepsilon_i(\underline{x})\cdot\|\underline{x} - \underline{x}^0\|,$$

con $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}^0} \varepsilon_i(\underline{x}) = 0$, per $i = 1, 2, \dots, m$.

Da ciò segue immediatamente il

TEOREMA 7. *Una funzione* $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)^T : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ *è differenziabile in un punto* $\underline{x}^0 \in A$ *se e solo se lo è ciascuna delle sue componenti* g_i. ∎

In virtù del Corollario 4 possiamo concludere col

COROLLARIO 8. *Se il differenziale di una funzione* $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m)^{\mathrm{T}} : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ *esiste in un punto* $\underline{x}^0 \in A$*, allora esso è unico e nella corrispondente matrice* $M = (a_{ij})$ *si ha:*

$$a_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\underline{x}^0). \blacksquare$$

DEFINIZIONE. Se la funzione g: $A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in un punto $\underline{x}^0 \in A$, la matrice M che definisce il differenziale prende il nome di *matrice jacobiana* della g in $\underline{x}^0$ e si indica con $(Jg)(\underline{x}^0)$. È dunque, per definizione,

$$(Jg)(\underline{x}^0) := \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\underline{x}^0)\right)_{i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n}.$$

Casi particolari

$\boxed{n = m = 2}$ Sia $g = (g_1, g_2)^{\mathrm{T}}$: $A(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$. Si ha $g(x, y) = \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{pmatrix}$ Se g è differenziabile in $\underline{x}^0 \in A$, si ha:

$$(Jg)(\underline{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix}(\underline{x}^0).$$

Sia, per esempio, g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $\begin{cases} g_1(\rho, \vartheta) = \rho \cos \vartheta \\ g_2(\rho, \vartheta) = \rho \sin \vartheta \end{cases}$.

Si ha: $$(Jg)(\rho, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

$\boxed{n = 1}$ Una funzione $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m)^{\mathrm{T}}$: $A(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in un punto $x_0 \in A$ se e solo se ogni g_i è derivabile in x_0 ed è

$$(Jg)(x_0) = \begin{pmatrix} g'_1(x_0) \\ g'_2(x_0) \\ \ldots, \\ g'_m(x_0) \end{pmatrix} = :g'(x_0).$$

Differenziabilità della funzione composta

Il noto Teorema di derivazione delle funzioni composte è generalizzato dal seguente risultato di cui omettiamo la dimostrazione:

TEOREMA 9. *Siano date le funzioni* $g : B(\subset \mathbb{R}^p) \to A \subset \mathbb{R}^n$, *differenziabile in* $\underline{u}^0 \in B$, *e* $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, *differenziabile in* $\underline{x}^0 = g(\underline{u}^0) \in A$, *allora la funzione composta* $h = f \circ g : B(\subset \mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}^m$ *è differenziabile nel punto* $\underline{u}^0 \in B$, *e la sua matrice Jacobiana è data da*

$$(Jh)(\underline{u}^0) = (Jf)(\underline{x}^0)\,(Jg)(\underline{u}^0)\,,$$

dove il secondo membro è dato dal prodotto (righe per colonne) delle matrici Jacobiane della f *in* $\underline{x}^0$ *e della* g *in* $\underline{u}^0$. ∎

Si ha cioè:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1}(\underline{u}^0) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial u_p}(\underline{u}^0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_m}{\partial u_1}(\underline{u}^0) & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial u_p}(\underline{u}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{x}^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\underline{x}^0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\underline{x}^0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\underline{x}^0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1}(\underline{u}^0) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_p}(\underline{u}^0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1}(\underline{u}^0) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial u_p}(\underline{u}^0) \end{pmatrix}$$

Caso particolare: $\boxed{m = p = 1}$

Siano: $g: I(\subset \mathbb{R}) \to A \subset \mathbb{R}^n$, differenziabile in $u_0 \in I$, e $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, differenziabile in $\underline{x}^0 = g(u_0) \in A$, allora la funzione composta $h = f \circ g: I(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è derivabile nel punto $u_0 \in I$ e si ha:

$$h'(u_0) = (Jf)(\underline{x}^0) \cdot (Jg)(u_0) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}^0), \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}^0) \right) \begin{pmatrix} g'_1(u_0) \\ \dots \\ g'_n(u_0) \end{pmatrix} = \langle \nabla f(\underline{x}^0), g'(u_0) \rangle .$$

ESEMPIO. 1) Siano $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da $g(u) = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, la funzione definita da $f(x,y,z) = e^x y \cos z$; per la funzione composta $h(u) = f \circ g(u)$ si ha:

$$h'(u) = \langle \nabla f(\underline{x}), g'(u) \rangle = (e^x y \cos z, e^x \cos z, - e^x y \sin z) \begin{pmatrix} 1 \\ 2u \\ 3u^2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 e^x y \cos z + 2u e^x \cos z - 3u^2 e^x y \sin z = e^u u^2 \cos u^3 + 2u e^u \cos u^3 - 3u^4 e^u \sin u^3 .$$

Come esercizio, si verifichi che, derivando $h(u) = e^u u^2 \cos u^3$, si ottiene lo stesso risultato.

Applicazione: La formula del valor medio

Siano $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ differenziabile, $\underline{x}^0 \in A$, e $S(\underline{x}^0, r)$ una sfera di centro $\underline{x}^0$ contenuta in A. Dato $\underline{x}^1 \in S$, sia $J = [\underline{x}^0, \underline{x}^1] = \{\underline{x}: \underline{x} = \underline{x}(t) = \underline{x}^0 + t(\underline{x}^1 - \underline{x}^0),\ t \in I = [0,1]\}$ il segmento di estremi $\underline{x}^0$ a $\underline{x}^1$. La funzione $F(t) = f(\underline{x}(t))$ è derivabile e si ha $F'(t) = \langle \nabla f(\underline{x}), \underline{x}'(t) \rangle$. Alla funzione $F(t)$ è applicabile su I il Teorema di Lagrange e si ha

$$F(1) - F(0) = F'(\tau)(1 - 0), \text{ con } 0 < \tau < 1.$$

Posto $\xi = \underline{x}(\tau)$, si ottiene il

TEOREMA 10 *(Formula del valor medio) - Siano* $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *una funzione differenziabile su un aperto* A, $\underline{x}^0 \in A$, *e* $S(\underline{x}^0,r)$ *una sfera di centro* $\underline{x}^0$ *contenuta in* A. *Per ogni* $x \in S$, *esiste un punto* ξ *interno al segmento di estremi* $\underline{x}$ *e* $\underline{x}^0$, *per cui si ha*

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) = \langle \nabla f(\xi), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle. \ \blacksquare$$

Sappiamo che, se una funzione di una variabile reale ha in un intervallo I la derivata identicamente nulla, allora essa è costante su I. Vediamo di studiare l'analogo problema per le funzioni di più variabili.

LEMMA 11. *Se la funzione* $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *ha su un insieme aperto* A *le derivate parziali identicamente nulle, allora, per ogni* $\underline{x}^0 \in A$, *esiste una sfera di centro* $\underline{x}^0$ *in cui la* f *è costante.*

DIM. Poiché le derivate parziali della f sono continue, f è differenziabile in A, con $\nabla f \equiv \underline{0}$. Fissiamo un punto $\underline{x}^0 \in A$. Essendo A aperto, esiste una sfera $S(\underline{x}^0,r)$ contenuta in A. Per ogni $\underline{x}^1 \in S$, il segmento di equazione $\underline{x} = \underline{x}(t)$ che lo unisce a $\underline{x}^0$ è contenuto in A. La restrizione di f a questo segmento è una funzione di una variabile con derivata $\langle \nabla f(\underline{x}), x'(t) \rangle$ identicamente nulla ed è quindi costante, con valore $f(\underline{x}^0)$. $\blacksquare$

TEOREMA 12. *Se la funzione* $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *ha su un insieme aperto e connesso* A *le derivate parziali identicamente nulle (che implica* $\nabla f \equiv \underline{0}$ *in* A*), allora la* f *è costante in* A.

DIM. Fissiamo ancora un punto $\underline{x}^0 \in A$. Per il Lemma 11, esiste una sfera $S(\underline{x}^0,r)$ contenuta in A. in cui la f è costante. Sia A' il sottoinsieme di A formato dai punti $\underline{x}$ per cui è $f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0)$. Si ha, intanto, $S \subset A'$. Se è $\underline{x} \in A'$ $(\subset A)$, esiste, ancora per il Lemma 11, una sfera di centro $\underline{x}$ contenuta in A'; dunque A' è un sottoinsieme aperto di A. Sia ora $\underline{x}^1$ un generico punto di A. Essendo A connesso, esiste un'applicazione continua $\gamma : I = [0, 1] \to A$, con $\gamma(0) = \underline{x}^0$, $\gamma(1) = \underline{x}^1$ e $\gamma(I) \subset A$. Siano $t^* = \sup\{t \in I : \gamma(t) \in A'\}$ e $\underline{x}^* = \gamma(t^*) \in A$. Per il Lemma 11, esiste una sfera S di centro $\underline{x}^*$ contenuta in A in cui la f è costante. In S devono cadere punti di A'; si ottiene $f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0)$, da cui $\underline{x} \in A'$. Se fosse $t^* < 1$; esisterebbero dei $t > t^*$ con $\gamma(t) \in A'$. Ma ciò andrebbe contro la definizione di t^*; si conclude che è $t^* = 1$ e che $\underline{x}^1 \in A'$, ossia $f(\underline{x}^1) = f(\underline{x}^0)$. $\blacksquare$

N.B. Può accadere che una funzione $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ differenziabile in un insieme aperto e connesso A abbia la derivata parziale f_{x_i} identicamente nulla in A, senza che la f sia costante rispetto a x_i.

ESEMPIO. Siano $A = \{(x, y)^T : y < 0\} \cup \{(x, y)^T : y \geq 0, |x| > 1\}$ e $f : A(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se è } y < 0 \\ y^2 & \text{se è } y \geq 0 \text{ e } x > 1 \\ -y^2 & \text{se è } y \geq 0 \text{ e } x < -1 \end{cases} .$$

Si ha $f_x(\underline{x}) \equiv 0$, pur essendo, per esempio, $f(2,1) = 1$ e $f(-2,1) = -1$.

§ 3. IL DIFFERENZIALE SECONDO PER I CAMPI SCALARI

Sia $f : I(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile; dunque, ad ogni $x \in I$ resta associato il numero reale $f'(x)$. Si ha così una nuova funzione f', sempre di I in $\mathbb{R}$. Se anche la f' è derivabile, la sua derivata è la *derivata seconda della f su I.* Come vanno le cose per le funzioni di più variabili?

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile sul sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}^n$. Ad ogni $\underline{x} \in A$ associamo il vettore $\nabla f(\underline{x}) \in \mathbb{R}^n$. Viene così definita una nuova funzione

$$g = \nabla f\colon A \to \mathbb{R}^n.$$

DEFINIZIONE. Se la funzione $g = \nabla f\colon A \to \mathbb{R}^n$ è differenziabile in un punto $\underline{x}^0 \in A$, si dice che f è *due volte differenziabile in* $\underline{x}^0$ e la matrice Jacobiana di g in $\underline{x}^0$ si chiama *matrice hessiana di f in* $\underline{x}^0$ e si indica con $(Hf)(\underline{x}^0)$.

È dunque, per definizione,

$$(Hf)(\underline{x}^0) := (Jg)(\underline{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\underline{x}^0) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\underline{x}^0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(\underline{x}^0) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(\underline{x}^0) \end{pmatrix}.$$

Essendo $g_1(\underline{x}) := \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x})$, $g_2(\underline{x}) := \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x})$, …, $g_n(\underline{x}) := \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x})$, si ha:

$$(Hf)(\underline{x}^0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \ \partial f}{\partial x_1 \partial x_1}(\underline{x}^0) & \dots & \frac{\partial \ \partial f}{\partial x_n \partial x_1}(\underline{x}^0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \ \partial f}{\partial x_1 \partial x_n}(\underline{x}^0) & \dots & \frac{\partial \ \partial f}{\partial x_n \partial x_n}(\underline{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}(\underline{x}^0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\underline{x}^0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\underline{x}^0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n{}^2}(\underline{x}^0) \end{pmatrix}.$$

DEFINIZIONE. L'applicazione che ad ogni $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ associa il numero $\langle (Hf)(\underline{x}^0)\underline{u}, \underline{u} \rangle \in \mathbb{R}$ prende il nome di *differenziale secondo della f in* $\underline{x}^0$ e si indica con $(d^2f)(\underline{x}^0)$. (Il perché verrà chiarito tra poco, Teorema 14.)

OSSERVAZIONE. Risulta:

$$(d^2f)(\underline{x}^0)\ (\underline{u}) = \langle (Hf)(\underline{x}^0)\underline{u}, \underline{u} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(\underline{x}^0) u_i u_j\,;$$

dunque, se $(d^2f)(\underline{x}^0)$ non è il polinomio nullo, è un polinomio omogeneo di secondo grado.

ESEMPIO. 1) Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $f(x,y) = x^2y + xy^3$. Si ha:

$$\nabla f(\underline{x}) = (2xy + y^3, x^2 + 3xy^2)^{\mathrm{T}};\ \ (Hf)(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 3y^2 \\ 2x + 3y^2 & 6xy \end{pmatrix}.$$

Dato il vettore $\underline{u} = (u, v)^T$, si ha:

$$(Hf)(\underline{x})\underline{u} = (2yu + (2x + 3y^2)v,\ \ (2x + 3y^2)u + 6xyv)^T;$$

$$\langle (Hf)(\underline{x}^0)\underline{u}\ ,\ \underline{u}\rangle = 2yu^2 + 2(2x + 3y^2)uv + 6xyv^2.$$

I seguenti risultati descrivono le proprietà del differenziale secondo .

TEOREMA 13. *Se* $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *è due volte differenziabile in un punto* $\underline{x}^0 \in A$, *allora la matrice Hessiana* $(Hf)(\underline{x}^0)$ *è simmetrica; è cioè* $f_{x_ix_j}(\underline{x}^0) = f_{x_jx_i}(\underline{x}^0)$ (Cfr. § 4). ∎

Si ritrova così il risultato del Teorema di Schwarz, ma sotto ipotesi diverse.

TEOREMA 14. *Se* $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *è due volte differenziabile in un punto* $\underline{x}^0 \in A$, *allora sussiste la seguente Formula di Taylor:*

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + \langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0\rangle + \frac{1}{2}\langle (Hf)(\underline{x}^0)(\underline{x} - \underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0\rangle + \varepsilon(\underline{x})\cdot\|\underline{x} - \underline{x}^0\|^2,$$

con $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}^0} \varepsilon(\underline{x}) = 0.$

DIM[1]**.** Proveremo il Teorema sotto l'ulteriore ipotesi che la funzione ∇f sia continua in A. Siano S una sfera di centro $\underline{x}^0$ contenuta in A e $\underline{x}$ un punto di S. Consideriamo la restrizione della f al segmento $[\underline{x}^0, \underline{x}] = \{\underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0): 0 \le t \le 1\}$ di estremi $\underline{x}$ e $\underline{x}^0$ e poniamo $F(t) = f(\underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0))$. La $F(t)$ è funzione, di classe C^1, di una sola variabile; ad essa si può dunque applicare la formula di Torricelli (cfr. il Teor. 12 del Cap. 13). Si ha:

$$(*) \qquad f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(t)\,dt = \int_0^1 \langle \nabla f(\underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0)), \underline{x} - \underline{x}^0\rangle\, dt.$$

Essendo, per ipotesi, $\nabla f(\underline{x})$ differenziabile in $\underline{x}^0$, si ha:

$$\nabla f(\underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0)) = \nabla f(\underline{x}^0) + (Hf)(\underline{x}^0)(t(\underline{x} - \underline{x}^0)) + \varepsilon(\underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0))\, t\,\|\underline{x} - \underline{x}^0\|,$$

con $\varepsilon(\underline{x})$ che tende a zero al tendere di $\underline{x}$ a $\underline{x}^0$. Sostituendo nella (*), si ottiene facilmente:

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) = \int_0^1 \langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0\rangle dt +$$

$$+ \int_0^1 \langle (Hf)(\underline{x}^0)(\underline{x} - \underline{x}^0),\ \underline{x} - \underline{x}^0\rangle t\,dt + \int_0^1 \langle \varepsilon(\underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0)), \underline{x} - \underline{x}^0\rangle t\,\|\underline{x} - \underline{x}^0\|\, dt =$$

$$= \langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0\rangle \int_0^1 dt + \langle (Hf)(\underline{x}^0)(\underline{x} - \underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0\rangle \int_0^1 t\, dt +$$

$$+ \|\underline{x} - \underline{x}^0\| \int_0^1 \langle \varepsilon(\underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0)), \underline{x} - \underline{x}^0\rangle t\,dt =$$

[1] Questa dimostrazione presuppone la conoscenza di alcuni degli argomenti che verranno esposti nel prossimo Capitolo.

$$= \langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle + \frac{1}{2} \langle (Hf)(\underline{x}^0)(\underline{x} - \underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle + \|\underline{x} - \underline{x}^0\| \int_0^1 \langle \varepsilon(\underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0)), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle t\, dt.$$

Avendosi

$$\|\underline{x} - \underline{x}^0\| \left| \int_0^1 \langle \varepsilon(\underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0)), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle t\, dt \right| \leq$$

$$\leq \|\underline{x} - \underline{x}^0\| \int_0^1 \left| \langle \varepsilon(\underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0)), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle \right| t\, dt \leq \|\underline{x} - \underline{x}^0\|^2 \int_0^1 \|\varepsilon(\underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0))\| t\, dt,$$

basta provare che $\int_0^1 \|\varepsilon(\underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0))\| t\, dt$ tende a 0 al tendere di $\underline{x}$ a $\underline{x}^0$. Fissato un $\eta > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che da $0 < \|\underline{x} - \underline{x}^0\| < \delta$ segue $\|\varepsilon(\underline{x})\| < \eta$. Per tali $\underline{x}$ si ha

$$\int_0^1 \|\varepsilon(\underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0))\| t\, dt < \int_0^1 \eta t\, dt = \frac{\eta}{2}. \ ▮$$

TEOREMA 15. *Se $f : A \to \mathbb{R}$, con A sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, è di classe C^2 in A, allora f è due volte differenziabile in A.*

DIM. Basta applicare il Teorema del differenziale totale alle derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, con $i = 1, 2, \ldots, n$. ▮

§ 4. FORME QUADRATICHE

DEFINIZIONE. Una matrice quadrata

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

è detta *simmetrica* se è $a_{ij} = a_{ji}$, con $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

DEFINIZIONE. Data una matrice simmetrica M si dice *forma quadratica associata a M* la funzione $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(\underline{u}) = \langle M\underline{u}, \underline{u} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j .$$

Dunque, se $\varphi(u)$ non è il polinomio nullo, è un polinomio omogeneo di secondo grado.

ESEMPIO. 1) $n = 1$; $\varphi(u) = au^2$;

$n = 2$; $\varphi(u_1, u_2) = au_1^2 + 2bu_1u_2 + cu_2^2$;

$n = 3$; $\varphi(u_1, u_2, u_3) = a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2 + 2a_{12}u_1u_2 + 2a_{13}u_1u_3 + 2a_{23}u_2u_3$.

DEFINIZIONE. Una forma quadratica φ è detta:

definita positiva se è $\varphi(\underline{u}) > 0$ per ogni $\underline{u} \neq \underline{0}$;
definita negativa se è $\varphi(\underline{u}) < 0$ per ogni $\underline{u} \neq \underline{0}$;
semidefinita positiva se è $\varphi(\underline{u}) \geq 0$ per ogni $\underline{u}$;
semidefinita negativa se è $\varphi(\underline{u}) \leq 0$ per ogni $\underline{u}$;
indefinita (di segno) se $\exists\ \underline{u}, \underline{v}$ tali che $\varphi(\underline{u}) > 0$ e $\varphi(\underline{v}) < 0$.

ESEMPIO. 2) Si constata subito che:

$\varphi(u_1, u_2) = 3u_1^2 + 2u_2^2$ è definita positiva; $\varphi(u_1, u_2) = -u_1^2 - u_2^2$ è definita negativa;
$\varphi(u_1, u_2) = u_1^2 - u_2^2$ è indefinita; $\varphi(u_1, u_2) = u_1^2$ è semidefinita positiva.

Sussiste al riguardo il seguente risultato

TEOREMA 16. *(di Jacobi) - Data la matrice simmetrica*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

si ponga: $M_1 := a_{11}$, $M_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, …, $M_n := |M|$ *(dunque M_i è il minore principale di ordine i, con $i = 1, 2, \dots, n$). Allora, per la forma quadratica φ associata a M si ha che:*

φ è definita positiva se e solo se è $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, $M_3 > 0$, …, $M_n > 0$;
φ è definita negativa se e solo se è $M_1 < 0$, $M_2 > 0$, $M_3 < 0$, …, $(-1)^n M_n > 0$. ∎

Caso particolare, *n* = 2

TEOREMA 17. *Data la matrice simmetrica non nulla*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

per la forma quadratica $\varphi(u_1, u_2) = au_1^2 + 2bu_1u_2 + cu_2^2$ *associata a M si ha che:*

φ è definita positiva se e solo se è $a > 0$ *e* $ac - b^2 > 0$;
φ è definita negativa se e solo se è $a < 0$ *e* $ac - b^2 > 0$;
φ è indefinita se e solo se è $ac - b^2 < 0$;
φ è semidefinita (ma non definita) positiva se e solo se è $ac - b^2 = 0$, *con* $a > 0$ *o* $c > 0$;
φ è semidefinita (ma non definita) negativa se e solo se è $ac - b^2 = 0$, *con* $a < 0$ *o* $c < 0$.

DIM. Sia $\underline{u} = (u_1,u_2)^T \neq \underline{0}$ e con $u_2 \neq 0$. Si ha:

$$\varphi(u_1, u_2) = u_2^2 \left(a \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^2 + 2b\,\frac{u_1}{u_2} + c \right).$$

Posto $t = \frac{u_1}{u_2}$, si ottiene che il segno di $\varphi(u_1, u_2)$ è dato dal segno della funzione polinomiale $\psi(t) = at^2 + 2bt + c$. Ora la funzione ψ cambia segno se e solo se è $ac - b^2 < 0$, mentre è di segno costante se e solo se è $ac - b^2 > 0$, che implica $ac > 0$; in questo caso il segno di $\psi(t)$ è dato dal segno di a (e quindi di c). Ne viene che la φ è semidefinita (ma non definita) se e solo se è $ac - b^2 = 0$, con $(a \neq 0) \vee (c \neq 0)$. Essendo $\varphi(u_1, 0) = au_1^2$, si perviene alla conclusione anche nel caso che sia $u_2 = 0$. ▮

TEOREMA 18. *Una forma quadratica* φ *è definita positiva* [*negativa*] *se e solo se esiste un numero positivo m tale che* $\varphi(\underline{u}) \geq m\|\underline{u}\|^2$ [*se e solo se esiste un numero negativo M tale che* $\varphi(\underline{u}) \leq M\|\underline{u}\|^2$] *per ogni* $\underline{u}$.

DIM. Sia $\underline{u} \neq \underline{0}$; posto $\underline{v} = \dfrac{\underline{u}}{\|\underline{u}\|}$, si ha $\varphi(\underline{u}) = \|\underline{u}\|^2\varphi(\underline{v})$, con $\|\underline{v}\| = 1$. La funzione $\varphi(\underline{v})$ è definita e continua sulla sfera unitaria di $\mathbb{R}^n$ che è un insieme compatto; per il Teorema di Weierstrass, essa assume dunque un valore minimo m e uno massimo M. È dunque

$$m\|\underline{u}\|^2 \leq \|\underline{u}\|^2\varphi(\underline{v}) = \varphi(\underline{u}) \leq M\|\underline{u}\|^2.$$

Si ottiene così la tesi, dato che la φ è definita positiva [negativa] se e solo se è $m > 0$ [se e solo se è $M < 0$]. ▮

§ 5. ESTREMI LIBERI PER FUNZIONI SCALARI

Si pone in modo molto naturale il seguente:

PROBLEMA. Data la funzione $f : E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, ricercare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei valori assunti dalla funzione, ossia $\sup f(E)$ e $\inf f(E)$. Si vuole, in particolare, decidere se la f è limitata o no su E.

Sappiamo che se la f è continua e l'insieme E è compatto (cioè chiuso e limitato), allora, per il Teorema di Weierstrass, l'insieme $f(E)$ ammette massimo e minimo. E se E non è compatto?

Chiaramente, se si trova un sottoinsieme di E in cui la restrizione della f è superiormente [inferiormente] illimitata, è tale anche la f su tutto E. Provare che la f è limitata è, di regola, più delicato, in quanto richiede un lavoro di maggiorazioni e minorazioni da escogitare di caso in caso.

ESEMPI. 1) Si consideri la funzione $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, definita in $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$. Dalla ben nota disuguaglianza $|xy| \leq \dfrac{x^2 + y^2}{2}$, si ha $\dfrac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq \dfrac{1}{2}$. Dunque la f è limitata e si vede subito che $-\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{1}{2}$ sono, rispettivamente, il minimo e il massimo della f.

2) Si consideri la funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$. La sua restrizione all'asse delle ascisse dà luogo alla funzione x^4 che è superiormente illimitata; è dunque $\sup f(\mathbb{R}^2) = +\infty$. Si ha, inoltre, $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy \geq x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^2) = (x^4 - 2x^2) + (y^4 - 2y^2) \geq -2$ (come si vede studiando brevemente la funzione $x^4 - 2x^2$). Abbiamo così provato che la f è inferiormente limitata; si vede anzi che essa ha addirittura un valore minimo, dato che è $f(1,1) = -2$.

In analogia con quanto fatto per le funzioni di una variabile, si dà la seguente

DEFINIZIONE. Siano dati: una funzione $f : E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ e un punto $\underline{x}^0 \in E$. Si dice che il punto $\underline{x}^0$ è di *massimo* [*minimo*] *relativo* per la f se esiste un intorno U di $\underline{x}^0$ tale che

$$\underline{x} \in U \cap E \setminus \{\underline{x}^0\} \Rightarrow f(\underline{x}) < f(\underline{x}^0) \qquad [\Rightarrow f(\underline{x}) > f(\underline{x}^0)].$$

Un punto $\underline{x}^0 \in E$ che sia di massimo o di minimo relativo per la f è detto un *punto di estremo per la f.*

DEFINIZIONE. Siano dati: una funzione $f : E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ e un punto $\underline{x}^0$ interno ad E. Si dice che il punto $\underline{x}^0$ è di *sella* per la f se esistono due rette r e s passanti per $\underline{x}^0$ tali che questo punto sia di massimo relativo per la restrizione della f a $r \cap E$ e di minimo relativo per la restrizione della f a $s \cap E$.

Il Teorema di Fermat per le funzioni di una variabile può essere così generalizzato:

TEOREMA 19 *(Test delle derivate prime) - Siano dati: un sottoinsieme aperto A di* $\mathbb{R}^n$, *un punto* $\underline{x}^0 \in A$ *e una funzione* $f : A \to \mathbb{R}$ *differenziabile in* $\underline{x}^0$. *Se* $\underline{x}^0$ *è punto di estremo per la f, si ha necessariamente* $\nabla f(\underline{x}^0) = \underline{0}$.

DIM. Se il punto $\underline{x}^0$ è di estremo per la f lo è anche per le sue restrizioni alle rette per $\underline{x}^0$ e parallele agli assi; a tali restrizioni si può applicare il Teorema di Fermat. Dunque la f ha nulle in $\underline{x}^0$ tutte le sue derivate parziali prime. ▮

DEFINIZIONE. Data $f : E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, un pu nto $\underline{x}^0 \in E$ in cui la f è differenziabile ed è $\nabla f(\underline{x}^0) = \underline{0}$ è detto un punto *critico* per la f.

Il Teorema precedente ci dice dunque che un punto di estremo per una funzione f a valori reali, definita e differenziabile su un aperto di $\mathbb{R}^n$, è un punto critico per la f.

N.B. Non sussiste l'implicazione opposta. Basta pensare ad una funzione del tipo $f(\underline{x}) = x^3$.

TEOREMA 20 *(Test delle derivate seconde) - Sia* $f : A \to \mathbb{R}$, *con A sottoinsieme aperto di* $\mathbb{R}^n$, *una funzione due volte differenziabile in un punto* $\underline{x}^0 \in A$ *e sia* $\nabla f(\underline{x}^0) = \underline{0}$. *Allora, detta* $\varphi(\underline{u})$ *la forma quadratica* $\langle (Hf)(\underline{x}^0)\underline{u}, \underline{u} \rangle$, *si ha che:*

i) *se* φ *è definita positiva,* $\underline{x}^0$ *è punto di minimo relativo per la f;*

ii) *se* φ *è definita negativa,* $\underline{x}^0$ *è punto di massimo relativo per la f;*

iii) *se* φ *è indefinita,* $\underline{x}^0$ *è punto di sella per la f;*

DIM. Posto $\underline{v} = \dfrac{\underline{x} - \underline{x}^0}{\|\underline{x} - \underline{x}^0\|}$ e utilizzando la formula di Taylor, si ha:

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) = \langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle + \frac{1}{2} \langle (Hf)(\underline{x}^0)(\underline{x} - \underline{x}^0), \ \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle + \varepsilon(\underline{x}) \cdot \|\underline{x} - \underline{x}^0\|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \langle (Hf)(\underline{x}^0)\underline{v}, \underline{v} \rangle \cdot \|\underline{x} - \underline{x}^0\|^2 + \varepsilon(\underline{x}) \cdot \|\underline{x} - \underline{x}^0\|^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \langle (Hf)(\underline{x}^0)\underline{v}, \underline{v} \rangle + \varepsilon(\underline{x}) \right) \|\underline{x} - \underline{x}^0\|^2.$$

i) Per il Teorema 18, esiste un $m > 0$ tale che $\varphi(\underline{v}) = \langle (Hf)(\underline{x}^0)\underline{v}, \underline{v} \rangle \geq m$. È dunque:

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) \geq \left(\frac{1}{2}m + \varepsilon(\underline{x})\right)\|\underline{x} - \underline{x}^0\|^2.$$

Dato che $\varepsilon(\underline{x})$) tende a zero al tendere di $\underline{x}$ a $\underline{x}^0$, si ha $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}^0}\left(\frac{1}{2}m + \varepsilon(\underline{x})\right) = \frac{m}{2} > 0$. Per il Teorema della permanenza del segno, esiste dunque un intorno U di $\underline{x}^0$ in cui è $\frac{m}{2} + \varepsilon(\underline{x}) > 0$. Nello stesso intorno, per $\underline{x} \neq \underline{x}^0$, si ha $f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) > 0$.

ii) Si prova in modo perfettamente analogo, sfruttando il fatto che, sempre per il Teorema 18, esiste un $M < 0$ tale che $\varphi(\underline{v}) = \langle (Hf)(\underline{x}^0)\underline{v}, \underline{v}\rangle \leq M$.

iii) Se la forma quadratica $\langle (Hf)(\underline{x}^0)\underline{u}, \underline{u}\rangle$ è indefinita, si ha $m < 0 < M$. Esistono perciò due versori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ tali che $\varphi(\underline{v}_1) > 0$ e $\varphi(\underline{v}_2) < 0$. Il punto $\underline{x}^0$ è di minimo per la restrizione di f ad $A \cap \{\underline{x}: \underline{x} = \underline{x}^0 + \underline{v}_1 t\}$ e di massimo per la restrizione di f ad $A \cap \{\underline{x}: \underline{x} = \underline{x}^0 + \underline{v}_2 t\}$. ∎

N.B. Sia $\underline{x}^0$ un punto in cui è $\nabla f(\underline{x}^0) = \underline{0}$. Se la forma quadratica $\langle (Hf)(\underline{x}^0)\underline{u}, \underline{u}\rangle$ è semidefinita, o se è il polinomio nullo, non si può dire, senza ulteriori informazioni, se il punto $\underline{x}^0$ è di estremo o meno.

ESEMPI. 3) Si cercano gli estremi della funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$. Si ha $\nabla f(\underline{x}) = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x)^T$; esso si annulla in $\underline{x}^0 = \underline{0}$, in $\underline{x}^1 = (1,1)^T$ e in $\underline{x}^2 = (-1,-1)^T$. Avendosi

$$(Hf)(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

si ottiene

$$(Hf)(\underline{0}) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (Hf)(\underline{x}^1) = (Hf)(\underline{x}^2) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Applicando il Teor. 17, si ottiene che le forma quadratiche $\langle (Hf)(\underline{x}^1)\underline{u}, \underline{u}\rangle$ e $\langle (Hf)(\underline{x}^2)\underline{u}, \underline{u}\rangle$ sono definite positive ed i punti $\underline{x}^1$ e $\underline{x}^2$ sono di minimo. Anzi, si ha $f(\underline{x}^1) = f(\underline{x}^2) = -2$; d'altra parte abbiamo visto più su che è $f(\underline{x}) \geq -2$; si riottiene così che -2 è il minimo della funzione. Si vede poi subito che la forma $\langle (Hf)(\underline{0})\underline{u}, \underline{u}\rangle = -8uv$ è indefinita e quindi il punto $\underline{0}$ è di sella.

4) Si cercano gli estremi della funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^4 - 2x^2y + y^2$. Si ha $\nabla f(\underline{x}) = (4x^3 - 4xy, -2x^2 + 2y)^T$; i punti di annullamento si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^3 - xy = 0 \\ y - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - y) = 0 \\ y - x^2 = 0 \end{cases}.$$

Il gradiente si annulla dunque in tutti e soli i punti del tipo $(x, x^2)^T$. Si ha:

$$(Hf)(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4y & -4x \\ -4x & 2 \end{pmatrix} \qquad (Hf)(x,x^2) = \begin{pmatrix} 8x^2 & -4x \\ -4x & 2 \end{pmatrix},$$

da cui: $\det (Hf)(x, x^2) \equiv 0$. In tutti questi punti, la forma quadratica $\langle (Hf)(x, x^2)\underline{u}, \underline{u}\rangle$ è semidefinita. Per questa via, non possiamo perciò concludere nulla. Basta però osservare che è $f(x,y) = (x^2 - y)^2$ per stabilire che i punti $(x, x^2)^T$ sono tutti di minimo relativo in senso debole, che non ci sono punti di massimo relativo, che è $\min f = 0$ e $\sup f = +\infty$.

§ 6. ESTREMI VINCOLATI PER FUNZIONI SCALARI

Si cercano gli estremi della funzione $f : E(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x + y$, se:
1) $E = E_1 := \{(x,y)^T: x^2 + y^2 \leq 1\}$;
2) $E = E_2 := \{(x,y)^T: x^4 + y^4 - 2xy \leq 1\}$.

Nel primo caso, si arriva facilmente al risultato. Si vede che gli estremi vanno ricercati fra i punti per cui è $x^2 + y^2 = 1$. Si può allora esplicitare una delle due variabili su due semicirconferenze, oppure si può scrivere l'equazione parametrica della circonferenza [cioè $x = \cos \vartheta$, $y = \sin \vartheta$]; in ogni caso ci si riduce a studiare funzioni di una sola variabile. Ma nel secondo caso la faccenda è molto più complicata. Come possiamo procedere?

DEFINIZIONE. Data le funzione $f : E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, diremo che un sottoinsieme proprio e non vuoto Γ di E è un *vincolo* per la f.

ESEMPIO. 1) I vincoli tipici (ma non gli unici possibili) sono:
a) $n = 2$; $\Gamma := \{(x,y)^T: \varphi(x,y) = 0\}$, curva piana.
b) $n = 3$; $\Gamma := \{(x,y,z)^T: \varphi(x,y,z) = 0\}$, superficie nello spazio.
c) $n = 3$; $\Gamma := \{(x,y,z)^T: \varphi(x,y,z) = 0,\ \psi(x,y,z) = 0\}$, curva nello spazio data come intersezione di due superfici.
[Si veda quanto detto nel $ 2 del Cap. 11 a proposito dei termini "curva" e "superficie".]

DEFINIZIONE. Sono dati una: funzione $f : E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, un vincolo Γ e un punto $\underline{x}^0 \in \Gamma$. Si dice che $\underline{x}^0$ è *di estremo vincolato* o *condizionato* per f su Γ se $\underline{x}^0$ è punto di estremo per la restrizione di f a Γ.

ESEMPI. 2) Trovare gli estremi condizionati della funzione $f(x,y,z) = x + y^2 + z^3$, con i vincoli: $z = x^2 + y^2$, $x + y + z = 1$.

3) Trovare i punti della curva di equazione $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ che hanno distanza massima o minima dal punto origine $\underline{0}$.

Stabiliamo, intanto, il seguente risultato:

TEOREMA 21. *Siano:* $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1 *sull'insieme aperto* A, $\Gamma = \{(x,y)^T \in A: \varphi(x,y) = 0\} \subset A$ *un vincolo per* f *e* $\gamma: I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *una curva regolare* (cioè *differenziabile* e con $\gamma'(t) \neq \underline{0}$, $\forall t \in I$), *con sostegno contenuto in* Γ. *Sia poi* $\underline{x}^0 \in \Gamma$, *con* $\underline{x}^0 = \gamma(t_0)$, $t_0 \in\ ]a,b[$. *Se* $\underline{x}^0$ *è punto di estremo condizionato per* f *su* Γ, *allora si ha*

$$\langle \nabla f(\underline{x}^0), \gamma'(\underline{x}^0) \rangle = 0.$$

DIM. La funzione $\psi(t) = f(\gamma(t)) : [a,b] \to \mathbb{R}$ è di classe C^1 ed ha in t_0 un punto di estremo interno. Dunque, per il Teorema di Fermat, si ha

$$0 = \psi'(t_0) = \langle \nabla f(\underline{x}^0), \gamma'(\underline{x}^0) \rangle. \blacksquare$$

Ciò ci mostra che i punti di estremo vincolato vanno ricercati fra quelli in cui il ∇f o non è definito o è ortogonale alla tangente di ogni curva regolare passante per il punto stesso e avente il sostegno contenuto nel vincolo Γ. Ci si esprime dicendo che ∇f è *ortogonale al vincolo* Γ.

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Una condizione necessaria affinché un punto sia di estremo è fornita dal seguente risultato, attribuito a Lagrange. Non produrremo la dimostrazione di questo Teorema; inoltre, anziché darne un unico enunciato generale, preferiamo spezzarlo in tre diverse proposizioni, allo scopo di renderne più chiaro l'utilizzo pratico.

$\boxed{n = 2.}$ **TEOREMA 22.** *Siano: $f, \varphi : A(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1 sull'insieme aperto A, $\Gamma := \{(x,y)^T \in A: \varphi(x,y) = 0\}$, $\underline{x}^0 = (x_0, y_0)^T \in \Gamma$, con $\nabla\varphi(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$. Allora, se $\underline{x}^0$ è di estremo condizionato per la f su Γ, esiste un numero reale λ_0 tale che*

$$\nabla f(\underline{x}^0) + \lambda_0 \nabla\varphi(\underline{x}^0) = \underline{0},$$

cioè (x_0, y_0, λ_0) è soluzione del sistema:

$$(*) \qquad \begin{cases} f_x(x,y) + \lambda\varphi_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) + \lambda\varphi_y(x,y) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} . \blacksquare$$

OSSERVAZIONE. Notiamo che la condizione necessaria espressa dal Teorema precedente dice che ∇f è *parallelo* a $\nabla\varphi$. Tenuto presente che $\nabla\varphi$ è *ortogonale* alla tangente alla curva di sostegno Γ (cfr. l'Esercizio 6), si vede che il risultato concorda con quanto visto nel Teorema 21.

ESEMPIO. 4) Trovare i punti della curva di equazione $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ che hanno distanza massima o minima dal punto origine $\underline{0}$. Poiché la radice quadrata è una funzione crescente, il problema è equivalente a quello di trovare il valore massimo e il valore minimo della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$, con il vincolo $\varphi(x,y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2 - 1 = 0$. Il sistema (*) diventa:

$$\begin{cases} 2x + \lambda(6x + 2y) = 0 \\ 2y + \lambda(6y + 2x) = 0 \\ 3x^2 + 2xy + 3y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + 3\lambda)x + \lambda y = 0 \\ (1 + 3\lambda)y + \lambda x = 0 \\ 3x^2 + 2xy + 3y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + 2\lambda)(x - y) = 0 \\ (1 + 3\lambda)y + \lambda x = 0 \\ 3x^2 + 2xy + 3y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ (1 + 4\lambda)x = 0 \\ 8x^2 = 1 \end{cases} (\Rightarrow\ x = y = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}) \quad \vee \quad \begin{cases} \lambda = \frac{-1}{2} \\ y = -x \\ 4x^2 = 1 \end{cases} \quad (\Rightarrow\ x = -y = \pm\frac{1}{2}).$$

Si ha poi $\nabla\varphi(\underline{x}) = \underline{0}$ se e solo se è $\underline{x} = \underline{0}$, ma $\underline{0}$ non appartiene a Γ. La funzione f è continua ed è ristretta ad un insieme chiuso e limitato; esiste perciò un valore massimo ed uno minimo. Gli unici punti dove la funzione può assumere questo massimo e questo minimo sono:

$$\underline{x}^1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^T, \ \underline{x}^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^T \ \underline{x}^3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)^T \ \underline{x}^4 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T.$$

Avendosi $f(\underline{x}^1) = f(\underline{x}^2) = 1/4$ e $f(\underline{x}^3) = f(\underline{x}^4) = 1/2$, si conclude che questi due valori sono, rispettivamente, il minimo e il massimo di quelli assunti dalla f nella restrizione studiata. In conclusione, i punti della curva che hanno distanza massima da $\underline{0}$ sono $\underline{x}^3$ e $\underline{x}^4$, mentre quelli che hanno distanza minima sono $\underline{x}^1$ e $\underline{x}^2$.

N.B. Si tenga presente che, quando risolviamo il sistema (*), non siamo interessati a determinare i valori di λ, lo facciamo solo se questo ci è utile per determinare i valori di x e di y (e, quando è il caso, di z) che sono quelli che stiamo cercando.

n = 3, 1 vincolo. **TEOREMA 23.** *Siano:* $f, \varphi : A(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ *due funzioni di classe* C^1 *sull'insieme aperto A,* $\Gamma := \{(x,y,z)^T \in A: \varphi(x,y,z) = 0\}$, $\underline{x}^0 = (x_0, y_0, z_0)^T \in \Gamma$, *con* $\nabla\varphi(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$. *Allora, se* $\underline{x}^0$ *è di estremo condizionato per la f su* Γ, *esiste un numero reale* λ_0 *tale che*

$$\nabla f(\underline{x}^0) + \lambda_0 \nabla\varphi(\underline{x}^0) = \underline{0},$$

cioè $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ *è soluzione del sistema:*

$$(*) \qquad \begin{cases} f_x(x,y,z) + \lambda\varphi_x(x,y,z) = 0 \\ f_y(x,y,z) + \lambda\varphi_y(x,y,z) = 0 \\ f_z(x,y,z) + \lambda\varphi_z(x,y,z) = 0 \\ \varphi(x,y,z) = 0 \end{cases} . \blacksquare$$

ESEMPIO. 5) Trovare gli estremi della funzione $f(x,y,z) = x + y + z$, su

$$E := \left\{(x,y,z)^T\colon \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1\right\}.$$

Il sistema (*) diventa:

$$\begin{cases} 1 + \frac{2}{4}\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ 1 + \frac{2}{9}\lambda z = 0 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{2}{x} \\ y = \frac{x}{4} \\ z = \frac{9}{4}x \\ \frac{14}{16}x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (1) \vee (2)$$

$$(1) \begin{cases} x = -2\sqrt{\frac{2}{7}} \\ y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{7}} \\ z = -\frac{9}{2}\sqrt{\frac{2}{7}} \end{cases} ; \quad (2) \begin{cases} x = 2\sqrt{\frac{2}{7}} \\ y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{7}} \\ z = \frac{9}{2}\sqrt{\frac{2}{7}} \end{cases} .$$

Si ha poi $\nabla\varphi(\underline{x}) = \underline{0}$ se e solo se è $\underline{x} = \underline{0}$, ma $\underline{0}$ non appartiene a Γ. La funzione f è continua ed è ristretta ad un insieme chiuso e limitato; esiste perciò un valore massimo ed uno minimo. Gli unici punti dove la funzione può assumere questo massimo e questo minimo sono:

$$\underline{x}^1 = \left(-2\sqrt{\frac{2}{7}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{7}}, -\frac{9}{2}\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^T, \quad \underline{x}^2 = \left(2\sqrt{\frac{2}{7}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{7}}, \frac{9}{2}\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^T,$$

Avendosi $f(\underline{x}^2) = 7\sqrt{\frac{2}{7}}$ e $f(\underline{x}^1) = -7\sqrt{\frac{2}{7}}$ si conclude che questi due valori sono, rispettivamente, il massimo e il minimo di quelli assunti dalla f nella restrizione studiata.

$\boxed{\textbf{n = 3, 2 vincoli}}$. **TEOREMA 24.** *Siano: f, φ, ψ: $A(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ tre funzioni di classe C^1 nell'insieme aperto A, $\Gamma := \{(x,y,z)^T \in A$: $\varphi(x,y,z) = 0, \psi(x,y,z) = 0\}$, $\underline{x}^0 = (x_0, y_0, z_0)^T \in \Gamma$, con la matrice Jacobiana* $\begin{pmatrix} \varphi_x(\underline{x}^0) & \varphi_y(\underline{x}^0) & \varphi_z(\underline{x}^0) \\ \psi_x(\underline{x}^0) & \psi_y(\underline{x}^0) & \psi_z(\underline{x}^0) \end{pmatrix}$ *di rango (o caratteristica)* 2. *Allora, se $\underline{x}^0$ è di estremo condizionato per la f su Γ, esistono due numeri reali λ_0 e μ_0 tali che*

$$\nabla f(\underline{x}^0) + \lambda_0 \nabla\varphi(\underline{x}^0) + \mu_0 \nabla\psi(\underline{x}^0) = \underline{0},$$

cioè $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$ è soluzione del sistema:

$$(*) \qquad \begin{cases} f_x(x,y,z) + \lambda\varphi_x(x,y,z) + \mu\psi_x(x,y,z) = 0 \\ f_y(x,y,z) + \lambda\varphi_y(x,y,z) + {}_0\psi_y(x,y,z) = 0 \\ f_z(x,y,z) + \lambda\varphi_z(x,y,z) + \mu\psi_z(x,y,z) = 0 \\ \varphi(x,y,z) = 0 \\ \psi(x,y,z) = 0 \end{cases} . \blacksquare$$

ESEMPIO. 6) Si vogliono trovare gli estremi condizionati della funzione $f(x,y,z) = x + y^2z$, con i vincoli: $x^2 + y^2 - 2 = 0$ e $z - x = 0$. Il sistema (*) diventa

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x - \mu = 0 \\ 2yz + 2\lambda y = 0 \\ y^2 + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -y^2 \\ 2y(z + \lambda) = 0 \\ 1 + 2\lambda x + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (1) \vee (2);$$

$$(1) \begin{cases} \mu = 0 = y \\ 1 + 2\lambda x = 0 \\ x^2 = 2 \\ z - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z = \pm\sqrt{2} \end{cases};$$

$$(2) \begin{cases} \mu = -y^2 \\ \lambda = -z \\ 1 - 2xz + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2x^2 + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}.$$

Gli unici punti in cui il rango della matrice jacobiana del vincolo è minore di 2 sono, come si constata facilmente, quelli del tipo $(0, 0, z)^T$ che però non appartengono a Γ. I punti che possono essere di estremo condizionato per la nostra funzione sono dunque i seguenti:

$$\underline{x}^1 = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})^T; \quad \underline{x}^2 = (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})^T; \quad \underline{x}^3 = (1, 1, 1)^T;$$

$$\underline{x}^4 = (1, -1, 1)^T; \quad \underline{x}^5 = (-1, 1, -1)^T; \quad \underline{x}^6 = (-1, -1, -1)^T.$$

Si ha: $f(\underline{x}^1) = \sqrt{2}$, $f(\underline{x}^2) = -\sqrt{2}$; $f(\underline{x}^3) = f(\underline{x}^4) = 2$; $f(\underline{x}^5) = f(\underline{x}^6) = -2$. I valori minimo e massimo sono dunque -2 e 2.

OSSERVAZIONE. (Ricetta per la ricerca dei punti di estremo). I punti di estremo per una funzione f: E $(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, con $\mathcal{F}E = \{\underline{x}: \Phi(\underline{x}) = 0\}$, vanno ricercati tra:

1) i punti interni in cui è $\nabla f = \underline{0}$;
2) i punti interni in cui f non è differenziabile;
3) i punti di frontiera in cui è applicabile il metodo dei moltiplicatori di Lagrange;
4) i punti di frontiera in cui non è applicabile il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e, in particolare, i punti in cui il rango della matrice jacobiana $J\Phi$ non è massimo.

ESEMPIO. 7) Cercare gli estremi della funzione $f(x,y,z) = x + y + z$, ristretta al cubo $E = \{(x,y,z)^T: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$.
Occupiamoci dapprima dei punti interni. Si vede subito che il gradiente della f è definito in ogni punto e non è mai nullo. Non ci sono punti di estremo interni.
Veniamo ai punti di frontiera. Cominciamo con i punti interni alle facce del cubo.
Faccia $F_1 = \{(x,y,z)^T: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, z = 0\}$. Si ottiene la funzione $f(x,y) = x + y$. Questa è una funzione di due variabili definita su un quadrato; il gradiente di questa funzione è sempre definito e mai nullo; non ci sono punti di estremo interni. In modo analogo si procede per le altre facce del cubo.
Si passa allora agli spigoli. Sia, per esempio, $S_1 = \{(x,y,z)^T: 0 \le x \le 1, \ y = 0, z = 0\}$. Si ottiene la funzione $f(x) = x$, che non ha punti di estremo per $0 < x < 1$. Non ci resta che da calcolare i valori della f negli 8 vertici del cubo. Minimo: $f(0, 0, 0) = 0$; massimo: $f(1, 1, 1) = 3$.

§ 7. E S E R C I Z I

1) *a*) Siano: $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione $\begin{pmatrix} \rho \cos \vartheta \\ \rho \sin \vartheta \end{pmatrix}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una funzione differenziabile e $h(\underline{u}) = f \circ g(\underline{u})$. Si calcoli $(Jh)(\underline{u}^0)$, con $\underline{u}^0 = (\rho_0, \vartheta_0)^T$.

b) Stesso problema con g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ u \end{pmatrix}$ e f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenziabile.

[$\Re$. *a*)
$$\left(\frac{\partial h}{\partial \rho}(\underline{u}^0), \frac{\partial h}{\partial \vartheta}(\underline{u}^0)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}^0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}^0)\right) \begin{pmatrix} \cos \vartheta_0 & -\rho_0 \sin \vartheta_0 \\ \sin \vartheta_0 & \rho_0 \cos \vartheta_0 \end{pmatrix} =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}^0)\cos \vartheta_0 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}^0)\sin \vartheta_0, -\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}^0)\rho_0 \sin \theta_0 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}^0)\rho_0 \cos\vartheta_0\right).$$
b)
$$\frac{dh}{dx}(u_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_0)\right)\begin{pmatrix} -\sin u_0 \\ \cos u_0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\sin u_0 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \cos u_0 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_0).]$$

2) Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2\sin(xy)$; *b*) $g(x,y,z) = \log(x^2 + y^2 - 2z^2)$; *c*) $h(x,y,z) = x^{(y - z)}$.

[$\Re$. *a*) $\nabla f(\underline{x}) = (2x + y^3\cos(xy), 2y \sin(xy) + xy^2\cos(xy))^T$;
b) $\nabla g(\underline{x}) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 - 2z^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2 - 2z^2}, \frac{-4z}{x^2 + y^2 - 2z^2}\right)^T$;

c) $\nabla h(\underline{x}) = (x^{(y - z - 1)}, x^{(y - z)}\log x, -x^{(y - z)}\log x)^T$.]

3) *a*) Calcolare la derivata direzionale della funzione $f(x,y)$ dell'Esercizio (2*a*) nel punto $(1,1)^T$ secondo la direzione del vettore $(1,2)^T$.

b) Analoga domanda per le funzioni degli esercizi (2*b*) e (2*c*) nel punto $(1,1,0)^T$ secondo la direzione del vettore $(1,0,1)^T$.

[$\Re$. *a*) Il versore della direzione assegnata è $\underline{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^T$; dall'Esercizio (2*a*) si ha: $\nabla f(1,1) = (2 + \cos 1, 2\sin 1 + \cos 1)^T$. Si ottiene: $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,1) = \frac{2 + \cos 1}{\sqrt{5}} + 2\,\frac{2\sin 1 + \cos 1}{\sqrt{5}}$.

b) In questi casi è $\underline{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$; poi si procede esattamente come sopra.]

4) Si calcoli la matrice Jacobiana della funzione composta $f \circ g$, con $f(\underline{x})$ di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$ differenziabile e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $g(\rho,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \rho \sin\varphi \cos\vartheta \\ \rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ \rho \cos\varphi \end{pmatrix}$.

[$\Re$. Basta calcolare il prodotto (righe per colonne) delle matrici Jacobiane della f e della g:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}),\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(\underline{x})\right)\begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\vartheta & \rho\cos\varphi\cos\vartheta & -\rho\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & \rho\cos\varphi\sin\vartheta & \rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}.]$$

5) Sia $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ differenziabile in $\underline{x}^0 \in A$, con $\nabla f(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$. In quale direzione è massima (minima) la derivata direzionale della f in $\underline{x}^0$?

[$\Re$. Sia dato un versore $\underline{v}$. Sappiamo che è:

$$(*) \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}\right| = |\langle \nabla f, \underline{v}\rangle| \leq \|\nabla f\|\cdot\|\underline{v}\| = \|\nabla f\| \quad (\neq \underline{0} \text{ per ipotesi}).$$

Il valore massimo (e quello minimo) si hanno quando nella (*) vale il segno di uguaglianza e sappiamo che ciò accade se e solo se i vettori $\underline{v}$ e ∇f sono paralleli (Cfr. Teorema 19 del Capitolo 11).]

6) *Curve di livello.* Data $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, f differenziabile, fissiamo un punto $\underline{x}^0 \in A$. È detto *insieme di livello* l'insieme

$$\Gamma := \{\underline{x} \in A\colon f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0)\}.$$

Sia $n = 2$. Si può dimostrare che, se è $\nabla f(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$, Γ è, almeno localmente, il sostegno di una *curva regolare* γ (detta *curva di livello*) esprimibile nella forma cartesiana $y = g(x)$ [oppure $x = h(y)$], definita in un intervallo I. Si trovi, sotto queste ipotesi, l'espressione di $g'(x)$ [di $h'(y)$].

[$\Re$. Sia, per esempio, γ esprimibile nella forma $y = g(x)$; si ha dunque $\gamma(t) = (t,g(t))^T$. Posto $F(t) = f(t, g(t))$, si ottiene un'applicazione di I in $\mathbb{R}$ derivabile, con $F'(t) \equiv 0$. Ne viene:

$$F'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))g'(t) \equiv 0,$$

da cui;
$$g'(t) = -\frac{f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))}.]$$

7) Si trovino gli estremi della funzione $f(x,y) = x + y$ ristretta all'insieme dei punti del piano per cui è $x^4 + y^4 - 2xy - 1 \leq 0$.

[$\Re$. Si vede subito che non ci sono punti di estremo interni al dominio. Passando ai punti di frontiera. Si constata che è $\nabla\varphi(\underline{x}) = \underline{0}$ solo nei punti $(k,k)^T$ con $k \in \{0, \pm\sqrt{1/2}\}$ che però non appartengono al vincolo. Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si ottiene il sistema formato dalle 3 equazioni:

(*) $\quad 1 + 2\lambda[2x^3 - y] = 0; \quad 1 + 2\lambda[2y^3 - x] = 0; \quad x^4 + y^4 - 2xy - 1 = 0.$

Sottraendo la seconda dalla prima, si ottiene:

$$2\lambda[2(x^3 - y^3) + (x - y)] = 2\lambda(x - y)[2x^2 + 2xy + 2y^2 + 1] = 0.$$

Se è $\lambda = 0$, la prima delle (*) diventa $1 = 0$. Deve perciò essere $\lambda \neq 0$. Si vede che l'ultima equazione è soddisfatta solo dai punti per cui è $x = y$ (infatti è $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 1 = x^2 + y^2 + (x + y)^2 + 1 > 0$). Sostituendo nella terza delle (*), si ottiene l'equazione: $2x^4 - 2x^2 - 1 = 0$. Si trovano così i punti $\underline{x}^1 = (t,t)^T$ e $\underline{x}^2 = (-t,-t)^T$ con $t = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$. Conclusione: il minimo condizionato della f è $f(\underline{x}^2) = -2\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$ e il massimo è $f(\underline{x}^1) = 2\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$.]

8) Si trovino gli estremi della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ ristretta all'insieme dei punti del piano per cui è $x^4 + y^4 - 2xy - 1 = 0$.

[$\Re$. … Si ottiene il sistema formato dalle 3 equazioni

(*) $\quad x + \lambda[2x^3 - y] = 0; \quad y + \lambda[2y^3 - x] = 0; \quad x^4 + y^4 - 2xy - 1 = 0.$

Non può essere $\lambda = 0$, perché si otterrebbe l'uguaglianza $1 = 0$. Non può essere $x = 0$, perché dalla prima si otterrebbe anche $y = 0$, ma $(0,0)$ non è soluzione della terza. Dunque x, y e λ sono tutti diversi da zero. Dalle prime due (*) si ottiene:

$$-\frac{1}{\lambda} = \frac{2x^3 - y}{x} = \frac{2y^3 - x}{y},$$

da cui
$$(2xy + 1)(x^2 - y^2) = 0.$$

Se fosse $2xy + 1 = 0$, la terza delle (*) diventerebbe $x^4 + y^4 = 0$, che non dà soluzioni, essendo $x \neq 0 \neq y$.

Da $x = y$ si ottengono i punti $\underline{x}^1$ e $\underline{x}^2$ trovati nell'Esercizio precedente.

Da $x = -y$, si trovano i punti $\underline{x}^3 = (t',t')^T$ e $\underline{x}^4 = (-t',-t')^T$, con $t' = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}$.

Minimo: $f(\underline{x}^3) = f(\underline{x}^4) = -1 + \sqrt{3}$; massimo: $f(\underline{x}^1) = f(\underline{x}^2) = 1 + \sqrt{3}$.]

9) Si ricerchino il massimo e il minimo della funzione $f(x,y,z) = xyz$ ristretta all'insieme

$$E_k := \{(x,y,z)^T \colon x + y + z = k,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

Si sfrutti il risultato ottenuto per dimostrare che la media geometrica di 3 numeri positivi è sempre minore o uguale alla loro media aritmetica.

[$\Re$. La funzione f è continua e definita su un insieme compatto, quindi, per il Teorema di Weierstrass, ammette un massimo e un minimo. Si vede subito che il minimo è 0 ed è assunto nei punti in cui è nulla almeno una delle coordinate. Cerchiamo il massimo fra i punti del dominio per cui è $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si ottiene il sistema formato dalle 4 equazioni:

$$(*) \qquad yz = -\lambda; \qquad xz = -\lambda; \qquad xy = -\lambda; \qquad x + y + z - k = 0.$$

Dalle prime 3 delle (*), dividendo membro a membro, si ottiene il sistema

$$x = y = z.$$

Sostituendo nella quarta delle (*), si ottiene $x = y = z = \frac{k}{3}$. Il valore massimo della f è dunque assunto nel punto $\underline{x}^0 = \left(\frac{k}{3}, \frac{k}{3}, \frac{k}{3}\right)^T$ e si ha $f(\underline{x}^0) = \frac{k^3}{3^3}$.

Dunque, da $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $x + y + z = 3M$ $(= k)$, segue $xyz \leq M^3$ e quindi $\sqrt[3]{xyz} \leq M$.]

10) Si studi il comportamento nell'origine delle funzioni di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$:

$$f_1(x,y) = x^2 + y^4; \quad f_2(x,y) = x^2 - y^4; \quad f_3(x,y) = x^2; \quad f_4(x,y) = x^2 + y^3;$$
$$g_1(x,y) = x^4 + y^4; \quad g_2(x,y) = x^4 - y^4; \quad g_3(x,y) = x^4; \quad g_4(x,y) = x^3.$$

[$\Re$. Per tutte le funzioni è $\nabla f(\underline{0}) = \underline{0}$. Per le prime 4 funzioni è $\langle (Hf_i)(\underline{0})\underline{u},\underline{u}\rangle = 2u^2$ che è una forma quadratica semidefinita positiva, ma $\underline{0}$ è punto di minimo per f_1, di sella per f_2, di minimo relativo in senso debole per f_3 e nulla di tutto ciò per f_4. Per le ultime 4 funzioni $\langle (Hg_i)(\underline{0})\underline{u},\underline{u}\rangle$ è il polinomio nullo (forma quadratica *nulla*); ora $\underline{0}$ è punto di minimo per g_1, di sella per g_2, di minimo relativo in senso debole per g_3 e nulla di tutto ciò per g_4.]

11) **3.-** Si determinino gli estremi assoluti e relativi della funzione $f(x,y) = \log(x -+ 2y)$,

sull'insieme $\qquad E = \{(x,y)^T \colon x^2 + y^2 \leq 1\} \cap D$, con D = dominio di f.

12) È data la funzione $\qquad f(x,y) = x^2 - x - y^2$.

a) Trovare gli estremi assoluti e relativi di f.
b) Trovare gli estremi assoluti di f ristretta all'insieme $E = \{(x, y)^T \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$.

13) Si determinino gli estremi assoluti e relativi della funzione $\quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$,

sull'insieme $\qquad E = \{(x,y,z)^T \colon \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \leq 1\}$.

14) Si determinino gli estremi assoluti e relativi della funzione $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 - y^2$,

sull'insieme $\qquad E = \{(x,y)^T \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Capitolo Tredicesimo

INTEGRALE DI RIEMANN

§ 1. LA DEFINIZIONE DI INTEGRALE

Potremmo dare un'unica definizione ma, per chiarezza, distinguiamo i casi $n = 1, 2, 3$.

A) $\boxed{n = 1}$

Sia $R = [a, b]$ ($\subset \mathbb{R}$) un intervallo. Si fissano $n + 1$ punti di $[a, b]$: $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ e si pone $R_i = [x_{i-1}, x_i]$, con $i = 1, 2, \ldots, n$.

DEFINIZIONE. La collezione degli R_i è detta *decomposizione* di R. La indicheremo scrivendo $\delta := \{R_i\}$. Indicheremo, inoltre, con $m(R_i)$ l'ampiezza dell'intervallo R_i o, ciò che è lo stesso, la sua *misura*; è dunque $m(R_i) := x_i - x_{i-1}$.

DEFINIZIONE. Siano date le due decomposizioni δ e δ' di R, individuate rispettivamente dalle due collezioni di punti $\{x_0, \ldots, x_n\}$ e $\{x'_0, \ldots, x'_m\}$. Se è $\{x_0, \ldots, x_n\} \subset \{x'_0, \ldots, x'_m\}$, si dice che δ' è *più fine* di δ e si scrive $\delta \leqq \delta'$.

È di immediata verifica il seguente

TEOREMA 1. *Quella ora definita è una relazione d'ordine parziale nell'insieme $\Delta(R)$ di tutte le possibili decomposizioni di R. Inoltre, date le due decomposizioni δ e δ' di R individuate dagli insiemi di punti* $\{x_0, \ldots, x_n\}$ e $\{x'_0, \ldots, x'_m\}$, *esiste una decomposizione più fine di entrambi; anzi, la decomposizione δ'' che si ottiene dai punti dell'insieme $\{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{x'_0, \ldots, x'_m\}$ è la minima seguente comune di δ e δ'.* ∎

DEFINIZIONE. Data una funzione $f\colon R\ (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che sia *limitata*, per ogni decomposizione δ di R, si definiscono la *somma inferiore* $s(\delta,f)$ e la *somma superiore* $S(\delta,f)$ ponendo:

$$s(\delta,f) := \sum_{i=1}^{n} l_i\, m(R_i), \qquad S(\delta,f) := \sum_{i=1}^{n} L_i\, m(R_i),$$

essendo
$$l_i := \inf f(R_i), \quad L_i := \sup f(R_i).$$

Si prova poi il

TEOREMA 2. 1) *$s(\delta,f) \le S(\delta,f)$, per ogni $\delta \in \Delta(R)$.*
2) *Se è $\delta \leqq \delta'$, allora è $s(\delta,f) \le s(\delta',f)$* e *$S(\delta,f) \ge S(\delta',f)$.*
3) *Quali che siano le decomposizioni δ' e δ'' di R, si ha $s(\delta',f) \le S(\delta'',f)$.*

DIM. La (1) è immediata. Proviamo la (2). Per passare da una decomposizione δ di R a una più fine δ', bisogna aggiungere ai punti x_i che individuano δ un numero finito di ulteriori punti; possiamo pensare di procedere a tappe, aggiungendo un punto alla volta; basta provare che la tesi sussiste per ciascuno di questi passi. Supponiamo dunque assegnata la decomposizione δ individuata dai punti $\{x_0, \ldots, x_n\}$ e aggiungiamo un punto $y \in\ ]x_{i-1}, x_i[$. Siano:

$$R'_i := [x_{i-1}, y], \quad R''_i := [y, x_i], \quad l'_i := \inf f(R'_i), \ l''_i := \inf f(R''_i).$$

Si ha immediatamente: $l'_i \geq l_i$ e $l''_i \geq l_i$, da cui

$$l'_i m(R'_i) + l''_i m(R''_i) \geq l_i (m(R'_i) + m(R''_i)) = l_i m(R_i)$$

e quindi la tesi. Si procede analogamente per le somme superiori.

Proviamo ora la (3). Date due decomposizioni δ' e δ'' di R, sia δ una decomposizione più fine di entrambi. Si ha:

$$s(\delta',f) \leq s(\delta,f) \leq S(\delta,f) \leq S(\delta'',f). \blacksquare$$

La (3) si esprime dicendo che: *Le classi numeriche* $\sigma(f) = \{s(\delta,f)\}$ e $\Sigma(f) = \{S(\delta,f)\}$ *sono separate.*

DEFINIZIONE. Se le classi numeriche $\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ sono *contigue*, cioè se è $\sup \sigma(f) = \inf \Sigma(f)$, si dice che f è *integrabile (secondo Riemann) su R*. Il numero $\sup \sigma(f) = \inf \Sigma(f)$ è detto l'*integrale* della f su R e lo si indica col simbolo

$$\int_R f\, dm; \quad \int_R f(x)\, dx.$$

ESEMPI. 1) Sia f: $R = [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione che vale 1 nei punti razionali e vale 0 in quelli irrazionali. Qualunque sia la decomposizione δ di R, si ha, per ogni i, $l_i = 0$ e $L_i = 1$, da cui $s(\delta,f) = 0$ e $S(\delta,f) = 1$. Dunque la funzione data, che è detta funzione di Dirichlet, *non è* integrabile su R.

2) Sia f: $R = [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione che vale costantemente 1. Qualunque sia la decomposizione δ di R, si ha, per ogni i, $l_i = L_i = 1$, da cui $s(\delta,f) = S(\delta,f) = 1$. Dunque la funzione data *è* integrabile su R e si ha $\int_R f\, dm = 1$.

3) Sia f: $R = [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$. Decomponiamo R in n intervalli di uguale ampiezza $\rho = \frac{1}{n}$. Si ha:

$$s(\delta,f) = \sum_{i=1}^{n} l_i\, m(R_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2n} < \frac{1}{2};$$

$$S(\delta,f) = \sum_{i=1}^{n} L_i\, m(R_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Si ha inoltre:

$$S(\delta,f) - s(\delta,f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{1}{n}.$$

Le classi numeriche delle somme inferiori e delle somme superiori sono dunque contigue e l'unico elemento separatore è $\frac{1}{2}$. La f è quindi integrabile su R e si ha $\int_R f\, dm = \frac{1}{2}$.

4) Sia f: $R = [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Decomponiamo R in n intervalli di uguale ampiezza $\rho = \frac{1}{n}$. Si ha:

$$s(\delta,f) = \sum_{i=1}^{n} l_i m(R_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n\,(2n-1)}{6} < \frac{1}{3};$$

$$S(\delta,f) = \sum_{i=1}^{n} L_i m(R_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L_i = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6} > \frac{1}{3}.$$

Si ha inoltre:

$$S(\delta,f) - s(\delta,f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}[i^2 - (i-1)^2] =$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(2i-1) < \frac{(2n-1)n}{n^3} < \frac{2}{n}.$$

Le classi numeriche delle somme inferiori e delle somme superiori sono dunque contigue e l'unico elemento separatore è $\frac{1}{3}$. La f è quindi integrabile su R e si ha $\int_R f\,dm = \frac{1}{3}$.

B) $\boxed{\boldsymbol{n = 2}}$

Sia $R = [a, b] \times [c, d]$ un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Si fissano $n + 1$ punti di $[a, b]$: $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ e $p + 1$ punti di $[c, d]$: $y_0 = c < y_1 < \ldots < y_p = d$. Si pone $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, con $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, p$.

DEFINIZIONE. La collezione degli R_{ij} è detta *decomposizione* di R. La indicheremo scrivendo $\delta := \{R_{ij}\}$. Indicheremo, inoltre, con $m(R_{ij})$ la misura del rettangolo R_{ij}; è dunque $m(R_{ij}) := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$.

DEFINIZIONE. Siano date le due decomposizioni δ e δ' di R, individuate rispettivamente dalle due collezioni di punti $\{x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_p\}$ e $\{x'_0, \ldots, x'_m, y'_0, \ldots, y'_q\}$. Se è $\{x_0, \ldots, x_n\} \subset \{x'_0, \ldots, x'_m\}$ e $\{y_0, \ldots, y_p\} \subset \{y'_0, \ldots, y'_q\}$, si dice che δ' è *più fine* di δ e si scrive $\delta \leqq \delta'$.

È di immediata verifica il seguente

TEOREMA 1'. *Quella ora definita è una relazione d'ordine parziale nell'insieme* $\Delta(R)$ *di tutte le possibili decomposizioni di* R. *Inoltre, date le due decomposizioni* δ *e* δ' *di* R *individuate dagli insiemi di punti* $\{x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_p\}$ e $\{x'_0, \ldots, x'_m, y'_0, \ldots, y'_q\}$, *esiste una decomposizione più fine di entrambi; anzi, la decomposizione* δ'' *che si ottiene dagli insiemi* $\{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{x'_0, \ldots, x'_m\}$ e $\{y_0, \ldots, y_p\} \cup \{y'_0, \ldots, y'_q\}$ *è la minima seguente comune di* δ *e* δ'. ∎

DEFINIZIONE. Data una funzione f: $R(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ che sia *limitata*, per ogni decomposizione δ di R, si definiscono la *somma inferiore* $s(\delta,f)$ e la *somma superiore* $S(\delta,f)$ ponendo:

$$s(\delta,f) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} l_{ij}\, m(R_{ij}),\quad S(\delta,f) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} L_{ij}\, m(R_{ij}),$$

essendo $$l_{ij} := \inf f(R_{ij}),\qquad L_{ij} := \sup f(R_{ij}).$$

Si vede subito che, analogamente al caso $n = 1$, sussiste il

TEOREMA 2'. 1) $s(\delta,f) \leq S(\delta,f)$, *per ogni* $\delta \in \Delta(R)$.
2) *Se è* $\delta \leqq \delta'$, *allora è* $s(\delta,f) \leq s(\delta',f)$ *e* $S(\delta,f) \geq S(\delta',f)$.
3) *Quali che siano le decomposizioni* δ' e δ'' *di* R, *si ha* $s(\delta',f) \leq S(\delta'',f)$. ∎

La (3) si esprime dicendo che: *Le classi numeriche* $\sigma(f) = \{s(\delta,f)\}$ e $\Sigma(f) = \{S(\delta,f)\}$ *sono separate.*

DEFINIZIONE. Se le classi numeriche $\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ sono *contigue*, cioè se è $\sup \sigma(f) = \inf \Sigma(f)$, si dice che f è *integrabile (secondo Riemann) su R*. Il numero $\sup \sigma(f) = \inf \Sigma(f)$ è detto l'*integrale* della f su R e lo si indica con uno dei simboli

$$\int_R f\, dm;\qquad \iint_R f(x,y)\, dxdy.$$

C) $\boxed{n = 3}$

Sia $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ un rettangolo di $\mathbb{R}^3$ (cioè un parallelepipedo). Si fissano $n + 1$ punti di $[a_1, b_1]$: $x_0 = a_1 < x_1 < \ldots < x_n = b_1$, $p + 1$ punti di $[a_2, b_2]$: $y_0 = a_2 < y_1 < \ldots < y_p = b_2$ e $r + 1$ punti di $[a_3, b_3]$: $z_0 = a_3 < z_1 < \ldots < z_r = b_3$. Si pone $R_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$, con $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, p$ e $k = 1, 2, \ldots, r$.

DEFINIZIONE. La collezione degli R_{ijk} è detta *decomposizione* di R. La indicheremo scrivendo $\delta = \{R_{ijk}\}$. Indicheremo, inoltre, con $m(R_{ijk})$ la misura del rettangolo R_{ijk}; è dunque $m(R_{ijk}) := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$.

DEFINIZIONE. Siano date le due decomposizioni δ e δ' di R, individuate rispettivamente dalle due collezioni di punti $\{x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_p, z_0, \ldots, z_r\}$ e $\{x'_0, \ldots, x'_m, y'_0, \ldots, y'_q, z'_0, \ldots, z'_s\}$. Se è $\{x_0, \ldots, x_n\} \subset \{x'_0, \ldots, x'_m\}$, $\{y_0, \ldots, y_p\} \subset \{y'_0, \ldots, y'_q\}$ e $\{z_0, \ldots, z_r\} \subset \{z'_0, \ldots, z'_s\}$ si dice che δ' è *più fine* di δ e si scrive $\delta \leqq \delta'$.

È di immediata verifica il seguente

TEOREMA 1". *Quella ora definita è una relazione d'ordine parziale nell'insieme* $\Delta(R)$ *di tutte le possibili decomposizioni di* R. *Inoltre, date le due decomposizioni* δ *e* δ' *di* R *individuate dagli insiemi di punti* $\{x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_p, z_0, \ldots, z_r\}$ *e* $\{x'_0, \ldots, x'_m, y'_0, \ldots, y'_q, z'_0, \ldots, z'_s\}$, *esiste una decomposizione più fine di entrambi; anzi, la decomposizione* δ'' *che si ottiene dagli insiemi* $\{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{x'_0, \ldots, x'_m\}$, $\{y_0, \ldots, y_p\} \cup \{y'_0, \ldots, y'_q\}$ *e* $\{z_0, \ldots, z_r\} \cup \{z'_0, \ldots, z'_s\}$ *è la minima seguente comune di* δ *e* δ'. ∎

DEFINIZIONE. Data una funzione f: $R(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ che sia *limitata*, per ogni decomposizione δ di R, si definiscono la *somma inferiore* $s(\delta,f)$ e la *somma superiore* $S(\delta,f)$ ponendo:

$$s(\delta,f) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} l_{ijk}\, m(R_{ijk}), \qquad S(\delta,f) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} L_{ijk}\, m(R_{ijk}),$$

essendo
$$l_{ijk} := \inf f(R_{ijk}), \qquad L_{ijk} := \sup f(R_{ijk}).$$

Si vede subito che, analogamente ai casi $n = 1$ e $n = 2$, sussiste il

TEOREMA 2". 1) $s(\delta,f) \le S(\delta,f)$, *per ogni* $\delta \in \Delta(R)$.
2) *Se è* $\delta \leqq \delta'$, *allora è* $s(\delta,f) \le s(\delta',f)$ *e* $S(\delta,f) \ge S(\delta',f)$.
3) *Quali che siano le decomposizioni* δ' e δ'' *di R, si ha* $s(\delta',f) \le S(\delta'',f)$. ▮

La (3) si esprime dicendo che: *Le classi numeriche* $\sigma(f) = \{s(\delta,f)\}$ e $\Sigma(f) = \{S(\delta,f)\}$ *sono separate.*

DEFINIZIONE. Se le classi numeriche $\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ sono *contigue*, cioè se è $\sup \sigma(f) = \inf \Sigma(f)$, si dice che f è *integrabile (secondo Riemann) su R*. Il numero $\sup \sigma(f) = \inf \Sigma(f)$ è detto l'*integrale* della f su R e lo si indica con uno dei simboli

$$\int_R f\, dm, \qquad \iiint_R f(x,y,z)\, dxdydz.$$

§ 2. PROPRIETÀ DELL' INTEGRALE

Gli esempi prodotti mostrano come già per le funzioni di una variabile possa essere faticoso decidere direttamente, cioè in base alla definizione, se una funzione è integrabile e, in caso affermativo, calcolarne l'integrale. Per le funzioni di più variabili, le cose diventano ancora più complicate. Sarà perciò più che mai utile avere dei criteri di integrabilità e delle tecniche di calcolo.

LEMMA 3. *Una funzione* f: $R(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *è integrabile su R se e solo se*

(*) $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \delta \in \Delta(R))(S(\delta,f) - s(\delta,f) < \varepsilon).$$

DIM. Se è verificata la (*), le due classi numeriche $\sigma(f) = \{s(\delta,f)\}$ e $\Sigma(f) = \{S(\delta,f)\}$ sono ovviamente contigue e la f è integrabile.

Viceversa, se la f è integrabile, le classi numeriche $\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ sono contigue; dunque, fissato un $\varepsilon > 0$, esistono una somma superiore $S(\delta',f)$ e una somma inferiore $s(\delta'',f)$ tali che $S(\delta',f) - s(\delta'',f) < \varepsilon$. Se δ è una decomposizione di R più fine di δ' e δ'', si ha

$$s(\delta',f) \le s(\delta,f) \le S(\delta,f) \le S(\delta'',f),$$

da cui
$$S(\delta,f) - s(\delta,f) < \varepsilon. \ ▮$$

TEOREMA 4. *Se* f: $R(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *è continua, allora è integrabile su R.*

DIM. Proviamolo per $n = 1$; per $n > 1$, si procede in modo perfettamente analogo. Per il Teorema di Heine (Cap. 12, Teor. 15), la f è uniformemente continua su R. Dunque, per ogni

$\varepsilon > 0$, esiste un $\rho > 0$ tale che da $|x - y| < \rho$ segue $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{b - a}$. Fissato un $\varepsilon > 0$, ripartiamo R in sottointervalli tutti di ampiezza minore del corrispondente ρ. Si ha, per ogni i, $L_i - l_i < \varepsilon$, dato che, per la continuità della f sugli intervalli chiusi R_i, i numeri L_i e l_i sono, rispettivamente, il massimo e il minimo valore della f sui singoli sottointervalli. È dunque:

$$S(\delta,f) - s(\delta,f) = \sum_{i=1}^{n}(L_i - l_i)m(R_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n} m(R_i) = \varepsilon. \blacksquare$$

OSSERVAZIONE. Più avanti (§ 5, Teor. 24) daremo una generalizzazione di questo Teorema; per ora ci limitiamo a segnalare che

TEOREMA 4'. *Sia data una funzione f: $R(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ limitata. Se f è continua, tranne che in un numero finito di punti, allora è integrabile su R.* $\blacksquare$

ESEMPI. 1) Siano: $R = [a, b]$ $(\subset \mathbb{R})$, $c \in\ ]a, b[$ e f: $R \to \mathbb{R}$ la funzione (a scala) che vale costantemente α su $[a, c[$ e costantemente β su $[c, b]$ e sia, per esempio $\alpha < \beta$. Per il Teorema precedente, la f è integrabile. Sia $\delta = \{R_i$: $i = 1, 2, \dots, n\}$ una decomposizione di R; possiamo sempre supporre che c sia uno dei punti della decomposizione; sia dunque $c = x_j$. Si ha: $l_i = \alpha$ per $i \le j$ e $l_i = \beta$ per $i > j$, $L_i = \alpha$ per $i < j$ e $L_i = \beta$ per $i \ge j$, da cui:

$$s(\delta,f) = \alpha(c - a) + \beta(b - c); \quad S(\delta,f) = \alpha[(c - a) - m(R_j)] + \beta[(b - c) + m(R_j)].$$

Quindi, dato che $m(R_j)$ può essere reso arbitrariamente piccolo, si ottiene

$$\int_R f\, dm = \alpha(c - a) + \beta(b - c).$$

Lo stesso procedimento si può applicare alle funzioni costanti a tratti con un numero finito di valori assunti.

2) Siano: $R = [a, b]$ $(\subset \mathbb{R})$, $c \in\ ]a, b[$ e f: $R \to \mathbb{R}$ la funzione che vale α in c mentre assume il valore β in tutti gli altri punti di R; sia per esempio $\alpha < \beta$. Per il Teorema precedente, la f è integrabile. Sia $\delta = \{R_i$: $i = 1, 2, \dots, n\}$ una decomposizione di R; possiamo sempre supporre che c sia uno dei punti della decomposizione; sia dunque $c = x_j$. Si ha subito $L_i = \beta$ per ogni i, da cui $S(\delta,f) = \beta(b - a)$. Si vede poi che è: $l_i = \alpha$ per $i = j - 1$ e $i = j$, $l_i = \beta$ per tutti gli altri valori di i; si ottiene: $s(\delta,f) = \alpha(m(R_{j-1}) + m(R_j)) + \beta[(b - a) - m(R_{j-1}) - m(R_j)]$. Si conclude che è $\int_R f\, dm = \beta(b - a)$. Lo stesso procedimento si può applicare alle funzioni costanti su R, tranne che in un numero finito di punti.

OSSERVAZIONE. *(Il significato geometrico dell'integrale)* - Sia f: $I = [a,b]$ $(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa e integrabile (per esempio continua). Resta individuato il *trapezoide* $T := \{(x,y)$: $a \le x \le b,\ \ 0 \le y \le f(x)\}$. Come possiamo definire l'area di T? Un'idea è quella di approssimare T mediante figure più semplici date dall'unione di uno o più rettangoli (*plurirettangoli*) di cui sappiamo calcolare l'area per via elementare. Poiché le somme inferiori e le somme superiori esprimono l'area di plurirettangoli rispettivamente inscritti e circoscritti a T, è naturale assumere l'integrale della f come *misura* di T.

Se f: R $(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ è una funzione non negativa e integrabile, l'integrale si assume come misura del solido $T = \{(x,y,z)$: $(x,y) \in R,\ \ 0 \le z \le f(x,y)\}$.

Più avanti (§ 5) definiremo le misure di una classe più generale di figure piane o solide.

TEOREMA 5. *Se* f: $R = [a, b]$ $(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *è monotona, allora è integrabile su R.*

DIM. Supponiamo la f non - decrescente. Dunque da $x < y$ segue $f(x) \leq f(y)$. Qualunque sia la decomposizione δ di R, si ha per ogni i: $l_i = f(x_{i-1})$ e $L_i = f(x_i)$. Fissato un $\varepsilon > 0$, sia δ una decomposizione di R in intervalli di ampiezza minore di $\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Si ha:

$$S(\delta,f) - s(\delta,f) = \sum_{i=1}^{n} (L_i - l_i)m(R_i) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} [f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(b) - f(x_{n-1})] = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} [f(b) - f(a)] = \varepsilon. \blacksquare$$

N.B. Per $n > 1$, quest'ultimo Teorema perde significato.

TEOREMA 6. 1) (*Linearità) - Se* f, g: $R(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *sono integrabili su R, allora, quali che siano* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *la funzione* $\alpha f + \beta g$ *è integrabile su R e si ha:*

$$\int_R (\alpha f + \beta g)dm = \alpha \int_R f\, dm + \beta \int_R g\, dm.$$

2) (*Monotonia*) - *Se* f, g: $R(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *sono integrabili su R e se è* $f(x) \leq g(x)$ *per ogni* $x \in R$, *allora si ha*

$$\int_R f\, dm \leq \int_R g\, dm.$$

In particolare, se f è integrabile su R e se è $f(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in R$, *si ha* $\int_R f\, dm \geq 0$.

3) (*Integrabilità della restrizione*) - *Se* f: $R(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *è integrabile su R e se R' è un sottorettangolo di R, allora f è integrabile anche su R'* (ossia: *è integrabile su R' la restrizione della f*).

4) (*Additività rispetto al dominio*) - *Sia* f: $R(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$; *se è* $R = R' \cup R''$, *con* $\text{int } R' \cap \text{int } R'' = \emptyset$, *allora, la f è integrabile su R se e solo se le restrizioni della f a R' e R'' sono integrabili, e si ha:*

$$\int_R f\, dm = \int_{R'} f\, dm + \int_{R''} f\, dm.$$

5) (*Integrabilità del valore assoluto*) - *Se* f: $R(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *è integrabile su R, allora è integrabile su R anche la funzione* $|f|$ *e si ha:*

$$\left| \int_R f\, dm \right| \leq \int_R |f|\, dm.$$

6) *Se* f, g: $I(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *sono integrabili, sono tali anche le funzioni* $f \vee g$ e $f \wedge g$.

DIM. 1) Siano f e g due funzioni integrabili su un rettangolo R. Fissato un $\varepsilon > 0$, esistono due decomposizioni δ' e δ'' di R tali che, $S(\delta',f) - s(\delta',f) < \varepsilon/2$ e $S(\delta'',g) - s(\delta'',g) < \varepsilon/2$.

Sussistono analoghe disuguaglianze anche per ogni decomposizione δ più fine di δ' e δ''. Per una tale δ, è dunque:

$$S(\delta,f) + S(\delta,g) - (s(\delta,f) + s(\delta,g)) < \varepsilon.$$

Essendo

$$s(\delta,f) + s(\delta,g) \leq s(\delta,f+g) \leq S(\delta,f+g) \leq S(\delta,f) + S(\delta,g),$$

si ottiene che è anche $S(\delta,f+g) - s(\delta,f+g) < \varepsilon$; dunque anche la funzione $f+g$ è integrabile su R e si ha:

$$s(\delta,f) + s(\delta,g) \leq \int_R (f+g)dm \leq S(\delta,f) + S(\delta,g).$$

Dall'unicità dell'elemento separatore di una coppia di classi contigue, si ottiene in fine

$$\int_R (f+g)dm = \int_R f\,dm + \int_R g\,dm.$$

È ora facile provare che se f è integrabile su R e α è un numero reale positivo, allora è integrabile anche αf e si ha $\int_R (\alpha f)\,dm = \alpha\int_R f\,dm$. In fine, si prova ancora che, se f è integrabile su R, è tale anche l'opposta $-f$ e si ha $\int_R (-f)\,dm = -\int_R f\,dm$. La tesi segue ora facilmente.

2) Caso $n = 2$. Data una decomposizione $\delta = \{R_{ij}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, p\}$ di R, per ogni i e j sia $l_{ij}(f) := \inf f(R_{ij})$ e $l_{ij}(g) := \inf g(R_{ij})$. Dall'ipotesi si ottiene $l_{ij}(f) \leq l_{ij}(g)$ per ogni $i \leq n$ e $j \leq p$. Si ha dunque

$$s(\delta,f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} l_{ij}(f)\,m(R_{ij}) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} l_{ij}(g)\,m(R_{ij}) = s(\delta,g),$$

da cui $\sup\{s(\delta,f)\} \leq \sup\{s(\delta,g)\}$ che è la tesi. Per $n = 1$ o $n = 3$, non c'è che da adattare la simbologia.

3) Per $n = 1$. Sia f integrabile su R. Fissato un $\varepsilon > 0$, esiste, per il Lemma 3, una decomposizione δ di R tale che $S(\delta,f) - s(\delta,f) < \varepsilon$. Se R' è un sottointervallo di R, è possibile costruire una decomposizione $\delta^* = \{R_i\}$ di R più fine di δ in modo che R' sia la riunione di un certo numero degli R_i. Essendo $S(\delta^*,f) - s(\delta^*,f) < \varepsilon$, è anche $S'(\delta',f) - s'(\delta',f) < \varepsilon$, dove si sono indicate con $S'(\delta',f)$ e $s'(\delta',f)$ la somma superiore e quella inferiore della restrizione della f a R' relative alla decomposizione δ' indotta da δ* su R'.

4) Per la (3), basta provare il "*se*". Siano f' e f'' le restrizioni della f a R' e, rispettivamente, a R''. Dato un $\varepsilon > 0$, siano δ' una decomposizione di R' e δ'' una di R'' tali che $S(\delta',f') - s(\delta',f') < \varepsilon/2$, $S(\delta'',f'') - s(\delta'',f'') < \varepsilon/2$. La riunione di δ' e δ'' fornisce una decomposizione δ di R per cui risulta $S(\delta,f) - s(\delta,f) < \varepsilon$. Si ha, inoltre, $\sup s(\delta',f') + \sup s(\delta'',f'') = \sup s(\delta,f)$ che è l'ultima parte della tesi.

5) Proviamola per $n = 1$. Fissato un $\varepsilon > 0$, esiste una decomposizione $\delta = \{R_i\}$ di R per cui è $S(\delta,f) - s(\delta,f) < \varepsilon$. Per ogni i, siano $l_i' := \inf |f|(R_i)$ e $L_i' := \sup |f|(R_i)|$ Si costata facilmente che è $L_i' - l_i' \leq L_i - l_i$, da cui $S(\delta,|f|) - s(\delta,|f|) < \varepsilon$. Si ha così l'integrabilità di $|f|$. Essendo poi $f \leq |f|$ e $-f \leq |f|$, l'ultima parte della tesi segue direttamente dalla (2).

6) Basta ricordare che si ha:

$$f \vee g = \frac{1}{2}[f + g + |f - g|] \quad \text{e} \quad f \wedge g = \frac{1}{2}[f + g - |f - g|]. \ \blacksquare$$

N.B. Non sussistono le implicazioni opposte della (2) e della (5).

ESEMPI. 3) Siano f, g: $R = [0, 2]$ $(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ le due funzioni così definite:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{per } 0 \le x \le 1 \\ -1 & \text{per } 1 < x \le 2 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } 0 \le x \le 1 \\ 2 & \text{per } 1 < x \le 2 \end{cases}.$$

Si ha $\int_R f\, dm = 2 > 0$, pur non essendo la f sempre positiva e $\int_R f\, dm = 2 > 1 = \int_R g\, dm$, pur non avendosi $f(x) \ge g(x)$ per ogni x di R.

4) Siano f, g: $R = [a, b]$ $(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ due funzioni che assumono su R lo stesso valore, tranne che in un insieme finito di punti. Allora se la f è integrabile su R è tale anche la g e si ha $\int_R f\, dm = \int_R g\, dm$. In effetti, la funzione $h = f - g$ assume su R sempre il valore 0, tranne che in un numero finito di punti; essa è dunque integrabile e si ha $\int_R h\, dm = 0$ (cfr. Teor. 4' e il successivo Esempio 2). Essendo $g = f - h$ si ha la tesi in virtù della Proposizione 6.1.

5) Sia f: $R = [0,1]$ $(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la funzione che vale 1 nei punti razionali e vale -1 in quelli irrazionali. Procedendo come nel caso della funzione di Dirichlet (cfr. Es. 1 del §1), si vede che la funzione data *non è* integrabile su R. Per contro, la funzione $|f|$ assume costantemente il valore 1; essa è perciò integrabile e il valore dell'integrale è, come si è visto, uguale a 1.

TEOREMA 7. 1) (*Integrabilità del prodotto*) ¤ *Se f, g*: $I(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *sono integrabili su I, allora è integrabile su I anche la funzione prodotto fg.*

2) (*Integrabilità del quoziente*) - *Se f, g*: $I(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *sono integrabili su I e se* $1/g$ *è ivi limitata, allora è integrabile su I anche la funzione quoziente* f/g.

DIM. Ci limiteremo a provare la (1) e con $n = 1$.

Cominciamo col provare che, se f: $I(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è integrabile su I, è tale anche la funzione f^2. Avendosi $f^2 = |f|^2$, è lecito supporre che sia $f(x) \ge 0$ per ogni $x \in I$. Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Data una decomposizione $\delta = \{I_k\}$ di I, poniamo $l_k := \inf f(I_k)$, $L_k := \sup f(I_k)$, e $L := \sup f(I)$. Si constata facilmente che è $l_k^2 = \inf f^2(I_k)$ e $L_k^2 = \sup f^2(I_k)$. Si ottiene:

$$S(\delta, f^2) - s(\delta, f^2) = \sum_{k=1}^{n} (L_k^2 - l_k^2) m(I_k) = \sum_{k=1}^{n} (L_k - l_k)(L_k + l_k) m(I_k) \le$$

$$\le 2L \sum_{k=1}^{n} (L_k - l_k) m(I_k) = 2L\, (S(\delta, f) - s(\delta, f)).$$

Affinché sia $S(\delta, f^2) - s(\delta, f^2) < \varepsilon$, è sufficiente che sia $S(\delta, f) - s(\delta, f) < \frac{\varepsilon}{2L}$.

Siano ora f, g: $I(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili. Per constatare che è tale anche la funzione prodotto, basta osservare che si ha

$$fg = \frac{1}{2}[(f + g)^2 - (f - g)^2]$$

e applicare il risultato precedente, unitamente a quelli delle Proposizioni 6.1 e 6.5. $\blacksquare$

TEOREMA 8. (*Della media*) - *Sia* $f\colon (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *integrabile su* R *e si ponga* $l := \inf f(R)$ *e* $L := \sup f(R)$. *Allora esiste* $k \in \mathbb{R}$, *con* $l \le k \le L$ *tale che:*

$$(*) \qquad \int_R f\, dm = k\, m(R).$$

Se la f *è continua, esiste* $\underline{x}^0 \in R$ *tale che:*

$$(**) \qquad \int_R f\, dm = f(\underline{x}^0)\, m(R).$$

DIM. La più semplice decomposizione di R è data da R stesso. È dunque:

$$l\, m(R) \le \int_R f\, dm \le L\, m(R).$$

Per ottenere la (*) si pone

$$k = \frac{\int_R f\, dm}{m(R)}.$$

Se la f è continua, esiste, per i Teoremi di Weierstrass e di connessione, almeno un punto $\underline{x}^0 \in R$ tale che $f(\underline{x}^0) = k$, da cui si ottiene subito la validità della (**). ∎

DEFINIZIONE. Sia $f\colon (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ integrabile su R; si chiama *valor medio* o *media integrale* di f su R il numero reale

$$k = \frac{\int_R f\, dm}{m(R)} .$$

ESEMPIO. 6) Sia f la funzione dell'Esempio 3. Il suo valor medio è 1, che però *non è* uno dei valori assunti dalla funzione. (La funzione non è continua su R.).

§ 3. LA FUNZIONE INTEGRALE E IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

In questo paragrafo ci occuperemo soltanto di funzioni di una variabile.

DEFINIZIONE. (Integrale *orientato*) - Sia data una funzione $f\colon I\ (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ integrabile su I (e quindi su ogni suo sottointervallo). Quali che siano i punti $a, b \in I$, si pone:

$$\int_a^b f(x)dx := \begin{cases} \int_{[a,b]} f\, dm, & \text{se è } a < b \\ 0, & \text{se è } a = b \\ -\int_{[b,a]} f\, dm, & \text{se è } a > b \end{cases} .$$

Il numero $\int_a^b f(x)dx$ si legge "integrale da a a b della f".

Con tale convenzione, si ottiene il seguente risultato che generalizza la Proposizione 6.4 sull'additività dell'integrale rispetto al dominio.

TEOREMA 9. *(di Chasles) - Sia* $f: I\ (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *integrabile. Quali che siano i punti* $a, b, c \in I$ *si ha:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

DIM. Se è $a < c < b$, basta applicare la Proposizione 6.4. Se è $b < a < c$, si ha:

$$\int_b^c f(x)dx = \int_b^a f(x)dx + \int_a^c f(x)dx,$$

da cui

$$-\int_b^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Gli altri quattro casi si provano in modo perfettamente analogo. ∎

DEFINIZIONE. Sia data una funzione $f: I = [a,b]\ (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ integrabile su I e si fissi un punto $x_0 \in I$. La f è integrabile su ogni sottointervallo di I; dunque, per ogni $x \in I$, esiste, per la precedente definizione, l'integrale da x_0 a x della f. Resta così definita la funzione di I in $\mathbb{R}$

$$F_{x_0}(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt$$

che prende il nome di *funzione integrale* (o *integral funzione*) della f con *punto iniziale* x_0.

Naturalmente, sostituendo il punto iniziale x_0 con un altro punto x_1, si ottiene una nuova funzione integrale.

LEMMA 10. *Se* $f: I = [a, b]\ (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *è integrabile, allora due sue funzioni integrali differiscono per una costante additiva.*

DIM. Fissati due punti x_0 e $x_1 \in I$, si ha:

$$F_{x_1}(x) = \int_{x_1}^x f(t)dt = \int_{x_1}^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt = F_{x_0}(x) + k,$$

con $k := \int_{x_1}^{x_0} f(t)dt \in \mathbb{R}$. ∎

TEOREMA 11. *Se* $f: I = [a, b]\ (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *è integrabile, allora, qualunque sia il punto* $x_0 \in I$, *la funzione integrale* $F_{x_0}(x)$ *è continua su I.*

DIM. La f è, per ipotesi, limitata; sia $M := \sup\ \{|f(x)|: x \in I\}$. Fissato un $x \in I$, si ha

$$|F_{x_0}(x + h) - F_{x_0}(x)| = \left| \int_{x_0}^{x+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x+h} f(t)dt + \int_{x}^{x_0} f(t)dt \right| =$$

$$= \left| \int_{x}^{x+h} f(t)dt \right| \le \left| \int_{x}^{x+h} |f(t)|dt \right| \le \left| \int_{x}^{x+h} M\, dt \right| = M\,|h|,$$

che tende a 0 a tendere di h a 0. ∎

N.B. La funzione integrale è continua anche se la funzione integranda non lo è.

ESEMPIO. 1) Sia f: $I = [0, 2]$ ($\subset \mathbb{R}$) $\to \mathbb{R}$ la funzione che vale 1 su [0,1[e vale 2 su [1,2]; si assuma poi $x_0 = 0$. Si ha $F_0(x) = x$ su [0,1[e $F_0(x) = 1 + 2(x - 1)$ su [1,2]. Si vede subito che la F_0 è continua, pur non essendolo la f.

TEOREMA 12. *(Teorema fondamentale del Calcolo) - Sia* f: $I = [a, b]$ ($\subset \mathbb{R}$) $\to \mathbb{R}$ *una funzione continua, allora, qualunque sia il punto* $x_0 \in I$*, la funzione integrale* F_{x_0} *è derivabile e si ha* $F'_{x_0}(x) = f(x)$*, per ogni* $x \in I$.

DIM. Fissiamo un punto x e valutiamo il rapporto incrementale della funzione F_{x_0} relativamente ad esso. Si ha

$$\frac{F_{x_0}(x+h) - F_{x_0}(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{x_0}^{x+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\left[\int_{x_0}^{x+h} f(t)dt + \int_{x}^{x_0} f(t)dt\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)dt = f(\xi)$$

per un opportuno ξ compreso tra x e $x + h$. Nell'ultimo passaggio, si è ovviamente sfruttato il Teorema della media per funzioni continue. Siccome la f è continua, $f(\xi)$ tende a $f(x)$ al tendere di h a 0. ∎

Possiamo finalmente stabilire un risultato che ci permetterà di calcolare l'integrale di una vasta classe di funzioni, riconducendolo al problema della ricerca di una primitiva o, equivalentemente, al calcolo dell'integrale indefinito.

TEOREMA 13. *(Formula di Torricelli - Barrow) - Sia* f: $I = [a, b]$ ($\subset \mathbb{R}$) $\to \mathbb{R}$ *una funzione continua e sia G una sua primitiva. Allora si ha*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

DIM. Sia G una primitiva di f e fissiamo un punto $x_0 \in I$. Siccome, per il Teorema precedente, anche la funzione integrale F_{x_0} è una primitiva di f, si ha $G(x) = F_{x_0}(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$. Si ottiene:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{b} f(x)dx = \int_{x_0}^{b} f(x)dx - \int_{x_0}^{a} f(x)dx =$$

$$= F_{x_0}(b) - F_{x_0}(a) = G(b) - c - G(a) + c = G(b) - G(a).\ ∎$$

DEFINIZIONE. L'espressione $G(b) - G(a)$ si scrive spesso nella forma $[G(x)]_a^b$ che si legge "*G(x) incrementata fra a e b*".

ESEMPIO. 2) Si ha $\int_0^\pi (3\sin x + 2x^3)dx = [-3\cos x + \frac{1}{2}x^4]_0^\pi = 3 + \frac{1}{2}\pi^4 + 3 - 0 = 6 + \frac{1}{2}\pi^4$.

TEOREMA 14. *(Metodo di integrazione per parti) - Siano* f,g: $I = [a, b]$ $(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *due funzioni continue e siano F e G due primitive di f e, rispettivamente, di g. Allora si ha*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = [F(x)\,G(x)]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

DIM. Basta integrare da a a b i due membri dell'uguaglianza

$$F(x)\,g(x) = \frac{d}{dx}[F(x)\,G(x)] - f(x)\,G(x). \blacksquare$$

ESEMPIO. 3) Si ha $\int_0^\pi (x\sin x)dx = [-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi + 0 = \pi$.

TEOREMA 15. *(Metodo di integrazione per sostituzione) - Siano date le funzioni* f: $I = [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua e* φ: J $(\subset \mathbb{R}) \to I$ *di classe* C^1 *sull'intervallo J, e i punti* $\alpha, \beta \in J$, *con* $\varphi(\alpha) = a$ *e* $\varphi(\beta) = b$. *Si ha:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

DIM. Dalle ipotesi fatte su f e φ, si ha intanto che entrambi gli integrali hanno senso. Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora $F(\varphi(t))$ è una primitiva di $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Si ha dunque:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \blacksquare$$

Notiamo esplicitamente che non si richiede che la φ sia biiettiva tra J ed I.

ESEMPI. 4) Si voglia calcolare $\int_{-1}^2 x\sqrt[3]{x^2 - 1}dx$. Posto $x^2 - 1 = t$, essendo $t(-1) = 0$ e $t(2) = 3$, si ha:

$$\int_{-1}^2 x\sqrt[3]{x^2 - 1}dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt[3]{t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{t^4}\right]_0^3 = \frac{9}{8}\sqrt[3]{3}.$$

5) Si voglia calcolare $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$. Posto $x = \sin t$, essendo $-1 = \sin\frac{-\pi}{2}$ e $1 = \sin\frac{\pi}{2}$, si ha:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi!2} \cos^2 t\,dt = \left[\frac{t + \sin t\,\cos\,t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

6) Si voglia calcolare l'area della regione piana T compresa fra le curve di equazione $y = x^2$ e $y = x^3$, con $0 \le x \le 2$. Siccome si ha $x^3 \le x^2$ se è $0 \le x \le 1$ e $x^3 \ge x^2$ se è $1 \le x \le 2$, bisogna spezzare il problema in due parti, lavorando prima in [0,1] e poi in [1,2]. Si ha:

$$m(T) = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx + \int_1^2 (x^3 - x^2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{3}{2}.$$

§ 4. FORMULE DI RIDUZIONE SU RETTANGOLI PER INTEGRALI DOPPI E TRIPLI

I seguenti risultati, dei quali tralasciamo le dimostrazioni, sono importanti per il calcolo degli integrali di funzioni di più variabili. L'idea è quella di ricondurre il calcolo di un integrale multiplo a quello di più integrali semplici, ossia di funzioni di un'unica variabile.

$\boxed{n = 2}$ **TEOREMA 16** *(di Fubini) - Sia* f: $R = [a, b] \times [c, d]$ $(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$. *Se f è integrabile su R ed è tale che, per ogni* $\overline{x} \in [a, b]$, *la funzione* $f(\overline{x}, y)$ *è integrabile su* $[c, d]$, *allora la funzione* $g(x) = \int_c^d f(x,y)dy : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è integrabile su* $[a, b]$ *e si ha*

$$\int_a^b g(x)dx = \iint_R f(x,y)dxdy,$$

cioè

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx. \blacksquare$$

Un analogo teorema si ottiene scambiando i ruoli delle variabili x e y.

ESEMPI. 1) Si vuole calcolare

$$\iint_R \sin(x + y)dxdy, \qquad \text{con } R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2].$$

Si ha $\displaystyle\iint_R \sin(x + y)dxdy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \sin(x + y)dy\right)dx = \int_0^{\pi/2} [- \cos(x + \pi/2) + \cos(x + 0)]dx =$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x)dx = \Big[- \cos x + \sin x\Big]_0^{\pi/2} = 2.$$

2) Si vuole calcolare $\displaystyle\iint_R e^{y/x} x^{-3}dxdy$, con $R = [1,2] \times [0, 1]$.

Si ha $$\iint_R e^{y/x} x^{-3}dxdy = \int_1^2\left(\int_0^1 e^{y/x} \frac{1}{x^3} dy\right)dx = \int_1^2 dx \left[e^{y/x} \frac{1}{x^2}\right]_{y = 0}^{y = 1} =$$

$$= \int_1^2 \left[e^{1/x} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right]dx = \left[-e^{1/x} + \frac{1}{x}\right]_1^2 = - e^{1/2} + \frac{1}{2} + e - 1 = e - \sqrt{e} - \frac{1}{2}.$$

3) Si vuole calcolare $\displaystyle\int_R f\, dm = \iint_R \frac{x^2}{x^2 + y^2} dxdy$, con $R = [1,2] \times [0, 2]$.

Si ha $$\int_R f\, dm = \int_1^2\left(\int_0^2 \frac{x^2dy}{x^2 + y^2}\right)dx .$$

Calcoliamo, intanto, $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{x^2 + y^2} dy$. Effettuando la sostituzione $y = tx$, si ottiene:

$$\int_0^2 \frac{x^2}{x^2 + y^2} dy = \int_0^2 \frac{dy}{1 + (y/x)^2} = \int_0^{2/x} \frac{x}{1 + t^2} dt = x\left[\operatorname{arctg} \frac{2}{x} - 0\right] = x \operatorname{arctg} \frac{2}{x} .$$

È dunque $$\int_R f\, dm = \int_1^2 x \operatorname{arctg} \frac{2}{x}\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\,\text{arctg}\,\frac{2}{x}\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} \cdot \frac{-(2/x^2)}{1+(2/x)^2}\right)dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\,\text{arctg}\,2 + \int_1^2 \frac{x^2}{x^2+4}\,dx\,.$$

Essendo $$\int_1^2 \frac{x^2}{x^2+4}\,dx = \int_1^2 dx - \int_1^2 \frac{4}{x^2+4}dx = 1 - 2\int_1^2 \frac{(1/2)dx}{1+(x/2)^2} =$$

$$= 1 - 2\,[\text{arctg}\,\frac{x}{2}]_1^2 = 1 - \frac{\pi}{2} + 2\,\text{arctg}\,\frac{1}{2},$$

si conclude che è

$$\int_R f\,dm = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\,\text{arctg}\,2 + 1 - \frac{\pi}{2} + 2\,\text{arctg}\,\frac{1}{2} = 1 + 2\,\text{arctg}\,\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\text{arctg}\,2.$$

$\boxed{n = 3}$ **TEOREMA 17.** *(Formula di riduzione per corde) - Sia f*: $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] = R\ (\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$. *Se f è integrabile su R e se, per ogni* $(\overline{x},\overline{y}) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = T$, *la funzione* $f(\overline{x},\overline{y}, z)$ *è integrabile su* $[a_3, b_3]$, *allora la funzione* $g(x,y) = \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz$: $T \to \mathbb{R}$ *è integrabile su T e si ha*

$$\iint_T g(x,y)\,dxdy = \iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz,$$

cioè

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_T \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz\right)dxdy. \blacksquare$$

Analoghi teoremi si ottengono scambiando i ruoli delle variabili.

ESEMPIO. 4) Si vuole calcolare

$$\int_R f\,dm = \iiint_R \frac{dxdydz}{\sqrt{1+x+y+z}}, \quad \text{con } R = [0,1] \times [0,1] \times [0,1].$$

Posto $T = [0, 1] \times [0, 1]$, si ha $\int_R f\,dm = \iint_T \left(\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1+x+y+z}}\right)dxdy.$

Essendo $$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1+x+y+z}} = 2\int_0^1 \frac{dz}{2\sqrt{1+x+y+z}} =$$

$$= 2[\sqrt{1+x+y+z}]_{z=0}^{z=1} = 2[\sqrt{2+x+y} - \sqrt{1+x+y}\,],$$

si ottiene $$\int_R f\,dm = 2\iint_T [\sqrt{2+x+y} - \sqrt{1+x+y}\,]dxdy =$$

$$= 2\int_0^1\left(\int_0^1 [\sqrt{2+x+y} - \sqrt{1+x+y}\,]dx\right)dy = \frac{4}{3}\int_0^1 dy\,[\sqrt{(2+x+y)^3} - \sqrt{(1+x+y)^3}\,]_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^1 dy\,[\sqrt{(3+y)^3} - 2\sqrt{(2+y)^3} + \sqrt{(1+y)^3}] =$$

$$= \frac{8}{15}\,[\sqrt{(3+y)^5} - 2\sqrt{(2+y)^5} + \sqrt{(1+y)^5}]_{y=0}^{y=1} = \frac{8}{15}\,[2^5 - 3\sqrt{3^5} + 3\sqrt{2^5} - 1].$$

$\boxed{n = 3}$ **TEOREMA 18.** *(Formula di riduzione per sezioni) - Sia* f: $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] = R\ (\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$. *Se* f *è integrabile su* R *e se, per ogni* $\bar{z} \in [a_3, b_3]$, *la funzione* $f(x,y,\bar{z})$ *è integrabile su* $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = T$, *allora la funzione* $h : [a_3, b_3] \to \mathbb{R}$ *definita da* $h(z) = \iint_T f(x,y,z)\, dxdy$ *è integrabile su* $[a_3, b_3]$ *e si ha*

$$\int_{a_3}^{b_3} h(z)dz = \iiint_R f(x,y,z)\, dxdydz,$$

cioè

$$\iiint_R f(x,y,z)\, dxdydz = \int_{a_3}^{b_3} \Big(\iint_T f(x,y,z)\, dxdy\Big)dz\ . \blacksquare$$

Analoghi teoremi si ottengono scambiando i ruoli delle variabili.

ESEMPIO. 5) Si vuole calcolare

$$\int_R f\, dm = \iiint_R x^3(y^2 + z)dxdydz, \qquad \text{con } R = [0,1] \times [0, 2] \times [0, 3].$$

Posto $T = [0, 1] \times [0, 2]$, si ha

$$\int_R f\, dm = \int_0^3 dz \iint_T x^3(y^2 + z)dxdy = \int_0^3 dz \int_0^2 dy \int_0^1 x^3(y^2 + z)dx = \int_0^3 dz \int_0^2 dy\, \Big[\frac{x^4}{4}(y^2 + z)\Big]_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^3 dz \int_0^2 (y^2 + z)dy = \frac{1}{4}\int_0^3 dz\, \Big[\frac{y^3}{3} + yz\Big]_{y=0}^{y=2} = \frac{1}{4}\int_0^3 \Big[\frac{8}{3} + 2z\Big]dz = \frac{1}{4}\Big[\frac{8}{3}z + z^2\Big]_0^3 = \frac{17}{4}.$$

È immediato constatare che

TEOREMA 19. *Se la funzione* f: $R \to \mathbb{R}$ *è continua in* R, *con* R *rettangolo di* $\mathbb{R}^2$ [di $\mathbb{R}^3$] *allora* f *soddisfa alle ipotesi del Teorema* 16 [*dei Teoremi* 17 *e* 18]. $\blacksquare$

§ 5. INTEGRALI SU INSIEMI LIMITATI LA MISURA DI PEANO - JORDAN

Ricordiamo che un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ è detto *limitato* se esiste una sfera $S\ (\subset \mathbb{R}^n)$ che lo contiene. Si vede subito che E è limitato se e solo se è contenuto in un rettangolo R di $\mathbb{R}^n$.

DEFINIZIONE. Sia f: $E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ una funzione *limitata* e definita su un sottoinsieme *limitato* E di $\mathbb{R}^n$. Si dice che f è integrabile su E se, dato un rettangolo R contenente E, è integrabile su R la funzione

$$\bar{f}(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}), & \text{se } \underline{x} \in E \\ 0, & \text{se } \underline{x} \notin E \end{cases}$$

e si pone

$$\int_E f\, dm = \int_R \bar{f}\, dm.$$

PROBLEMA. In generale, la funzione $\bar{f}$ non è continua su R; bisogna quindi trovare delle condizioni più generali della continuità che assicurino l'integrabilità di $\bar{f}$ in R e quindi di f su E.

Sappiamo che, per $n = 1$, se una funzione f definita e limitata su un intervallo I è continua, tranne che in un numero finito di punti di I, allora essa è integrabile su I. Vogliamo generalizzare questo risultato.

DEFINIZIONE. Un sottoinsieme *limitato* E di $\mathbb{R}^n$ è detto *misurabile (secondo Peano - Jordan)* se la funzione $f(x) = 1$ è integrabile su E e si pone

$$m(E) = \int_E 1dm = \int_R \chi_E \, dm,$$

essendo la funzione $\chi_E : R \to \mathbb{R}$ definita da: $\chi_E(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \underline{x} \in E \\ 0, & \text{se } \underline{x} \notin E. \end{cases}$

Si vede facilmente che le due precedenti definizioni non dipendono dal particolare rettangolo considerato.

Se è $n = 1, 2, 3$, il numero reale $m(E)$ prende rispettivamente il nome di *lunghezza*, *area* e *volume* di E.

DEFINIZIONE. Un sottoinsieme T di $\mathbb{R}^n$ è detto un *plurirettangolo* se è un rettangolo o la riunione di un numero finito di rettangoli privi a 2 a 2 di punti interni in comune.

È importante osservare che se E è un rettangolo o un plurirettangolo di $\mathbb{R}^n$, il numero $m(E)$ sopra definito coincide con l'usuale misura elementare.

Sussiste il seguente risultato di cui tralasciamo la dimostrazione

TEOREMA 20. *Un sottoinsieme limitato E di $\mathbb{R}^n$ è misurabile se e solo se lo è la sua frontiera $\mathcal{F}E$ ed è $m(\mathcal{F}E) = 0$.* ∎

OSSERVAZIONE. Non tutti i sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}^n$ sono misurabili. Sia, per esempio, $E = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ $(\subset \mathbb{R})$. Si ha $\mathcal{F}E = [0, 1]$ che non è un insieme di misura nulla. Si badi che lo stesso insieme E, pensato come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, è misurabile ed ha misura nulla.

DEFINIZIONE. Se per un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ è $m(E) = 0$, esso è detto *trascurabile.*

Ci sarà utile il seguente

TEOREMA 21. *Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ è trascurabile se e solo se*

(*) *per ogni* $\varepsilon > 0$, *esiste un plurirettangolo T contenente E con* $m(T) < \varepsilon$.

DIM.- Per $n = 2$. Supponiamo E trascurabile e sia R un rettangolo che lo contiene. Per definizione, è dunque $\int_R \chi_E \, dm = 0$. Ciò significa che, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$, esiste una decomposizione $\delta = \{R_{ij}\}$ di R tale che $S(\delta,\chi_E) < \varepsilon$. Ora si ha $S(\delta,\chi_E) = \Sigma m(R_{ij})$, dove la sommatoria è estesa ai rettangoli R_{ij} che hanno intersezione non vuota con E. La riunione di questi rettangoli costituisce un plurirettangolo T contenente E con misura minore di ε.

Supponiamo ora verificata la (*) e diciamo R un rettangolo contenente E; è anzi lecito supporre che i punti di E siano tutti interni ad R. Fissato un $\varepsilon > 0$, esiste un plurirettangolo T

contenente E con misura minore di ε. È lecito supporre $T \subset R$. Esiste una decomposizione $\delta = \{R_{ij}\}$ di R tale che $S(\delta,\chi_T) < \varepsilon$. Essendo, per ogni $\underline{x} \in R$, $\chi_E(\underline{x}) \leq \chi_T(\underline{x})$, per la stessa decomposizione δ si ha anche $S(\delta,\chi_E) < \varepsilon$. Dunque E è trascurabile. ∎

TEOREMA 22. *Sia f una funzione a valori reali e integrabile sull'intervallo* $I \subset \mathbb{R}$ [*sul rettangolo* $R \subset \mathbb{R}^2$], *allora l'insieme (grafico di f)* $G = \{(\underline{x}, f(\underline{x})), \underline{x} \in I$, [risp. $\underline{x} \in R$]$\}$ *è un sottoinsieme trascurabile di* $\mathbb{R}^2$ [*di* $\mathbb{R}^3$]. *Ciò vale quindi, in particolare, per le funzioni continue.*

DIM. Per funzioni di una variabile. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ integrabile su $I = [a,b]$. Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una decomposizione δ generata dai punti $\{x_0, \ldots, x_n\}$ di I tale che $S(\delta,f) - s(\delta,f) < \varepsilon$, ossia

$$S(\delta,f) - s(\delta,f) = \sum_{i=1}^{n} (L_i - l_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Ma il numero $\sum_{i=1}^{n} (L_i - l_i)(x_i - x_{i-1})$ è la misura del plurirettangolo $\bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [l_i, L_i]$ che, per definizione, contiene il grafico G della f. Dunque, per il Teorema precedente, l'insieme G è trascurabile. ∎

TEOREMA 23. *La misura di Peano - Jordan gode delle seguenti proprietà:*
1) *Se A e B sono due insiemi misurabili, sono tali anche gli insiemi* $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$.
2) *Se A è un insieme misurabile, si ha* $m(A) \geq 0$; *Ø è misurabile e si ha* $m(\emptyset) = 0$.
3) *Se A e B sono insiemi misurabili, con* $A \cap B = \emptyset$, *si ha* $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.
4) *Se A e B sono due insiemi misurabili, si ha* $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.
5) *Se A e B sono due insiemi misurabili, con* $A \subset B$, *si ha* $m(A) \leq m(B)$. ∎

DIM. 1) Si vede facilmente che si ha

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \wedge \chi_E; \quad \chi_{A \cup B} = \chi_A \vee \chi_E; \quad \chi_{A \setminus B} = (\chi_A - \chi_E) \vee 0.$$

La tesi segue ora dal Teorema 6.

La (2) è immediata. Per la (3) basta osservare che, se è $A \cap B = \emptyset$, si ha $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_E$.

La (4) Segue dall'uguaglianza $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_E - \chi_{A \cap B}$.

Per la (5) basta osservare che da $A \subset B$ segue $\chi_A \leq \chi_E$. ∎

Tornando al problema da cui siamo partiti, cioè quello di dare condizioni generali per l'integrabilità delle funzioni, enunciamo il seguente risultato:

TEOREMA 24. *Se una funzione* f: $R(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *è limitata e se i suoi punti di discontinuità costituiscono un insieme trascurabile, allora f è integrabile su R.* ∎

Ne segue il seguente Teorema molto utile nella pratica

TEOREMA 25. *Se E è un sottoinsieme misurabile di* $\mathbb{R}^n$ *e* f: $E \to \mathbb{R}$ *è una funzione continua e limitata su E, allora f è integrabile su E.*

DIM. Essendo E limitato, esiste un rettangolo R che lo contiene. Siccome E è misurabile, anche l'insieme $\mathcal{F}E$ è misurabile ed ha misura nulla. Ne viene che la funzione $\overline{f}$, essendo discontinua, al più, nei punti di $\mathcal{F}E$, è integrabile su R. Dunque la f è integrabile su E. ∎

§ 6. INTEGRALI SU DOMINI AMMISSIBILI DI $\mathbb{R}^2$

Domini ammissibili di $\mathbb{R}^2$

DEFINIZIONE. Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^2$ del tipo

$$E = \{(x,y): a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\},$$

con φ e ψ funzioni continue di $I = [a, b]$ in $\mathbb{R}$, è detto *dominio normale rispetto all'asse x*. In modo analogo si dà la nozione di *dominio normale rispetto all'asse y*. Diremo che E è un *dominio normale* per esprimere il fatto che esso è normale rispetto ad almeno uno degli assi.

DEFINIZIONE. Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^2$ è detto un *dominio ammissibile* se è un dominio normale o se è la riunione di un numero finito di domini normali e privi a 2 a 2 di punti interni in comune.

ESEMPI. 1) L'insieme $E = \{(x,y): x^2 + y^2 \le 1\}$ è un dominio normale rispetto all'asse x; si vede subito che è $I = [-1, 1]$, $\varphi(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ e $\psi(x) = \sqrt{1 - x^2}$. In modo analogo si constata che E è normale anche rispetto all'asse delle y.

2) L'insieme $E = \{(x,y): |x| \le y \le \frac{1}{2}(x^2 + 1),\ |x| \le 1\}$ è un dominio normale rispetto all'asse x; si ha $I = [-1, 1]$, $\varphi(x) = |x|$ e $\psi(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$.

3) L'insieme $E = \{(x,y): |y| \le \frac{1}{2}(x^2 + 1),\ |x| \le \frac{1}{2}(y^2 + 1),\ |x| \le 1,\ |y| \le 1\}$ non è normale rispetto a nessuno degli assi, ma è un dominio ammissibile. Infatti è la riunione di quattro insiemi analoghi a quello dell'Esempio precedente che si ottengono intersecando E con ciascuno dei quattro angoli retti formati dalle bisettrici degli assi.

Sussiste il seguente risultato analogo alla Proposizione 4 del Teorema 6:

LEMMA 26. *Una funzione* f: $E(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ *, con gli* E_i *domini normali e privi a* 2 *a* 2 *di punti interni in comune, è integrabile su E se e solo se lo è su ciascuno degli* E_i *e si ha*

$$\int_E f\, dm = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f\, dm. \ \blacksquare$$

Formule di riduzione per gli integrali doppi su domini normali

TEOREMA 27. *Sia* f: $E(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ *una funzione continua sul dominio* $E = \{(x,y): a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ *normale rispetto all'asse x. Allora f è integrabile su E e si ha*

$$\int_E f\, dm = \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\Big)dx.$$

DIM. Siano $c = \min\ \varphi(I)$ e $d = \max\ \psi(I)$, con $I = [a,b]$. Risulta $E \subset R = [a,b] \times [c,d]$. La funzione $\overline{f}(x,y)$: $R \to \mathbb{R}$ definita da

$$\overline{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{se } (x,y) \in E \\ 0, & \text{se } (x,y) \notin E \end{cases}$$

è continua su R tranne, eventualmente, nei punti del tipo $(x, \varphi(x))$ e del tipo $(x, \psi(x))$ che costituiscono un insieme trascurabile (Teoremi 22 e 23) ed è quindi integrabile su R (Teorema 24). Si ha:

$$\int_E f\,dm = \int_R \overline{f}\,dm = \int_a^b \left(\int_c^d \overline{f}(x,y)dy\right)dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^{\varphi(x)} \overline{f}(x,y)dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \overline{f}(x,y)dy + \int_{\psi(x)}^{d} \overline{f}(x,y)dy\right)dx = 0 + \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx + 0. \blacksquare$$

Un analogo teorema si ottiene scambiando i ruoli delle variabili x e y.

ESEMPI. 4) Si voglia calcolare $\iint_E (x + 2y)dxdy$, con $E = E_1 \cup E_2$,

essendo $E_1 = \{(x,y)\colon 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}$, $E_2 = \{(x,y)\colon 1 \le x \le 2,\ x \le y \le x^2\}$.

Si ha:
$$\iint_E (x + 2y)dxdy = \iint_{E_1} (x + 2y)dxdy + \iint_{E_2} (x + 2y)dxdy =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} (x + 2y)dy\right) dx + \int_1^2 \left(\int_x^{x^2} (x + 2y)dy\right) dx = \int_0^1 dx\, [xy + y^2]_{y=x^2}^{y=x} + \int_1^2 dx\, [xy + y^2]_{y=x}^{y=x^2} =$$

$$= \int_0^1 [2x^2 - x^3 - x^4]dx + \int_1^2 [x^3 + x^4 - 2x^2]dx = \frac{11}{2}.$$

5) Si voglia calcolare $\iint_E xy\,dxdy$, con $E = \{(x,y)\colon x \le y \le 2x,\ y \le \frac{1}{x},\ x \ge 0\}$.

Si constata facilmente che è $E = E_1 \cup E_2$, essendo

$$E_1 = \{(x,y)\colon 0 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2},\ x \le y \le 2x\},\ \ E_2 = \{(x,y)\colon \frac{\sqrt{2}}{2} \le x \le 1,\ x \le y \le \frac{1}{x}\}.$$

Si ha:
$$\iint_E xy\,dxdy = \iint_{E_1} xy\,dxdy + \iint_{E_2} xy\,dxdy =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\int_x^{2x} xy\,dy\right) dx + \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \left(\int_x^{1/x} xy\,dy\right) dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} dx \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=x}^{y=2x} + \int_{\sqrt{2}/2}^{1} dx \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=x}^{y=1/x} =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\sqrt{2}/2} x^3dx + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \left[\frac{1}{x} - x^3\right]dx = \frac{1}{4}\log 2.$$

Cambiamento di variabili per gli integrali doppi

Ricordiamo come stanno le cose nel caso delle funzioni di una variabile (cfr. Teor. 15). Date le funzioni $f\colon I = [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e $\varphi\colon J \to I$ di classe C^1 sull'intervallo J di $\mathbb{R}$, se $\alpha, \beta \in J$, con $\varphi(\alpha) = a$ e $\varphi(\beta) = b$, si ha:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Questo risultato non è però direttamente trasportabile al caso delle funzioni di più variabili. Notiamo intanto che il primo integrale può essere scritto nella forma $\int_I f\,dm$, mentre il secondo è un integrale orientato, potendo essere $\alpha < \beta$ o $\alpha > \beta$. Si verifica comunque facilmente che:

TEOREMA 15'. *Date le funzioni* $f\colon I = [a,\ b] \to \mathbb{R}$ *continua e* $\varphi\colon J \to I$, *con* J *intervallo di estremi* α *e* β, *tale che:*

1) φ *sia di classe* C^1 *su* J,

2) φ *sia biiettiva,*

3) *si abbia* $\varphi'(t) \neq 0$, *per ogni* $t \in J$,

allora si ha:
$$\int_I f(x)\,dx = \int_J f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt. \blacksquare$$

Passando a funzioni di più variabili, bisogna tener conto anche delle difficoltà derivanti dal tipo di insieme in cui sono definite le funzioni coinvolte.
Sussiste il seguente risultato del quale non riportiamo la dimostrazione.

TEOREMA 28. *Siano:* $f(x,y)\colon \overline{A} \to \mathbb{R}$ *continua,* A *aperto e misurabile,* $\Phi\colon \overline{B} \to \overline{A}$, *con* $\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$ B *aperto e misurabile. Se la funzione* Φ *soddisfa alle condizioni:*

1) *è di classe* C^1 *in* $\overline{B}$;

2) *è biiettiva tra* B *ed* A;

3) *si ha* $\det(J\Phi)(u,v) \neq 0$, *per ogni* $(u,v)^T \in B$,

allora si ha:

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_B f(x(u,v),y(u,v))\,|\det(J\Phi)(u,v)|\,dudv\ . \blacksquare$$

ESEMPIO. 6) Si vuol calcolare $m(E)$, essendo

$$E = \{(x,y)\colon 1 \le xy \le 2,\ x \le y \le 2x,\ x > 0,\ y > 0\}.$$

Effettuiamo la sostituzione $xy = u$, $\dfrac{y}{x} = v$. Si pone dunque

$$A = \operatorname{int} E, \quad \Phi(u,v) = \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right)^T, \qquad B = \Phi^{-1}(A), \quad K = \overline{B},$$

si constata che è $\quad K = \Phi^{-1}(E) = [0,1] \times [0,1],\ \ \det(J\Phi)(u,v) = \dfrac{1}{2v} \neq 0$ in A.

Si ottiene $\qquad m(E) = \displaystyle\iint_E 1\,dxdy = \iint_K \frac{1}{2v}\,dudv = \int_1^2 du \int_1^2 \frac{1}{2v}\,dv = \frac{1}{2}\log 2.$

CASI PARTICOLARI IMPORTANTI

Coordinate polari $\boxed{\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho \sin\vartheta \end{cases}}$

Siano: $D =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ e $C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0): x \le 0\}$. (È dunque $\overline{D} = [0, +\infty[\times [-\pi, \pi]$ e $\overline{C} = \mathbb{R}^2$.) L'applicazione $\Phi\colon \overline{D} \to \overline{C}$ definita da $\Phi(\rho,\vartheta) = \begin{pmatrix} \rho\cos\vartheta \\ \rho\sin\vartheta \end{pmatrix}$ è continua, biiettiva tra D e C, di classe C^1 e si ha $det(J\Phi)(\rho,\vartheta) = \rho$ ($\neq 0$ nei punti di D).

Sia ora $A \subset C$ un insieme aperto e misurabile e sia $B = \Phi^{-1}(A)$. Si può dimostrare che anche B è aperto e misurabile. Per ogni funzione continua f di $\overline{A}$ in $\mathbb{R}$, possiamo applicare il Teorema precedente e si ha

$$\iint_A f(x,y)\, dxdy = \iint_B f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)\, \rho d\rho d\vartheta.$$

ESEMPIO. 7) Si voglia calcolare $\displaystyle\iint_E x(x^2 + y^2)\, dxdy$,

con $$E = \{(x,y): 1 \le (x^2 + y^2) \le 4,\ 0 \le y \le x;\ x > 0\}.$$

Posto $$A = int\, E, \quad \Phi(\rho,\vartheta) = \begin{pmatrix} \rho\cos\vartheta \\ \rho\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad B = \Phi^{-1}(A), \quad K = \overline{B},$$

si constata che è $$K = \Phi^{-1}(E) = \{(\rho,\vartheta): 1 \le \rho \le 2,\ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}\}.$$

Si ottiene $$\iint_E x(x^2 + y^2)\, dxdy = \iint_K \rho^4\cos\vartheta\, d\rho d\vartheta = \int_1^2 \rho^4 d\rho \int_0^{\pi/4} \cos\vartheta d\vartheta = \frac{31}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Coordinate ellittiche $\boxed{\begin{cases} x = a\rho \cos\vartheta \\ y = b\rho \sin\vartheta \end{cases}}$

Siano ancora: $D =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ e $C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0): x \le 0\}$. L'applicazione $\Phi\colon \overline{D} \to \overline{C}$ definita da $\Phi(\rho,\vartheta) = \begin{pmatrix} a\rho\cos\vartheta \\ b\rho\sin\vartheta \end{pmatrix}$ con $a > 0$, $b > 0$, è continua, biiettiva tra D e C, di classe C^1 e si ha $det(J\Phi)(\rho,\vartheta) = ab\rho$ ($\neq 0$ nei punti di D).

Sia ora $A \subset C$ un insieme aperto e misurabile e sia $B = \Phi^{-1}(A)$. Si può dimostrare che anche B è aperto e misurabile. Per ogni funzione continua f di $\overline{A}$ in $\mathbb{R}$, possiamo applicare il Teorema precedente e si ha

$$\iint_A f(x,y)\, dxdy = ab \iint_B f(a\rho\cos\vartheta, b\rho\sin\vartheta)\, \rho d\rho d\vartheta.$$

ESEMPIO. 8) Si voglia calcolare l'area dell'ellisse

$$E = \{(x,y): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\}.$$

Posto $\quad A = int\, E \setminus \{(x, 0): x \leq 0\}, \quad \Phi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} 2\rho\cos\vartheta \\ 3\rho\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad B = \Phi^{-1}(A), \quad K = \overline{B},$

si constata che è: $\quad K = \Phi^{-1}(E) = \{(\rho,\vartheta): 0 \leq \rho \leq 1, -\pi \leq \vartheta \leq \pi\}.$

Si ottiene: $\quad \iint_E 1\, dxdy = 6\iint_K \rho\, d\rho\, d\vartheta = 6\int_0^1 \rho\, d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta = 6\pi.$

§ 7. INTEGRALI SU DOMINI AMMISSIBILI DI $\mathbb{R}^3$

Domini ammissibili di $\mathbb{R}^3$

DEFINIZIONE. Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^3$ del tipo

$$E = \{(x,y,z): (x,y) \in J, \Phi(x,y) \leq z \leq \Psi(x,y)\},$$

con J sottoinsieme *chiuso e misurabile* di $\mathbb{R}^2$, Φ e Ψ funzioni continue di J in $\mathbb{R}$, è detto *dominio normale rispetto al piano xy*. In modo perfettamente analogo si dà la nozione di *dominio normale rispetto al piano xz* e *rispetto al piano yz*. Diremo che E è un *dominio normale* per esprimere il fatto che esso è normale rispetto ad almeno uno dei piani coordinanti.

DEFINIZIONE. Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^3$ è detto un *dominio ammissibile* se è un dominio normale o se è la riunione di un numero finito di domini normali e privi a 2 a 2 di punti interni in comune.

ESEMPI. 1) L'insieme $E = \{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ è un dominio normale rispetto al piano xy; si vede subito che è

$$J = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 1\}\ , \Phi(x,y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ e } \Psi(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Si constata poi che E è normale anche rispetto a ciascuno degli altri piani coordinanti.

2) È immediato constatare che l'insieme $E = \{(x,y,z): x^2 + y^2 \leq 1, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$ ("cono di gelato") è un dominio normale rispetto al piano xy.

3) Un esempio di insieme ammissibile ma non normale si ottiene immediatamente riunendo due insiemi come il precedente: $E = \{(x,y,z): x^2 + y^2 \leq 1, \sqrt{x^2 + y^2} \leq |z| \leq 2 - x^2 - y^2\}$.

Anche in questo caso, sussiste un risultato analogo a quello del Lemma 26.

Formule di riduzione per gli integrali tripli

TEOREMA 29. *(Formula di riduzione per corde) - Sia $f: E(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ una funzione continua su E, con $E = \{(x,y,z): (x,y) \in J, \Phi(x,y) \leq z \leq \Psi(x,y)\}$ dominio normale rispetto al piano xy. Allora f è integrabile su E e si ha*

$$\int_E f\, dm = \iint_J \Big(\int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x,y,z)dz\Big)dxdy. \blacksquare$$

La dimostrazione si ottiene procedendo come nel caso del Teorema 27.
Analoghi teoremi si ottengono scambiando i ruoli delle variabili.

ESEMPI0. 4) Si voglia calcolare *m(E),* con

$$E = \{(x,y,z): x^2 + y^2 \leq 1,\ \ 0 \leq z \leq 2 - x\}.$$

Posto: $J = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $K = \{(\rho,\vartheta): 0 \leq \rho \leq 1, -\pi \leq \vartheta \leq \pi\}$, si ha:

$$\int_E 1\, dm = \iint_J \Big(\int_0^{2-x} 1dz\Big)dxdy = \iint_J (2 - x)dxdy = \iint_K (2 - \rho \cos \vartheta)\rho d\rho d\vartheta =$$

$$= \int_0^1 \Big(\int_{-\pi}^{\pi} (2\rho - \rho^2 \cos \vartheta)d\vartheta \Big)d\rho = \int_0^1 d\rho[2\rho\vartheta - \rho^2 \sin \vartheta]_{\vartheta = -\pi}^{\vartheta = \pi} = 4\pi \int_0^1 \rho\, d\rho = 2\pi.$$

TEOREMA 30 *(Formula di riduzione per sezioni) - Sia f*: $E(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ *una funzione continua su E, con E insieme chiuso e misurabile contenuto nel rettangolo* $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ con $a_3 = \max \min \max \min \{z: \exists\, (x,y,z) \in E\}$, $b_3 = \max \{z: \exists\, (x,y,z) \in E\}$. *Se, per ogni* $\overline{z} \in [a_3, b_3]$, *la sezione* $S_{\overline{z}} = E \cap \{(x,y,\overline{z})\}$ *è misurabile, allora f è integrabile su E e si ha*

$$\int_E f\, dm = \int_{a_3}^{b_3} \Big(\iint_{S_z} f(x,y,z)dxdy\Big)dz \ \blacksquare$$

ESEMPIO.- 5) (Volume del toro.) È dato il toro $E = \{(x,y,z): \big(R - \sqrt{x^2 + y^2}\big)^2 + z^2 \leq r^2\}$. Si vuol calcolare

$$m(E) = \int_E 1\, dm = 2 \int_0^r \Big(\iint_{S_z} 1dxdy\Big)dz\ .$$

Essendo $\quad S_z = \{(x,y,z): R - \sqrt{r^2 - z^2} = \varphi(z) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R + \sqrt{r^2 - z^2} = \psi(z)\},$

si ha $\quad m(E) = \int_E 1dm = 2 \int_0^r \Big(\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \int_{\varphi(z)}^{\psi(z)} \rho d\rho\Big)dz = 2\pi \int_0^r dz[\rho^2]_{\rho = \varphi(z)}^{\rho = \Psi(z)} =$

$$= 2\pi \int_0^r [(R + \sqrt{r^2 - z^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - z^2})^2]dz = 8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - z^2}dz =$$

$$= 8\pi rR \int_0^r \sqrt{1 - (z/r)^2}dz = 8\pi r^2 R \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}dt = 8\pi r^2 R \int_0^{\pi/2} \cos^2\alpha d\alpha = 2\pi^2 r^2 R\ .$$

Cambiamento di variabili per gli integrali tripli

TEOREMA 31. *Siano:* $f(x,y,z)$: $\overline{A} \to \mathbb{R}$ *continua, A aperto e misurabile,* Φ: $\overline{B} \to \overline{A}$, *con* $\Phi(u,v,w) = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}$, *B aperto e misurabile. Se la funzione* Φ *soddisfa alle condizioni:*

1) *è di classe* C^1 *in* $\overline{B}$;

@ 2) *è biiettiva tra B e A;*

3) *si ha* $\det(J\Phi)(u,v,w) \neq 0$, *per ogni* $(u,v,w)^T \in B$,

allora si ha:

$$\iiint\limits_A f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint\limits_B f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\, |\det(J\Phi)(u,v,w)|\, dudvdw\ . \ \blacksquare$$

CASI PARTICOLARI IMPORTANTI

Coordinate sferiche $\boxed{\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\vartheta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}}$

Siano: $D = \{(\rho,\varphi,\vartheta)\colon \rho > 0,\ 0 < \varphi < \pi,\ -\pi < \vartheta < \pi\}$ e $C = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z)\colon x \leq 0\}$. (È dunque $\overline{D} = [0, +\infty[\times [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$ e $\overline{C} = \mathbb{R}^3$.) L'applicazione $\Phi\colon\ \overline{D} \to \overline{C}$, definita da

$$\Phi(\rho,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \rho \sin\varphi \cos\vartheta \\ \rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ \rho \cos\varphi \end{pmatrix}$$

è continua, biiettiva tra D e C, di classe C^1 e si ha $\det(J\Phi)(\rho,\varphi,\vartheta) = \rho^2 \sin\varphi$ ($\neq 0$ in D).

Sia ora $A \subset C$ un insieme aperto e misurabile e sia $B = \Phi^{-1}(A)$. Si può dimostrare che anche B è aperto e misurabile. Per ogni funzione continua f di $\overline{A}$ in $\mathbb{R}$, possiamo applicare il Teorema precedente e si ha

$$\iiint\limits_A f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_B f(\rho \sin\varphi \cos\vartheta, \rho \sin\varphi \sin\vartheta, \rho \cos\varphi))\rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\vartheta.$$

ESEMPIO. 6) Si voglia calcolare $m(E)$,

con $$E = \{(x,y,z)\colon 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

Posto $$A = \operatorname{int} E, \quad \Phi(\rho,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \rho \sin\varphi \cos\vartheta \\ \rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ \rho \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad B = \Phi^{-1}(A), \quad K = \overline{B},$$

si constata che è $K = \Phi^{-1}(E) = \{(\rho,\varphi,\vartheta)\colon 1 \leq \rho \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Si ha:

$$m(E) = \iiint\limits_E 1\, dxdydz = \iiint\limits_K \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi = \int_1^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\, d\varphi \ = \ \frac{\pi}{6}\,[2\sqrt{2} - 1].$$

Coordinate ellissoidali $\boxed{\begin{cases} x = a\rho \sin\varphi \cos\vartheta \\ y = b\rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ z = c\rho \cos\varphi \end{cases}}$

Siano ancora: $D =]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]-\pi, \pi[$ e $C = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z): x \le 0\}$. (È dunque $\overline{D} = [0, +\infty[\times [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$ e $\overline{C} = \mathbb{R}^3$.) L'applicazione Φ: $\overline{D} \to \overline{C}$ definita da

$$\Phi(\rho,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} a\rho \sin\varphi \cos\vartheta \\ b\rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ c\rho \cos\varphi \end{pmatrix},$$

con $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, è continua, biiettiva tra D e C, di classe C^1 e si ha $det(J\Phi)(\rho,\varphi,\vartheta) = abc\rho^2 \sin\varphi$ ($\neq 0$ nei punti di D).

Sia ora $A \subset C$ un insieme aperto e misurabile e sia $B = \Phi^{-1}(A)$. Si può, al solito, dimostrare che anche B è aperto e misurabile. Per ogni funzione continua f di $\overline{A}$ in $\mathbb{R}$, possiamo applicare il Teorema precedente e si ha

$$\iiint_{\overline{A}} f(x,y,z)dxdydz = abc \iiint_{\overline{B}} f(a\rho \sin\varphi \cos\vartheta, b\rho \sin\varphi \sin\vartheta, c\rho \cos\varphi))\, \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\vartheta.$$

ESEMPIO. 7) (Volume dell'ellissoide.) Si voglia calcolare $m(E)$,

con $$E = \{(x,y,z): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\}.$$

Posto

$$A = int\, E \setminus \{(x,0,z): x \le 0\}, \quad \Phi(\rho,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} a\rho \sin\varphi \cos\vartheta \\ b\rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ c\rho \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad B = \Phi^{-1}(A), \quad K = \overline{B},$$

si constata che è $K = \Phi^{-1}(E) = \{(\rho,\varphi,\vartheta): \rho \ge 0, 0 \le \varphi \le \pi, -\pi \le \vartheta \le \pi\}$.

Si ha: $$m(E) = \iiint_E 1\, dxdydz = \iiint_K abc\rho^2 \sin\varphi d\rho d\vartheta d\varphi = abc \int_0^1 d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} \rho^2 \sin\varphi d\varphi =$$

$$= abc \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = \frac{4}{3}\pi abc.$$

§ 8. CENNO SUGLI INTEGRALI IMPROPRI UNIDIMENSIONALI

PROBLEMA. Come possiamo estendere la nozione di integrale al caso di funzioni illimitate o definite su domini illimitati?

Ci limiteremo al caso delle funzioni di una variabile distinguendo due tipi di situazioni.

DEFINIZIONE. Sia data una funzione f: $I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, chiuso o no, limitato o no. Si dice che la f è *localmente integrabile* in I se f è integrabile in ogni sottointervallo $[\alpha, \beta]$ di I.

Ovviamente, ogni funzione continua f: $I \to \mathbb{R}$ è localmente integrabile su I.

È localmente integrabile anche la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = n(x)$ [= parte intera di x].

Primo tipo

DEFINIZIONE. Sia f: $I = [a,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile. Essendo, in particolare, f integrabile sugli intervalli del tipo $[a,c]$, ha senso ricercare il

$$\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)dx.$$

Se il limite esiste, esso prende il nome di *integrale improprio* della f su I e si indica con la scrittura $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Se il limite è finito, si dice che l'integrale improprio della f su I è *convergente* e che la f è *integrabile in senso improprio su I*, Il limite l si chiama l'*integrale improprio delle f su I* e lo si indica scrivendo $l = \int_a^{+\infty} f(x)dx$. Se il limite è infinito, si dice che l'integrale improprio della f è *divergente*.

In modo perfettamente analogo si dà la nozione di integrale improprio su intervalli del tipo $]-\infty,a]$.

Sia poi f definita e localmente integrabile su tutto $\mathbb{R}$; fissato $c \in \mathbb{R}$, si definisce

$$(*) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

Dalla proprietà di additività dell'integrale si ha subito che, se esiste il valore del secondo membro della (*), esso è indipendente dal punto c.

ESEMPI. 1) Dato un numero $r > 0$, studiamo l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} x^{-r}dx$.

Se è $r \neq 1$, si ha:

$$\int_1^{+\infty} x^{-r}dx = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c x^{-r}dx = \frac{-1}{r-1} \lim_{c \to +\infty} [c^{1-r} - 1] = \begin{cases} \dfrac{1}{r-1} & \text{se è } r > 1 \\ +\infty & \text{se è } r < 1. \end{cases}$$

Per $r = 1$, si ha $\quad \int_1^{+\infty} x^{-1}dx = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c x^{-1}dx = \lim_{c \to +\infty} [\log c - 0] = +\infty.$

Si conclude che l'integrale improprio studiato converge per $r > 1$ e diverge per $r \leq 1$.

2) Dato un numero $r > 0$, studiamo il carattere dell'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log^r x}$.

Se è $r \neq 1$, si ha:

$$\lim_{c \to +\infty} \int_2^c \frac{dx}{x \log^r x} = \lim_{c \to +\infty} \left[\frac{1}{(1 - r)\log^{r-1} x} \right]_2^c = \begin{cases} \dfrac{1}{(r - 1)\log^{r-1} 2} & \text{se è } r > 1 \\ +\infty & \text{se è } r < 1. \end{cases}$$

Per $r = 1$, si ha

$$\lim_{c \to +\infty} \int_2^c \frac{dx}{x \log x} = \lim_{c \to +\infty} [\log \log c - \log \log 2] = + \infty.$$

Si conclude che l'integrale improprio studiato converge per $r > 1$ e diverge per $r \leq 1$.

La situazione è, per molti versi, simile a quella delle serie numeriche. Sussistono, in particolare, i seguenti risultati:

TEOREMA 32. *Sia f: $I = [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile. Se è convergente su I l'integrale improprio della funzione $|f|$, è tale anche quello della funzione data e si ha*

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|dx. \blacksquare$$

TEOREMA 33. *Siano f,g: $I = [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ due funzioni localmente integrabili, con $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in I$. Allora, se è convergente su I l'integrale improprio della g, è tale anche quello della f e si ha*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx. \blacksquare$$

TEOREMA 34. *Sia f: $I = [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile e infinitesima per x che tende a $+\infty$, con $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$. Allora esiste l'integrale improprio della f su I ed esso è convergente se è* $\operatorname{ord} f > 1 + \varepsilon$ *per un opportuno* $\varepsilon > 0$, *divergente se è* $\operatorname{ord} f \leq 1$. $\blacksquare$

Analoghi risultati si stabiliscono nei casi $I =]-\infty, a]$ o $I = \mathbb{R}$.

ESEMPIO. 3) L'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ è convergente, dato che la funzione integranda è positiva e infinitesima di ordine soprareale, sia per $x \to + \infty$, sia per $x \to - \infty$.

Sia ora data la serie numerica $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e si consideri la funzione f_S: $I = [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f_S(x) = a_{n(x)}, \quad \text{se è } n(x) \leq x < n(x) + 1.$$

Si è gia detto che la funzione $n(x)$ [= parte intera di x] è localmente integrabile.

TEOREMA 35. *Una serie $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se converge l'integrale improprio della funzione f_S.* $\blacksquare$

ESEMPIO. 4) La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log^r n}$ converge se e solo se è $r > 1$. Per $x \geq 3$, si ha:

$$0 < g(x) = \frac{1}{x \log^r x} \leq \frac{1}{n(x) \log^r n(x)} = f_S(x) < \frac{1}{(x-1)\log^r(x-1)} = h(x).$$

Gli integrali impropri della g e della h sono convergenti se e solo se è $r > 1$. Dal Teorema 33, si ha poi che vale lo stesso risultato anche per l'integrale improprio della f_S.

Secondo tipo

DEFINIZIONE. Sia f: $I = [a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione illimitata, ma localmente integrabile. Ha senso ricercare il

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx.$$

Se il limite esiste, esso prende il nome di *integrale improprio* della f su I e si indica con la scrittura $\int_a^b f(x)dx$. Se il limite è finito, si dice che l'integrale improprio della f su I è *convergente* e che la f è *integrabile in senso improprio su I*, Il limite l si chiama l'*integrale improprio delle f su I* e lo si indica scrivendo $l = \int_a^b f(x)dx$. Se il limite è infinito, si dice che l'integrale improprio della f è *divergente.*

Un caso particolarmente interessanti è quello in cui si ha $\lim_{c \to b^-} f(x) = \infty$.

In modo perfettamente analogo si dà la nozione di integrale improprio su insiemi del tipo $]a,b]$.

Sia poi f è definita e localmente integrabile su $I =]a,b[$; fissato $c \in]a,b[$, si definisce

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{*}$$

Dalla proprietà di additività dell'integrale si ha subito che, se esiste il valore del secondo membro della (*), esso è indipendente dal punto c.

ESEMPIO. 5) Dato un numero $r > 0$, studiamo il carattere dell'integrale improprio

$$\int_0^1 x^{-r}dx.$$

Se è $r \neq 1$, si ha:

$$\int_0^1 x^{-r}dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 x^{-r}dx = \frac{1}{r-1} \lim_{c \to 0^+} [c^{1-r} - 1] = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{se è } r < 1 \\ +\infty & \text{se è } r > 1 \end{cases}$$

Per $r = 1$, si ha $\int_0^1 x^{-1}dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 x^{-1}dx = \lim_{c \to 0^+} [0 - \log c] = +\infty.$

Si conclude che l'integrale improprio studiato converge per $r < 1$ e diverge per $r \geq 1$.

Analogamente a quanto visto per gli integrali dei primo tipo, si può dimostrare che:

TEOREMA 36. *Sia f: $I = [a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile. Se è convergente su I l'integrale improprio della funzione $|f|$, è tale anche quello della funzione data e si ha*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \blacksquare$$

TEOREMA 37. *Siano f,g: $I = [a,b[\to \mathbb{R}$ due funzioni localmente integrabili, con $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in I$. Allora, se è convergente su I l'integrale improprio della g, è tale anche quello della f e si ha*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \blacksquare$$

TEOREMA 38. *Sia f: $I = [a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile, con $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$ e infinita per x che tende a b^-. Allora esiste l'integrale improprio della f su I ed esso è convergente se è $\mathrm{Ord}\, f < 1 - \varepsilon$ per un opportuno $\varepsilon > 0$ mentre è divergente se è $\mathrm{Ord}\, f \geq 1$.* $\blacksquare$

Analoghi risultati si stabiliscono nei casi $I =]a, b]$ o $I =]a, b[$.

ESEMPI. 6) L'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)}}$$

è convergente, dato che la funzione integranda è continua e positiva in $]0,1[$ ed è infinita con Ordine 1/2, sia per x che tende a 0 da destra, sia per x che tende a 1 da sinistra.

7) Studiamo l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin^2\frac{1}{x}\, dx.$

La funzione integranda è illimitata su $I =]0, 1]$ e non è quindi integrabile in senso ordinario. Ora si ha:

$$0 \leq f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin^2\frac{1}{x} \leq g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

L'integrale improprio della g è convergente (Teorema 38); per il Teorema 37 è quindi convergente anche l'integrale di partenza.

8) Sia $$E(\subset \mathbb{R}^2) = \{(x,z): x \geq 1,\ 0 \leq z \leq 1/x\}.$$

Si ha subito $$m(E) = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c x^{-1}dx = +\infty.$$

Sia ora T il solido che si ottiene ruotando la figura E attorno all'asse delle x. È dunque:

$$T = \{(x,y,z): x \geq 1, \sqrt{y^2 + z^2} \leq 1/x\}.$$

Per ogni $x \geq 1$, sia S_x la corrispondente sezione di T. Si ha

$$m(T) = \int_1^{+\infty} m(S_x)dx = \pi \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \pi.$$

§ 9. E S E R C I Z I

1) Si calcolino i seguenti integrali:

$$a) \int_1^4 \frac{1 + \sqrt{x}}{x^2} dx; \quad b) \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^6 + 4}}; \quad c) \int_0^1 \frac{x\, dx}{x^2 + 3x + 2}; \quad d) \int_0^1 \frac{e^x\, dx}{1 + e^{2x}};$$

$$e) \int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} dx; \quad f) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x + \sin x}; \quad g) \int_0^1 x^2 e^{2x}\, dx.$$

[$\Re$. $a)\ \frac{7}{4}$; $b)\ \frac{1}{3}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $c)\ \log\frac{9}{8}$; $d)$ $\mathrm{arctg}\, e - \frac{\pi}{4}$; $e)\ -\log \mathrm{tg}\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$; $f)$ $\log 2$; $g)\ \frac{e^2 - 1}{4}$]

2) Si calcolino i seguenti integrali doppi:

$\iint_R (x^2 + y^2)dxdy,$ con $R = [0,1]^2$. [$\Re$. 2/3]

$\iint_E x^2y\, dxdy,$ con $E = \{(x,y)\colon -2 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$. [$\Re$. 64/15]

$\iint_E (1 - x - y)dxdy,$ con E = triangolo di vertici (0,0), (1,0), (0,1). [$\Re$. 1/6]

$\iint_E e^{(x^2 + y^2)}dxdy,$ con $E = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 \leq r^2\}$. [$\Re$. $\pi(e^{r^2} - 1)$]

$\iint_E x^2y^2dxdy,$ con $E = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 \geq 1,\ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$. [$\Re$. $7\pi/24$]

$\iint_E (x + 2y)dxdy,$ con E = quadrato di vertici (1,0), (2,1), (1,2), (0,1).

[Sostituzione: $x = \frac{u - v}{2}$; $y = \frac{u + n}{2}$, $1 \leq u \leq 3$, $-1 \leq v \leq 1$. $\Re$. = 6]

$\iint_E xydxdy,$ con $E = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}$. [$\Re$. $\frac{5\sqrt{5} - 7}{48}$]

$\iint_E \sqrt{x^2 + y^2}dxdy,$ con $E = \{(x,y)\colon (x - 1)^2 + y^2 \leq 1;\ y \geq x\}$.

[Si passi a coordinate polari; si ha $\frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq 2\cos\vartheta$. $\Re$. $\frac{8}{3} \times \frac{8 - 5\sqrt{2}}{12}$]

3) Si calcolino i seguenti integrali tripli:

$m(E) = \iiint\limits_E 1dxdydz,$ con $E = \{(x,y,z): x^2 + y^2+ z^2 \leq R^2,\ x^2 + y^2+ z^2 \leq 2Rx\}$. [$\Re$. $\frac{5}{12}\pi R^3$]

$\iiint\limits_E zdxdydz,$ con $E = \{(x,y,z): x^2+ y^2+ z^2 \leq 3a^2, x^2 + y^2 \leq 2az\}$. [$\Re$. $\frac{5}{3}\pi a^4$]

$\iiint\limits_E \sqrt{x^2 + y^2+ z^2}dxdydz,$ con $E = \{(x,y,z): x^2 + y^2+ z^2 \leq x\}$.

[Si passi a coordinate sferiche. Sia $P \in \mathcal{F}E \setminus O$; il piano per O, P e $K(0,0,1)$ interseca il piano xy lungo una retta r che incontra $\mathcal{F}E$ in un punto H. Si ha $\overline{OH} = \cos\vartheta$, da cui si ottiene $\overline{OP} = \cos\vartheta \sin\varphi$; in conclusione, è $0 \leq \varphi \leq \pi$; $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$; $0 \leq \rho \leq \cos\vartheta \sin\varphi$. $\Re$. $\frac{\pi}{10}$]

4) Dato un sottoinsieme misurabile E di $\mathbb{R}^2$ [di $\mathbb{R}^3$], di densità $\rho(\underline{x})$ si prova che il suo baricentro ha coordinate $x_0 = \dfrac{\int_E x\rho(\underline{x})\, dm}{\int_E \rho(\underline{x})\, dm}$, $y_0 = \ldots$, $z_0 = \ldots$ I momenti d'inerzia rispetto agli assi sono definiti da: $I_x = \int_E (y^2 + z^2)\rho(\underline{x})\, dm$, $I_y = \ldots$, $I_z = \ldots$ (in $\mathbb{R}^2$ è $z = 0$).

Determinare baricentro e momento d'inerzia rispetto all'asse z dei seguenti insiemi (di densità unitaria):

$E = \{(x,y,z): x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\}$. [$\Re$. $x_0 = y_0 = 0$; $z_0 = 7/9$; $M_z = 5\pi/6$]

$E = \{(x,y,z): z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. [$\Re$. $x_0 = y_0 = 0$; $z_0 = 3/8$; $M_z = 4\pi/15$]

5) Si studino i seguenti integrali impropri

$a)\ \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$; $b)\ \int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$; $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}dx$;

$d)\ m(E)$, con $E = \{(x,y): x^2 < y \leq x^2 + e^{-x}; x \geq 0\}$;

$e)\ m(E)$, con $E = \{(x,y): 0 \leq \frac{x}{1 + x^2} \leq y \leq \frac{2x}{1 + x^2}\}$.

[$\Re$. $a)$ 0; $b)$ 1/2; $c)$ π; $d)$ 1; $e)$ $+\infty$]

6) Si calcoli $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + 2\cos x}$.

[La prima idea è quella di effettuare la sostituzione $t = \text{tg}\frac{x}{2}$; si trova come risultato 0 che è inaccettabile. Dov'è l'errore? Poi si osserva che la funzione integranda è simmetrica rispetto a π; l'integrale dato è dunque uguale a 2 volte l'integrale da 0 a π; la sostituzione di prima ora funziona, anche se dà luogo ad un integrale improprio. [$\Re$. $\frac{2}{5}\pi\sqrt{5}$]

Capitolo Quattordicesimo
EQUAZIONI DIFFERENZIALI

§ 1. INTRODUZIONE

DEFINIZIONE. Sono dette *equazioni funzionali* quelle equazioni in cui l'incognita è una funzione.

ESEMPIO. 1) Trovare una funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(2x) = f^2(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Come subito si vede, ogni funzione del tipo $f(x) = a^x$, con $a > 0$, è soluzione del nostro problema.

DEFINIZIONE. Dicesi *equazione differenziale* un'equazione funzionale in cui compaiono una o più derivate della funzione incognita.

DEFINIZIONE. Un'equazione differenziale è detta *ordinaria* se la sua incognita è funzione di una sola variabile; in caso contrario, si parla di equazione differenziale *alle derivate parziali.*

ESEMPI. 2) Data f: $I(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ continua, con I intervallo, trovare le funzioni F: $I \to \mathbb{R}$ derivabili tali che $F'(x) = f(x)$, per ogni $x \in I$. La soluzione è, come ben si sa, data dalle funzioni del tipo $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + c$, con $x_0 \in I$ fissato e $c \in \mathbb{R}$ arbitrario.

3) Trovare le funzioni u: $A(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ differenziabili sull'insieme aperto A e tali che

$$x \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$$

per ogni $(x,y)^T \in A$. Si constata facilmente che è soluzione ciascuna delle funzioni $u_1(x,y) = 1$, $u_2(x,y) = \dfrac{x - y}{x + y}$, $u_3(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ e (cfr. § 8, Esercizio 7) ogni altra funzione u che sia *positivamente omogenea*, ossia tale che

$$u(tx,ty) = u(x,y), \quad \forall t > 0, \forall (x,y)^T \in A .$$

DEFINIZIONE. L'ordine massimo di derivazione con cui la funzione incognita compare in un'equazione differenziale è detto l'*ordine dell'equazione differenziale.*

ESEMPI. 4) L'equazione differenziale ordinaria $y'(x) = xy^2(x)$ è del *primo* ordine.

5) L'equazione differenziale ordinaria $y'''(x) = y'(x)y(x)$ è del *terzo* ordine.

6) L'equazione differenziale alle derivate parziali $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$ è del *secondo* ordine.

DEFINIZIONE. Un'equazione differenziale ordinaria si dice espressa in *forma normale* se è esplicitata rispetto alla derivata di ordine massimo.

ESEMPI. 7) L'equazione differenziale ordinaria $y'(x) = xy(x)$ *è* in forma normale.

8) L'equazione differenziale ordinaria $e^{y''(x)} + y''(x) = y(x)$ *non è* in forma normale.

§ 2. EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL PRIMO ORDINE

È data l'equazione differenziale

(*) $y'(x) = f(x,y(x))$ [o $y' = f(x,y)$],

con $f\colon A \to \mathbb{R}$ definita su un aperto A di $\mathbb{R}^2$.

DEFINIZIONE. Si dice che una funzione $y\colon I(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, con *I intervallo*, è *una soluzione* della (*) se:
1) $y(x)$ è derivabile in I;
2) $(x,y(x))^T \in A$ per ogni $x \in I$;
3) $y'(x) = f(x,y(x)),\ \forall\, x \in I.$

PROBLEMA. Data un'equazione differenziale, si chiede di rispondere a tre questioni:
1) Esistenza di soluzioni.
2) Numero delle soluzioni (in particolare, se c'è unicità).
3) Calcolo (eventualmente approssimato) delle soluzioni.

ESEMPIO. 1) Data $f\colon I(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ continua, le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x) = f(x)$ sono date dalle funzioni del tipo $y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + c$, con $x_0 \in I$ fissato e $c \in \mathbb{R}$ arbitrario. Ci sono, quindi, infinite soluzioni. Per individuarne una, basta fissare il suo valore nel punto x_0: $y(x_0) = y_0 = c$.

DEFINIZIONE. La condizione $y(x_0) = y_0$ è detta *condizione iniziale.*

Problema di Cauchy

DEFINIZIONE. È detto *Problema di Cauchy* un problema del tipo

(1) $$\begin{cases} y'(x) = f(x,y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

con $f\colon A \to \mathbb{R}$ definita su un sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}^2$ e $(x_0,y_0)^T$ punto fissato di A.

DEFINIZIONE. Dicesi *soluzione locale* del problema (1) ogni funzione $y\colon I \to \mathbb{R}$, definita su un intervallo I tale che:
1) $y(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale su I;
2) $x_0 \in \operatorname{int} I$;
3) $y(x_0) = y_0$.

TEOREMA 1. *(Di esistenza e unicità locali) - Se $f\colon A(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ è continua, allora esistono un $h > 0$ ed una funzione $y\colon I =]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ soluzione del problema* (1). *Se, inoltre, esiste ed è continua la derivata della f rispetto a y $f_y\colon A(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, allora la soluzione è unica.* ∎

DEFINIZIONE. Sia $f\colon A =]a,b[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (potendo anche essere $a = -\infty$ e $b = +\infty$) e sia $x_0 \in I$. Dicesi *soluzione globale* del problema (1) ogni soluzione y definita su tutto $]a,b[$.

TEOREMA 2. *(Di esistenza e unicità globali) - Se* f: $A =]a,b[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è continua e se* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$: $A =]a,b[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è continua e limitata, allora esiste una e una sola soluzione globale* y: $]a,b[\to \mathbb{R}$ *del problema* (1). ▮

ESEMPIO. 2) Si consideri il Problema di Cauchy: $y' = \dfrac{y}{1+y^2} = f(x,y)$; $y(0) = 1$. Si vede subito che la funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}^2$, derivabile rispetto a y con

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \frac{|1-y^2|}{(1+y^2)^2} \le 1.$$

Per il Teor. 2, esiste perciò una e una sola soluzione y: $]a,b[= \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del nostro problema.

N.B. Non sempre il problema (1) ha una soluzione globale.

ESEMPIO. 3) Si consideri il Problema di Cauchy: $y' = y^2$; $y(0) = 1$ e si osservi che la funzione $f(x,y) = y^2$ è definita su $]a,b[\times \mathbb{R}$ (con $]a,b[= \mathbb{R}$) e soddisfa alle condizioni di esistenza e unicità locali. È subito visto che la soluzione del problema dato è $y(x) = \dfrac{1}{1-x}$ che è definita nell'intervallo $]-\infty, 1[$ contenuto propriamente nell'intervallo $]a,b[= \mathbb{R}$.

N.B. Non sempre il problema (1) ha un'unica soluzione.

ESEMPIO. 4) Si consideri il Problema di Cauchy: $y' = 2\sqrt{|y|}$; $y(0) = 0$. Si vede subito che sono soluzioni di (1) sia $y_1(x) = 0$, sia $y_2(x) = x^2 \operatorname{sign}(x)$. Notiamo che sono soluzioni tutte e sole le funzioni

$$y(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } \alpha \le x \le \beta \\ -(x-\alpha)^2, & \text{per } x < \alpha \\ (x-\beta)^2, & \text{per } x > \beta \end{cases}, \qquad \text{con } \alpha \le 0 \le \beta.$$

Equazioni a variabili separabili

Sono così dette le equazioni del tipo

$$y'(x) = g(x)\,h(y) \quad [= f(x,y(x))],$$

con g: $]a,b[\to \mathbb{R}$ *continua*, [potendo eventualmente essere $a = -\infty$, $b = +\infty$],

e h: $]c,d[\to \mathbb{R}$ *di classe* C^1, [potendo eventualmente essere $c = -\infty$, $d = +\infty$].

Per ogni $x_0 \in]a, b[$ e ogni $y_0 \in]c, d[$, il Problema di Cauchy $\begin{cases} y'(x) = g(x)h(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ ha, per il Teorema 1, una e una sola soluzione locale $y(x)$: $I \to \mathbb{R}$, con $I =]x_0 - h, x_0 + h[\subset]a, b[$.

1) Se è $h(y_0) = 0$, si ha $y(x) \equiv y_0$ (soluzione costante).

2) Sia $h(y_0) \ne 0$. Se $y(x)$ è la soluzione, allora si ha $h(y(x)) \ne 0$ per ogni $x \in I$. Infatti, se esistesse un $x_1 \in I$ con $h(y(x_1)) = 0$, il problema di Cauchy $\begin{cases} z'(x) = g(x)h(z) \\ z(x_1) = y(x_1) \end{cases}$ ammetterebbe le

due soluzioni locali $y(x)$ e $z(x) \equiv y(x_1)$, contro il Teorema 1.

Dall'uguaglianza $y'(t) = g(t)h(y(t))$, dividendo per $h(y(t))$ [$\neq 0$], si ottiene $\frac{y'(t)}{h(y(t))} = g(t)$. Integrando, si ricava:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{h(y(t))}\, dt = \int_{x_0}^{x} g(t)dt,$$

ossia

$$H(y(x)) - H(y_0) = G(x) - G(x_0),$$

essendo $H(y)$ una primitiva di $\frac{1}{h(y)}$ e $G(x)$ una primitiva di $g(x)$. Poiché $H(y)$ è dotata di inversa (essendo $\frac{1}{h(y)}$ di segno costante), si ottiene

$$y(x) = H^{-1}(G(x) - G(x_0) + H(y_0)).$$

ESEMPI. 4) Riesaminiamo l'equazione differenziale $y' = y^2$ vista sopra, con la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$. Questa è del tipo "a variabili separabili" con $g(x) = 1$ e $h(y) = y^2$. Se è $y_0 = 0$, si ha la soluzione nulla $y(x) \equiv 0$; in caso contrario, si divide per y^2 ottenendo l'equazione $\frac{y'}{y^2} = 1$. Integrando da x_0 a x i due membri, si ottiene $\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(x)} = x - x_0$, e quindi

$$y(x) = \frac{y_0}{1 + y_0(x_0 - x)}$$

definita nell'intervallo $]-\infty, \frac{1}{y_0} + x_0[$ se è $y_0 > 0$ e nell'intervallo $]\frac{1}{y_0} + x_0, +\infty[$ se è $y_0 < 0$.

5) Studiamo il Problema di Cauchy; $\begin{cases} y' = -2xy^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$.

È dunque $g(x) = -2x$ e $h(y) = y^2$. Se è $y_0 = 0$, da cui $h(y_0) = 0$, si ha la soluzione nulla $y(x) \equiv 0$. In caso contrario, dividendo per y^2 e integrando, si ricava $y(x) = \frac{y_0}{y_0 x^2 + 1}$. Se è $y_0 > 0$, si ottiene una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$, mentre, nel caso $y_0 < 0$, la soluzione è definita solo tra $-\sqrt{\frac{-1}{y_0}}$ e $\sqrt{\frac{-1}{y_0}}$.

6) Trovare le traiettorie ortogonali alla famiglia di parabole $y = y_a(x) = ax^2$, con a parametro reale. Si cercano cioè curve $u = u_c(x)$, con c parametro reale, tali che, per ogni c fissato, si abbia che, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dall'essere $u_c(x) = y_a(x)$, per qualche $a \neq 0$, segua

$$u'_c(x) = \frac{-1}{y'_a(x)} = \frac{-1}{2ax}.$$

Poiché risulta

$$a = \frac{y_a(x)}{x^2} = \frac{u_c(x)}{x^2},$$

si ottiene l'equazione differenziale

$$u'_c(x) = \frac{-x}{2u_c(x)}.$$

Moltiplicando per $2u_c(x)$ e integrando, si ha:

$$u_c^2(x) = -\frac{x^2}{2} + c.$$

In conclusione, si ottiene la famiglia di ellissi

$$u^2 + \frac{x^2}{2} = c, \quad \text{con } c = u_c^2(x_0) + \frac{1}{2}x_0^2.$$

Equazioni omogenee

Sono così dette le equazioni del tipo $y'(x) = f(\frac{y(x)}{x})$ con f: $I \to \mathbb{R}$ funzione di classe C^1 sull'intervallo I.

Si effettua il cambio di variabile $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, ottenendo l'equazione

$$y'(x) = \frac{d}{dx}(x\, u(x)) = x\, u'(x) + u(x) = f(u(x)),$$

da cui
$$u'(x) = \frac{1}{x}\big(f(u(x)) - u(x)\big),$$

che è a variabili separabili.

ESEMPI. 7) Si consideri l'equazione $\quad y'(x) = \frac{y(x)}{x + y(x)} \quad [= \frac{y(x)/x}{1 + y(x)/x}].$

Posto $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, si ottiene l'equazione a variabili separabili $u' = -\frac{1}{x}\frac{u^2}{u+1}$. Per $x > 0$ e $y(x_0) > 0$, si ha

$$-\frac{1}{u(x)} + \log u(x) = -\log x + c \quad \text{e} \quad -\frac{x}{y(x)} + \log y(x) = c.$$

8) Si consideri l'equazione $\quad y'(x) = \frac{y(x)}{x} + \operatorname{tg}\frac{y(x)}{x}.$

Posto $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, si ottiene l'equazione a variabili separabili $u' = \frac{1}{x}\operatorname{tg} u$. Per $x > 0$ e $\frac{y}{x} \in\,]0, \frac{\pi}{2}[$, si ha

$$\log \sin u(x) = \log x + c = \log kx; \quad \sin u(x) = kx \quad \text{e} \quad \sin\frac{y(x)}{x} = kx.$$

§ 3. EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL PRIMO ORDINE

DEFINIZIONE. Un'equazione differenziale del tipo

$$y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x) \quad [= f(x,y(x))],$$

con $a(x)$, $b(x)$: $I \to \mathbb{R}$ funzioni *continue*, su un *intervallo* I, è detta equazione differenziale *lineare (completa) del primo ordine*. L'equazione

$$y'(x) = a(x)\, y(x)$$

è detta equazione differenziale lineare *omogenea associata* all'equazione completa.

TEOREMA 3. *Le soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine costituiscono un sottospazio S di dimensione* 1 *dello spazio vettoriale $C^1(I,\mathbb{R})$. Si ha inoltre $S = \{ce^{A(x)}: c \in \mathbb{R}\}$, dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$ su I.*

DIM. Che S sia uno spazio vettoriale è di verifica immediata. Sia ora $A(x)$ una primitiva di $a(x)$ su I. Dall'uguaglianza $y'(x) - a(x)y(x) = 0$, moltiplicando ambo i membri per $e^{-A(x)}$, si ottiene

$$y'(x)e^{-A(x)} - a(x)y(x)e^{-A(x)} = \frac{d}{dx}(y(x)\,e^{-A(x)}) = 0.$$

Si ha dunque $y(x)\,e^{-A(x)} = c$, da cui $y(x) = ce^{A(x)}$. ∎

TEOREMA 4. *Le soluzioni di un'equazione differenziale lineare completa del primo ordine sono date dalle funzioni del tipo $y(x) = z(x) + \overline{y}(x)$, essendo $z(x)$ una generica soluzione dell'equazione omogenea associata e $\overline{y}(x)$ una soluzione particolare dell'equazione completa.*

DIM. È immediato constatare che una funzione del tipo $z(x) + \overline{y}(x)$ è soluzione dell'equazione completa. Se $y(x)$ e $\overline{y}(x)$ sono due soluzioni della completa, si constata immediatamente che $y(x) - \overline{y}(x)$ è una soluzione dell'omogenea associata. ∎

TEOREMA 5. *Una soluzione particolare dell'equazione differenziale lineare completa è data da*

$$\overline{y}(x) = \int_{x_0}^{x} e^{A(x)-A(t)}\, b(t)\, dt,$$

con x_0 prefissato punto di I e $A(u)$ primitiva di $a(u)$.

DIM. *(Metodo di variazione delle costanti).* Cerchiamo soluzioni del tipo $\overline{y}(x) = c(x)e^{A(x)}$, con $c(x)$ funzione incognita di classe C^1. Una funzione di questo tipo è soluzione se e solo se

$$c'(x)e^{A(x)} + c(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)c(x)e^{A(x)} + b(x),$$

ossia se e solo se
$$c'(x)e^{A(x)} = b(x).$$

e quindi
$$c'(x) = b(x)e^{-A(x)},$$

da cui si ottiene
$$c(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}b(t)\, dt.$$

Ne viene che è
$$\overline{y}(x) = c(x)e^{A(x)} = \int_{x_0}^{x} e^{A(x)-A(t)}b(t)\, dt, \quad ∎$$

DEFINIZIONE. Il fattore $e^{A(x)-A(t)}$ prende il nome di *nucleo risolvente.*

TEOREMA 6. *Per ogni $x_0 \in I$, e per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$, il Problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione $y(x)$ definita su tutto I.

DIM. La generica soluzione dell'equazione completa è

$$y(x) = ce^{A(x)} + \int_{x_0}^{x} e^{A(x) - A(t)} b(t)\, dt$$

che è definita su I. La soluzione del Problema di Cauchy è univocamente determinata dalla condizione iniziale $y(x_0) = y_0$, dalla quale si ricava $c = y_0 e^{-A(x_0)}$. ∎

ESEMPI. 1) Si vuol risolvere l'equazione $\quad y' = y + x$.

In questo caso, è $a(x) = 1$, $b(x) = x$ e $A(x) = x$. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono dunque le funzioni del tipo ce^x. Una soluzione particolare della completa è data da

$$\overline{y}(x) = \int_0^x e^{x-t} t\, dt = e^x \int_0^x t\, e^{-t}\, dt = e^x \left[-te^{-t} - e^{-t}\right]_0^x = -x - 1 + e^x.$$

La generica soluzione è dunque $\quad y(x) = ce^x - x - 1 + e^x$.

2) Si vuol risolvere l'equazione $\quad y' = \frac{1}{x} y + \frac{1}{x^2}$; su $I =]0, +\infty[$.

In questo caso, è $a(x) = \frac{1}{x}$, e $b(x) = \frac{1}{x^2}$. Si vede subito che è $A(x) = \log x$; le soluzioni dell'equazione omogenea sono dunque le funzioni del tipo cx. Una soluzione particolare della completa è data da

$$\overline{y}(x) = \int_1^x e^{\log x - \log t} \frac{1}{t^2}\, dt = x \int_1^x \frac{1}{t^3}\, dt = x\left[\frac{-1}{2t^2}\right]_1^x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}.$$

La generica soluzione è dunque $\quad y(x) = cx + \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$.

3) Si vuol risolvere l'equazione $\quad y' = -2e^x y + e^x$.

In questo caso, è $a(x) = -2e^x$ e $b(x) = e^x$. Si vede subito che è $A(x) = -2e^x$; le soluzioni dell'equazione omogenea sono dunque le funzioni del tipo $c\exp(-2e^x)$. Una soluzione particolare della completa è data da

$$\overline{y}(x) = \int_0^x \exp(-2e^x + 2e^t)e^t dt = \frac{\exp(-2e^x)}{2} \int_0^x \exp(2e^t) 2e^t dt =$$

$$= \frac{\exp(-2e^x)}{2}\left[\exp(2e^t)\right]_0^x = \frac{1}{2}[1 - \exp(2 - 2e^x)].$$

La generica soluzione è dunque

$$y(x) = c\exp(-2e^x) + \frac{1}{2}[1 - \exp(2 - 2e^x)].$$

Equazioni di Bernoulli

Sono dette così le equazioni del tipo

$$y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x) y(x)^\gamma,$$

con $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ e $a(x), b(x): I \to \mathbb{R}$ funzioni *continue*, con *I intervallo aperto*.

Se è $\gamma \in\ ]0,1[$, *non* è garantita l'unicità della soluzione. (f_y non è sempre definita!)
Se è $\gamma > 0$, la funzione nulla $y(x) \equiv 0$ è una soluzione.
Supponiamo $y(x) \neq 0$. Dividendo per $y(x)^{\gamma}$, si ottiene:

$$\frac{y'(x)}{y(x)^{\gamma}} = a(x)y(x)^{1-\gamma} + b(x).$$

Posto $u(x) = y(x)^{1-\gamma}$, si ottiene

$$u'(x) = (1-\gamma)a(x)u(x) + (1-\gamma)b(x),$$

che è un'equazione lineare e che quindi sappiamo risolvere.

ESEMPIO. 4) Si vuole risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = 2y(x)\ \mathrm{tg}\, x + \sqrt{y(x)} \\ y(0) = 1 \end{cases}, \text{ con } |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Si ha:
$$\frac{y'(x)}{2\sqrt{y(x)}} = \mathrm{tg}\, x\, \sqrt{y(x)} + \frac{1}{2},$$

da cui, ponendo $u(x) = \sqrt{y(x)}$, si ottiene: $\quad u'(x) = u(x)\ \mathrm{tg}x + \frac{1}{2}.$

Questa è un'equazione lineare, con $a(x) = \mathrm{tg}\, x$, $b(x) = \frac{1}{2}$, $A(x) = -\log\cos x$. Le soluzioni dell'omogenea sono le funzioni $z(x) = \frac{c}{\cos x}$. Una soluzione della completa è

$$\overline{u}(x) = \int_0^x e^{A(x)-A(t)}b(t)\, dt = \frac{1}{2\cos x}\int_0^x \cos t\, dt = \frac{1}{2\cos x}\sin x = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\, x.$$

La soluzione generale è dunque

$$u(x) = \frac{c}{\cos x} + \frac{1}{2}\mathrm{tg}\, x, \quad \text{da cui} \quad y(x) = \left(\frac{c}{\cos x} + \frac{1}{2}\mathrm{tg}\, x\right)^2.$$

La condizione iniziale ci dice poi che deve essere $c = 1$.

§ 4. EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL SECONDO ORDINE

È data l'equazione differenziale

(*) $$y''(x) = f(x,y(x),y'(x)) \qquad [\text{o } y'' = f(x,y,y')],$$

con $f: A \to \mathbb{R}$, definita su un aperto A di $\mathbb{R}^3$.

DEFINIZIONE. Si dice che una funzione $y(x)$: $I =]a,b[\ (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è una soluzione della (*) se:
1) $y(x)$ è due volte derivabile in I;
2) $(x,y(x),y'(x))^T \in A$ per ogni $x \in I$;
3) $y''(x) = f(x,y(x),y'(x)),\ \forall\, x \in I.$

ESEMPIO. 1) Si consideri la *Seconda Legge della Dinamica:* $\underline{F} = m\underline{a}$. Pensiamo pure ad un moto rettilineo. La funzione $y(x)$ che descrive il moto in funzione del tempo x deve soddisfare all'equazione $my''(x) = F(x,y(x),y'(x))$, in quanto la forza può dipendere dal tempo, dalla posizione e dalla velocità del corpo. Il moto è determinato da questa legge e dalle *condizioni iniziali*: posizione ($y(x_0) = y_0$) e velocità ($y'(x_0) = z_0$).

Problema di Cauchy

DEFINIZIONE. È detto *Problema di Cauchy* un problema del tipo

$$(1) \qquad \begin{cases} y''(x) = f(x,y(x),y'(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases},$$

con $f: A \to \mathbb{R}$, definita sul sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}^3$ e $(x_0,y_0,z_0)^T$ prefissato punto di A.

DEFINIZIONE. Si dice *soluzione locale* del problema (1) ogni funzione $y: I \to \mathbb{R}$, definita su un intervallo I tale che:
1) $y(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale;
2) $x_0 \in \operatorname{int} I$;
3) $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = z_0$.

TEOREMA 7. *Se* f: $A(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ *è continua, allora esistono un* $h > 0$ *ed una funzione* y: $I =]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ *soluzione del problema* (1)*. Se, inoltre, la funzione f(x,y,z) è dotata di derivate parziali* $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$: $A \to \mathbb{R}$ *continue, allora la soluzione è unica.* ∎

Equazioni del tipo ***y" = f(y)***

Si consideri un'equazione differenziale del secondo ordine del tipo

$$y''(x) = f(y(x)), \text{ con } f: J(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \text{ di classe } C^1, \text{ e } J \text{ intervallo aperto.}$$

Moltiplicando ambo i membri per $y'(x)$ e integrando, si ottiene

$$\int_{x_0}^{x} y''(t)y'(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(y(t))y'(t)dt, \text{ con } x_0 \in J \text{ fissato,}$$

da cui

$$\frac{1}{2}(y'(x))^2 - \frac{1}{2}(y'(x_0))^2 = F(y(x)) - F(y(x_0)),$$

con $F'(u) = f(u)$. In conclusione, si ha

$$(y'(x))^2 = 2[F(y(x)) - F(y(x_0))] + (y'(x_0))^2,$$

che è un'equazione differenziale del primo ordine (e che, con cautela, si può ricondurre ad equazioni a variabili separabili).

ESEMPIO. 2) Si consideri il seguente Problema di Cauchy:

$$y''(x) = 3y^2(x); \qquad y(0) = \sqrt[3]{1/2}; \qquad y'(0) = 1.$$

Moltiplicando per $y'(x)$ e integrando, si ottiene

$$\int_0^x y''(t)y'(t)dt = 3\int_0^x y^2(t)y'(t)dt,$$

da cui

$$\frac{1}{2}(y'(x))^2 - \frac{1}{2} = y^3(x) - \frac{1}{2}.$$

Essendo $y'(0) > 0$, cerchiamo soluzioni con derivata positiva ottenendo il Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{2y^3(x)} \\ y(0) = \sqrt[3]{1/2} \end{cases}.$$

§ 5. EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL SECONDO ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI

DEFINIZIONE. Un'equazione differenziale del tipo

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x),$$

con $c(x)$: $I \to \mathbb{R}$ funzione *continua* su un *intervallo aperto* I, e con $a,b \in \mathbb{R}$, è detta equazione differenziale *lineare (completa) del secondo ordine a coefficienti costanti*. L'equazione

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

è detta equazione differenziale lineare *omogenea associata* all'equazione completa.

Con un ragionamento analogo a quello usato per il Teorema 4, si prova il

TEOREMA 8. *Le soluzioni di un'equazione differenziale lineare completa del secondo ordine sono date dalle funzioni del tipo* $y(x) = z(x) + \overline{y}(x)$, *essendo* $z(x)$ *una generica soluzione dell'equazione omogenea associata e* $\overline{y}(x)$ *una soluzione particolare dell'equazione completa.* ▮

Sussiste poi il seguente risultato simile a quello della prima parte del Teorema 3:

TEOREMA 9. *Le soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine costituiscono un sottospazio* S *di dimensione* 2 *di* $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. ▮

PROBLEMA. Trovare una base di S, cioè una coppia di funzioni y_1, y_2: $I \to \mathbb{R}$ tali che ogni soluzione y: $I \to \mathbb{R}$ sia una loro combinazione lineare.

DEFINIZIONE. Data l'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$, si chiama sua *equazione caratteristica* l'equazione di secondo grado

$$z^2 + az + b = 0. \tag{*}$$

TEOREMA 10. *Sia data un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti* $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$; *si indichi con S lo spazio vettoriale delle sue soluzioni e si ponga* $\Delta = a^2 - 4b$. *Allora:*

1) $\Delta > 0$. *Se* $\lambda_1 = \dfrac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}$ e $\lambda_2 = \dfrac{-a - \sqrt{\Delta}}{2}$ *sono le due radici dell'equazione caratteristica* (*), *una base di S è data dalle funzioni* $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$.

2) $\Delta = 0$. *Se* $\lambda = \dfrac{-a}{2}$ *è l'unica radice (doppia) dell'equazione caratteristica* (*), *una base di S è data dalle funzioni* $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$.

3) $\Delta < 0$. *Siano* $\alpha = \dfrac{-a}{2}$ *e* $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. (*Le radici complesse dell'equazione caratteristica sono perciò* $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ *e* $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.) *Una base di S è allora* $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$. ∎

TEOREMA 11. *Sia data un'equazione differenziale lineare del secondo ordine e sia* $\{y_1, y_2\}$ *una base dello spazio S delle soluzioni dell'equazione omogenea associata. Allora una soluzione particolare dell'equazione completa è data da*

$$\overline{y}(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,t)\, c(t)\, dt,$$

dove il "nucleo risolvente" K(x,t) è dato da

$$K(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(x-t) & y_2(x-t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y'_1(0) & y'_2(0) \end{vmatrix}}.$$

Cenno di dimostrazione. *(Metodo di variazione delle costanti)* Cerchiamo soluzioni del tipo $\overline{y}(x) = d_1(x)y_1(x) + d_2(x)y_2(x)$, con $d_1(x)$ e $d_2(x)$ funzioni incognite di classe C^2. Si constata che è sufficiente imporre a $d_1(x)$ e $d_2(x)$ di soddisfare al sistema

$$\begin{cases} d'_1(x)\, y_1(x) + d'_2(x)\, y_2(x) = 0 \\ d'_1(x)\, y'_1(x) + d'_2(x)\, y'_2(x) = c(x) \end{cases},$$

da cui si ricava

$$d'_1(x) = \frac{-y_2(x)c(x)}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}}; \qquad d'_2(x) = \frac{y_1(x)c(x)}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}}.$$

Integrando da x_0 a x e sostituendo, si trovano $d_1(x)$ e $d_2(x)$ e quindi $\overline{y}(x)$.

Per provare l'ultima uguaglianza, osserviamo che, per ogni t, la funzione $z(x) = K(x,t)$ è combinazione lineare di $y_1(x)$ e $y_2(x)$ ed è, pertanto, una soluzione dell'equazione omogenea associata, e soddisfa alle condizioni iniziali $z(t) = 0$ e $z'(t) = 1$. In particolare, è soluzione dell'omogenea anche la funzione $w(x) = K(x,0)$. L'equazione omogenea è del tipo $y'' = -ay' - by$ (equazione *autonoma*); si constata facilmente che, per tali equazioni, se $y(x)$ è soluzione, lo è anche $y(x + k)$. Si ottiene così che la funzione $\overline{z}(x) = K(x - t, 0)$ è una soluzione dell'omogenea per cui è ancora $\overline{z}(t) = 0$ e $\overline{z}'(t) = 1$. Per l'unicità della soluzione del Problema di Cauchy (Teorema 7), si ha $z(x) = \overline{z}(x)$. ∎

Casi particolari

Se la funzione $c(x)$ è di tipo particolare, la ricerca di una soluzione $\overline{y}(x)$ può risultare facilitata.

1) Sia $c(x) = P(x)\, e^{\lambda x}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $P(x)$ polinomio.
- Se λ *non è* radice dell'equazione caratteristica, $\overline{y}$ può essere ricercata fra le funzioni del tipo

$$\overline{y}(x) = Q(x)\, e^{\lambda x}, \text{ con } Q(x) \text{ polinomio e } \mathrm{gr}Q(x) = \mathrm{gr}P(x).$$

- Se λ *è* radice dell'equazione caratteristica con molteplicità γ (≤ 2), $\overline{y}$ può essere ricercata fra le funzioni del tipo

$$\overline{y}(x) = x^{\gamma} Q(x)\, e^{\lambda x}, \text{ con } Q(x) \text{ polinomio e } \mathrm{gr}Q(x) = \mathrm{gr}P(x).$$

2) Sia $c(x) = e^{\alpha x} P(x) \cos \beta x$ [o $c(x) = e^{\alpha x} P(x) \sin \beta x$] con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P(x)$ polinomio.
- Se $\alpha + i\beta$ *non è* radice dell'equazione caratteristica, $\overline{y}$ può essere ricercata fra le funzioni del tipo

$$\overline{y}(x) = e^{\alpha x}(Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x), \text{ con } \mathrm{gr}Q_1(x) = \mathrm{gr}Q_2(x) = \mathrm{gr}P(x).$$

- Se $\alpha + i\beta$ *è* radice dell'equazione caratteristica (necessariamente di molteplicità $\gamma = 1$, dato che deve essere radice anche $\alpha - i\beta$), $\overline{y}$ può essere ricercata fra le funzioni del tipo

$$\overline{y}(x) = x e^{\alpha x}(Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x), \text{ con } \mathrm{gr}Q_1(x) = \mathrm{gr}Q_2(x) = \mathrm{gr}P(x).$$

Sarà poi utile tener presente il seguente risultato di immediata verifica noto col nome di *Principio di sovrapposizione*:

Posto $L(y) = y'' + ay' + by$, da $L(y_1) = c_1$ e $L(y_2) = c_2$, segue $L(y_1 + y_2) = c_1 + c_2$,

che permette, spezzando il termine noto nella somma dei suoi eventuali addendi, di ricondurre il problema della ricerca di $\overline{y}$ a sottoproblemi più semplici.

ESEMPI. 1) Risolvere l'equazione $y'' + y' - 2y = xe^{x}$.

Le radici dell'equazione caratteristica sono 1 e -2; quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni $c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa. Siccome il termine noto è xe^{1x} e il numero 1 è radice semplice dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\overline{y}(x) = x e^{x}(ax + b) = e^{x}(ax^2 + bx)$. Sostituendo nell'equazione data, si trovano i valori $a = \frac{1}{6}$ e $b = -\frac{1}{9}$. Le soluzioni dell'equazione completa sono perciò le funzioni

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x} + e^x\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}\right).$$

2) Risolvere l'equazione $\qquad y'' - y = x^3 - 2 + e^x.$

Le radici dell'equazione caratteristica sono 1 e -1; quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni $c_1e^x + c_2e^{-x}$. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa. Siccome il termine noto è la somma di un polinomio e di e^{1x}, per il *Principio di sovrapposizione*, risolviamo separatamente i due problemi che si ottengono con $c_1(x) = x^3 - 2$ e $c_2(x) = e^x$. Nel primo caso, cerchiamo soluzioni del tipo $e^{0x}Q(x)$, con $Q(x)$ polinomio di terzo grado: si trova il polinomio $Q(x) = -x^3 - 6x + 2$. Nel secondo caso, siamo in una situazione analoga a quella dell'esempio precedente: cerchiamo perciò una soluzione del tipo $\overline{y}(x) = kxe^x$; si trova il valore $k = \frac{1}{2}$. Le soluzioni dell'equazione completa sono quindi le funzioni

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} - x^3 - 6x + 2 + \frac{1}{2}xe^x.$$

3) Risolvere l'equazione $\qquad y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}, \qquad$ su $I =]0,\pi[$.

Le radici dell'equazione caratteristica sono $\pm i$; quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni $c_1\cos x + c_2\sin x$. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa; in questo caso, utilizziamo il metodo generale, assumendo $x_0 = \pi/2$. Si ha

$$\overline{y}(x) = \int_{\pi/2}^{x} K(x,t)\ \frac{1}{\sin t}\,dt,$$

con

$$K(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}} = \sin x\cos t - \cos x\sin t.$$

È dunque:

$$\overline{y}(x) = \int_{\pi!2}^{x} \frac{\sin x\cos t - \cos x\sin t}{\sin t}\,dt = \sin x\log\sin x - 0 - (x - \pi/2)\cos x.$$

Le soluzioni dell'equazione completa sono perciò le funzioni

$$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + \sin x\log\sin x - (x - \pi/2)\cos x.$$

§ 6. EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DI ORDINE *n* A COEFFICIENTI COSTANTI

DEFINIZIONE. Un'equazione differenziale del tipo

$$(*) \qquad y^{(n)}(x) + a_1y^{(n-1)}(x) + a_2y^{(n-2)}(x) + \ldots + a_ny(x) = c(x),$$

con $c(x)$: $I \to \mathbb{R}$ funzione *continua, I intervallo,* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, è detta equazione differenziale *lineare (completa) di ordine n a coefficienti costanti*. L'equazione

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + a_2 y^{(n-2)}(x) + \ldots + a_n y(x) = 0$$

è detta equazione differenziale *omogenea associata* all'equazione completa.

DEFINIZIONE. Si dice che una funzione y: $I(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è una soluzione della (*) se:
1) $y(x)$ è n volte derivabile in I;
2) $y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + a_2 y^{(n-2)}(x) + \ldots + a_n y(x) = c(x)$, $\forall\ x \in I$.

TEOREMA 12. *Le soluzioni di un'equazione differenziale lineare completa di ordine n sono date dalle funzioni del tipo* $y(x) = z(x) + \overline{y}(x)$, *con* $z(x)$ *generica soluzione dell'equazione omogenea associata e* $\overline{y}(x)$ *soluzione particolare dell'equazione completa.* ∎

TEOREMA 13. *Le soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti di ordine n costituiscono un sottospazio S di dimensione n dello spazio vettoriale* $C^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$. ∎

PROBLEMA. Trovare una base di S, cioè n funzioni $y_1, y_2 \ldots, y_n$: $I \to \mathbb{R}$ tali che ogni soluzione y: $I \to \mathbb{R}$ sia una loro combinazione lineare.

DEFINIZIONE. Data l'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti $y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + a_2 y^{(n-2)}(x) + \ldots + a_n y(x) = 0$, si chiama sua *equazione caratteristica* l'equazione di grado n

(*) $$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

TEOREMA 14. *Sia data un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n a coefficienti costanti* $y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + a_2 y^{(n-2)}(x) + \ldots + a_n y(x) = 0$. *Se* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ *sono le radici reali della* (*) *e* $\beta_1 \pm i\gamma_1$, $\beta_2 \pm i\gamma_2$, $\ldots$, $\beta_s \pm i\gamma_s$ *quelle complesse (a due a due coniugate), di molteplicità rispettive* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ *e* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$, *una base dello spazio vettoriale S è data dalle funzioni:*

$$\begin{array}{cccc}
e^{\alpha_1 x}, & xe^{\alpha_1 x}, & \ldots & x^{\mu_1 - 1} e^{\alpha_1 x}, \\
e^{\alpha_2 x}, & xe^{\alpha_2 x}, & \ldots & x^{\mu_2 - 1} e^{\alpha_2 x}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
e^{\alpha_r x}, & xe^{\alpha_r x}, & \ldots & x^{\mu_r - 1} e^{\alpha_r x}, \\
e^{\beta_1 x}\cos\gamma_1 x, & xe^{\beta_1 x}\cos\gamma_1 x, & \ldots & x^{\nu_1 - 1}e^{\beta_1 x}\cos\gamma_1 x, \\
e^{\beta_1 x}\sin\gamma_1 x, & xe^{\beta_1 x}\sin\gamma_1 x, & \ldots & x^{\nu_1 - 1}e^{\beta_1 x}\sin\gamma_1 x, \\
e^{\beta_2 x}\cos\gamma_2 x, & xe^{\beta_2 x}\cos\gamma_2 x, & \ldots & x^{\nu_2 - 1}e^{\beta_2 x}\cos\gamma_2 x, \\
e^{\beta_2 x}\sin\gamma_2 x, & xe^{\beta_2 x}\sin\gamma_2 x, & \ldots & x^{\nu_2 - 1}e^{\beta_2 x}\sin\gamma_2 x, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
e^{\beta_s x}\cos\gamma_s x, & xe^{\beta_s x}\cos\gamma_s x, & \ldots & x^{\nu_s - 1}e^{\beta_s x}\cos\gamma_s x, \\
e^{\beta_s x}\sin\gamma_s x, & xe^{\beta_s x}\sin\gamma_s x, & \ldots & x^{\nu_s - 1}e^{\beta_s x}\sin\gamma_s x\ .
\end{array}$$
∎

TEOREMA 15. *Sia data un'equazione differenziale lineare di ordine n e sia* $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ *una base dello spazio S delle soluzioni dell'equazione omogenea associata. Allora una soluzione particolare dell'equazione completa è data da*

$$\bar{y}(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,t)\, c(t)\, dt,$$

dove il "nucleo risolvente" K(x,t) è dato da

$$K(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y'_1(t) & \dots & y'_n(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(t) & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1(x) & \dots & y_n(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y'_1(t) & \dots & y'_n(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}}. \quad \blacksquare$$

Casi particolari

1) Sia $c(x) = P(x)\, e^{\lambda x}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $P(x)$ polinomio.

- Se λ *non è* radice dell'equazione caratteristica, $\bar{y}$ può essere ricercata fra le funzioni del tipo

$$\bar{y}(x) = Q(x)\, e^{\lambda x}, \text{ con } Q(x) \text{ polinomio e gr}Q(x) = \text{gr}P(x).$$

- Se λ *è* radice dell'equazione caratteristica con molteplicità γ, $\bar{y}$ può essere ricercata fra le funzioni del tipo

$$\bar{y}(x) = x^{\gamma} Q(x)\, e^{\lambda x}, \text{ con } Q(x) \text{ polinomio e gr}Q(x) = \text{gr}P(x).$$

2) Sia $c(x) = e^{\alpha x} P(x) \cos \beta x$ [o $c(x) = e^{\alpha x} P(x) \sin \beta x$] con $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $P(x)$ polinomio.

- Se $\alpha + i\beta$ *non è* radice dell'equazione caratteristica, $\bar{y}$ può essere ricercata fra le funzioni del tipo

$$\bar{y}(x) = e^{\alpha x}(Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x), \text{ con gr}Q_1(x) = \text{gr}Q_2(x) = \text{gr}P(x).$$

- Se $\alpha + i\beta$ *è* radice dell'equazione caratteristica con molteplicità γ, $\bar{y}$ può essere ricercata fra le funzioni del tipo

$$\bar{y}(x) = x^{\gamma} e^{\alpha x}(Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x), \text{ con gr}Q_1(x) = \text{gr}Q_2(x) = \text{gr}P(x).$$

Sussiste ancora il *Principio di sovrapposizione***:**

Posto $L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y$, *da* $L(y_1) = c_1$ *e* $L(y_2) = c_2$, *segue* $L(y_1 + y_2) = c_1 + c_2$,

che permette, spezzando il termine noto nella somma dei suoi eventuali addendi, di ricondurre il problema della ricerca di $\bar{y}$ a sottoproblemi più semplici.

ESEMPI.- 1) Risolvere l'equazione $y''' - y'' + y' - y = e^x$.

Le radici dell'equazione caratteristica sono 1 e $\pm i$; quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni $c_1e^x + c_2\cos x + c_3\sin x$. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa. Siccome il termine noto è e^{1x} e il numero 1 è radice semplice dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione del tipo $\overline{y}(x) = axe^x$. Sostituendo nell'equazione data, si trova il valore $a = \frac{1}{2}$. Le soluzioni dell'equazione completa sono perciò le funzioni

$$y(x) = c_1e^x + c_2\cos x + c_3\sin x + \frac{1}{2}xe^x.$$

2) Risolvere l'equazione $y^{(4)} + 2y'' + y = 1$.

Le radici dell'equazione caratteristica sono $\pm i$; ciascuna con molteplicità 2; quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni $c_1\cos x + c_2x\cos x + c_3\sin x + c_4x\sin x$. Si vede poi subito che la funzione $\overline{y}(x) = 1$ è una soluzione particolare dell'equazione completa. Le soluzioni dell'equazione completa sono perciò le funzioni

$$y(x) = c_1\cos x + c_2x\cos x + c_3\sin x + c_4x\sin x + 1.$$

3) Risolvere l'equazione $y''' - y' = \dfrac{1}{1 + e^x}$.

Le radici dell'equazione caratteristica sono 0 e ± 1; quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni $c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x}$. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa. Assumendo $x_0 = 0$, si ha

$$\overline{y}(x) = \int_0^x K(x,t)\,\frac{1}{1 + e^t}\,dt,$$

con

$$K(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & e^t & e^{-t} \\ 0 & e^t & -e^{-t} \\ 1 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^t & e^{-t} \\ 0 & e^t & -e^{-t} \\ 0 & e^t & e^{-t} \end{vmatrix}} = \frac{e^{t-x} + e^{x-t} - 2}{2}.$$

È dunque:

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{e^{t-x} + e^{x-t} - 2}{1 + e^t}\,dt = \frac{e^{-x}}{2}\int_0^x \frac{e^t}{1 + e^t}\,dt + \frac{e^x}{2}\int_0^x \frac{e^{-t}}{1 + e^t}\,dt - \int_0^x \frac{1}{1 + e^t}\,dt =$$

$$= \frac{e^{-x}}{2}\int_0^x \frac{e^t}{1 + e^t}\,dt + \frac{e^x}{2}\int_0^x \frac{e^t}{e^{2t}(1 + e^t)}\,dt + \int_0^x \frac{-e^{-t}}{1 + e^{-t}}\,dt =$$

$$= \frac{e^{-x}}{2}[\log(1 + e^x) - \log 2] + \frac{e^x}{2}[\log(1 + e^x) - x - e^{-x} - \log 2 + 1] +$$

$$+ [\log(1 + e^{-x}) - \log 2].$$

[Per il calcolo del secondo integrale, si effettua la sostituzione $e^x = u$.]

Equazioni di Eulero

Sono dette così le equazioni del tipo

$$x^n y^{(n)}(x) + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} x y'(x) + a_n y(x) = c(x),$$

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $c(x)$: $I \to \mathbb{R}$ funzione continua, *I intervallo*. Si effettua la sostituzione $x = e^t$, se è $x > 0$ [$x = -e^t$, se è $x < 0$], ottenendo un'equazione lineare a coefficienti costanti.

Proviamolo per $n = 2$ e $n = 3$. Posto, per $x > 0$, $u(t) = y(e^t)$, si ha:

$$u'(t) = y'(e^t)e^t, \quad u''(t) = y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t, \quad u'''(t) = y'''(e^t)e^{3t} + 3y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t,$$

da cui
$$y(e^t) = u(t), \qquad y'(e^t) = u'(t)e^{-t},$$

$$y''(e^t) = [u''(t) - u'(t)]e^{-2t}, \; y'''(e^t) = [u'''(t) - 3u''(t) + 2u'(t)]e^{-3t}.$$

Posto, per $x < 0$, $u(t) = y(-e^t)$, si ha:

$$u'(t) = -y'(-e^t)e^t, \quad u''(t) = y''(-e^t)e^{2t} - y'(-e^t)e^t, \quad u'''(t) = -y'''(-e^t)e^{3t} + 3y''(-e^t)e^{2t} - y'(-e^t)e^t,$$

da cui
$$y(-e^t) = u(t), \qquad y'(-e^t) = -u'(t)e^{-t},$$

$$y''(-e^t) = [u''(t) - u'(t)]e^{-2t}, \quad y'''(-e^t) = [-u'''(t) + 3u''(t) - 2u'(t)]e^{-3t}.$$

L'equazione $x^2y''(x) + a_1xy'(x) + a_2y(x) = c(x)$ diventa, nei due casi,

$$u''(t) + [a_1 - 1]u'(t) + a_2u(t) = c(e^t) \quad [= c(-e^t)].$$

L'equazione $x^3y'''(x) + a_1x^2y''(x) + a_2xy'(x) + a_3y(x) = c(x)$ diventa, nei due casi,

$$u'''(t) + [a_1 - 3]u''(t) + [a_2 - a_1 + 2]u'(t) + a_3u(t) = c(e^t) \; [= c(-e^t)].$$

ESEMPI.- 1) Risolvere l'equazione $x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = 1$.

Posto, per $x > 0$, $x = e^t$, si ottiene l'equazione

$$u''(t) - u(t) = 1$$

che ha per soluzioni le funzioni $c_1e^t + c_2e^{-t} - 1$; si ricava che le soluzioni dell'equazione data sono le funzioni

$$c_1x + c_2\frac{1}{x} - 1.$$

2) Risolvere l'equazione $x^3y'''(x) - xy'(x) + y(x) = \log x$; $x > 0$.

Posto $x = e^t$, si ottiene l'equazione $u'''(t) - 3u''(t) + u'(t) + u(t) = t.$

L'equazione caratteristica ha le radici 1 e $1 \pm\sqrt{2}$; sono dunque soluzioni dell'equazione omogenea le funzioni $c_1e^t + c_2e^{(1+\sqrt{2})t} + c_3e^{(1-\sqrt{2})t}$. Si vede poi che una soluzione dell'equazione completa è data dalla funzione $\overline{u}(t) = t - 1$. In conclusione, le soluzioni dell'equazione data sono le funzioni

$$y(x) = c_1x + c_2x^{(1+\sqrt{2})} + c_3x^{(1-\sqrt{2})} + \log x - 1.$$

§ 7. SISTEMI DI DUE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL PRIMO ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI

Ci occuperemo di sistemi del tipo

$$\begin{cases} u'(x) = au(x) + bv(x) + f(x) \\ v'(x) = cu(x) + dv(x) + g(x) \end{cases},$$

con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, f,g: $I(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ di classe C^1, *I intervallo.*

Una soluzione del sistema è una coppia di funzioni $(u(x),v(x))$ con u,v: $I \to \mathbb{R}$ derivabili che soddisfano su I alle equazioni date.

Si vede anzi che una soluzione $(u(x), v(x))$ deve essere formata da funzioni di classe C^2 su I. Derivando i due membri della prima equazione e sfruttando la seconda, si ottiene:

$$u''(x) = au'(x) + bv'(x) + f'(x) =$$
$$= au'(x) + b(cu(x) + dv(x) + g(x)) + f'(x) =$$
$$= au'(x) + bcu(x) + d(u'(x) - au(x) - f(x)) + bg(x) + f'(x).$$

In conclusione, si ha

$$u''(x) = (a + d)u'(x) + (bc - ad)u(x) + bg(x) - df(x) + f'(x).$$

Questa è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. La si risolve e si sostituiscono le espressioni di $u(x)$ e $u'(x)$ nella prima equazione ricavando così anche $v(x)$.

ESEMPI. 1) Si vuol risolvere il sistema

$$\begin{cases} u'(x) = u(x) + v(x) + 1 \\ v'(x) = u(x) - v(x) + x \end{cases}.$$

Derivando la prima e sfruttando la seconda, si ha

$$u''(x) = u'(x) + v'(x) = u'(x) + u(x) - v(x) + x = 2u(x) + x + 1.$$

Si ottiene così l'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti

$$u''(x) - 2u(x) = x + 1$$

la cui soluzione generale è $\quad u(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} - \frac{1}{2}(x + 1).$

Sostituendo nella prima equazione, si ottiene

$$v(x) = u'(x) - u(x) - 1 = \sqrt{2}c_1 e^{\sqrt{2}x} - \sqrt{2}c_2 e^{-\sqrt{2}x} - \frac{1}{2} - c_1 e^{\sqrt{2}x} - c_2 e^{-\sqrt{2}x} + \frac{1}{2}(x + 1) - 1 =$$
$$= (\sqrt{2} - 1)c_1 e^{\sqrt{2}x} - (\sqrt{2} + 1)c_2 e^{-\sqrt{2}x} + \frac{1}{2}x - 1.$$

2) Si vuol risolvere il sistema

$$\begin{cases} u'(x) = u(x) + e^x \\ v'(x) = u(x) - v(x) + \cos x \end{cases}.$$

In questo caso si può procedere in maniera più diretta, dato che nella prima equazione compare una sola delle due incognite. Procedendo come ormai ben sappiamo, si trova facilmente che le soluzioni della prima equazione sono le funzioni

$$u(x) = (c_1 + x)e^x.$$

Sostituendo nella seconda equazione, si ottiene

$$v'(x) + v(x) = (c_1 + x)e^x + \cos x,$$

da cui

$$v(x) = c_2e^{-x} + \int_{x_0}^{x} e^{-x+t}\,[(c_1 + t)e^t + \cos t]dt =$$

$$= c_2e^{-x} + e^{-x}\int_{x_0}^{x}[e^{2t}(c_1 + t) + e^t\cos t]dt = c_2e^{-x} + e^{-x}[F(x) - F(x_0)],$$

con

$$F(t) = \frac{1}{4}e^{2t}(2t + 2c_1 - 1) + \frac{1}{2}e^t(\cos t + \sin t).$$

§ 8. E S E R C I Z I

1) Risolvere i seguenti Problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} \\ y(1) = y_0 \end{cases};\qquad \begin{cases} y' = \dfrac{2x - 3}{y + 2} \\ y(1) = y_0 \end{cases};\qquad \begin{cases} y' = 2x\sin y \\ y(0) = y_0 \end{cases};\qquad \begin{cases} y' = \dfrac{y}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x^2} \\ y(1) = 0 \end{cases};\qquad \begin{cases} y' = e^{x-y} \\ y(0) = y_0 \end{cases};\qquad \begin{cases} y'' = 2x(y')^2 \\ y(1) = y'(1) = 1 \end{cases}$$ [Si ponga $u = y'$.].

2) Trovare le traiettorie ortogonali alle famiglie di curve:

$$a)\ y = ax;\qquad b)\ xy = a.$$

3) Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari:

$$y' = -xy + x^3;\qquad y' = y\sin x + \sin 2x;\qquad y'' + y' = \sin x;$$

$$y'' - 4y = 4e^{-2x};\quad y'' - 2y' + y = 0:\qquad y'' - y = xe^x;$$

$$y'' + y = x\cos x;\qquad y'' - 2y' + 2y = e^x + 1;\ \ y''' - y' = (3 - x)e^{-2x};\qquad y''' - y'' + y' - y = xe^x + 1;$$

$$y''' - 2y'' + y' = x;\quad y^{(4)} - y = 1 + e^x;\qquad y''' + 3y'' = 0;\qquad y^{(4)} + 2y'' + y = 1.$$

4) Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

$$y' = 2y(1 - 2y);\qquad y' = 2\frac{1 + y^2}{1 + x^2};\qquad y' = xy\log y;$$

$$y' = (1 + y^2)\text{arctg}y; \qquad y' = \frac{1 - y}{x}; \qquad y' = y^2 \log x;$$

$$y' = 2\sqrt{y}\,(x + 1); \qquad y' = \frac{x + 1}{y - 1}; \qquad y' = xy^2 + y;$$

$$y' = \frac{x + y}{x - y}; \qquad x^3y''' + xy' - y = 0; \qquad y' = \frac{y}{x} + y^2\sin x;$$

$$y' = 2xy + x^3y^3; \qquad x^2y'' + 4xy' + 2y = \frac{1}{x};$$

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = \log x; \qquad (x + 1)y'' + y' - \frac{4y}{x + 1} = 0.$$

5) Risolvere i seguenti sistemi di equazioni differenziali lineari:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -u \end{cases}; \qquad \begin{cases} u' = -v - 1 \\ v' = u + x \end{cases}; \qquad \begin{cases} u' = u - v + 2 \\ v' = -u + v + x \end{cases};$$

$$\begin{cases} v' + u' + v + 2u = 0 \\ v' - u' + 3v + 4u = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} u' + u - v = e^x \\ v' + 4v + u = x + 3 \end{cases}.$$

6) si risolvano i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' = e^{2y} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} y'' - 2y' + 2y = e^x + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases};$$

7) Si provi che ogni funzione u: $A(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ differenziabile sull'insieme aperto A e positivamente omogenea, ossia tale che

$$u(tx,ty) = u(x,y), \quad \forall t > 0, \forall\, (x,y)^T \in A,$$

è soluzione dell'equazione differenziale alle derivate parziali

$$x\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0.$$

[$\Re$. Per ipotesi, la funzione u è costante sulle semirette $\{(tx, ty)^T: t > 0\}$; è dunque costante la funzione F: $]0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$ definita da $F(t) = u(tx, ty)$. La F è derivabile, con derivata identicamente nulla.]

Capitolo Quindicesimo

CURVE IN $\mathbb{R}^n$ (n = 2, 3)

§ 1. LA NOZIONE DI CURVA

In tutto il Capitolo, I indicherà un intervallo non degenere aperto o no, limitato o no.

DEFINIZIONE. Data un'applicazione $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ (con $n = 2$ o $n = 3$), si ponga $\Gamma = \gamma(I)$. La coppia (γ, Γ) prende il nome di *curva di* $\mathbb{R}^n$. L'applicazione γ si chiama *rappresentazione parametrica* della curva, mentre l'insieme Γ è detto il suo *sostegno*. Se l'intervallo I è *chiuso* e *limitato*, si parla anche di *arco di curva*.

Per $n = 2$, si ha $\gamma(t) = (x(t),y(t))^T$, ossia $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, e $\Gamma = \{(x(t),y(t))^T : t \in I\}$.

Per $n = 3$, si ha $\gamma(t) = (x(t),y(t),z(t))^T$, ossia $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, e $\Gamma = \{(x(t),y(t),z(t))^T : t \in I\}$.

Per assegnare una curva è sufficiente assegnare l'applicazione γ; per questo motivo, ci permetteremo espressioni del tipo: "Data una curva γ …", in luogo di "Data una curva (γ, Γ) …".

ESEMPI. 1) *Retta*. Dati un punto $\underline{x}^1 = (x_1,y_1,z_1)^T$ e un versore $\underline{x}^2 = (x_2,y_2,z_2)^T$ di $\mathbb{R}^3$, la retta per $\underline{x}^1$ e direzione $\underline{x}^2$ è rappresentata da

$$\begin{cases} x = x_1 + x_2 t \\ y = y_1 + y_2 t \\ z = z_1 + z_2 t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2) Le due curve (γ_1, Γ_1) e (γ_2, Γ_2), con

$$\gamma_1: I_1 = [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \ \gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)^T$$

e

$$\gamma_2: I_2 = [0, 3\pi] \to \mathbb{R}^2, \ \gamma_2(t) = (\cos t, \sin t)^T$$

sono diverse; infatti, pur essendo $\Gamma_1 = \Gamma_2$ (circonferenza unitaria di centro l'origine), è $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

3) $\gamma: I = [-1, 2] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)^T$ (*arco di parabola cubica*).

4) $\gamma: I = \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)^T$ (*elica*).

DEFINIZIONE. Una curva (γ, Γ) è detta *continua* [*di classe* C^k] se è tale la funzione γ.

DEFINIZIONE. Una curva (γ, Γ) è detta *regolare* se la funzione γ è di classe C^1 e si ha $\gamma'(t) = (x'(t),y'(t),z'(t))^T \neq \underline{0}$ per ogni $t \in$ *int* I. Dato $t \in I$, i vettori $\gamma'(t) := (x'(t),y'(t),z'(t))^T$ e $\tau(t) := \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ sono detti, rispettivamente, *vettore tangente* e *versore tangente* alla curva nel punto $\gamma(t)$.

Le curve degli esempi precedenti sono regolari. Diamo un esempio di curva non regolare.

ESEMPI0. 5) La curva (γ, Γ), con γ: $I = \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, t^3)^T$, non è regolare, essendo $0 \in int\, I$ e $\gamma'(0) = \underline{0}$.

DEFINIZIONE. Una curva (γ, Γ), con γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è detta *chiusa* se è $\gamma(a) = \gamma(b)$.

DEFINIZIONE. Una curva (γ, Γ), con γ: $I \to \mathbb{R}^n$ è detta *semplice* se da $t_1, t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2$ e con almeno uno dei due punti interno ad I, segue $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

L'unica curva chiusa che compare negli esempi precedenti è la γ_1 dell'Esempio 2. L'unica curva non semplice fra quelle sopra definite è la γ_2 dell'Esempio 2.

ESEMPIO. 6) La curva γ: $I = [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \sin 2t)^T$ è chiusa, semplice e regolare.

DEFINIZIONE. Sia (γ, Γ) una curva *regolare semplice.* Se $t_0 \in int\, I$, la retta di equazione $r(s) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)s$, $s \in \mathbb{R}$, è detta *retta tangente* alla curva nel punto $\gamma(t_0)$.

DEFINIZIONE. Una curva (γ, Γ), con γ: $I \to \mathbb{R}^n$ *continua* si dice *regolare a tratti* se esistono n punti $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ di I che dividono l'intervallo in sottointervalli chiusi (tranne, eventualmente, il primo e l'ultimo) in ciascuno dei quali γ è *regolare*.

Ogni curva regolare è ovviamente regolare a tratti. La curva (non regolare) dell'esempio 5 è regolare a tratti. Le poligonali definite nel §2 del Capitolo 3 sono esempi di curve regolari a tratti.

Curve in forma cartesiana. Data una funzione f: $I \to \mathbb{R}$ e posto, per ogni $t \in I$,

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases},$$

si ottiene una curva γ, di cui l'equazione $y = f(x)$ è detta la *rappresentazione cartesiana* e il cui sostegno Γ è dato dal *grafico* $G(f)$ della funzione f. La curva γ è in ogni caso semplice.

Curve in forma implicita. Sia g: $A(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 su un insieme aperto A e sia $\Gamma = \{(x,y)^T: g(x,y) = 0\}$. Si può dimostrare che, per ogni $P_0 = (x_0,y_0)^T \in \Gamma$ tale che $\nabla g(x_0,y_0) \neq \underline{0}$, esistono un intorno U di P_0 e una funzione $y = h(x)$ [o una funzione $x = k(y)$] di classe C^1 tali che $\Gamma \cap U = G(h)$ (= grafico di h) [rispettivamente, $\Gamma \cap U = G(k)$]. Si dice che la funzione h [la funzione k] è definita *implicitamente* dall'equazione $g(x,y) = 0$.

ESEMPI. 7) Sia $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, $(x,y)^T \in A = \mathbb{R}^2$. Se è $P_0 = (0,1)^T$, si può prendere come U il semipiano delle y positive e $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$; se è $P_0 = (-1,0)^T$, si può prendere come U il semipiano delle x negative e $k(y) = -\sqrt{1 - y^2}$; se è $P_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$, si può prendere come U il primo quadrante del piano cartesiano, $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e $k(y) = \sqrt{1 - y^2}$.

8) Sia $g(x,y) = x^5 + y^5 - xy - 1$, $(x,y)^T \in A = \mathbb{R}^2$. Si vede subito che è $f(1,1) = 0$ e $\nabla f(1,1) \neq \underline{0}$. Si può dunque applicare il risultato precedente, anche se non sappiamo scrivere esplicitamente l'espressione della funzione h o della funzione k.

Curve in forma polare. Si consideri una funzione $\rho = \rho(\vartheta)$: $I \to \mathbb{R}$. Se, per ogni $\vartheta \in I$, si ha $\rho(\vartheta) \geq 0$, allora la funzione γ: $I \to \mathbb{R}^2$ definita da $(\rho(\vartheta) \cos \vartheta, \rho(\vartheta) \sin \vartheta)^T$ è la rappresentazione parametrica di una curva piana di cui la funzione $\rho = \rho(\vartheta)$ costituisce la *rappresentazione polare.*

ESEMPI. 9) Siano $\rho(\vartheta) = r$; $I = [0,2\pi]$. Si ha $\gamma(\rho,\vartheta) = (r \cos\vartheta, r \sin\vartheta)^T$ il cui sostegno è una circonferenza.

10) Siano $\rho(\vartheta) = a\vartheta$; $a \neq 0$; $I = [0,+\infty[$. Si ha $\gamma(\rho,\vartheta) = (a\vartheta \cos\vartheta, a\vartheta \sin\vartheta)^T$ il cui sostegno è una spirale.

11) Siano $\rho(\vartheta) = 1 + \cos\vartheta$; $I = [0,2\pi]$. Si ha $\gamma(\rho,\vartheta) = ((1 + \cos\vartheta)\cos\vartheta, (1 + \cos\vartheta)\sin\vartheta)^T$ il cui sostegno è detto *cardioide.*

Curve equivalenti

DEFINIZIONE. Due curve (γ_1, Γ_1) e (γ_2, Γ_2), con γ_1: $I_1 \to \mathbb{R}^n$ e γ_2: $I_2 \to \mathbb{R}^n$ si dicono *equivalenti* se esiste una φ: $I_2 \to I_1$ tale che:

1) φ è biiettiva;

2) φ è di classe C^1 ed è $\varphi'(s) \neq 0$ per ogni $s \in I_2$; (quindi anche l'inversa φ^{-1} è di classe C^1);

3) $\gamma_1 \circ \varphi = \gamma_2$ (ossia $\gamma_1(\varphi(s)) = \gamma_2(s)$ per ogni $s \in I_2$).

Ne viene che l'applicazione φ è strettamente monotona. Se, in particolare, si ha $I_1 = [a,b]$ e $I_2 = [c,d]$, la φ deve portare c in a e d in b o viceversa.

ESEMPI. 12) Data una curva (γ_1, Γ_1) con γ_1: $I_1 = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, siano $I_2 = [-b,-a]$ e γ_2: $I_2 \to \mathbb{R}^n$, con $\gamma_2(s) = \gamma_1(-s)$ per ogni $s \in I_2$. Le due curve sono equivalenti; basta prendere come φ: $I_2 \to I_1$ la funzione $\varphi(s) = -s$.

13) Le curve (γ_1, Γ_1) e (γ_2, Γ_2), con γ_1: $I_1 = [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)^T$ e γ_2: $I_2 = [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(\tau) = (\cos\tau, \sin\tau)^T$ non sono equivalenti. Infatti, per ogni φ: $I_2 \to I_1$, per cui è $\varphi(\pi) = 0$ o $\varphi(\pi) = 2\pi$ si ha $\gamma_2(\pi) \neq \gamma_1(\varphi(\pi))$.

Ci sarà utile il seguente risultato del quale omettiamo la dimostrazione:

TEOREMA 1. 1) *La relazione sopra definita è di equivalenza.*
2) *Due curve equivalenti hanno il medesimo sostegno.*
3) *Se due curve semplici non chiuse hanno il medesimo sostegno, allora sono equivalenti.* ∎

L'Esempio 13 mostra che due curve semplici e chiuse aventi il medesimo sostegno possono risultare non equivalenti.

Orientazione di una curva

Le curve (γ_1, Γ_1) e (γ_2, Γ_2), con γ_1: $I = [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ e γ_2: $I = [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, definite da $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $\gamma_2(\tau) = (\cos \tau, -\sin \tau)^T$ sono equivalenti; basta prendere φ: $I_2 \to I_1$, con

$\varphi(\tau) = 2\pi - \tau$; è dunque $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$. Osserviamo però che, se t varia da 0 a 2π, il sostegno Γ viene percorso da $\gamma_1(t)$ in senso antiorario mentre, al variare di τ da 0 a 2π, il sostegno Γ è percorso da $\gamma_2(\tau)$ in senso orario.

DEFINIZIONE. Si dice che due curve equivalenti (γ_1, Γ_1) e (γ_2, Γ_2), con $\gamma_1 \circ \varphi = \gamma_2$, hanno *lo stesso orientamento* se è $\varphi'(s) > 0$, $\forall s \in I_2$, mentre si dice che le due curve hanno *orientamento opposto* se è $\varphi'(s) < 0$, $\forall s \in I_2$.

TEOREMA 2. *Siano* (γ_1, Γ_1) e (γ_2, Γ_2), *con* $\gamma_1\colon I_1 \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2\colon I_2 \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_1 \circ \varphi = \gamma_2$, *due curve regolari equivalenti e siano* $\tau_1(t)$, $t \in \operatorname{int} I_1$, $\tau_2(s)$, $s \in \operatorname{int} I_2$, *i relativi versori tangenti. Allora, per ogni* $s \in \operatorname{int} I_2$, *si ha* $\tau_1(\varphi(s)) = \tau_2(s)$ *se le curve hanno lo stesso orientamento, mentre è* $\tau_1(\varphi(s)) = -\tau_2(s)$ *se le curve hanno orientamento opposto.*

DIM. Si ha: $\tau_2(s) = \dfrac{\gamma_2'(s)}{\|\gamma_2'(s)\|} = \dfrac{\gamma_1'(\varphi(s))\varphi'(s)}{\|\gamma_1'(\varphi(s))\varphi'(s)\|} = \dfrac{\varphi'(s)}{|\varphi'(s)|}\,\dfrac{\gamma_1'(\varphi(s))}{\|\gamma_1'(\varphi(s))\|} = \operatorname{sign}(\varphi')\,\tau_1(\varphi(s))$. ∎

§ 2. CURVE RETTIFICABILI

Siano (γ, Γ), con $\gamma\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva continua e δ una decomposizione di I individuata dai punti $\{t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\}$. Consideriamo la poligonale $\pi(\delta)$ ottenuta dagli n segmenti

$$(1 - \tau)\gamma(t_{i-1}) + \tau\gamma(t_i), \quad \tau \in [0,1] .$$

Si definisce *lunghezza* di $\pi(\delta)$ il numero

$$l(\pi(\delta)) := \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|.$$

DEFINIZIONE. Si dice che una curva continua (γ, Γ), con $\gamma\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è *rettificabile* se è $\sup\limits_{\delta \in \Delta(I)} l(\pi(\delta)) < +\infty$, dove $\Delta(I)$ indica l'insieme di tutte le decomposizioni di I. Il numero

$$l(\gamma) := \sup_{\delta \in \Delta(I)} l(\pi(\delta))$$

prende il nome di *lunghezza* della curva.

N.B. *Non tutte* le curve sono rettificabili.

ESEMPIO. 1) Si consideri la poligonale Γ (data da "infiniti segmenti") che si ottiene unendo, nell'ordine, i punti (del piano) di coordinate

$$(1,1),\ (1,0),\ (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}),\ (\tfrac{1}{2}, 0),\ (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}),\ (\tfrac{1}{3}, 0),\ (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}),\ (\tfrac{1}{4}, 0),$$

$$\ldots,\ (\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}),\ (\tfrac{1}{n}, 0),\ (\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n+1}),\ (\tfrac{1}{n+1}, 0), \ldots$$

e aggiungiamo, in fondo, il punto (0,0). Diciamo J_n il segmento che unisce l'n - imo di tali punti con il successivo. Sia ora I_n l'intervallo $[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$, con $n = 1, 2, 3,\dots$ È facile convincersi che è possibile definire un'applicazione continua γ di $I = [0,1]$ in Γ che porta 0 in (0,0) e I_n in J_n. Posto $l_n = l(J_n)$, è evidente che dovremmo avere:

$$l(\gamma) > l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{2n+1} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$

che è la ridotta di una serie divergente.

TEOREMA 3. *Se l'applicazione* γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *è di classe* C^1*, allora la curva* (γ, Γ) *è rettificabile e si ha*

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \blacksquare$$

TEOREMA 4. *Se le due curve regolari* (γ_1, Γ_1) e (γ_2, Γ_2)*, con* γ_1: $I_1 = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, γ_2: $I_2 = [c,d] \to \mathbb{R}^n$*, sono equivalenti, allora si ha* $l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$.

DIM. Per ipotesi, esiste un'applicazione φ: $[c,d] \to [a,b]$ tale che $\gamma_1 \circ \varphi = \gamma_2$. Si ha

$$l(\gamma_1) = \int_a^b \|\gamma_1'(t)\| dt = \int_c^d \|\gamma_1'(\varphi(\tau))\| \cdot |\varphi'(\tau)| d\tau = \int_c^d \|\gamma_1'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\| d\tau = \int_c^d \|\gamma_2'(\tau)\| d\tau = l(\gamma_2). \blacksquare$$

Se un sottoinsieme Γ di $\mathbb{R}^n$ è il sostegno di una curva regolare semplice γ: $I \to \mathbb{R}^n$, il numero $l(\gamma)$ può dunque essere assunto anche come lunghezza di Γ.

ESEMPI. 2) Si consideri il segmento (γ,Γ) con γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ dato da $\gamma(t) = \underline{v}t$, $\underline{v} \neq \underline{0}$. Si ha

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\underline{v}\| dt = \|\underline{v}\|(b - a) = \|\underline{v}(b - a)\| = \|\gamma(b) - \gamma(a)\|.$$

3) Si consideri la curva (γ, Γ) con γ: $I = [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, ct)^T$, $R,c > 0$. Si ha $\gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t, c)^T$, $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2 + c^2}$; è dunque:

$$l(\gamma) = \int_0^{4\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{R^2 + c^2} dt = 4\pi\sqrt{R^2 + c^2}.$$

4) Si consideri la curva (γ, Γ) con γ: $I = [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)^T$, $0 < b \leq a$. Si ha $\gamma'(t) = (-a \sin t, b \cos t)^T$, $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$. Se è $a = b$, si ha $\|\gamma'(t)\| = a$, da cui si ricava subito $l(\gamma) = 2\pi a$. Se è $b < a$, si ottiene:

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2 t}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\, dt.$$

Ci si imbatte così in un integrale *ellittico* che non si calcola elementarmente.

(Ricordiamo che il numero $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ è detto *eccentricità* dell'ellisse.)

5) Calcolare la lunghezza della seguente curva data dall'intersezione di due superfici:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + 2z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = z^2 \\ x^2 + 2z^2 = 1 \end{cases}.$$

Per la simmetria della curva, possiamo calcolare la lunghezza dell'arco che si ottiene prendendo $x,y,z \geq 0$ e moltiplicare il risultato per 8. Con queste limitazioni, si ottiene la curva

$$\begin{cases} x = \sqrt{1 - 2z^2} \\ y = z \\ z = z \end{cases}, \; z \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}].$$

Essendo $\gamma'(z) = (\frac{-2z}{\sqrt{1 - 2z^2}}, 1, 1)^T$, si ottiene $\|\gamma'(z)\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - 2z^2}}$. È dunque:

$$l(\gamma) = 8 \int_0^{\sqrt{1/2}} \|\gamma'(z)\| dz = 8 \int_0^{\sqrt{1/2}} \frac{\sqrt{2}dz}{\sqrt{1 - 2z^2}} = 8 \int_0^{\sqrt{1/2}} \frac{\sqrt{2}dz}{\sqrt{1 - (\sqrt{2}z)^2}} = 8 \arcsin 1 = 4\pi.$$

6) Sia f: $I = [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 (curva in forma cartesiana). Si ha

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(x)\| dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx .$$

Se, per esempio, è $f(x) = x^2$, con $x \in [0,2]$, si ha:

$$l(\gamma) = \int_0^2 \|\gamma'(x)\| dx = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{1 + u^2} du =$$

$$= \frac{1}{4} [\log(u + \sqrt{1 + u^2}) + u \sqrt{1 + u^2}\,]_0^4 = \frac{1}{4} [\log(4 + \sqrt{17}) + 4\sqrt{17}].$$

[Per integrare la funzione $\sqrt{1 + u^2}$, si effettua la sostituzione $u = \mathrm{Sh}t$ e si ricorda che è $\mathrm{arcsinh} u = \log(u + \sqrt{1 + u^2})$.]

Si consideri una funzione $\rho = \rho(\vartheta)$: $I = [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe C^1, con $\rho(\vartheta) \geq 0$, $\forall\, \vartheta \in I$. Questa è la rappresentazione polare di una curva (γ, Γ) con γ: $I \to \mathbb{R}^2$, definita da:

$$\gamma(\vartheta) = (\rho(\vartheta) \cos \vartheta, \rho(\vartheta) \sin \vartheta)^T.$$

Si ha:

$$\gamma'(\vartheta) = (\rho'(\vartheta) \cos \vartheta - \rho(\vartheta) \sin \vartheta, \rho'(\vartheta) \sin \vartheta + \rho(\vartheta) \cos \vartheta)^T,$$

$$\|\gamma'(\vartheta)\| = \sqrt{(\rho'(\vartheta) \cos \vartheta - \rho(\vartheta) \sin \vartheta)^2 + (\rho'(\vartheta) \sin \vartheta + \rho(\vartheta) \cos \vartheta)^2} = \sqrt{\rho'^2(\vartheta) + \rho^2(\vartheta)},$$

da cui:
$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(\vartheta)\| d\vartheta = \int_a^b \sqrt{\rho'^2(\vartheta) + \rho^2(\vartheta)}\, d\vartheta.$$

ESEMPI. 7) Sia $\rho = \rho(\vartheta) = a\vartheta$, $\vartheta \in [0, 4\pi]$, $a \neq 0$, (arco di *spirale archimedea*). Si ha:

$$l(\gamma) = \int_0^{4\pi} \sqrt{\rho'^2(\vartheta) + \rho^2(\vartheta)}\, d\vartheta = \int_0^{4\pi} \sqrt{a^2 + a^2\vartheta^2}\, d\vartheta = a\int_0^{4\pi} \sqrt{1 + \vartheta^2}\, d\vartheta =$$

$$= \frac{a}{2}\left[\log(\vartheta + \sqrt{1 + \vartheta^2}) + \vartheta\sqrt{1 + \vartheta^2}\,\right]_0^{4\pi}.$$

8) Sia $\rho = \rho(\vartheta) = 1 + \cos\vartheta$, $\vartheta \in [-\pi, \pi]$ (*cardioide*). Si ha:

$$l(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\rho'^2(\vartheta) + \rho^2(\vartheta)}\, d\vartheta = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\vartheta}\, d\vartheta = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos\vartheta}\, d\vartheta.$$

Posto $\varphi = \dfrac{\vartheta}{2}$, si ottiene:

$$l(\gamma) = 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi}\, d\varphi = 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{2\cos^2\varphi}\, d\varphi = 8.$$

§ 3. INTEGRALI CURVILINEI DI CAMPI SCALARI

DEFINIZIONE. Siano (γ, Γ), $\gamma: I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, una curva *regolare* e $f: E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ una funzione *continua*, con $\Gamma \subset E$. Si definisce *integrale curvilineo di f lungo* γ (o *su* γ) il numero

$$\int_\gamma f\, ds := \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt.$$

Osserviamo che se è $f(\underline{x}) = 1$, si ha $\int_\gamma f\, ds = l(\gamma)$.

ESEMPI. 1) Si vuol calcolare $\int_\gamma z\, ds$, essendo $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)^T$. Si ha:

$$\int_\gamma z\, ds = \int_0^{2\pi} t\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\, dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} t\, dt = 2\pi^2\sqrt{2}.$$

2) Si vuol calcolare $\int_\gamma (2\sqrt{x} + y^2 + z^2)ds$, con $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t^2, e^t\cos t, e^t\sin t)^T$. Si ha

$$\int_\gamma (2\sqrt{x} + y^2 + z^2)ds = \int_0^1 (2t + e^{2t})\sqrt{4t^2 + 2e^{2t}}\, dt = \frac{1}{4}\int_0^1 (8t + 4e^{2t})\sqrt{4t^2 + 2e^{2t}}\, dt = \frac{1}{4}\int_2^c \sqrt{u}\, du,$$

essendo $u = 4t^2 + 2e^{2t}$ e $c = 4 + 2e^2$. Si ottiene:

$$\int_\gamma (2\sqrt{z} + y^2 + z^2)ds = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\sqrt{(2 + e^2)^3} - 1\right].$$

TEOREMA 5. *Siano dati: una curva* (γ, Γ), γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *regolare a tratti e* $n + 1$ *punti* $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ *di* I *tali per cui siano regolari le restrizioni* γ_i *della* γ *agli intervalli* $[a_{i-1}, a_i]$. *Se* f: $E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *è una funzione continua, con* $\Gamma \subset E$, *Si ha*

$$\int_\gamma f\,ds = \int_{\gamma_1} f\,ds + \int_{\gamma_2} f\,ds + \dots + \int_{\gamma_n} f\,ds\,. \blacksquare$$

ESEMPIO. 3) Si vuol calcolare $\int_\gamma (x + y^2)ds$, essendo γ: $[-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (|t|, t)^T$. Si ha

$$\int_\gamma (x + y^2)ds = \int_{\gamma_1} (x + y^2)\,ds + \int_{\gamma_2} (x + y^2)\,ds = \sqrt{2}\int_{-1}^{0} (-t + t^2)dt + \sqrt{2}\int_0^1 (t + t^2)dt = \frac{5}{3}\sqrt{2}.$$

TEOREMA 6. *Se le due curve regolari* (γ_1, Γ_1) e (γ_2, Γ_2), *con* γ_1: $I_1 = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, γ_2: $I_2 = [c,d] \to \mathbb{R}^n$, *sono equivalenti, allora, per ogni funzione continua* f: $E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, *con* $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma \subset E$, *si ha*

$$\int_{\gamma_1} f\,ds = \int_{\gamma_2} f\,ds\,.$$

DIM. Per ipotesi, esiste un'applicazione φ: $[c,d] \to [a,b]$ tale che $\gamma_1 \circ \varphi = \gamma_2$. Si ha

$$\int_{\gamma_1} f\,ds = \int_a^b f(\gamma_1(t))\|\gamma_1'(t)\|dt = \int_c^d f(\gamma_1(\varphi(\tau)))\|\gamma_1'(\varphi(\tau))\|\cdot|\varphi'(\tau)|d\tau = \int_c^d f(\gamma_2(\tau)\|\gamma_2'(\tau)\|d\tau = \int_{\gamma_2} f\,ds. \blacksquare$$

Ciò comporta che, se (γ, Γ) è una curva regolare e semplice, si può pensare l'integrale curvilineo della f come definito sul sostegno Γ anziché sul γ.

§ 4. INTEGRALI CURVILINEI DI CAMPI VETTORIALI

DEFINIZIONE. Siano (γ, Γ), con γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, una curva *regolare* e g: $E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale *continuo*, con $\Gamma \subset E$. Si definisce *integrale curvilineo di g lungo* γ (o *su* γ) il numero

$$\int_\gamma <g,\tau>ds := \int_a^b <g(\gamma(t)),\gamma'(t)>dt,$$

dove $\tau(t) := \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ è il versore tangente alla curva nel punto $\gamma(t)$.

OSSERVAZIONE. Si ha:

$$\int_\gamma <g,\tau>ds = \int_a^b <g(\gamma(t)),\gamma'(t)>dt = \int_a^b <g(\gamma(t)),\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}>\|\gamma'(t)\|dt.$$

Dunque l'integrale curvilineo del campo vettoriale g lungo γ può pensarsi come l'integrale curvilineo su γ del campo scalare continuo $<g, \tau>$. Ne viene che anche per gli integrali curvilinei dei campi vettoriali sussiste un risultato analogo a quello del Teorema 5.

OSSERVAZIONE. $\boxed{n = 2.}$ Dati il campo vettoriale g: $E(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$, con

$$g(x,y) = (X(x,y),Y(x,y))^T = X(x,y)\underline{e}_1 + Y(x,y)\underline{e}_2,$$

e la curva γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = (x(t),y(t))^T$, si ha

$$\int_\gamma <g,\tau>ds = \int_a^b [X(x(t),y(t))x'(t) + Y(x(t),y(t))y'(t)]dt.$$

$\boxed{n = 3}$ Dati il campo vettoriale g: $E(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$, con

$$g(x,y,z) = (X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z))^T = X(x,y,z)\underline{e}_1 + Y(x,y,z)\underline{e}_2 + Z(x,y,z)\underline{e}_3,$$

e la curva γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^3$, con $\gamma(t) = (x(t),y(t),z(t))^T$, si ha

$$\int_\gamma <g,\tau>ds = \int_a^b [X(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Y(x(t),y(t),z(t))y'(t) + Z(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt.$$

Interpretazione fisica. Se la funzione $g(\underline{x})$ esprime un *campo di forze stazionario* (ossia costante nel tempo), allora, data una curva (γ,Γ), con γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, l'integrale $\int_\gamma <g,\tau>ds$ esprime il *lavoro* compiuto dal campo sulla particella di massa unitaria che si muove lungo la traiettoria data dal sostegno Γ della curva.

ESEMPI. 1) Dati il campo vettoriale g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $g(x,y) = (0,y)^T$ e la curva γ: $I = [0,1] \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = (t,t^2)^T$, si vuol calcolare $\int_\gamma <g,\tau>ds$. Si ha

$$\int_\gamma <g,\tau>ds = \int_0^1 t^2(2t)dt = 2\int_0^1 t^3dt = \frac{1}{2}.$$

2) Dati il campo vettoriale g: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $g(x,y,z) = (z,y,x)^T$ e la curva γ_1: $I = [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, con $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, t)^T$, si vuol calcolare $\int_{\gamma_1} <g,\tau>ds$. Si ha

$$\int_{\gamma_1} <g,\tau>ds = \int_0^{2\pi} [-t \sin t + \sin t \cos t + \cos t]dt = \left[t \cos t - \sin t + \frac{\sin^2 t}{2} + \sin t\right]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

3) Calcolare $\int_{\gamma_2} <g,\tau>ds$, dove il campo g è quello dell'esempio precedente e γ_2: $I = [0,2] \to \mathbb{R}^3$ è data da $\gamma(t) = (1, t, e^t)^T$. Si ha

$$\int_{\gamma_2} <g,\tau>ds = \int_0^2 [t + e^t]dt = 1 + e^2.$$

TEOREMA 7. *Se le due curve* (γ_1,Γ_1) e (γ_2,Γ_2), *con* γ_1: $I_1 = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, γ_2: $I_2 = [c,d] \to \mathbb{R}^n$, *sono equivalenti, allora, per ogni campo vettoriale continuo* g: $E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ *(con* $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma \subset E$*) si ha*

$$\int_{\gamma_1} <g, \tau>ds = \int_{\gamma_2} <g,\tau>ds, \quad \textit{se le due curve hanno lo stesso orientamento}$$

$$e \qquad \int_{\gamma_1} <g, \tau>ds = -\int_{\gamma_2} <g,\tau>ds, \quad \textit{se le due curve hanno orientamento opposto.}$$

DIM. Si ha

$$\int_{\gamma_2} <g, \tau>ds = \int_c^d <g(\gamma_2(s)), \gamma_2'(s)>ds = \int_c^d <g(\gamma_1(\varphi(s)), \gamma_1'(\varphi(s))\, \varphi'(s)> ds =$$

$$= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} <g(\gamma_1(t)), \gamma_1'(t)>dt = \mathrm{sign}(\varphi') \int_a^b <g(\gamma_1(t), \gamma_1'(t)>dt = \mathrm{sign}(\varphi') \int_{\gamma_1} <g, \tau>dt\,.$$

(Si tenga presente che si ha $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$ se è $\varphi'(s) > 0$, mentre se è $\varphi'(s) < 0$ si ha $\varphi(c) = b$ e $\varphi(d) = a$.) ∎

§ 5. CAMPI CONSERVATIVI

PROBLEMA. Sotto quali condizioni un integrale curvilineo $\int_\gamma <g,\tau>ds$, con γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, dipende solo dal punto iniziale $\gamma(a)$ e dal punto finale $\gamma(b)$, ma non dalla curva γ?

DEFINIZIONE. Un campo vettoriale g: $A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, *A aperto*, si dice *conservativo* se esiste un campo scalare f: $A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che

$$\nabla f(\underline{x}) = g(\underline{x}), \quad \forall\ \underline{x} \in A.$$

La funzione f è detta un *potenziale* di g.

Naturalmente, se $f(\underline{x})$ è un potenziale del campo vettoriale $g(\underline{x})$, è tale anche ogni funzione del tipo $f(\underline{x}) + c$, con $c \in \mathbb{R}$.

TEOREMA 8. *Se* g: $A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, *A aperto, è un campo vettoriale continuo e conservativo, allora, per ogni curva regolare* (γ,Γ), γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\Gamma \subset A$, *si ha*

$$\int_\gamma <g,\tau>ds = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

con f: $A \to \mathbb{R}$ *funzione potenziale di g.* (dunque: $\int_\gamma <g,\tau>ds$ *non dipende da* γ, *ma solo dai punti* $\gamma(b)$ *e* $\gamma(a)$).

DIM. Sia g: $A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, $g = (X(\underline{x}), Y(\underline{x}), Z(\underline{x}))^T$ un campo vettoriale continuo e conservativo. Esiste dunque un campo scalare f: $A \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\nabla f(\underline{x}) = g(\underline{x})$, $\forall\ \underline{x} \in A$. Per ogni curva (γ,Γ), γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\Gamma \subset A$, si ha

$$\int_\gamma <g,\tau>ds = \int_a^b [X(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Y(x(t),y(t),z(t))y'(t) + Z(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt =$$

$$= \int_a^b [f_x(\gamma(t))x'(t) + f_y(\gamma(t))y'(t) + f_z(\gamma(t))z'(t)]dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t))dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)), \blacksquare$$

DEFINIZIONE. Sia A un sottoinsieme *aperto* e *connesso* di $\mathbb{R}^n$. Per ogni coppia di punti $(\underline{x}, \underline{y}) \in A$, poniamo

$$\Gamma_A(\underline{x},\underline{y}) := \{\gamma: I = [a,b] \to \mathbb{R}^n, \gamma \text{ regolare a tratti}, \gamma(I) \subset A, \gamma(a) = \underline{x}, \gamma(b) = \underline{y}\}.$$

Si può dimostrare che, se A è aperto e connesso, l'insieme $\Gamma_A(\underline{x},\underline{y})$ non è vuoto, quali che siano i punti $\underline{x},\underline{y} \in A$.

TEOREMA 9. *Siano: A un aperto e connesso di* $\mathbb{R}^n$ *e g*: $A \to \mathbb{R}^n$, *un campo vettoriale continuo. Allora g è conservativo se e solo se, per ogni coppia di punti* $\underline{x}$, $\underline{y}$ *di A si ha*

$$\int_{\gamma_1} <g,\tau>ds = \int_{\gamma_2} <g,\tau>ds,$$

quali che siano le curve $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_A(\underline{x},\underline{y})$.

DIM. $\boxed{\text{Per } \boldsymbol{n = 2}}$. La necessità è provata dal Teorema 8; dimostriamo la sufficienza. Fissato in A un punto $\underline{x}^0$, poniamo, per ogni $\underline{x} \in A$, $f(\underline{x}) = \int_\gamma <g,\tau>ds$, essendo $\gamma \in \Gamma_A(\underline{x}^0,\underline{x})$. Dato che, per ipotesi, questo integrale non dipende dalla particolare curva scelta, si ha che la definizione è coerente e si ottiene effettivamente una funzione f: $A \to \mathbb{R}$. Proviamo che la funzione f è di classe C^1 e che si ha $\nabla f = g$, Sia dunque $g(x,y) = X(x,y)\underline{e}_1 + Y(x,y)\underline{e}_2$ e mostriamo che è $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = X(x,y)$. Si ponga $\underline{x}' = (x + h,y)^T$, δ: $[0,1] \to \mathbb{R}^2$, con $\delta(t) = (x + th, y)^T$; si ha

$$\frac{f(\underline{x}') - f(\underline{x})}{h} = \frac{f(x + h,y) - f(x,y)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_\gamma <g,\tau>ds + \int_\delta <g,\tau>ds - \int_\gamma <g,\tau>ds\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^1 [X(x + th,y)h + Y(x + th,y)\,0]dt = \int_0^1 X(x + th,y)\,dt = X(x + \xi h,y)\,(1 - 0),$$

con $0 < \xi < 1$. Dunque $\frac{f(\underline{x}') - f(\underline{x})}{h}$ tende a $X(x,y)$ al tendere di h a 0, data la continuità della funzione $X(\underline{x})$. In modo analogo si prova che è $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Y(x,y)$. Da tali uguaglianze segue poi anche la continuità delle derivate parziali della funzione f. $\blacksquare$

COROLLARIO 10. *Un campo vettoriale continuo.* g: $A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, *con A aperto e connesso, è conservativo se e solo se, è a circuitazione nulla, ossia se e solo se si ha*

$$\int_\gamma <g,\tau>ds = 0$$

su ogni curva γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *chiusa e regolare a tratti, con sostegno* Γ *contenuto in A.*

DIM. Se g è conservativo, è il gradiente di un campo scalare f: $A \to \mathbb{R}$ e si ha $\int_\gamma <g,\tau> ds = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0$, essendo $\gamma(b) = \gamma(a)$. Supponiamo, inversamente, che il campo g sia a circuitazione nulla. Fissiamo ad arbitrio due punti $\underline{x}$, $\underline{y} \in A$ e due curve $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(\underline{x},\underline{y})$; non è restrittivo supporre γ_1: $[-1,0] \to \mathbb{R}^n$ e γ_2: $[0,1] \to \mathbb{R}^n$. Sia ora γ: $[-1,1] \to \mathbb{R}^n$ definita da

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [-1,0] \\ \gamma_2(1-t) & \text{se } t \in [0,1] \end{cases} .$$

La curva γ è chiusa e regolare a tratti; il suo sostegno Γ è dato da $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Si ottiene

$$0 = \int_\gamma <g,\tau> ds = \int_{\gamma_1} <g,\tau> ds - \int_{\gamma_2} <g,\tau> ds,$$

da cui la tesi, data l'arbitrarietà dei punti $\underline{x}$, $\underline{y}$ e delle curve γ_1, γ_2. ∎

OSSERVAZIONE. (Significato del termine "conservativo": Teorema *di conservazione dell'energia totale.*) Sia g: $A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ un campo di forze conservativo; esiste dunque un campo scalare f: $A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla f = g$. Se $\gamma(t)$ è la legge del moto di una particella di massa m soggetta al campo di forze g, allora $\gamma(t)$ soddisfa all'equazione differenziale $m\,\gamma''(t) = g(\gamma(t))$. Moltiplicando scalarmente i due membri per $\gamma'(t)$ e integrando, si ottiene

$$m \int_a^b <\gamma''(t),\gamma'(t)> dt = \int_a^b <g(\gamma(t)),\gamma'(t)> dt,$$

da cui
$$\frac{1}{2} m \,\|\gamma'(b)\|^2 - \frac{1}{2} m \,\|\gamma'(a)\|^2 = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

e quindi
$$\frac{1}{2} m \,\|\gamma'(b)\|^2 - f(\gamma(b)) = \frac{1}{2} m \,\|\gamma'(a)\|^2 - f(\gamma(a)).$$

Si conclude che la funzione
$$E(t) = \frac{1}{2} m \,\|\gamma'(t)\|^2 - f(\gamma(t))$$

è costante nel tempo. (Il primo addendo dà l'energia cinetica, il secondo quella potenziale.)

DEFINIZIONE. Sia g: $A(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y,z) = (X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z))^T$, un campo vettoriale di classe C^1; si definisce *rotore* di g il campo vettoriale $rot\, g : A \to \mathbb{R}^3$ così definito (sviluppo secondo la prima riga del determinante formale a secondo membro):

$$rot\, g := \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = (Z_y - Y_z)\underline{e}_1 + (X_z - Z_x)\underline{e}_2 + (Y_x - X_y)\underline{e}_3.$$

OSSERVAZIONE. Si verifica facilmente che: *La legge $g \mapsto rot\, g$ è un'applicazione lineare di $C^1(A,\mathbb{R}^3)$ in $C^0(A,\mathbb{R}^3)$.* Osserviamo poi che si può scrivere $rot\, g = \nabla \wedge g$; per questo il rotore è anche detto *differenziale esterno* del campo vettoriale g.

OSSERVAZIONE. Dato un campo vettoriale g: $A(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$, con $g(x,y) = X(x,y)\underline{e}_1 + Y(x,y)\underline{e}_2$, questo individua un campo vettoriale $\overline{g}$: $A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$\overline{g}(x,y,z) = X(x,y)\underline{e}_1 + Y(x,y)\underline{e}_2 + 0\underline{e}_3.$$

Se g è di classe C^1, è tale anche $\overline{g}$ e si ha

$$rot\ \overline{g} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & 0 \end{vmatrix} = (Y_x - X_y)\underline{e}_3.$$

DEFINIZIONE. Il rotore di $\overline{g}$ si assume come *rotore* di g. È dunque

$$rot\ g := (Y_x - X_y)\underline{e}_3.$$

DEFINIZIONE. Un campo vettoriale g: $A(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ è detto *irrotazionale* se per esso si ha $rot\ g \equiv \underline{0}$.

Dal Teorema di Schwarz (cfr. Capitolo 12, Teorema 1) segue subito il

TEOREMA 11. *Ogni campo vettoriale conservativo di classe* C^1 *e irrotazionale.* ∎

N.B. Non sussiste l'implicazione opposta di quest'ultimo teorema.

ESEMPIO. 1) Si consideri il campo vettoriale g: $\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$g(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\underline{e}_1 + \frac{x}{x^2+y^2}\underline{e}_2 .$$

Si constata immediatamente che il campo è irrotazionale. Si consideri ora la curva (γ,Γ) con γ: $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$. Si ha

$$\int_\gamma <g,\tau>ds = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = 2\pi.$$

Quindi si può concludere, per il Teorema 11, che il campo vettoriale g *non* è conservativo.

Per avere condizioni sufficienti affinché un campo irrotazionale sia conservativo, bisogna imporre delle condizioni di carattere topologico su A.

DEFINIZIONE. Un sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}^n$ si dice *stellato* se esiste $\underline{x}^0 \in A$ tale che, per ogni $\underline{x} \in A$, il segmento $[\underline{x}^0,\underline{x}] := \{\underline{y} = \underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0): t \in [0,1]\}$ è contenuto in A.

TEOREMA 12. *Sia* g: $A(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ *un campo vettoriale di classe* C^1 *con A insieme aperto e stellato. Allora g è conservativo se e solo se è irrotazionale.*

Cenno di dimostrazione. Basta, ovviamente, provare il *se*. Supposto g irrotazionale, si pone, per ogni $\underline{x} \in A$, $f(\underline{x}) = \int_\gamma <g,\tau>ds$, essendo γ il segmento di equazione $\gamma(t) = \underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0)$, $t \in [0,1]$. Si pone cioè:

$$f(\underline{x}) = \int_0^1 <g(\underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0)), \underline{x} - \underline{x}^0> dt.$$

Si prova poi che è $\nabla f = g$. ∎

ESEMPI. 2) Il campo vettoriale g: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $g(x,y,z) = (z, y, x)^T$ è, come subito si vede, irrotazionale ed è definito in un insieme stellato; g è dunque conservativo. Fissiamo il punto $\underline{x}^0 = \underline{0}$. Una funzione potenziale di g è data dal campo scalare

$$f(\underline{x}) = \int_0^1 <g(\underline{0} + t(\underline{x} - \underline{0})), \underline{x} - \underline{0}> dt = \int_0^1 <g(t\underline{x}), \underline{x}> dt =$$

$$= \int_0^1 [X(t\underline{x})\, x'(t) + Y(t\underline{x})\, y'(t) + Z(t\underline{x})\, z'(t)] dt = \int_0^1 [(tz)\, x + (ty)\, y + (tx)\, z] dt =$$

$$= \int_0^1 [2xzt + y^2 t] dt = [2xz + y^2] \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2} [2xz + y^2].$$

3) Calcolare $\int_\gamma <g, \tau> ds$, essendo il campo g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e la curva γ: $I \to \mathbb{R}^2$ definiti da

$$g(x,y) = (ye^x, e^x - \cos y)^T; \gamma(t) = (t \cos t,\ 1 - \sin t)^T, I = [0, 2\pi].$$

Si ha:
$$\int_\gamma <g, \tau> ds = \int_0^{2\pi} [y(t)\, e^{x(t)} x'(t) + (e^{x(t)} - \cos y(t)) y'(t)] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} [(1 - \sin t) e^{t \cos t} (\cos t - t \sin t) - (e^{t \cos t} - \cos(1 - \sin t)) \cos t] dt =$$

$$= [(1 - \sin t) e^{t \cos t}]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} e^{t \cos t} \cos t\, dt - \int_0^{2\pi} e^{t \cos t} \cos t\, dt - [\sin(1 - \sin t)]_0^{2\pi} = e^{2\pi} - 1.$$

Ma possiamo anche osservare che il campo g è irrotazionale e definito su un aperto stellato ed è, quindi, conservativo. Ne viene che invece di calcolare l'integrale di g lungo γ, possiamo calcolarlo lungo un'arbitraria curva regolare a tratti che unisca i punti $\gamma(0) = (0,1)^T$ e $\gamma(2\pi) = (2\pi,1)^T$. Scegliamo il segmento γ_1: $[0,1] \to \mathbb{R}^2$, dato da $\gamma_1(t) = (2\pi t, 1)^T$. Si ha

$$\int_{\gamma_1} <g, \tau> ds = \int_0^1 [y(t)\, e^{x(t)} x'(t) + 0] dt = \int_0^1 [2\pi e^{2\pi t}] dt = [e^{2\pi t}]_0^1 = e^{2\pi} - 1.$$

§ 6. I TEOREMI BIDIMENSIONALI DI STOKES E DELLA DIVERGENZA

Il Teorema di Stokes

Sia (γ, Γ), con γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$, una curva regolare a tratti, semplice e chiusa. Il complementare dell'insieme Γ è formato da due aperti connessi, di cui uno limitato che indicheremo con Δ. Posto $D = cl\, \Delta$, si ha $\mathcal{F} D = \Gamma$.

DEFINIZIONE. Un insieme D così definito è detto un *dominio regolare* di $\mathbb{R}^2$.

DEFINIZIONE. Siano D un dominio regolare e (γ,Γ).una curva tale che $\Gamma = \mathcal{F}D$. Si dice che la curva γ *orienta positivamente* [*negativamente*] il suo sostegno Γ (= $\mathcal{F}D$) se, al crescere di $t \in [a,b]$, $\gamma(t)$ percorre $\mathcal{F}D$ in senso antiorario [in senso orario]. Per indicare una qualunque curva γ che orienta positivamente l'insieme $\mathcal{F}D$, useremo la notazione $+\mathcal{F}D$.

Sussiste il seguente Teorema che fornisce un metodo per ricondurre il calcolo degli integrali doppi a quello di integrali curvilinei.

TEOREMA 13. *(di Stokes bidimensionale) - Siano* $D(\subset \mathbb{R}^2)$ *un dominio regolare,* $A(\subset \mathbb{R}^2)$ *un aperto contenente* D, g: $A \to \mathbb{R}^2$ *un campo vettoriale di classe* C^1. *Si ha*

$$\iint_D <rot\, g, \underline{e}_3>dxdy = \int_{+\mathcal{F}D} <g,\tau>ds. \blacksquare$$

Se è $g(x,y) = X(x,y)\underline{e}_1 + Y(x,y)\underline{e}_2$ e se γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$, è una curva che orienta positivamente $\mathcal{F}D$, si ha

$$\iint_D [Y_x(x,y) - X_y(x,y)]dxdy = \int_a^b [X(x(t),y(t))x'(t) + Y(x(t),y(t))y'(t)]dt\ .$$

Non possiamo produrre la dimostrazione di questo Teorema, ma ci limitiamo a darne una giustificazione nel caso molto particolare che il dominio D sia un rettangolo; sia dunque $D = \{(x,y)^T\colon a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$. Si ha

$$\iint_D [Y_x(x,y) - X_y(x,y)]dxdy = \int_c^d \Big(\int_a^b Y_x(x,y)dx\Big)dy - \int_a^b \Big(\int_c^d X_y(x,y)dy\Big)dx =$$

$$= \int_c^d [Y(b,y) - Y(a,y)]dy - \int_a^b [X(x,d) - X(x,c)]dx =$$

$$= \int_a^b X(x,c)dx + \int_c^d Y(b,y)dy - \int_a^b X(x,d)dx - \int_c^d Y(a,y)diy.$$

Ora, percorrendo $\mathcal{F}D$ in senso antiorario a partire dal punto (a,c), si incontrano 4 segmenti, sostegni di altrettante curve che indicheremo con γ_1, γ_2, γ_3 e γ_4. Si ottiene

$$\int_{+\mathcal{F}D} <g,\tau>ds = \int_{\gamma_1} <g,\tau>ds + \int_{\gamma_2} <g,\tau>ds + \int_{\gamma_3} <g,\tau>ds + \int_{\gamma_4} <g,\tau>ds.$$

Si vede poi subito che è

$$\int_{\gamma_1} <g,\tau>ds = \int_a^b X(x,c)dx; \qquad \int_{\gamma_2} <g,\tau>ds = \int_c^d Y(b,y)dy;$$

$$\int_{\gamma_3} <g,\tau>ds = -\int_a^b X(x,d)dx; \qquad \int_{\gamma_4} <g,\tau>ds = -\int_c^d Y(a,y)dy.$$

Applicazione al calcolo delle aree

Dato un dominio *regolare D*, sappiamo che è $m(D) = \iint_D 1dxdy$. Siano ora g_1,g_2: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i due campi vettoriali definiti da $g_1(x,y) = (0, x)^T$ e $g_2(x,y) = (y, 0)^T$. Si ha

$$rot\ g_1 = \underline{e}_3 \quad \text{e} \quad rot\ g_2 = -\underline{e}_3,$$

da cui
$$<rot\ g_1,\underline{e}_3> = 1 \quad \text{e} \quad <rot\ g_2,\underline{e}_3> = -1.$$

Dal Teorema 13 si ricava allora il

COROLLARIO 14. *L'area di un dominio regolare D è data da*

$$m(D) = \int_{+\partial D} x(t)y'(t)dt = -\int_{+\partial D} y(t)x'(t)dt = \frac{1}{2}\int_{+\partial D}[x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt..$$

DIM. Si ha:
$$m(D) = \iint_D 1dxdy = \iint_D <rot\ g_1,\underline{e}_3>dxdy = \int_{+\partial D} x(t)y'(t)dt;$$
$$m(D)= -\iint_D <rot\ g_2,\underline{e}_3>dxdy = -\int_{+\partial D} y(t)x'(t)dt;$$

da cui
$$m(D) = \frac{1}{2}\int_{+\partial D}[x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt. \blacksquare$$

ESEMPI. 1) Si vuol calcolare l'area del dominio regolare avente per frontiera il sostegno della curva (*asteroide*) γ: $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)^T$, $a > 0$. Si ha

$$m(D) = \iint_D 1dxdy = \frac{1}{2}\int_{+\partial D}[x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}[\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t\ ]dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 t \sin^2 t\ dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\ dt = \frac{3a^2}{16}\int_0^{4\pi}\sin^2 u\ du = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

2) Si vuol calcolare l'area del dominio regolare D avente per frontiera il sostegno della curva (*cardioide*) γ: $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = ((1 + \cos t) \cos t, (1 + \cos t) \sin t)^T$. Si ha

$$m(D) = \iint_D 1dxdy = \frac{1}{2}\int_{+\partial D}[x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + \cos t)(\cos^2 t + \cos^3 t + \sin^2 t + \cos t \sin^2 t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + \cos t)^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + 2\cos t + \cos^2 t)dt = \frac{3\pi}{2}.$$

In questo caso, si poteva procedere anche partendo direttamente dall'equazione polare $\rho(\vartheta) = 1 + \cos\vartheta$. Si ha

$$m(D) = \iint_D 1dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{1 + \cos\vartheta} \rho d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + \cos\vartheta)^2 d\vartheta = \frac{3\pi}{2}.$$

Il teorema della divergenza

DEFINIZIONE. Siano D un dominio regolare e $\gamma \in +\mathcal{F}D$, con γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^2$ regolare a tratti e definita da $\gamma(t) = (x(t),y(t))^T$. Per ogni $t \in I$ per cui esiste il vettore tangente $(x'(t),y'(t))^T \neq \underline{0}$, si definisce *vettore normale esterno* a $\Gamma = \mathcal{F}D$ nel punto $\gamma(t)$ il vettore $n(t) := (y'(t), -x'(t))^T$ $(\neq \underline{0})$; si definisce poi *versore normale esterno* a Γ nel punto $\gamma(t)$ il versore $\nu(t) := \frac{n(t)}{\|n(t)\|}$.

DEFINIZIONE. Siano D e γ come sopra. Se g: $A \to \mathbb{R}^2$ è un campo vettoriale continuo definito su un aperto A contenente D, si chiama *flusso di g attraverso* $\Gamma = \mathcal{F}D$ il numero

$$\int_{+\mathcal{F}D} <g,\nu>ds := \int_a^b <g(\gamma(t)),n(t)>dt = \int_a^b <g(\gamma(t)),\nu(t)>\|n(t)\|dt.$$

DEFINIZIONE. Dato un campo vettoriale g: $A \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1 sull'aperto A di $\mathbb{R}^2$ e definito da $g(t) = (X(\underline{x}), Y(\underline{x}))^T$, si chiama *divergenza di g* il campo scalare *div g* definito da

$$div\ g(\underline{x}) := X_x(\underline{x}) + Y_y(\underline{x}).$$

Osserviamo che la divergenza di g può essere indicata con il prodotto scalare formale

$$div\ g := <\nabla, g>.$$

TEOREMA 15 *(della divergenza) - Siano D un dominio regolare di* $\mathbb{R}^2$, $A(\subset \mathbb{R}^2)$ *un aperto contenente D* e g: $A \to \mathbb{R}^2$ *un campo vettoriale di classe* C^1. *Si ha*

$$\iint_D div\ g\ dm = \int_{+\mathcal{F}D} <g,\nu>ds.$$

[Ossia: *l'integrale doppio su D della divergenza del campo vettoriale g uguaglia il flusso di g attraverso* $\mathcal{F}D$.]

DIM. Sia $g(\underline{x}) = (X(\underline{x}), Y(\underline{x}))^T$. Consideriamo il nuovo campo vettoriale h: $A \to \mathbb{R}^2$ definito da $h(\underline{x}) = (-Y(\underline{x}), X(\underline{x}))^T$. Si constata subito che h è di classe C^1 e che si ha

$$div\ g = <rot\ h, \underline{e}_3>.$$

Tenuto conto del Teorema di Stokes, si ottiene:

$$\iint_D div\ g\ dm = \iint_D (X_x(x,y) + Y_y(x,y))\ dxdy = \iint_D <rot\ h(x,y), \underline{e}_3>dxdy =$$

$$= \int_a^b (-Y(\underline{x}(t))x'(t) + X(\underline{x}(t))y'(t))dt = \int_a^b <g(\underline{x}(t)),n(\underline{x}(t))>dt = \int_{+\mathcal{F}D} <g,\nu>ds. \blacksquare$$

§ 7. E S E R C I Z I

1) Calcolare le lunghezze dei seguenti archi di curva:

$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi; \qquad \begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \\ z = t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi;$$

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi; \qquad \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

2) Si consideri un filo di densità $\mu(x,y,z)$ disposto sul sostegno di una curva regolare semplice (γ, Γ). Ricordiamo che le coordinate del baricentro sono date da

$$\overline{x} = \frac{\int_\gamma x\,\mu(x,y,z)\,ds}{\int_\gamma \mu(x,y,z)\,ds}, \ \ldots\ldots$$

Ricordiamo inoltre che i momenti rispetto all'origine e rispetto agli assi sono dati da

$$m_0 = \int_\gamma (x^2 + y^2 + z^2)\mu(x,y,z)\,ds, \qquad m_x = \int_\gamma (y^2 + z^2)\mu(x,y,z)\,ds, \ \ldots\ldots$$

Calcolare baricentro e momenti delle seguenti curve ($\mu(x,y,z) = 1$):

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi; \qquad \begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi; \qquad \begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \\ z = t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

3) Si dica se il campo vettoriale $g: A(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$, con $A = \{(x,y)^T: y > 0\}$, definito da $g(x,y) = (x\log(y^2), \frac{x^2}{y})^T$ è conservativo. In caso affermativo, si calcoli una sua funzione potenziale.

4) Si calcoli $\int_\gamma \langle g,\tau\rangle ds$, essendo $g: A(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,y)^T: x > 0\}$, $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiti da $g(x,y) = (xe^y + \log x, \operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}x^2e^y)^T$, $\gamma(t) = (2 + \sin t, t)^T$.

5) *a*) Si calcoli l'area del dominio piano compreso fra l'asse delle x e l'arco di *cicloide* sostegno della curva $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)^T$.

b) Si calcoli l'area del dominio piano delimitato dall'arco di *spirale logaritmica* di equazione polare $\rho(t) = at$, $a > 0$, $0 \le t \le 2\pi$.

Capitolo Sedicesimo

CENNO SULLE SUPERFICI

§ 1. LA NOZIONE DI SUPERFICIE

In tutto il Capitolo, chiameremo *dominio* un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^2$ che sia *la chiusura di un aperto connesso*.

Sono tali, per esempio, i domini ammissibili del Capitolo 13 sugli integrali di Riemann e i domini regolari del Capitolo 15 sulle curve.

DEFINIZIONE. Data un'applicazione φ di un dominio K in $\mathbb{R}^3$, si ponga $\Sigma = \varphi(K)$. La coppia (φ, Σ) prende il nome di *superficie*. L'applicazione φ si chiama *rappresentazione parametrica* della superficie, mentre l'insieme Σ è detto il suo *sostegno.*

Si ha $\qquad \varphi(u,v) = (x(u,v),y(u,v),z(u,v))^T$, ossia $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$

e $\qquad \Sigma = \{(x(u,v),y(u,v),z(u,v))^T\colon (u,v) \in K\}$.

Per assegnare una superficie è sufficiente assegnare l'applicazione φ; per questo motivo, ci permetteremo espressioni del tipo: "Data una superficie φ …", in luogo di "Data una superficie (φ, Σ) …".

DEFINIZIONE. Una superficie (φ, Σ) è detta *semplice* se da $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in K$, $\underline{u}_1 \neq \underline{u}_2$ e almeno uno dei due interno a K segue $\varphi(\underline{u}_1) \neq \varphi(\underline{u}_2)$.

DEFINIZIONE. Una superficie (φ, Σ) è detta *regolare* se l'applicazione φ soddisfa alle seguenti condizioni:

1) è di classe C^1 sul dominio K (cfr. Cap. 12, §1);

2) per ogni $\underline{u}$ interno a K, è uguale a 2 il rango (o la caratteristica) della matrice Jacobiana

$$J(\varphi(\underline{u})) = \begin{pmatrix} x_u(\underline{u}) & x_v(\underline{u}) \\ y_u(\underline{u}) & y_v(\underline{u}) \\ z_u(\underline{u}) & z_v(\underline{u}) \end{pmatrix}.$$

ESEMPI. 1) Si consideri la superficie (φ, Σ), con $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $\varphi(u,v) = (a_1u + b_1v + c_1, a_2u + b_2v + c_2, a_3u + b_3v + c_3)^T$, $a_i,b_i,c_i \in \mathbb{R}$. fissati. Si tratta di un superficie regolare semplice il cui sostegno Σ è un piano passante per il punto $\underline{x}^0 = (c_1,c_2,c_3,)^T$.

2) Si consideri la superficie (φ, Σ), con $\varphi\colon K \to \mathbb{R}^3$, $K = [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$ e φ definita da $\varphi(u,v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u)^T$, $R \in \mathbb{R}^+$ fissato. Si tratta di una superficie regolare semplice il cui sostegno Σ è la superficie sferica di centro nell'origine e raggio R.

3) Si consideri la superficie (φ, Σ), con $\varphi: K \to \mathbb{R}^3$, $K = [0, \pi] \times [0, 1]$ e φ definita da $\varphi(u,v) = (Rv \cos u, Rv \sin u, cRv)^T$, $R,c \in \mathbb{R}^+$. Si tratta di una superficie regolare semplice il cui sostegno Σ è una porzione di cono.

4) Si consideri la superficie (φ, Σ), con $\varphi: K \to \mathbb{R}^3$, $K = [0, 3\pi] \times \mathbb{R}$ e φ definita da $\varphi(u,v) = (R \cos u, R \sin u, v)^T$, $R \in \mathbb{R}^+$. Si tratta di una superficie regolare, ma non semplice il cui sostegno Σ è un cilindro.

5) Si consideri la superficie (φ, Σ), con $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, e φ definita da $\varphi(u,v) = (u, |u|, v)^T$. Si tratta di una superficie semplice ma non regolare, il cui sostegno Σ è ancora un cilindro.

§ 2. LINEE COORDINATE, VERSORE NORMALE E PIANO TANGENTE

Sia data una superficie *regolare semplice* (φ, Σ), con $\varphi: K \to \mathbb{R}^3$ definita da $\varphi(\underline{u}) = \varphi(u,v) = (x(u,v),y(u,v),z(u,v))^T$.

DEFINIZIONE. Fissato $\underline{u}^0 = (u_0,v_0)^T \in$ *int* K, le curve $\varphi(u,v_0)$ e $\varphi(u_0,v)$ prendono il nome di *linee coordinate* su Σ (passanti) per $\underline{x}^0 = \varphi(u_0,v_0)$.

Le rappresentazioni parametriche delle linee coordinate per $\underline{x}^0$ sono dunque

$$\varphi(u,v_0) = (x(u,v_0),y(u,v_0),z(u,v_0))^T \text{ e } \varphi(u_0,v) = (x(u_0,v),y(u_0,v),z(u_0,v))^T.$$

I vettori tangenti alle linee coordinate per $\underline{x}^0$ sono, rispettivamente,

$$\varphi_u(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} x_u(u_0,v_0) \\ y_u(u_0,v_0) \\ z_u(u_0,v_0) \end{pmatrix}; \qquad \varphi_v(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} x_v(u_0,v_0) \\ y_v(u_0,v_0) \\ z_v(u_0,v_0) \end{pmatrix}.$$

La condizione (2) della definizione di superficie regolare ci dice che i vettori $\varphi_u(u_0,v_0)$ e $\varphi_v(u_0,v_0)$ sono *linearmente indipendenti*, ossia sono *non nulli* e *non paralleli*. Ciò si può esprimere con la condizione

$$\varphi_u(u_0,v_0) \wedge \varphi_v(u_0,v_0) \neq \underline{0}.$$

Poiché il vettore $\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0)$ è ortogonale sia a $\varphi_u(\underline{u}^0)$ sia a $\varphi_v(\underline{u}^0)$, si può dare la seguente

DEFINIZIONE. Il versore

$$\nu(\underline{u}^0) := \frac{\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0)}{\|\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0)\|}$$

è detto versore *normale* a Σ in $\underline{x}^0 = \varphi(\underline{u}^0)$.

Il vettore $\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0)$ si ottiene sviluppando secondo la prima riga il determinante formale

$$\begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ x_u(\underline{u}^0) & y_u(\underline{u}^0) & z_u(\underline{u}^0) \\ x_v(\underline{u}^0) & y_v(\underline{u}^0) & z_v(\underline{u}^0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_u(\underline{u}^0) & z_u(\underline{u}^0) \\ y_v(\underline{u}^0) & z_v(\underline{u}^0) \end{vmatrix} \underline{e}_1 - \begin{vmatrix} x_u(\underline{u}^0) & z_u(\underline{u}^0) \\ x_v(\underline{u}^0) & z_v(\underline{u}^0) \end{vmatrix} \underline{e}_2 + \begin{vmatrix} x_u(\underline{u}^0) & y_u(\underline{u}^0) \\ x_v(\underline{u}^0) & y_v(\underline{u}^0) \end{vmatrix} \underline{e}_3.$$

I vettori $\varphi_u(\underline{u}^0)$ e $\varphi_v(\underline{u}^0)$ applicati in $\underline{x}^0 = \varphi(\underline{u}^0)$, non essendo paralleli, individuano un piano ortogonale a $\nu(\underline{u}^0)$ e passante per $\underline{x}^0$.

DEFINIZIONE. Il piano $\sigma_{\underline{x}0}(\lambda,\mu)$ (passante per $\underline{x}^0 = \varphi(\underline{u}^0)$) generato dai vettori $\varphi_u(\underline{u}^0)$ e $\varphi_v(\underline{u}^0)$ prende il nome di *piano tangente* a Σ in $\underline{x}^0$.

Il piano $\sigma_{\underline{x}0}(\lambda,\mu)$ tangente a Σ in $\underline{x}^0 = \varphi(\underline{u}^0)$ ha dunque la seguente *rappresentazione parametrica*:

$$\underline{x} = \underline{x}^0 + \lambda\varphi_u(\underline{u}^0) + \mu\varphi_v(\underline{u}^0), \quad (\lambda,\mu)^T \in \mathbb{R}^2.$$

Un punto $\underline{x} \neq \underline{x}^0$ appartiene al piano $\sigma_{\underline{x}0}(\lambda,\mu)$ se e solo se il vettore $\underline{x} - \underline{x}^0$ è ortogonale al versore ν e quindi al vettore $\varphi_u(u_0,v_0) \wedge \varphi_v(u_0,v_0)$, cioè se e solo se è

$$<\underline{x} - \underline{x}^0, \varphi_u(u_0,v_0) \wedge \varphi_v(u_0,v_0)> = 0.$$

Si ottiene così l'*equazione cartesiana del piano tangente* $\sigma_{\underline{x}0}(\underline{u})$:

$$\begin{vmatrix} y_u(\underline{u}^0) & z_u(\underline{u}^0) \\ y_v(\underline{u}^0) & z_v(\underline{u}^0) \end{vmatrix} (x - x_0) - \begin{vmatrix} x_u(\underline{u}^0) & z_u(\underline{u}^0) \\ x_v(\underline{u}^0) & z_v(\underline{u}^0) \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} x_u(\underline{u}^0) & y_u(\underline{u}^0) \\ x_v(\underline{u}^0) & y_v(\underline{u}^0) \end{vmatrix} (z - z_0) = 0.$$

ESEMPI. 1) Si consideri ancora la superficie sferica (φ,Σ) dell'Esempio 1 del § 1: φ: $K \to \mathbb{R}^3$, $K = [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$, $\varphi(u,v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u)^T$, $R \in \mathbb{R}^+$. Se è $\underline{u}^0 \in int\, K$, si ha:

$$\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0) = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ R \cos u_0 \cos v_0 & R \cos u_0 \sin v_0 & -R \sin u_0 \\ -R \sin u_0 \sin v_0 & R \sin u_0 \cos v_0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= R^2\sin^2 u_0 \cos v_0\, \underline{e}_1 + R^2\sin^2 u_0 \sin v_0\, \underline{e}_2 + R^2\cos u_0 \sin u_0\, \underline{e}_3,$$

da cui

$$\|\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0)\| = R^2\sqrt{\sin^4 u_0 \cos^2 v_0 + \sin^4 u_0 \sin^2 v_0 + \cos^2 u_0 \sin^2 u_0} =$$

$$= R^2\sqrt{\sin^4 u_0 + \cos^2 u_0 \sin^2 u_0} = R^2|\sin u_0| = R^2 \sin u_0,$$

essendo $u \in]0, \pi[$. Si ottiene:

$$\nu(\underline{u}^0) = \sin u_0 \cos v_0\, \underline{e}_1 + \sin u_0 \sin v_0\, \underline{e}_2 + \cos u_0\, \underline{e}_3.$$

L'equazione del piano tangente a Σ in $\underline{x}^0 = \varphi(\underline{u}^0)$ è dunque

$$R^2\sin^2 u_0 \cos v_0\, (x - x_0) + R^2\sin^2 u_0 \sin v_0\, (y - y_0) + R^2\cos u_0 \sin u_0\, (z - z_0) = 0$$

e dunque, essendo $\sin u_0 \neq 0$,

$$\sin u_0 \cos v_0 (x - x_0) + \sin u_0 \sin v_0 (y - y_0) + \cos u_0 (z - z_0) = 0.$$

2) Si consideri ancora la superficie (φ, Σ) dell'Esempio 2 del § 1, $\varphi: K \to \mathbb{R}^3$, $K = [0, \pi] \times [0, 1]$, $\varphi(u,v) = (Rv \cos u, Rv \sin u, cR\, v)^T$, $R,c \in \mathbb{R}^+$. Se è $\underline{u}^0 \in int\, K$, si ha:

$$\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0) = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ -Rv_0 \sin u_0 & Rv_0 \cos u_0 & 0 \\ R \cos u_0 & R \sin u_0 & cR \end{vmatrix} =$$

$$= cR^2 v_0 \cos u_0\, \underline{e}_1 + cR^2 v_0\, \sin u_0\, \underline{e}_2 - R^2 v_0 \underline{e}_3;$$

$$\|\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0)\| = R^2 v_0 \sqrt{c^2 \cos^2 u_0 + c^2 \sin^2 u_0 + 1} = R^2 v_0 \sqrt{1 + c^2}.$$

Si ottiene:

$$\nu(\underline{u}^0) = \frac{c \cos u_0}{\sqrt{1 + c^2}}\underline{e}_1 + \frac{c \sin u_0}{\sqrt{1 + c^2}}\underline{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}}\underline{e}_3.$$

Essendo $\sqrt{1 + c^2} \neq 0$, l'equazione del piano tangente a Σ in $\underline{x}^0 = \varphi(\underline{u}^0)$ è dunque

$$c \cos u_0 (x - x_0) + c \sin u_0 (y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Superfici regolari in forma cartesiana. Data una funzione f: $K(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ di classe C^1 sul dominio K, resta individuata la superficie $\varphi: K \to \mathbb{R}$ di rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}.$$

È chiaro che il sostegno Σ di tale superficie è il grafico della f. Poiché la matrice Jacobiana è

$$J(\varphi(\underline{u})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u(\underline{u}) & f_v(\underline{u}) \end{pmatrix},$$

se è $\underline{u}^0 \in int\, K$, si ha:

$$\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0) = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 1 & 0 & f_u(\underline{u}^0) \\ 0 & 1 & f_v(\underline{u}^0) \end{vmatrix} = -f_u(\underline{u}^0)\, \underline{e}_1 - f_v(\underline{u}^0)\, \underline{e}_2 + \underline{e}_3;$$

$$\|\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0)\| = \sqrt{1 + \|\nabla f(\underline{u}^0)\|^2}.$$

Notiamo che è

$$<\nu(\underline{u}^0), \underline{e}_3> = \frac{<\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0), \underline{e}_3>}{\|\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f(\underline{u}^0)\|^2}} > 0.$$

Essendo $z_0 = f(x_0,y_0)$, l'equazione del piano tangente è (cfr. Capitolo 12, § 1):

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

ESEMPI. 3) Dato il piano di equazione $z = ax + by + c$, il vettore normale $\varphi_u \wedge \varphi_v$ è costante e si ha

$$\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0) = -a\, \underline{e}_1 - b\, \underline{e}_2 + \underline{e}_3; \qquad \|\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0)\| = \sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$

4) Dato il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$, si ha

$$\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0) = -2u_0\, \underline{e}_1 - 2v_0\, \underline{e}_2 + \underline{e}_3; \quad \|\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0)\| = \sqrt{1 + 4u_0^2 + 4v_0^2}.$$

L'equazione del piano tangente è

$$z = z_0 + 2u_0\, (x - x_0) + 2v_0\, (y - y_0).$$

Superfici regolari in forma implicita. Sia $g: A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 su un aperto A di $\mathbb{R}^3$ e sia $\Sigma = \{(x,y,z)^T: g(x,y,z) = 0\}$. Si può dimostrare che, per ogni $\underline{x}^0 \in \Sigma$, con $\nabla g(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$, esistono un intorno U di $\underline{x}^0$ e una funzione $z = f(x,y)$ [o una funzione $y = k(x,z)$ o una funzione $x = h(y,z)$] di classe C^1 tali che $\Sigma \cap U = G(f)$ (= grafico di f) [o, rispettivamente, $\Sigma \cap U = G(k)$, $\Sigma \cap U = G(h)$]. Si dice che la funzione f [la funzione k o, rispettivamente, la funzione h] è definita *implicitamente* dall'equazione $g(\underline{x}) = 0$.

ESEMPI. 5) Siano

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1,\ (x,y,z)^T \in A = \mathbb{R}^3,\ \Sigma = \{(x,y,z)^T: x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Se è $\underline{x}^0 = (0,0,1)^T$, si può porre $U = \{(x,y,z)^T: z > 0\}$ e $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;
se è $\underline{x}^0 = (-1,0,0)^T$, si può porre $U = \{(x,y,z)^T: x < 0\}$ e $h(y,z) = -\sqrt{1 - y^2 - z^2}$;
se è $\underline{x}^0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T$ si può porre $U = \{(x,y,z)^T: x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$, $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $k(x,z) = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$ e $h(y,z) = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$.

6) Siano $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$, $(x,y,z)^T \in A = \mathbb{R}^3$. $\Sigma = \{(x,y,z)^T: x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$. Nel punto $\underline{0}$ la funzione g non è regolare. Se è $\underline{x}^0 = (0,1,1)^T$, si può prendere come U il semispazio delle z positive e $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; se è $\underline{x}^0 = (1,0,-1)^T$, si può prendere come U il semispazio delle z negative e $f(x,y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

§ 3. AREA DI UNA SUPERFICIE REGOLARE SEMPLICE

N.B. Da questo punto in poi, supporremo sempre che il dominio K sia *misurabile*. Ciò implica, in particolare, che K è limitato e quindi, essendo chiuso, compatto.

PREMESSA. Se due vettori linearmente indipendenti $\underline{a}$ e $\underline{b}$ sono applicati ad un medesimo punto $\underline{x}^0 = (x_0, y_0)^T$ e se α è la misura assoluta dell'angolo convesso da essi formato, questi individuano un parallelogramma Σ di area $A(\Sigma) = \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\| \sin \alpha = \|\underline{a} \wedge \underline{b}\|$. D'altra parte, Σ è il sostegno di una superficie regolare semplice (φ, Σ) con $\varphi: K \to \mathbb{R}^3$, $K = [0, 1] \times [0, 1]$ e φ definita da $\varphi(u,v) = \underline{x}^0 + u\underline{a} + v\underline{b}$. Essendo $\varphi_u = \underline{a}$ e $\varphi_v = \underline{b}$, si ha

$$A(\Sigma) = \|\underline{a} \wedge \underline{b}\| = \|\underline{a} \wedge \underline{b}\| m(K),$$

da cui

$$A(\Sigma) = \iint_K \|\underline{a} \wedge \underline{b}\| dudv.$$

Quest'ultima formula si estende al caso generale, ma la sua giustificazione richiede ragionamenti non del tutto elementari.

DEFINIZIONE. Sia $\varphi: K (\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$, una superficie regolare semplice con K dominio misurabile; si definisce *area* del suo sostegno Σ il numero reale

$$A(\Sigma) := \iint_K \|\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u})\| dudv.$$

ESEMPI. 1) (*Area della superficie sferica.*) Si consideri la superficie (φ, Σ), con $\varphi: K \to \mathbb{R}^3$, $K = [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$ e φ definita da $\varphi(u,v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u)^T$, $R \in \mathbb{R}^+$ fissato. Sappiamo che è $\|\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u})\| = R^2 \sin u$ (cfr. §1, Esempio 1), da cui

$$A(\Sigma) = \iint_K R^2 \sin u \, dudv = R^2 \int_{-\pi}^{\pi} dv \int_0^{\pi} \sin u \, du = 4\pi R^2.$$

2) Si consideri la superficie (φ, Σ), con $\varphi: K \to \mathbb{R}^3$, $K = [0, 1] \times [0, 2]$ e φ definita da $\varphi(u,v) = (u^2, v^2, \sqrt{2}uv)^T$. Si ha

$$\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u}) = -2\sqrt{2}v^2\underline{e}_1 - 2\sqrt{2}u^2\underline{e}_2 + 4uv\underline{e}_3;$$

$$\|\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u})\| = \sqrt{8u^4 + 8v^4 + 16u^2v^2} = 2\sqrt{2}(u^2 + v^2).$$

Si ottiene

$$A(\Sigma) = 2\sqrt{2} \iint_K (u^2 + v^2) dudv = 2\sqrt{2} \int_0^2 dv \int_0^1 (u^2 + v^2) \, du =$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^2 dv \left[\frac{1}{3} u^3 + uv^2\right]_{u=0}^{u=1} = 2\sqrt{2} \int_0^2 \left[\frac{1}{3} + v^2\right] dv = \frac{2}{3}\sqrt{2} \left[v + v^3\right]_0^2 = \frac{20}{3}\sqrt{2}.$$

Area di una superficie in forma cartesiana. Siano: $f: K \to \mathbb{R}$ di classe C^1, $\varphi: K \to \mathbb{R}^3$, definita da $\varphi(u,v) = (u, v, f(u,v))^T$, $\Sigma = G(f)$. Sappiamo che è:

$$\|\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u})\| = \sqrt{1 + \|\nabla f(\underline{u})\|^2}.$$

Si ottiene

$$A(\Sigma) = \iint_K \sqrt{1 + \|\nabla f(\underline{u})\|^2} dudv.$$

ESEMPIO. 3) (Area della *calotta parabolica*.) Siano: f: $K \to \mathbb{R}$, $f(u,v) = u^2 + v^2$, $K = \{(u,v)^T: u^2 + v^2 \leq 1\}$. Si ha

$$A(\Sigma) = \iint_K \sqrt{1 + \|\nabla f(\underline{u})\|^2}\,dudv = \iint_K \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}\,dudv =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2}\,\rho d\rho = \frac{2\pi}{8}\int_1^5 \sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4}\frac{2}{3}[\sqrt{t^3}]_1^5 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1).$$

Area di una superficie cilindrica. Siano: (γ,Γ) una curva piana regolare semplice, con γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1 definita da $\gamma(u) = (x(u), y(u))^T$, f,g: $E(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ continue, con $f(\underline{x}) \leq g(\underline{x})$ per ogni $\underline{x} \in E$ e $\Gamma \subset E$. Si vede facilmente che l'insieme

$$\Sigma = \{(x,y,z)^T: (x,y)^T \in \Gamma, f(x,y) \leq z \leq g(x,y)\}$$

è il sostegno della superficie regolare semplice di rappresentazione parametrica φ: $K \to \mathbb{R}^3$, con

$$K = \{(u,v)^T: a \leq u \leq b, f(x(u,v),y(u,v)) \leq v \leq g(x(u,v),y(u,v))\}$$

e

$$\varphi(u,v) = (x(u), y(u), v)^T.$$

Una superficie (φ,Σ) così definita è detta *cilindrica*. Fissato $(x,y)^T \in \Gamma$, la retta parallela all'asse z passante per $(x,y,0)^T$ si dice *retta generatrice*; mentre il sostegno della curva γ si dice *direttrice* della superficie cilindrica.

Si ha

$$\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u}) = (y'(u), -x'(u), 0)^T,$$

$$\|\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u})\| = \sqrt{y'^2(u) + x'^2(u)} = \|\gamma'(u)\|,$$

$$A(\Sigma) = \iint_K \|\gamma'(u)\|\,dudv = \int_a^b du \int_{f(x(u),y(u))}^{g(x(u),y(u))} \|\gamma'(u)\|\,dv =$$

$$= \int_a^b \|\gamma'(u)\|\,(g(x(u),y(u)) - f(x(u),y(u)))du = \int_\gamma (g(x(u),y(u)) - f(x(u),y(u)))ds.$$

ESEMPIO. 4) Siano: γ: $I = [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(u) = (u, \frac{u^2}{2})^T$, f,g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definite da $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = x$. Si ha:

$$K = \{(u,v)^T: 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq u\}, \Sigma = \{(x,y,z)^T: 0 \leq x \leq 1, y = \frac{x^2}{2}, 0 \leq z \leq x\},$$

$$A(\Sigma) = \iint_K \sqrt{1 + u^2}\,dudv = \int_0^1 du \int_0^u \sqrt{1 + u^2}\,dv = \int_0^1 u\sqrt{1 + u^2}\,du = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}(\sqrt{8} - 1).$$

Area di una superficie di rotazione. Sia (γ,Γ) una curva piana regolare semplice, con γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1 definita da $\gamma(u) = (x(u), z(u))^T$, con $x(u) > 0$ per ogni $u \in\ ]a,b[$.

Facendo ruotare Γ di un angolo $\alpha \in\ ]0, 2\pi]$ attorno all'asse z, si ottiene il sostegno Σ di una superficie regolare semplice di rappresentazione parametrica $\varphi: K \to \mathbb{R}^3$, con

$$K = [a,b] \times [0,\alpha] \quad \text{e} \quad \varphi(u,v) = (x(u)\cos v,\ x(u)\sin v,\ z(u))^T.$$

Una superficie (φ, Σ) così definita è detta *di rotazione.*

Si ha $\qquad \varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u}) = (-x(u)z'(u)\cos v,\ -x(u)z'(u)\sin u,\ \ x(u)x'(u))^T,$

$$\|\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u})\| = x(u)\sqrt{z'^2(u) + x'^2(u)} = x(u)\|\gamma'(u)\|,$$

$$(*) \qquad A(\Sigma) = \iint_K x(u)\ \|\gamma'(u)\| du dv = \alpha \int_a^b x(u)\ \|\gamma'(u)\| du = \alpha \int_\gamma x\ ds.$$

Ricordiamo che il numero

$$\overline{x} = \frac{\int_\gamma x\ ds}{l(\gamma)}$$

fornisce l'ascissa del baricentro geometrico di Γ. Dalla (*) si ricava immediatamente il

TEOREMA 1. *(Primo Teorema di Pappo - Guldino) - L'area di una superficie di rotazione ottenuta ruotando di un angolo* $\alpha \in\ ]0,2\pi]$ *attorno all'asse z una curva regolare semplice* (γ, Γ), *con* Γ *contenuto nel semipiano di ascissa* $x \geq 0$, *è data da*

$$A(\Sigma) = \alpha \int_\gamma x\ ds = \overline{x}\,\alpha l(\gamma),$$

essendo $\overline{x}$ *l'ascissa del baricentro geometrico di* Γ. ∎

ESEMPI. 5) Area della superficie laterale di un "tronco di cono". Siano: $\gamma: I = [1,2] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(u) = (u, 2u)^T$, $K = [1,2] \times [0,2\pi]$; si ha:

$$A(\Sigma) = \iint_K x(u)\ \|\gamma'(u)\| du dv = 2\pi \int_1^2 \sqrt{5} u\ du = \pi\sqrt{5}\ [u^2]_1^2 = 3\pi\sqrt{5}.$$

6) Area della superficie del toro. Si parte dalla curva (γ, Γ), con $\gamma: [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(u) = (R + r\cos u,\ r\sin u)^T$, che è la circonferenza di centro $(R, 0)^T$ del piano xz e raggio r ($\leq R$), e si ruota di 2π attorno all'asse z. Applichiamo il Primo Teorema di Pappo - Guldino. Il baricentro di Γ è, ovviamente, il punto $(R,0)^T$. Si ha dunque:

$$A(\Sigma) = \overline{x}\,\alpha l(\gamma) = R\,(2\pi)(2\pi r) = 4\pi^2 Rr.$$

Volume dei solidi di rotazione

Sia K un dominio del piano xz, con $x \geq 0$ per ogni $(x,z)^T \in K$. Facendo ruotare K di un angolo $\alpha \in\ ]0,2\pi]$ attorno all'asse delle z, si ottiene un *solido di rotazione E* del quale vogliamo determinare il volume. Siano $D = K \times [0,\alpha]$, Φ: $D \to E$ definita da $\Phi(u,v,w) = (u \cos w, u \sin w, v)^T$. La Φ è di classe C^1 in D, biiettiva fra *int D* e *int E* e si ha $|det\,(J\Phi)(u,v)| = u > 0$ in ogni punto di *int D*. Si ottiene:

$$(*) \qquad m(E) = \iiint_E 1\, dxdydz = \iiint_D u\, dudvdw = \int_0^\alpha dw \iint_K u\, dudv = \alpha \int_K x\, dm.$$

Ricordiamo che il numero

$$\overline{x} = \frac{\int_K x\, dm}{m(K)}$$

fornisce l'ascissa del baricentro geometrico del dominio piano K. Dalla (*) si ricava immediatamente il

TEOREMA 2. *(Secondo Teorema di Pappo - Guldino) - Il volume di un solido di rotazione E ottenuto ruotando di un angolo* $\alpha \in\,]0,2\pi]$ *attorno all'asse z un dominio K, contenuto nel piano xz e con* $x \geq 0$, *è data da*

$$m(E) = \alpha \int_K x\, dm = \overline{x}\, \alpha\, m(K),$$

essendo $\overline{x}$ *l'ascissa del baricentro geometrico di K.* ∎

ESEMPIO. 7) Ricalcoliamo il volume del toro. Si parte dal cerchio K di centro $(R, 0)$ del piano (x,z) e raggio r $(\leq R)$, e si ruota di 2π attorno all'asse z. Applichiamo il Secondo Teorema di Pappo - Guldino. Il baricentro di K è il punto $(R,0)$. Si ha dunque:

$$m(E) = \overline{x}\, \alpha\, m(K) = R\,(2\pi)(\pi r^2) = 2\pi^2 R r^2.$$

§ 4. INTEGRALI SUPERFICIALI

Siano: (φ, Σ), con φ: $K(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$, una superficie regolare semplice e f: $E(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ un campo scalare continuo, con $\Sigma \subset E$.

DEFINIZIONE. Si definisce *integrale superficiale di f su* Σ il numero

$$\iint_\Sigma f\, d\sigma := \iint_K f(\varphi(u,v))\, \|\varphi_u(u,y) \wedge \varphi_v(u,v)\| dudv.$$

OSSERVAZIONE. Se f è la funzione costante 1, si ha

$$\iint_\Sigma 1\, d\sigma = \iint_K \|\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u})\| dudv = A(\Sigma).$$

ESEMPI. 1) Determinare il baricentro della superficie conica (φ,Σ), con $\Sigma = \{(x,y,z)^T\!: z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 1\}$. Si può assumere φ: $K(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})^T$, $K = \{(u,v)^T\!: u^2 + v^2 \leq 1\}$; si ha $\|\varphi_u(u,y) \wedge \varphi_v(u,v)\| = \sqrt{2}$.

Il baricentro cercato è il punto di coordinate $(0, 0, \overline{z})^T$, con

$$\overline{z} = \frac{\iint_\Sigma z\, d\sigma}{\iint_\Sigma 1 d\sigma} = \frac{\iint_K \sqrt{u^2 + v^2}\, \|\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u})\| dudv}{\iint_K \|\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u})\| dudv} = \frac{\iint_K \sqrt{u^2 + v^2} dudv}{\iint_K 1 dudv} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho^2 d\rho}{\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho d\rho} = \frac{2}{3}.$$

2) Calcolare $\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma$, con $\Sigma = \{(x,y,z)^T\colon x^2 + y^2 - z = -1,\ 1 \le z \le 3\}$. Si può assumere $\varphi\colon K(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = (u, v, 1 + u^2 + v^2)^T$, $K = \{(u,v)^T\colon u^2 + v^2 \le 2\}$. Si ha

$$\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma = \iint_K (u^2 + v^2)\sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)}\, dudv =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho = \pi \int_1^3 \frac{p^4 - p^2}{8} dp,$$

avendo posto $1 + 4\rho^2 = p^2$. Si ottiene:

$$\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma = \frac{\pi}{8} \left[\frac{p^5}{5} - \frac{p^3}{3}\right]_1^3 = \frac{\pi}{8} \left[\frac{242}{5} - \frac{26}{3}\right].$$

§ 5. E S E R C I Z I

1) Si ricalcoli l'area della superficie sferica utilizzando il 1° Teorema di Pappo - Guldino.

2) Si calcoli l'area della superficie che delimita il solido

$$E = \{(x,y,z)^T\colon x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x^2 + y^2 \le x\}.$$

3) Si calcoli l'area della superficie di sostegno $\Sigma = \{(x,y,z)^T\colon x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ 0 \le z \le 1\}$.

4) Si calcolino baricentro e momento rispetto all'asse z di una massa di densità $\mu(x,y,z) = x^2 + y^2$ distribuita sulla superficie di equazione $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

5) Si calcoli l'area della parte del piano $z = x + y + 1$ interna al cilindro di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$.

6) Si calcoli $\iint_\Sigma x d\sigma$, essendo Σ la parte del cilindro $z = \frac{x^2}{2}$ interna al cilindro $x^2 + y^2 \le 1$.

7) Si calcoli l'area della superficie cilindrica $x^2 + z^2 = a^2$ interna al cilindro $y^2 + z^2 \le b^2$, con $0 \le b \le a$.

8) Si calcoli il momento d'inerzia rispetto all'asse z della superficie $\Sigma = \{(x,y,z)^T\colon x^2 + y^2 = 1,\ |z| \le 1\}$, sapendo che la sua densità superficiale è $\mu(x,y,z) = z^2$.

9) Calcolare $\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma$, con $\Sigma = \{(x,y,z)^T\colon x^2 + y^2 - z^2 = -1,\ 1 \le z \le \sqrt{5}\}$.

Capitolo Diciasettesimo

RICHIAMI DI GEOMETRIA ANALITICA

§ 1. EQUAZIONI DI RETTE E PIANI

Riferiremo sempre lo spazio ad un sistema ortogonale e monometrico di coordinate.

Ricordiamo che, dati i due punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, si indica con $P_1 - P_2$ il vettore $(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)^T$. Se è $P_1 - P_2 = \underline{u}$, si scrive anche $P_1 = P_2 + \underline{u}$. Si dice in tal caso che il vettore $\underline{u}$ è *applicato* in P_2. In particolare, assegnare il punto $P(x, y, z)$ equivale ad assegnare il vettore $P - O := (x, y, z)^T$. Ricordiamo inoltre che, dati i due vettori di $\mathbb{R}^3$ $\underline{u}_1 := (x_1, y_1, z_1)^T$ e $\underline{u}_2 := (x_2, y_2, z_2)^T$, si chiama loro *prodotto scalare* il numero reale definito da

$$\langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle := x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

mentre è detta *norma* del vettore $\underline{u} := (x, y, z)^T$ il numero reale non negativo

$$\|\underline{u}\| := d(\underline{u}, \underline{0}) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle}.$$

Dati i due vettori non nulli $\underline{u}_1 := (x_1, y_1, z_1)^T$ e $\underline{u}_2 := (x_2, y_2, z_2)^T$, applicati in un punto A, si ponga $B := A + \underline{u}_1$ e $C := A + \underline{u}_2$. Si ha subito $C - B = \underline{u}_2 - \underline{u}_1$. Se $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ non sono paralleli, resta individuato il triangolo $\Delta(BAC)$. Detto poi α il corrispondente angolo in A, esso sarà detto *angolo formato dai due vettori*. Se $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ sono paralleli, si assume come α l'angolo nullo, se i due vettori hanno lo stesso verso, l'angolo piatto se hanno verso opposto.

TEOREMA 1. *Siano dati i due vettori* $\underline{u}_1 := (x_1, y_1, z_1)^T$, $\underline{u}_2 := (x_2, y_2, z_2)^T$ *e sia* α *l'angolo da essi formato.*

1) *Si ha* $\qquad \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle = \|\underline{u}_1\| \cdot \|\underline{u}_2\| \cos\alpha.$

2) *Si ha* $\qquad \underline{u}_1 \perp \underline{u}_2 \Leftrightarrow \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle = 0.$

DIM. Applichiamo i vettori $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ ad un punto A; poniamo $B := A + \underline{u}_1$, $C := A + \underline{u}_2$ e indichiamo con α l'angolo formato dai due vettori. Se i due vettori sono paralleli, la (1) segue subito dalla Proposizione 23,6' del Capitolo 11. In caso contrario, applicando il Teorema del coseno al triangolo $\Delta(BAC)$, si ottiene

$$\|\underline{u}_2 - \underline{u}_1\|^2 = \|\underline{u}_2\|^2 + \|\underline{u}_1\|^2 - 2\,\|\underline{u}_2\| \cdot \|\underline{v}_1\| \cos\alpha.$$

D'altra parte, dallo sviluppo di $\|\underline{u}_2 - \underline{u}_1\|^2$ si ha

$$\|\underline{u}_2 - \underline{u}_1\|^2 = \|\underline{u}_2\|^2 + \|\underline{u}_1\|^2 - 2\,\langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle.$$

Sostituendo e semplificando, si ricava immediatamente la (1).

La (2) segue dalla (1) e dal fatto che si ha $\underline{u}_1 \perp \underline{u}_2$ se e solo se è $\cos\alpha = 0$. ∎

Possiamo ora ricavare facilmente le equazioni di una retta nel piano, di un piano nello spazio e di una retta nello spazio, nonché le condizioni di parallelismo e ortogonalità.

La retta nel piano

Siano r una retta del piano ed A un punto non appartenente a r. Diciamo $P_0(x_0, y_0)$ il piede della perpendicolare ad r passante per A. Sia poi $\underline{a} := A - P_0 = (a, b)^T$. Un punto $P(x, y)$ del piano appartiene ad r se e solo se il vettore $P - P_0$ è *ortogonale* al vettore $\underline{a}$. Si ottiene così l'*equazione vettoriale* della rette r:

$$\boxed{\langle \underline{a}, P - P_0 \rangle = 0.}$$

Esplicitando, si ottiene l'*equazione cartesiana* della retta r:

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.}$$

Dunque, l'equazione di una retta del piano è del tipo $ax + by + c = 0$, con $(a, b) \neq (0, 0)$. Viceversa, un'equazione del tipo $ax + by + c = 0$, con $(a, b) \neq (0, 0)$ [per esempio con $b \neq 0$], è l'equazione di una retta, dato che può essere scritta nella forma $a(x - 0) + b(y - (-c/b)) = 0$.

Va tenuto ben presente che, data la retta r di equazione $ax + by + c = 0$, con $(a, b) \neq (0, 0)$, il vettore $(a, b)^T$ è ortogonale a r. Ricordando poi che l'angolo (acuto o retto) formato da due rette è uguale a quello formato dalle due perpendicolari, si ottiene che:

TEOREMA 2. *Date le rette r e r' di equazioni rispettive $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$, il coseno dell'angolo (acuto o retto) α da esse formato è dato da*

$$\cos\alpha = \frac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2}}.$$

Le rette r e r' sono ortogonali se e solo se si ha $\quad aa' + bb' = 0$.

Le rette r e r' sono parallele se e solo se sono paralleli i vettori $(a, b)^T$, $(a', b')^T$, ossia se e solo se esiste un numero reale non nullo ρ tale che $\quad a' = \rho a, \quad b' = \rho b$. ∎

Data una retta r e su di essa due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, un punto $P(x, y)$ appartiene a r se e solo se sono paralleli i vettori $P_2 - P_1$ e $P - P_1$, ossia se e solo se si ha

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}, \quad \text{o eventualmente } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \text{ che è del tipo precedente.}$$

Notiamo che, se è $x_2 = x_1$, ci si riduce all'equazione $x = x_1$; analogamente nel caso $y_2 = y_1$.

Si ottengono così le *equazioni parametriche* della retta r passante per $P_0(x_0, y_0)$ e direzione (orientata) $\underline{v} := (a, b)^T$:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}.}$$

ESEMPI. 1) La retta passante per i punti $A(1, 2)$ e $B(-3, 5)$ ha equazione $\frac{x - 1}{-4} = \frac{y - 2}{3}$.

2) Le equazioni parametriche della retta passante per il punto $A(1, 2)$ e parallela al vettore $\underline{a} = (-1, 3)^T$ sono $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$.

3) Le due rette di equazione $4x - 3y + 1 = 0$ e $x + y + 2 = 0$ formano un angolo acuto α per cui è $\cos\alpha = \frac{4 - 3}{\sqrt{16 + 9}\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$.

Il piano nello spazio

Siano π un piano ed A un punto non appartenente a π. Diciamo $P_0(x_0, y_0, z_0)$ il piede della perpendicolare a π passante per A. Sia poi $\underline{v} := A - P_0 = (a, b, c)^T$. Un punto $P(x, y, z)$ dello spazio appartiene a π se e solo se il vettore $P - P_0$ è *ortogonale* al vettore $\underline{v}$. Si ottiene così l'*equazione vettoriale* del piano π:

$$\boxed{\langle \underline{a}, P - P_0 \rangle = 0.}$$

Esplicitando, si ottiene l'*equazione cartesiana* del piano π:

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.}$$

Dunque, l'equazione di un piano è del tipo $ax + by + cz + d = 0$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Viceversa, un'equazione del tipo $ax + by + cz + d = 0$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ [per esempio con $c \neq 0$], è l'equazione di un piano, dato che può essere scritta nella forma $a(x - 0) + b(y - 0) + c(z - (-d/c)) = 0$.

Va tenuto ben presente che, dato il piano π di equazione $ax + by + cz + d = 0$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, il vettore $(a, b, c)^T$ è ortogonale a π. Ricordando poi che l'angolo (acuto o retto) formato da due piani è uguale a quello formato da due rette ad essi rispettivamente ortogonali e fra loro incidenti, si ottiene:

TEOREMA 3. *Dati i piani* π *e* π' *di equazioni rispettive* $ax + by + cz + d = 0$ *e* $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, *il coseno dell'angolo (acuto o retto)* α *da essi formato è dato da*

$$\cos\alpha = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

I piani π *e* π' *sono ortogonali se e solo se si ha* $aa' + bb' + cc' = 0$.

I piani π *e* π' *sono paralleli se e solo se sono paralleli i vettori* $(a, b, c)^T$ e $(a', b', c')^T$, *ossia se e solo se esiste un numero reale non nullo* ρ *tale che* $a' = \rho a$, $b' = \rho b$, $c' = \rho c$. ∎

Dato un piano π e su di esso tre punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$,e $P_3(x_3, y_3, z_3)$ non allineati, un punto $P(x, y, z)$ appartiene a π se e solo se il vettore $P - P_1$ è combinazione lineare dei vettori $P_2 - P_1$ e $P_3 - P_1$. Si ottengono così le *equazioni parametriche del piano*:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)u + (x_3 - x_1)v \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)u + (y_3 - y_1)v. \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)u + (z_3 - z_1)v \end{cases}}$$

Ciò equivale a:
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

ossia:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 & 0 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \end{vmatrix} = 0\ ; \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

ESEMPIO. 4) Il piano per i punti $A(1, 2, 1)$, $B(2, 1, 0)$ e $C(0, 1, 2)$ è rappresentato da:

$$\begin{cases} x = 1 + u - v \\ y = 2 - u - v \\ z = 1 - u + v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + z = 2.$$

La retta nello spazio

Siano r una retta dello spazio e $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ due suoi punti. Un punto $P(x, y, z)$ dello spazio appartiene a r se e solo se sono paralleli i vettori $P - P_0$ e $P_1 - P_0$. Si ottengono così le *equazioni parametriche* della retta r passante per P_0 e direzione (orientata) $\underline{v} = (a, b, c)^T := P_1 - P_0$:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt. \\ z = z_0 + ct \end{cases}}$$

Si ricavano anche, con prudenza, le *equazioni cartesiane* di una retta per due punti:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.}$$

Naturalmente, un altro modo per rappresentare una retta dello spazio è quello di esprimerla come intersezione di due piani non paralleli:

$$\boxed{\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}, \quad \text{con } (a, b, c)^T \neq \rho(a', b', c')^T.}$$

Siano dati il piano π ed un suo punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. L'equazione di π è dunque del tipo $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. Sappiamo che il vettore $\underline{v} := (a, b, c)^T$ è ortogonale a π, dato che è ortogonale a tutte le rette di π passanti per P_0.

ESEMPI. 5) La retta ortogonale al piano di equazione $x - 2y + 3z + 1 = 0$ e passante per il punto $P_0(2, 0, -1)$ è rappresentata dalle equazioni: $x = 2 + t$; $y = - 2t$; $z = -1 + 3t$.

6) La retta per $P_1(2, 0, -1)$ e $P_2(2, 1, 3)$ ha equazioni: $(x = 2) \wedge (4y = z + 1)$.

Siano dati un piano π e una retta r ad esso incidente in un punto A. L'angolo β complementare dell'angolo α (acuto o retto) che r forma con la normale s a π passante per A si chiama *angolo fra r e* π. Si dimostra che β è il più piccolo angolo che r forma con le rette di π uscenti dal punto A.

TEOREMA 4. *Date due rette incidenti r e r' di direzioni rispettive* $\underline{v} := (a, b, c)^T$ *e* $\underline{v}' := (a', b', c')^T$, *il coseno dell'angolo (acuto o retto)* α *da esse formato e il seno dell'angolo* β *che r forma con un piano* π *ortogonale a* r' *sono dati da*

$$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

Le rette r e r' sono ortogonali se e solo se si ha $aa' + bb' + cc' = 0$. ∎

ESEMPIO. 7) Cerchiamo la retta s per l'origine, incidente e ortogonale alla retta r di equazioni $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-3} = z + 1$. Il piano π per l'origina e ortogonale a r ha equazione $2x - 3y + z = 0$. Il piede di r su π è il punto A di coordinate $\frac{12}{7}, \frac{13}{14}, -\frac{9}{14}$. La retta s è dunque espressa alle equazioni

$$\frac{7}{12}x = \frac{14}{13}y = -\frac{14}{9}z.$$

§ 2. TRASFORMAZIONI DI COORDINATE

Indichiamo con $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ i tre versori fondamentali del nostro sistema di riferimento cartesiano (ortogonale e monometrico) di origine O. Siano ora $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3$ tre versori a due a due ortogonali applicati in un punto O' e assumiamoli come nuovo sistema di riferimento. Vogliamo stabilire le formule di trasformazione che esprimono il passaggio dall'uno all'altro dei sistemi di riferimento.

Per passare dal sistema di partenza a quello che si ottiene applicando in O' i versori $\underline{e}_i$, basta effettuare un'opportuna traslazione. Sia dunque $O'(a, b, c)$. Se il punto P aveva coordinate (x, y, z) nel vecchio sistema di riferimento, le coordinate (x', y', z') nel nuovo sistema sono espresse da

$$\boxed{\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b. \\ z' = z - c \end{cases}}$$

Infatti, posto $\underline{v} := O' - O = (a, b, c)^T$, si ha

$$\underline{x}' = P - O' = (P - O) + (O - O') = \underline{x} - \underline{v}.$$

Passiamo al caso in cui i vettori $\underline{e}_i$ e $\underline{e}'_j$ sono applicati ad un medesimo punto O. Sia dunque $\underline{e}'_1 := (a_{11}, a_{12}, a_{13})^T$, $\underline{e}'_2 := (a_{21}, a_{22}, a_{23})^T$, $\underline{e}'_3 := (a_{31}, a_{32}, a_{33})^T$. Nel nuovo sistema di riferimento, questi vettori devono costituire la base canonica. Per esprimere le vecchie coordinate in funzione delle nuove, cerchiamo l'applicazione lineare che porta $\underline{e}_1 := (1, 0, 0)^T$ in $\underline{e}'_1$, $\underline{e}_2 := (0, 1, 0)^T$ in $\underline{e}'_2$, $\underline{e}_3 := (0, 0, 1)^T$ in $\underline{e}'_3$. Sappiamo che questa trasformazione è data da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad [\underline{x} = A\underline{x}'\ ].$$

In conclusione, la trasformazione di coordinate è espressa dalla formula

$$(*) \qquad \boxed{\underline{x} = A\underline{x}' + \underline{v}}\,.$$

ESEMPIO. 1) Si consideri come nuovo sistema di riferimento quello formato dai tre versori (a 2 a 2 ortogonali) $\underline{e}'_1 := (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$, $\underline{e}'_2 := (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$, $\underline{e}'_3 := (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})^T$ applicati nel punto $O'(,1, 2, 3)$. La legge che esprime le vecchie coordinate in funzione delle nuove è data da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le colonne della matrice A che compare nella (*) sono formate dalle coordinate dei versori $\underline{e}'_i$ che, per ipotesi, sono a 2 a 2 ortogonali. È dunque $\langle \underline{e}'_i, \underline{e}'_j \rangle = \delta_{ij}$, dove δ_{ij} è la funzione (di Dirac) che vale 1 se è $i = j$ e vale 0 se è $i \neq j$.

DEFINIZIONE. Una matrice quadrata $(a_{ij})_{i,j\,=\,1,2,\ldots n}$ è detta *ortogonale* se è $AA^T = I$ (= matrice identica).

TEOREMA 5. *Sia* $A = (a_{ij})_{i,j\,=\,1,2,\ldots n}$ *una matrice quadrata di ordine n. Le quattro seguenti affermazioni sono fra loro equivalenti:*

1) $AA^T = I$.

2) $A^TA = I$.

2) *Il prodotto scalare* $\langle \underline{r}_i, \underline{r}_j \rangle$ *dei vettori riga è uguale a* δ_{ij}.

3) *Il prodotto scalare* $\langle \underline{c}_i, \underline{c}_j \rangle$ *dei vettori colonna è uguale a* δ_{ij}.

DIM. Avendosi $A^TA = (AA^T)^T$, si ha $A^TA = I$ se e solo se è $AA^T = I$. Ciò prova l'equivalenza fra le prime due affermazioni.

L'equivalenza delle prime due affermazioni con ciascuna delle altre due si ottiene immediatamente osservando che il prodotto righe per colonne delle matrici A e A^T [delle matrici A^T e A] è uguale al prodotto righe per righe [colonne per colonne] della matrice A. ∎

Da questo fatto, si ottiene che *L'inversa di una matrice ortogonale è data dalla sua trasposta*. Ne viene che: *Il determinante di una matrice ortogonale è uguale a* 1 *o a* -1.

L'inversa della (*) (espressa da $\underline{x}' = A^{-1}(\underline{x} - \underline{v})$ assume la più comoda espressione

$$\boxed{\underline{x}' = A^T(\underline{x} - \underline{v})}\,.$$

ESEMPIO. 2) La legge di trasformazione inversa di quella dell'Esempio 1 è data da

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \\ z - 3 \end{pmatrix}.$$

§ 3. LE CONICHE COME LUOGHI GEOMETRICI

Penseremo sempre il piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche Oxy.

Circonferenza

DEFINIZIONE. Dati un punto A e un numero reale positivo r, si chiama *circonferenza* di *centro* A e *raggio* r il luogo geometrico dei punti P del piano per i quali è costantemente uguale a r la distanza $d(A, P)$.

Se è $A(\alpha, \beta)$ e se $P(x, y)$ è un punto della circonferenza di centro A e raggio r, deve essere $d(A, P) = r$; ossia, elevando al quadrato $(d(A, P))^2 = r^2$. Sviluppando, si ottiene che l'equazione della circonferenza di centro A e raggio r è data da

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

o anche
$$\boxed{x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0, \quad \gamma = \alpha^2 + \beta^2 - r^2.}$$

Viceversa, data l'equazione

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0,$$

questa rappresenta una circonferenza se e solo se è

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma > 0.$$

In tal caso, il centro A e il raggio r della circonferenza sono dati da

$$\boxed{A(\alpha, \beta), \qquad r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma}\,.}$$

Ellisse

DEFINIZIONE. Dati due punti F_1, F_2 e un numero reale positivo a, con $2a > d(F_1, F_2)$, si chiama *ellisse* di *fuochi* F_1, F_2 e *semiasse maggiore* a il luogo geometrico dei punti P del piano per i quali è costantemente uguale a $2a$ la somma delle distanze di P da F_1 e da F_2.
La retta che unisce i punti F_1 e F_2 è detta *asse focale*; il punto medio del segmento che unisce i due fuochi è detto il *centro*; la normale all'asse focale passante per il centro è detta *asse trasverso*.

Come caso limite, si può accettare che una circonferenza è un'ellisse in cui i fuochi coincidono con il centro.
Mettiamoci in una situazione di comodo, supponendo che sia $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Se $P(x, y)$ è un punto dell'ellisse, deve essere $d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$, ossia

$$d(F_1, P) = 2a - d(F_2, P).$$

Dovendo chiaramente aversi $2a \geq d(F_2, P)$, possiamo elevare al quadrato senza introdurre nuove soluzioni. Si ricava così che l'equazione dell'ellisse studiata è data da

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x - c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2},$$

da cui, sviluppando e semplificando, ai ottiene

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Dovendo essere $x \leq a$ e $c < a$, è anche $cx < a^2$; possiamo elevare ancora al quadrato, ottenendo l'equazione

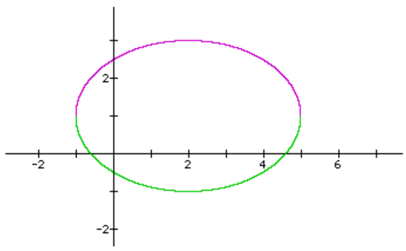
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Essendo $a^2 - c^2 > 0$, esiste un $b > 0$ per cui è $b^2 = a^2 - c^2$. L'ultima equazione può dunque essere scritta nella forma *canonica*:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

Il numero positivo b prende il nome di *semiasse minore* dell'ellisse.
Se i fuochi stanno sull'asse delle ordinate, si trova un'analoga equazione, ma con $a < b$.

Se invece, pur mantenendo l'asse focale parallelo all'asse delle ascisse, spostiamo il centro dell'ellisse nel punto $O'(\alpha, \beta)$, l'equazione diventa



$$\boxed{\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1.}$$

ESEMPIO. 1) In figura è rappresentata l'ellisse di equazione $\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1.$

Iperbole

DEFINIZIONE. Dati due punti F_1, F_2 e un numero reale positivo a, con $2a < d(F_1, F_2)$, si chiama *iperbole* di *fuochi* F_1, F_2 e *costante* $2a$ il luogo geometrico dei punti P del piano per i quali è costantemente uguale a $2a$ il valore assoluto della differenza delle distanze di P da F_1 e da F_2.

La retta che unisce i punti F_1 e F_2 è detta *asse focale*,; il punto medio del segmento che unisce i due fuochi è detto il *centro*; la normale all'asse focale passante per il centro è detta *asse trasverso*.

Mettiamoci ancora in una situazione di comodo, supponendo che sia $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Se $P(x, y)$ è un punto dell'iperbole, deve essere $|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a$. Dato un punto $P(x,y)$, esso appartiene all'iperbole se e solo se vi appartiene il punto $P'(-x, y)$; si ha inoltre $d(F_1, P) \geq d(F_2, P)$ se e solo se è $d(F_1, P') \leq d(F_2, P')$. Supposto, intanto, che sia $d(F_1, P) \geq d(F_2, P)$, si ottiene

$$d(F_1, P) = 2a + d(F_2, P).$$

Trattandosi di quantità positive, possiamo elevare al quadrato. Si ottiene:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x - c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2},$$

da cui, sviluppando e semplificando, ai ricava

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

Supposto $|x| \geq a$ ed essendo $a < c$, possiamo elevare ancora al quadrato; si ottiene l'equazione $(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = x^2(c^2 - a^2)$, ossia

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1. \qquad (*)$$

Partendo dall'ipotesi $d(F_1, P) < d(F_2, P)$ e supponendo sempre $|x| \geq a$, si ottiene ancora la (*). Osservato che la (*) non può essere soddisfatta da alcun punto di ascissa x con $|x| < a$, si conclude che, in entrambi i casi, il secondo elevamento al quadrato non ha introdotto nuove soluzioni.

Essendo $c^2 - a^2 > 0$, esiste un $b > 0$ per cui è $b^2 = c^2 - a^2$. L'ultima equazione può dunque essere scritta nella forma *canonica*:

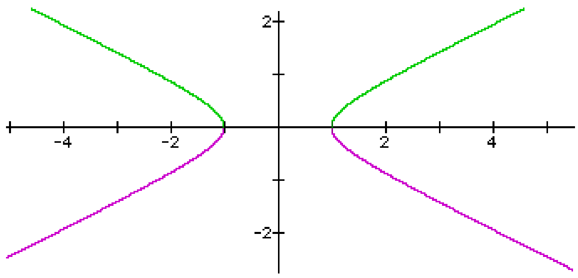
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

Le rette di equazione $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ sono dette gli *asintoti* dell'iperbole.
Se è $a = b$, l'iperbole è detta *equilatera*.
Se i fuochi stanno sull'asse delle ordinate, si trova un'analoga equazione del tipo

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.}$$

Se invece, pur mantenendo l'asse focale parallelo all'asse delle ascisse, spostiamo il centro dell'iperbole nel punto $O'(\alpha, \beta)$, l'equazione diventa

$$\boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1.}$$



ESEMPIO. 2) In figura è rappresentata l'iperbole di equazione $x^2 - 2y^2 = 1$. Gli asintoti hanno equazioni

$$y = \frac{1}{2}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{2}x.$$

L'equazione di un'iperbole equilatera può essere espressa nella forma

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Siccome in questo caso gli asintoti sono fra loro ortogonali, possono essere assunti come nuovo sistema di riferimento OXY. Effettuiamo una rotazione di assi di 45° utilizzando la legge

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

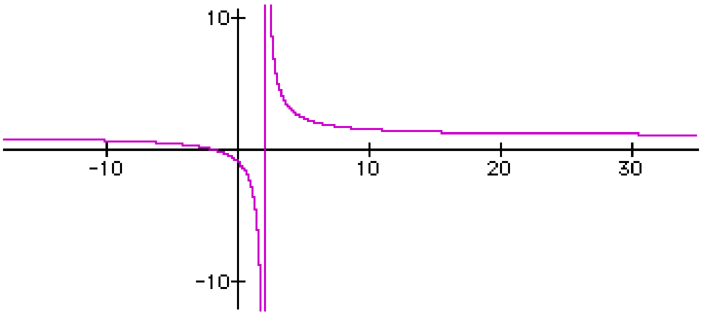
Si ottiene l'equazione $XY = \frac{a^2}{2}$. Se avessimo ruotato nel verso opposto, avremmo trovato l'equazione $XY = -\frac{a^2}{2}$. In conclusione, si ha che l'equazione *di un'iperbole equilatera riferita agli asintoti ha la forma*

$$\boxed{xy = k.}$$

Più in generale, se il sistema di assi e parallelo agli asintoti con centro in $O'(\alpha,\beta)$, l'equazione diventa

$$\boxed{xy - \beta x - \alpha y = h.}$$

ESEMPIO. 3) Riferendo l'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = 6$ agli asintoti, si ot-



tiene, per es., l'equazione $xy = 3$. Riferendola invece al sistema di assi paralleli agli asintoti e con centro in $O'(2, 1)$, come in figura, si ottiene l'equazione

$$xy - x - 2y = 1.$$

Parabola

DEFINIZIONE. Siano dati una retta d e un punto $F \notin d$. Si chiama *parabola* di *fuoco* F e *direttrice* d il luogo geometrico dei punti P del piano che hanno uguale distanza da F e da d.

La retta per F e ortogonale a d è detta *asse* della parabola; sia A il punto d'incontro dell'asse con la direttrice; il punto medio V del segmento AF è detto il *vertice* della parabola.

Mettiamoci nel caso particolare che sia $F(0, u)$, con $u \neq 0$, e la retta d abbia equazione $y = -u$, (da cui $V = O$). Dato un punto $P(x,y)$, esso appartiene alla parabola se e solo se si ha

$$\sqrt{x^2 + (y - u)^2} = |\, y + u|.$$

Trattandosi di quantità positive, possiamo elevare al quadrato. Si ottiene

$$x^2 + y^2 - 2uy + u^2 = y^2 + 2uy + u^2,$$

da cui, semplificando, si ricava $x^2 = 4uy$. Posto $a := \frac{1}{4u}$, si ottiene, in fine, l'equazione

$$\boxed{y = ax^2.}$$

Traslando la parabola in modo che il vertice si trovi nel punto $O'(\alpha, \beta)$ (mentre direttrice e asse della parabola restano paralleli, rispettivamente, all'asse delle ascisse e a quello delle ordinate), si ottiene l'equazione $y - \beta = a(x - \alpha)^2$. Si ricava cioè un'equazione del tipo

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c,}$$

con $$b := -2a\alpha \text{ e } c := a\alpha^2 + \beta.$$

Viceversa, un'equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$) rappresenta sempre una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate e vertice

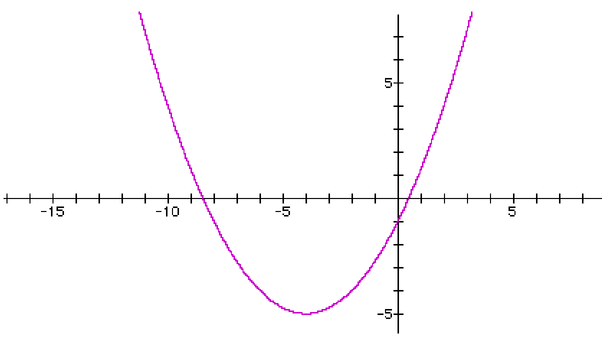
$$\boxed{V(\frac{-b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a})},$$

come si ricava immediatamente dalle posizioni precedenti.

Analogamente per le parabole con asse parallelo a quello delle ascisse.

ESEMPIO. 4) In figura è rappresentata la parabola di equazione

$$y = (1/4)x^2 + 2x - 1.$$



§ 4. FORME QUADRATICHE, MATRICI SIMMETRICHE E AUTOVALORI

Sia A una matrice quadrata di ordine n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

DEFINIZIONE. Data una matrice quadrata A di ordine n, si dice *forma quadratica associata ad A* la funzione Q: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$Q(\underline{u}) = \langle A\underline{u} , \underline{u}\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_iu_j .$$

Dunque, se $Q(\underline{u})$ non è il polinomio nullo, è un polinomio omogeneo di secondo grado.

Il coefficiente del monomio u_iu_j è $a_{ij} + a_{ji}$. Il valore $Q(\underline{u})$ non cambia se al posto di a_{ij} e di a_{ji} si sostituisce la loro media aritmetica. È dunque lecito supporre che nella matrice A sia $a_{ij} = a_{ji}$.

DEFINIZIONE. Una matrice quadrata $A = (a_{ij})_{i,j = 1,2,\dots,n}$ è detta *simmetrica* se è $a_{ij} = a_{ji}$, con $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Assegnare una forma quadratica equivale ad assegnare la matrice dei suoi coefficienti. Per quanto appena detto, è lecito supporre che questa matrice sia simmetrica.

ESEMPIO. 1) Una forma quadratica di $\mathbb{R}^n$, con $n = 1, 2, 3$, è dunque così espressa:

$n = 1$; $Q(u) = au^2$;

$n = 2$; $Q(u_1, u_2) = a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + a_{22}u_2^2$;

$n = 3$; $Q(u_1, u_2, u_3) = a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2 + 2a_{12}u_1u_2 + 2a_{13}u_1u_3 + 2a_{23}u_2u_3$.

Ricordiamo che:

DEFINIZIONE. Data la matrice quadrata $A = (a_{ij})_{i,j = 1,2,\dots,n}$, si chiama suo *autovettore* ogni vettore $\underline{u} \neq \underline{0}$ per cui è $A\underline{u} = \lambda\underline{u}$ per un opportuno numero complesso λ. Il numero λ prende il nome di *autovalore corrispondente* all'autovettore $\underline{u}$.

Se λ è un autovalore della matrice A, l'equazione $A\underline{u} - \lambda\underline{u} = \underline{0}$, ossia $(A - \lambda I)\underline{u} = \underline{0}$, ammette soluzioni non nulle. Ciò accade se e solo se la matrice quadrata $A - \lambda I$ ha caratteristica minore di n, ossia se e solo se il suo determinante è nullo.

ESEMPIO. 2) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Per determinare i suoi autovalori, bisogna risolvere l'equazione $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Sviluppando, si trova l'equazione $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda = 0$ che ha come radici i valori $\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$, $\lambda_3 = 0$.

L'algebra lineare insegna che:

TEOREMA 6. *Una matrice simmetrica A di ordine n ammette n autovalori reali,* λ_1, $\lambda_2, \dots, \lambda_n$, *(non necessariamente distinti) ed esiste una base ortonormale di* $\mathbb{R}^n$ *formata da autovettori.* ▮

Sia data una forma quadratica $Q(\underline{u}) = \langle A\underline{u}\, , \underline{u}\rangle$ individuata dalla matrice simmetrica A di autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e riferiamo lo spazio $\mathbb{R}^n$ ad un sistema ortonormale formato da autovettori. La Q assume la forma $Q(\underline{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$, la cui corrispondente matrice è la matrice diagonale

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

ESEMPIO. 3) Siano A la matrice dell'Esempio 2 e $Q(\underline{u}) = \langle A\underline{u}\, , \underline{u}\rangle$ la corrispondente forma quadratica. Riferito lo spazio ad un sistema ortonormale di autovettori, la Q assume, a meno di permutazioni degli assi, la forma

$$Q(\underline{x}) = \langle D\underline{x}\, , \underline{x}\rangle = (2 - \sqrt{2})x^2 + (2 + \sqrt{2})y^2.$$

§ 5. CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE

Esponiamo qui in modo schematico la classificazione delle coniche.

DEFINIZIONE. Sono dette *coniche* le curve piane individuate in forma implicita da un'equazione del tipo

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

dove i coefficienti a_{ij} (con $a_{ij} = a_{ji}$ $i,j = 1, 2, 3$) sono numeri reali fissati.

Consideriamo la forma quadratica

$$Q(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy.$$

Cercando gli autovalori della corrispondente matrice simmetrica A, si ottiene l'equazione

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

da cui

(1) $$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Risolvendo, si ha

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2}}{2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}.$$

Si è così verificato, nel caso $n = 2$, che una matrice simmetrica ha autovalori reali λ_1 e λ_2 (non necessariamente distinti). Sappiamo inoltre (Teorema 6) che esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori. Rispetto a questo nuovo sistema di riferimento, l'equazione della conica assume la più semplice forma

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2\mu_1 x + 2\mu_2 y + a_{33} = 0. \tag{2}$$

Dalla (1) si vede anche che è $\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}$ e $\lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Ne segue, in particolare, che le matrici A e D hanno lo stesso determinante.

N.B. La trasformazione di coordinate usata per passare dal vecchio al nuovo sistema di riferimento è un'*isometria* e, pertanto, conserva distanze e angoli. Ne consegue che la "forma„ della conica non viene modificata.

$$\boxed{\textbf{\textit{det A}} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2 > \mathbf{0}}$$

I coefficienti a_{11} e a_{22} devono avere lo stesso segno. Non è restrittivo supporre $a_{11} > 0$, in quanto basta, eventualmente, cambiare tutti i segni dell'equazione della conica. Si ottiene che fra i coefficienti della (1) ci sono due variazioni. Gli autovalori sono dunque entrambi positivi.

Completiamo i quadrati nella (2) aggiungendo e togliendo il numero

$$H = \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2}.$$

Si ottiene l'equazione

$$\lambda_1(x + \mu_1)^2 + \lambda_2(y + \mu_2)^2 - H + a_{33} = 0.$$

Con una traslazione di assi ci si riduce quindi all'equazione:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = K \ (:= H - a_{33}).$$

A questo punto, se è $K \neq 0$, dividiamo ambo i membri per $|K|$.

$$\boxed{\textbf{\textit{det A}} \ \mathbf{> 0, \text{ da cui }} \ \lambda_1 > \mathbf{0}, \ \lambda_2 > \mathbf{0}}$$

1) *Se è* $K > 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

che individua una curva detta ***ellisse.***

È lecito supporre a, b, positivi. Se è a = b (= r), si ottiene una ***circonferenza.***

2) *Se è* $K = 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

che individua l'insieme formato alla sola origine ($\{\underline{0}\}$).

3) *Se è* $K < 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

che individua l'insieme vuoto.

$\boxed{\boldsymbol{det\ A} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2 < \mathbf{0}}$

Se è $det\ A < 0$, fra i coefficienti della (1) ci sono una permanenza e una variazione (non necessariamente in quest'ordine). Gli autovalori sono dunque uno positivo e uno negativo. Non è restrittivo supporre $\lambda_1 > 0$. Si procede poi come nel caso precedente.

$\boxed{\boldsymbol{det\ A < 0}, \textbf{ da cui } \boldsymbol{\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0}}$

1) *Se è* $K > 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

*che individua una curva detta **iperbole**.*

2) *Se è* $K = 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

*che individua una curva formata da due rette incidenti (**iperbole riducibile**).*

3) *Se è* $K < 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

*che individua ancora un'**iperbole**.*

$\boxed{\boldsymbol{det\ A} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2 = \mathbf{0}}$

Se è $det\ A = 0$, almeno uno dei due coefficienti a_{11} o a_{22} deve essere diverso da zero (altrimenti, dovendo essere nullo anche a_{12}, Q sarebbe la forma quadratica nulla, caso che non ci interessa). Dalla (1) si ha

$$\lambda_1 = a_{11} + a_{22} \text{ e } \lambda_2 = 0.$$

Non è restrittivo supporre $\lambda_1 > 0$. Procediamo come nei casi precedenti:

$$H := \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} \quad \text{e} \quad K := H - a_{33};$$

ci si riduce (eventualmente con una traslazione) ad una delle seguenti equazioni:

$$\lambda_1 x^2 + \mu_2^* y = 0, \qquad \text{se è } \mu_2 \neq 0,$$

oppure

$$\lambda_1 x^2 = K, \qquad \text{se è } \mu_2 = 0.$$

$\boxed{\textbf{det}\, A = 0,\ \mu_2 \neq 0,\ \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 = 0}$

Si ottiene l'equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} - 2cy = 0,$$

che individua una curva detta ***parabola.***

$\boxed{\textbf{det}\, A = 0,\ \mu_2 = 0,\ \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 = 0.}$

1) *Se è* $K \geq 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} = 1,$$

*che individua una curva formata da due rette parallele (**parabola riducibile).***
Le rette sono distinte se è $K > 0$, *mentre sono coincidenti se è* $K = 0$.

2) *Se è* $K < 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} = -1,$$

che individua l'insieme vuoto.

§ 6. CLASSIFICAZIONE DELLE QUADRICHE

Passiamo ora ad un'esposizione quanto mai schematica delle superfici dette *quadriche*.

DEFINIZIONE. Sono dette *quadriche* le superfici individuate in forma implicita da un'equazione del tipo

$$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

dove i coefficienti a_{ij} (con $a_{ij} = a_{ji}$ $i,j = 1, 2, 3, 4$) sono numeri reali fissati.

Consideriamo la forma quadratica

$$Q(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

e la corrispondente matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Sappiamo che: *La matrice simmetrica A ammette* 3 *autovalori reali*, λ_1, λ_2, λ_3, *(non necessariamente distinti) ed esiste una base ortonormale formata da autovettori rispetto alla quale l'equazione* $f(x,y,z) = 0$ *assume la forma*

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2\mu_1 x + 2\mu_2 y + 2\mu_3 z + a_{44} = 0.$$

N.B. La trasformazione di coordinate usata per passare dal vecchio al nuovo sistema di riferimento è un'*isometria* e, pertanto, conserva distanze e angoli. Ne consegue che la "forma„ della superficie non viene modificata.

***det A* ≠ 0**

Se B è la matrice della trasformazione dalle vecchie alle nuove coordinate, si ha $D = BAB^T$. Si ottiene $\det A = \det D = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Ne viene che, in questo caso, gli autovalori sono tutti diversi da 0. Completiamo i quadrati aggiungendo e togliendo il numero

$$H = \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2} + \frac{\mu_3^2}{\lambda_3}.$$

Si ottiene l'equazione

$$\lambda_1(x + \mu_1)^2 + \lambda_2(y + \mu_2)^2 + \lambda_3(z + \mu_3)^2 - H + a_{44} = 0.$$

Con una traslazione di assi ci si riduce quindi all'equazione:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = K \ (:= H - a_{44}).$$

È lecito supporre λ_1 e λ_2 positivi. (Basta, eventualmente, cambiare il nome delle variabili o, se è il caso, moltiplicare ambo i membri dell'equazione per -1.)

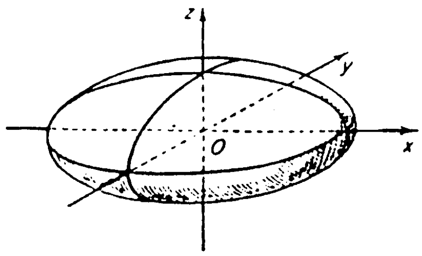
***det A* ≠ 0, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$**

1) *Se è* $K > 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

che individua una superficie detta ***ellissoide.***

È lecito supporre a, b, c, positivi. Se è $a = b = c$ $(= r)$, *si ottiene una* ***sfera.***



Ellissoide

2) *Se è* $K = 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

che individua l'insieme formato alla sola origine ($\{\underline{0}\}$).

3) *Se è* $K < 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

che individua l'insieme vuoto.

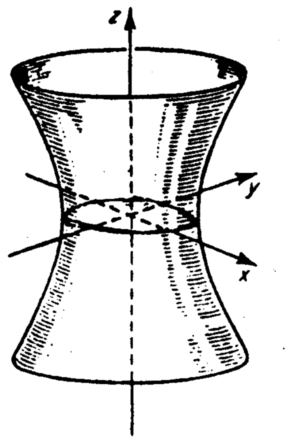
Nel primo e nel terzo caso, si divide per $|K|$.
La tecnica sarà poi simile in tutti gli altri casi.

$\boxed{\textbf{det } A \neq 0,\ \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 < 0}$

1) *Se è* $K > 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

che individua una superficie detta ***iperboloide ad una falda***.



Iperboloide a una falda

2) *Se è* $K = 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

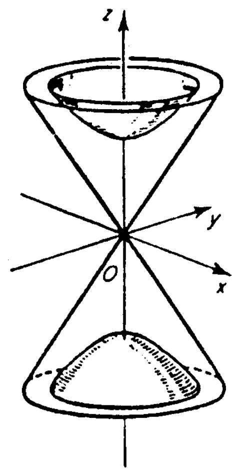
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

che individua una superficie detta ***cono.***

3) *Se è* $K < 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

che individua una superficie detta ***iperboloide a due falde***.



Iperboloide a due falde

$\det A = 0$, con un autovalore nullo

Sia $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_3 = 0$. Posto

$$H := \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2} \quad \text{e} \quad K := H - a_{44},$$

ci si riduce (eventualmente con una traslazione) ad una delle seguenti equazioni:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \mu_3^* z = 0, \qquad \text{se è } \mu_3 \neq 0,$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = K, \qquad \text{se è } \mu_3 = 0.$$

È inoltre lecito pensare $\lambda_1 > 0$.

$\det A = 0$, $\mu_3 \neq 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$

1) *Se è* $\lambda_2 > 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

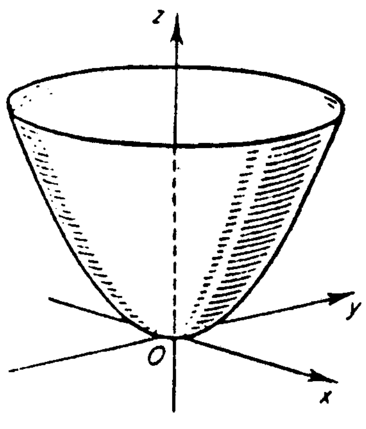
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2cz = 0,$$

che individua una superficie detta ***paraboloide ellittico.***

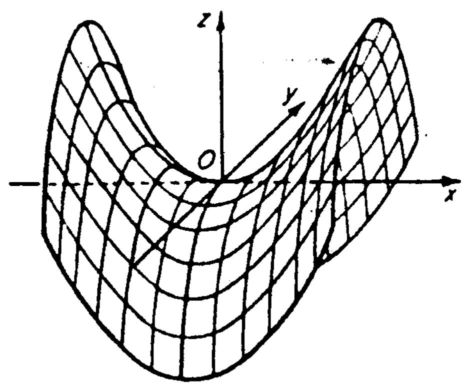
2) *Se è* $\lambda_2 < 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2cz = 0,$$

che individua una superficie detta ***paraboloide iperbolico***.



Paroboloide ellittico



Paraboloide iperbolico

$\det A = 0$, $\mu_3 = 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 = 0$

1) *Se è* $K \neq 0$, *si ottiene l' equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1,$$

che individua una superficie detta ***cilindro iperbolico.***

2) *Se è* $K = 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

che individua una superficie costituita da una ***coppia di piani (incidenti).***

$\det A = 0$, $\mu_3 = 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 = 0$

1) *Se è* $K > 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

che individua una superficie detta ***cilindro ellittico.***

2) *Se è* $K = 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

che individua l'asse delle z.

1) *Se è* $K < 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

che individua l'insieme vuoto.

$\det A = 0$, con due autovalori nulli

Sia $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Posto

$$H := \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} \quad \text{e} \quad K := H - a_{44},$$

ci si riduce (eventualmente con una rotazione o una traslazione) ad una delle seguenti equazioni:

$$\lambda_1 x^2 + 2\mu_2^* y = 0, \qquad \text{se è } |\mu_2| + |\mu_3| \neq 0,$$

$$\lambda_1 x^2 = K, \qquad \text{se è } |\mu_2| + |\mu_3| = 0.$$

È inoltre lecito pensare $\lambda_1 > 0$.

$\boxed{\textbf{det } \boldsymbol{A} \mathbf{= 0, \ |\mu_2| + |\mu_3| \neq 0, \lambda_1 > 0, \ \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0}}$

Si ottiene l'equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} - 2cy = 0,$$

che individua una superficie detta ***cilindro parabolico.***

$\boxed{\textbf{det } \boldsymbol{A} \mathbf{= 0, \ |\mu_2| + |\mu_3| = 0, \lambda_1 > 0, \ \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0}}$

1) *Se è* $K > 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} = 1,$$

che individua una superficie costituita da ***una coppia di piani (paralleli).***

2) *Se è* $K = 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} = 0,$$

che individua ***un piano (****o, se si preferisce,* ***una coppia di piani coincidenti).***

3) *Se è* $K < 0$, *si ottiene l'equazione canonica*

$$\frac{x^2}{a^2} = -1,$$

che individua l'insieme vuoto.

§ 7. E S E R C I Z I

1) Si dimostri che, quali che siano i vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$, si ha:

a) $\qquad ||\underline{u} + \underline{v}||^2 = ||\underline{u}||^2 + ||\underline{v}||^2 + 2 \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle;$

b) $\qquad \underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow ||\underline{u} + \underline{v}|| = ||\underline{u} - \underline{v}||.$

2) Sono dati nel piano cartesiano la retta r di equazione $2x - 3y - 1 = 0$ e i punti $A(1, 2)$, $B(2, 1)$.

a) Scrivere le equazioni delle rette s e t passanti per A e, rispettivamente, parallela ad r e ortogonale a r.

b) Scrivere le equazioni delle rette passanti per B e formanti con r un angolo di $\pi/4$. Lo stesso per un angolo di $\pi/3$.

[$\Re$. *b*) Primo caso. Si cercano rette di equazione $a(x - 2) + b(y - 1) = 0$ per cui è

$$\frac{|2a - 3b|}{\sqrt{13}\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dato che i coefficienti a e b sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità e dato che l'ipotesi $b = 0$ condurrebbe a un assurdo, è lecito porre $b = 1$. Si ottiene l'equazione $\sqrt{2}\,|2a - 3| = \sqrt{13}\,\sqrt{a^2 + 1}$. Elevando al quadrato e risolvendo, si trovano per a i valori -5 e 1/5, in accordo col fatto che le due rette cercate sono fra loro ortogonali.]

3) Sono dati nello spazio cartesiano il piano π di equazione $2x - 3y + z - 1 = 0$ e i punti $A(1, 2, 1)$, $B(2, 1, 0)$ $C(0, 1, 2)$.
a) Scrivere l'equazione del piano passante per A e B e ortogonale a π.
b) Scrivere le equazioni della retta r per A e ortogonale a π.
c) Scrivere le equazioni della retta s passante per A e per il punto medio del segmento BC.
d) Trovare il coseno dell'angolo acuto formato dalle rette r ed s.

4) *a*) Siano dati in un piano cartesiano la retta r di equazione $ax + by + c = 0$ ed il punto $P_0(x_0, y_0)$. Si chiama distanza di P_0 da r la minima distanza h di P_0 dai punti di r. Si dimostri che questa distanza è data da

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

b) Analogamente, dati dello spazio il piano π di equazione $ax + by + cz + d = 0$ e il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, si chiama distanza di P_0 da π la minima distanza h di P_0 dai punti di π. Si dimostri che questa distanza è data da

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

[$\Re$. *a*) Se è $P_0 \in r$, la formula dà correttamente $h = 0$. Sia ora $P_0 \notin r$ e supponiamo $a \neq 0$. Siano s la retta perpendicolare a r condotta da P_0 e H il punto d'intersezione tra r e s. Sappiamo che s è parallela al vettore $\underline{v} = (a, b)^T$. Posto $A(-c/a, 0) \in r$, il numero h è il valore assoluto della componente lungo s del vettore $A - P_0$. Si ha dunque

$$h = \left|\left\langle A - P_0, \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}\right\rangle\right| = \left|\left\langle \left(-\frac{c}{a} - x_0, -y_0\right)^T, \frac{(a, b)^T}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right\rangle\right| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.]$$

5) Scrivere le equazioni della generica retta passante per il punto $A(1, 1, 1)$ e appartenente al piano π di equazione $x - y + 2z - 2 = 0$.

[$\Re$. Una retta per A ha equazioni $\frac{x - 1}{l} = \frac{y - 1}{m} = \frac{z - 1}{n}$. Inoltre, le rette cercate devono essere parallele a π; deve dunque essere $l - m + 2n = 0$. Essendo l, m, n definiti a meno di un fattore di proporzionalità, si può assumere $n = 1$ e, quindi, $l = m - 2$, oppure $n = 0$ e $m = l$.]

6) Siano date nel piano le rette r e s di equazioni rispettive $x + 2y = 0$ e $2x + y = 0$. Scrivere le equazioni delle rette bisettrici digli angoli da esse formati.

[$\Re$. Un punto $P(x, y)$ appartiene ad una delle due bisettrici se e solo se ha ugual distanza da

r e da s. Si ottiene $|x + 2y| = |2x + y|$. Le equazioni cercate sono $3x + 3y = 0$ e $x - y = 0$.]

7) Stesso problema per le rette r e s dello spazio di equazioni $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2t. \\ z = t \end{cases}$ e $\begin{cases} x = t \\ y = 0. \\ z = 0 \end{cases}$

[$\Re$. Le rette cercate passano per l'origine che è il punto comune a r e s. La retta r passa per il punto $A(2, 2, 1)$ e la s passa per $B(1, 0, 0)$. Le due rette sono dunque rispettivamente parallele ai versori $\underline{u} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T$ e $\underline{v} = (1, 0, 0)^T$. Due vettori paralleli alle rette cercate sono $\underline{u} + \underline{v}$ e $\underline{u} - \underline{v}$ (perché?). Essendo $\underline{u} + \underline{v} = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T$ e $\underline{u} - \underline{v} = (\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T$, le rette cercate hanno dunque equazioni $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = z$ e, rispettivamente, $-x = \frac{y}{2} = z$.]

8) *a*) Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C(1,1)$ e tangente alla retta r di equazione $3x + 4y - 1 = 0$

b) Scrivere l'equazione della sfera di centro nel punto $D(1, 1, 1)$ e tangente al piano π di equazione $2x + 2y + z - 1 = 0$.

[$\Re$. Il raggio è dato dalla distanza del centro dalla retta r (dal piano π).]

9) Riconoscere e rappresentare nel piano cartesiano le seguenti coniche:

$x^2 + y^2 = 5$; $x^2 + 2y^2 = 4$; $2x^2 - y^2 = 1$; $-2x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 - x - y = 8$;

$xy - x - y = 1$; $3x^2 + 2y^2 - 6x + 4y = 1$; $2xy - x = 3$;

$x^2 - y^2 = 0$; $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x^2 - 2xy + y^2 + x - y = 0$.

10) Riconoscere e rappresentare le seguenti quadriche:

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$; $2x^2 + y^2 - z^2 = 1$; $x^2 - y^2 + z^2 = 1$; $x^2 - z = 0$;

$x^2 - y^2 - z^2 = 1$; $x^2 + y^2 - 2z = 0$; $x^2 - y^2 - z = 0$; $x^2 - x = 0$; $x^2 + 2y^2 = 1$; $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$.

11) Riconoscere che le seguenti superfici sono di rotazione e rappresentarle:

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; $x^2 - y^2 - z^2 = 2$; $x^2 + y^2 - z = 1$; $4x^2 - y^2 - z^2 = 0$.

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 1: struttura di $\mathbb{R}^n$, *prodotto scalare, distanza e topologia.*

Esercizio 1. Sia H uno spazio vettoriale sul quale è definito un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ricorda la disuguaglianza di Cauchy-Buniakovski-Schwarz

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

per ogni $x, y \in H$.

Si verifichi che vale l'uguaglianza

$$|\langle x, y\rangle| = ||x|| \cdot ||y||$$

se e soltanto se i due vettori x e y sono linearmente dipendenti, cioè se esiste una costante $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $x = \lambda y$.

Svolgimento.

Sia $x = \lambda y$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle \lambda y, y\rangle| = |\lambda||\langle y, y\rangle| = |\lambda|\,||y||^2 = ||\lambda y|| \cdot ||y|| = ||x|| \cdot ||y||.$$

Supponiamo ora che per due vettori x e y valga l'uguaglianza $|\langle x, y\rangle| = ||x|| \cdot ||y||$. Si ha per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$0 \leq ||x + ty||^2 = \langle x + ty, x + ty\rangle = ||x||^2 + t^2||y||^2 + 2t\langle x, y\rangle.$$

Il discriminante dell'equazione quadratica in t, $||x||^2 + t^2||y||^2 + 2t\langle x, y\rangle$, è $\triangle = 4\left(\langle x, y\rangle^2 - ||x||^2||y||^2\right)$, ed è nullo per ipotesi. Di conseguenza l'equazione quadratica ammette un'unica soluzione che possiamo indicare con $-\lambda$ di molteplicità 2. Si avrà perciò $||x - \lambda y||^2 = 0$ e, per la non-degeneratezza della norma, $x - \lambda y = 0$, cioè $x = \lambda y$.

Esercizio 2. Si provi che in uno spazio vettoriale H in cui è definito un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vale la seguente identità del parallelogramma:

$$\text{per ogni } x \text{ e } y \in H \text{ si ha } ||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right).$$

Svolgimento.

Si calcola facilmente $||x + y||^2 = \langle x + y, x + y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\langle x, y\rangle$ e $||x - y||^2 = \langle x - y, x - y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2 - 2\langle x, y\rangle$.

Sommando a membro a membro le due espressioni si ottiene la tesi.

A questo proposito ricordiamo un interessante risultato di Jordan e von Neumann: in uno spazio normato X (cioè in uno spazio sul quale è definita una norma $||\cdot||$) si può definire un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ compatibile con la norma (cioè tale che $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ se e solo se in X vale l'identità del parallelogramma.

Esercizio 3. Sia H uno spazio vettoriale sul quale è definito un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ricorda che due vettori x e y si dicono ortogonali se e solo se $\langle x, y\rangle = 0$. Si verifichi che in H, per ogni coppia di vettori x e y mutualmente ortogonali vale la seguente uguaglianza (teorema di Pitagora !):

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Svolgimento. Si ha

$$||x + y||^2 = \langle x + y, x + y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\langle x, y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Esercizio 4. Si provi che una sfera-aperta di $\mathbb{R}^n$ è un insieme aperto.

Svolgimento.
Sia $B = B(x_0, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0|| < \rho\}$. Si deve provare che ogni punto $x \in B$ è interno a B, cioè che per ogni punto $x \in B$ esiste una pallina di centro x e raggio opportuno ε, $B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : ||y - x|| < \varepsilon\}$, tale che $B(x, \varepsilon) \subseteq B$.

Per ipotesi $||x - x_0|| < \rho$, perciò il numero $\rho - ||x - x_0||$ è positivo. Si può allora prendere $\varepsilon = \rho - ||x - x_0||$.

Verifichiamo che $B(x, \varepsilon) \subseteq B$. Sia $y \in B(x, \varepsilon)$, allora $||y - x|| < \varepsilon = \rho - ||x - x_0||$. Perciò $||y - x_0|| = ||y - x + x - x_0|| \leq ||y - x|| + ||x - x_0|| < \rho - ||x - x_0|| + ||x - x_0|| = \rho$. Questo prova che $||y - x_0|| < \rho$, cioè $y \in B$.

Esercizio 5. Sia D l'insieme dei punti $(x, y)^T$ di $\mathbb{R}^2$ per i quali ha senso considerare l'espressione

$$\log x + \log(\sin y).$$

(Cioè D è il dominio della funzione in due variabili $f(x, y) = \log x + \log(\sin y)$.)

Si descriva geometricamente l'insieme D, si dica se è aperto, chiuso, compatto, connesso per archi.

Svolgimento.
Poiché l'argomento del logaritmo deve essere positivo si deve avere $x > 0$ e inoltre $\sin y > 0$. La disequazione $\sin y > 0$ ha per soluzione i numeri $y \in]0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$ con $k \in \mathbb{Z}$. L'insieme considerato è pertanto l'insieme

$$D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\ \exists k \in \mathbb{Z}\ y \in]2k\pi, \pi + 2k\pi[\}.$$

L'insieme D è un unione infinita (numerabile) di strisce aperte $]0, +\infty[\times]2k\pi, \pi + 2k\pi[$. D è pertanto un insieme aperto, non chiuso, non compatto e non connesso.

Esercizio 6. Sia D l'insieme dei punti $(x, y)^T$ del piano per i quali ha senso considerare l'espressione

$$\frac{\sqrt{2(x + y) - (x^2 + y^2) - 1}}{|x - y|}.$$

(Cioè D è il dominio della funzione in due variabili $f(x, y) = \frac{\sqrt{2(x+y)-(x^2+y^2)-1}}{|x-y|}$.)

Si descriva geometricamente l'insieme D, si dica se è aperto, chiuso, limitato, compatto, connesso per archi. Si trovi l'interno, la chiusura, la frontiera di D.

Svolgimento.
L'argomento della radice quadrata deve essere non negativo. Pertanto si deve avere

$$2(x + y) - (x^2 + y^2) - 1 \geq 0;$$

$$2x + 2y - x^2 - y^2 - 1 \geq 0;$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \leq 1,$$

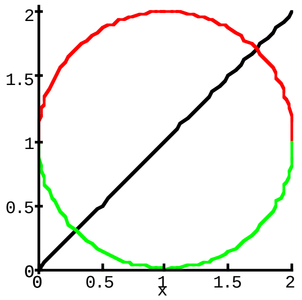
$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1.$$

Questo significa che i punti dell'insieme devono appartenere al disco di centro $(1, 1)^T$ e raggio unitario. Inoltre il denominatore della frazione non può essere nullo, pertanto richiediamo $x \neq y$.

L'insieme D è dunque

$$D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1;\ x \neq y\}.$$

L'insieme D è l'insieme dei punti che appartengono al disco chiuso di centro $(1,1)^T$ e raggio unitario e non appartengono alla bisettrice del primo e terzo quadrante.



L'insieme D non è chiuso (ad esempio il punto $(1,1)^T$ non appartiene a D ma è un suo punto di accumulazione. L'insieme D non è neppure aperto perché ad esempio tutti i punti $(x,y)^T$ appartenenti alla circonferenza di equazione $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ sono punti di frontiera e appartengono all'insieme se $x \neq y$. L'insieme D è limitato (ad esempio è contenuto nella sfera di centro l'origine e raggio 10) ma non è compatto in quanto non è chiuso. L'insieme D non è neppure connesso (nessun arco può congiungere un punto che si trova sotto la bisettrice con un punto che si trova sopra la bisettrice senza attraversarla). L'interno di D è dato dalla sfera-aperta di centro $(1,1)^T$ e raggio unitario al quale togliamo tutti i punti che appartengono alla retta $x=y$. La chiusura di D è la sfera-chiusa di centro $(1,1)^T$ e raggio unitario. La frontiera di D è la circonferenza $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ unita al segmento di bisettrice $\{(x,x)^T\colon 1-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

Esercizio 7. Sia D l'insieme dei punti $(x,y,z)^T$ del piano per i quali ha senso considerare l'espressione

$$\frac{x^2}{\log(x-y+z)}$$

(Cioè D è il dominio della funzione in tre variabili $f(x,y,z)=\frac{x^2}{\log(x-y+z)}$.)

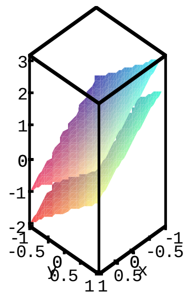
Si descriva geometricamente l'insieme D. Si dica se D è aperto, chiuso, compatto, connesso e si trovino la chiusura e l'interno di D.

Svolgimento.

La funzione logaritmo è definita solo per numeri positivi, dunque deve essere $x-y+z>0$. L'equazione $x-y+z=0$ rappresenta un piano che passa per l'origine di $\mathbb{R}^3$. Tutti i punti del dominio devono dunque trovarsi sopra a tale piano. Il denominatore della frazione, inoltre, non può essere nullo. Dunque si deve imporre $\log(x-y+z)\neq 0$ cioè $x-y+z\neq 1$. Questa è l'equazione di un piano parallelo al precedente. L'insieme cercato sarà pertanto

$$D=\{(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3\colon x-y+z>0\ ;\ x-y+z\neq 1\}$$

ed è la porzione di spazio che si trova sopra al piano di equazione $x-y+z=0$ al quale dobbiamo togliere i punti del piano di equazione $x-y+z=1$.



Il semispazio $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x - y + z > 0\}$ è evidentemente aperto. Se a questo insieme togliamo un piano (che è un insieme chiuso) otteniamo ancora un insieme aperto. Pertanto D è aperto.

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ gli unici insiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono l'insieme vuoto e l'insieme $\mathbb{R}^3$; D pertanto non è chiuso.

L'insieme D non è compatto in quanto è illimitato. Infatti, ad esempio, la semiretta $\{(0, 0, z)^T : z > 1\}$ è contenuta in D.

L'insieme D non è connesso per archi. Infatti si prenda un qualsiasi punto appartenente a D tale che $0 < x - y + z < 1$ e un secondo punto tale che $x - y + z > 1$. Qualunque arco congiungente i due punti deve intersecare il piano di equazione $x - y + z = 1$ e pertanto non può essere contenuto in D. Questo fatto, alquanto intuitivo, si può dimostrare rigorosamente utilizzando la versione per funzioni in più variabili del teorema di esistenza degli zeri, che verrà trattato nella terza lezione.

Essendo D un insieme aperto l'interno di D coincide con D. La chiusura di D è invece il semispazio $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x - y + z \geq 0\}$.

Esercizio 8. Si consideri l'insieme

$$E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xy + yz + xz = 1; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Si stabilisca se E è chiuso, aperto, compatto, connesso per archi.

Svolgimento.

Si può osservare che l'insieme E è l'insieme di livello 1 della funzione continua $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $f(x, y, z) = xy+yz+xz$ e in quanto tale è un insieme chiuso. (Questo perché la controimmagine in una funzione continua di un insieme chiuso è ancora un insieme chiuso).

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ gli unici insiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono l'insieme vuoto e l'insieme $\mathbb{R}^3$; E pertanto non è aperto.

Consideriamo il sottoinsieme di E contenuto nel piano $z = 0$; questo insieme è $\{(x, y, 0)^T \in \mathbb{R}^3 : xy = 1\}$ ed è quindi un ramo di iperbole equilatera, pertanto è illimitato e quindi anche E, contenendo un sottoinsieme illimitato, è illimitato e non può essere compatto.

Per provare che E è connesso si può ricordare che il grafico di una funzione reale continua definita su un insieme connesso per archi è un insieme connesso per archi.

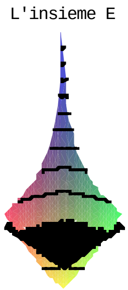
(Infatti sia A un insieme connesso per archi e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $\Gamma = \{(x, f(x))^T : x \in A\}$ il grafico della funzione f. Siano $(x_1, f(x_1))^T$ e $(x_2, f(x_2))^T$ due punti di Γ. Vogliamo provare che esiste un arco congiungente i due punti. Poiché A è connesso per archi e $x_1, x_2 \in A$ esiste un arco $\pi : [a, b] \to A$ tale che $\pi(a) = x_1$ e $\pi(b) = x_2$. La funzione $\phi : [a, b] \to \Gamma$ definita da $\phi(t) = (\pi(t), f(\pi(t)))^T$ è continua essendo composta di funzioni continue, e si ha $\phi(a) = (x_1, f(x_1))^T$ e $\phi(b) = (x_2, f(x_2))^T$. Dunque ϕ è una arco che congiunge $(x_1, f(x_1))^T$ con $(x_2, f(x_2))^T$. Questo prova che Γ è connesso per archi.)

Osserviamo ora che E è il grafico di una funzione continua f definita su un insieme connesso per archi. Si osservi che se $(x, y, z)^T \in E$ le coordinate x e y non possono essere contemporaneamente nulle, infatti se $x = y = 0$ si ottiene $xy + xz + yz = 0 \neq 1$. Dunque $x + y \neq 0$. Si può allora scrivere

$$xy + xz + yz = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z(x + y) = 1 - xy \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1 - xy}{x + y}.$$

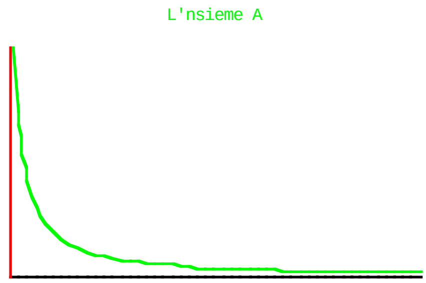
L'insieme E è pertanto il grafico della funzione $g : A \to \mathbb{R}$ dove $g(x, y) = \dfrac{1 - xy}{x + y}$ e

$$A = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, \frac{1 - xy}{x + y} \geq 0\}.$$



Si osservi che essendo $x+y>0$ la condizione $\dfrac{1-xy}{x+y}\geq 0$ è equivalente alla condizione $1-xy\geq 0$ cioè $x=0$ opppure $y\leq \frac{1}{x}$. Si può pertanto scrivere

$$A=\{(x,y)^T\in \mathbb{R}^2 : x=0, y>0\}\cup\{(x,y)^T\in \mathbb{R}^2 : x>0,\ y\leq \frac{1}{x}\}.$$



L'insieme A è la regione del piano compresa tra il semiasse positivo delle x e il ramo di iperbole $y=\frac{1}{x}$, unito al semiasse positivo delle y, e, pertanto, è connesso per archi.

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 2: continuità, limiti e differenziabilità di una funzione in più variabili.

Esercizio 1. Si calcoli, se esiste

$$\lim_{(x,y)^T \to (0,0)^T} \frac{x + xy}{x + y}.$$

Svolgimento.

Se il limite della funzione $f(x,y) = \dfrac{x + xy}{x + y}$ esiste deve esistere anche il limite di ogni sua restrizione. In particolare si può studiare la restrizione della f all'asse delle y. In questo caso la f è identicamente nulla e quindi il suo limite è 0.

Studiamo ora la restrizione della f all'asse delle x. Si ha $y = 0$ e pertanto la funzione diventa $\frac{x}{x} = 1$ e il suo limite è 1.

Il limite della funzione f pertanto non esiste.

Esercizio 2. Si calcoli, se esiste,

$$\lim_{(x,y)^T \to (0,0)^T} \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Svolgimento.

Studiando la restrizione della funzione f all'asse delle x si vede che il limite, se esiste, deve essere uguale a 0. Anche la restrizione all'asse delle y ha limite 0. Dire che $\lim_{(x,y)^T \to (0,0)^T} f(x,y) = 0$ significa che per ogni $\epsilon > 0$ possiamo trovare un $\delta > 0$ tale che per ogni $(x,y)^T \in \mathrm{dom} f \setminus \{(0,0)^T\}$ se $||(x,y)^T - (0,0)^T|| < \delta$ allora $|f(x,y) - 0| < \epsilon$. (Ricordiamo che $||(x,y)^T|| = \sqrt{x^2 + y^2}$).

Proviamo a maggiorare la funzione $|\dfrac{3x^2 y}{x^2 + y^2}|$. Ricordiamo che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ vale la disuguaglianza $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ (questa si può provare ad esempio a partire dalle disuguaglianze $(x+y)^2 \geq 0$ e $(x-y)^2 \geq 0$). Inoltre è sempre $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = ||(x,y)^T||$. Si ottiene allora

$$|\frac{3x^2 y}{x^2 + y^2}| = 3|x| \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{3}{2}|x| \leq \frac{3}{2}||(x,y)^T||.$$

Fissato $\epsilon > 0$ è allora sufficiente prendere $\delta < \frac{2}{3}\epsilon$ e la condizione richiesta è verificata.

Pertanto $\displaystyle\lim_{(x,y)^T \to (0,0)^T} \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$

Esercizio 3. Si studi la continuità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{se } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}.$$

Svolgimento.

La funzione f è continua in ogni punto diverso da $(0,0)^T$.

Affinché la funzione sia continua anche in $(0,0)^T$ deve essere $\lim_{(x,y)^T \to (0,0)^T} = f((0,0)^T) = 0$.

Studiamo la restrizione della funzione f all'asse delle x. In questo caso la funzione vale $\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$. Pertanto il limite della restrizione è $\frac{1}{2} \neq 0$. La funzione f dunque non è continua.

Esercizio 4. Si studi la continuità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \text{arctg}(\frac{x}{y}) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento.
Dobbiamo controllare la continuità della funzione in tutti i punti del tipo $(x_0, 0)^T$ con $x_0 \in \mathbb{R}$. Osserviamo che essendo $|\text{arctg}(z)| < \frac{\pi}{2}$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ si ottiene per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ la maggiorazione

$$|y^2 \text{arctg}(\frac{x}{y})| < \frac{\pi}{2} y^2 \leq \frac{\pi}{2}((x - x_0)^2 + y^2) = \frac{\pi}{2} ||(x,y)^T - (x_0, 0)^T||^2.$$

Fissato qualunque $\epsilon > 0$ si può scegliere un numero $\delta > 0$ tale che $\delta < \sqrt{\frac{2\epsilon}{\pi}}$.
Si ottiene allora che, per ogni punto $(x,y)^T$ tale che $||(x,y)^T - (x_0,0)^T|| < \delta$, si ha $|y^2 \text{arctg}(\frac{x}{y}) - 0| < \epsilon$.
Questo prova la continuità della funzione f in ogni punto$(x_0, 0)^T$. La funzione f è quindi continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

Si poteva anche applicare direttamente il teorema sul limite della funzione prodotto. La funzione arcotangente è limitata e viene moltiplicata per una funzione (y^2) il cui limite per $(x,y)^T \to (x_0, 0)^T$ è 0. La funzione prodotto ammette allora limite per $(x,y)^T \to (x_0, 0)^T$ e questo limite è 0.

Esercizio 5. Si studi la continuità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 - y^2} & \text{se } |x| \neq |y| \\ 0 & \text{se } |x| = |y| \end{cases} .$$

Svolgimento.
La funzione f è continua in ogni punto che non appartiene all'unione delle due bisettrici del primo-terzo e del secondo-quarto quadrante. Dobbiamo studiare la continuità della funzione nei punti delle rette $y = x$ e $y = -x$. Ad esempio studiamo il comportamento della funzione f in un intorno del punto $(1,1)^T$. Dobbiamo controllare se è $\lim_{(x,y)^T \to (1,1)^T} f(x,y) = 0$. Possiamo studiare la restrizione della funzione ad una curva che passa per il punto $(1,1)^T$ (attenzione a scegliere una curva che non intersechi la bisettrice $x = y$ in un intorno del punto; ad esempio la scelta $y = x$ è da scartare!). Si può considerare la curva $y = x^2$. La funzione ristretta a tale curva diventa $\dfrac{x^2 x^2}{x^2 - x^4} = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$. Ora è evidente che il limite di tale funzione per $x \to 1$ è infinito. Dunque la funzione non è continua in tale punto.

Un ragionamento simile si può fare in qualunque punto del tipo $(x_0, x_0)^T$ oppure $(x_0, -x_0)^T$. Vediamo ad esempio il caso di un punto $(x_0, x_0)^T$ appartenente alla retta $y = x$. Si può considerare un tratto della curva di equazione $y = \frac{x_0^2}{x}$ in un intorno di $(x_0, x_0)^T$. Questa curva passa per il punto $(x_0, x_0)^T$ come subito si verifica. Inoltre non interseca in altri punti la retta $y = x$. La funzione f ristretta a tale curva diventa

$$\frac{x^2 \frac{x_0^2}{x}}{x^2 - \frac{x_0^4}{x^2}} = \frac{x_0^2 x^3}{x^4 - x_0^4}.$$

Il limite per $x \to x_0$ è dunque infinito.

Abbiamo provato che la funzione f è discontinua in tutti i punti appartenenti alle bisettrici ad eccezione eventualmente dell'origine. Se la funzione fosse continua nell'origine però, dovrebbe essere localmente limitata in $(0,0)^T$, e noi abbiamo verificato che la funzione è illimitata in ogni punto della retta $y = x$, dunque in ogni intorno dell'origine.

La funzione f pertanto non è continua in nessun punto appartenente alle bisettrici.

Esercizio 6. Si calcolino le derivate parziali della funzione

$$f(x,y,z) = \tan(x+3y^2) + z.$$

Soluzione:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2(x+3y^2)}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{6y}{\cos^2(x+3y^2)}; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 1.$$

Esercizio 7. Si calcolino le derivate parziali della funzione

$$f(x,y) = \frac{\log(\sin x + y^2)}{x^2 y}.$$

Soluzione:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^3 y}\left(\frac{x\cos x}{\sin x + y^2} - 2\log(\sin x + y^2)\right); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2 y^2}\left(\frac{2y^2}{\sin x + y^2} - \log(\sin x + y^2)\right).$$

Esercizio 8. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto di $\mathbb{R}^2$, sia $(x_0,y_0)^T \in A$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $(x_0,y_0)^T$. Sia $\varphi(t) = (x_0,y_0)^T + t\mathbf{v}$ l'equazione parametrica della retta per il punto $(x_0,y_0)^T$ di direzione $\mathbf{v}$. Si indichi con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione composta $g(t) = f(\varphi(t))$.
Si verifichi che $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0,y_0) = g'(0)$.

Svolgimento.
Si ha per definizione di derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left((x_0,y_0)^T + t\mathbf{v}\right) - f(x_0,y_0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t} = g'(0).$$

Esercizio 9. Si calcoli la derivata direzionale nell'origine lungo la direzione del versore $\mathbf{v} = (v_1,v_2)^T$ della funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{se } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}$.

Svolgimento.
Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left((0,0)^T + t\mathbf{v}\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{tv_1t^2v_2^2}{t^2v_1^2 + t^2v_2^2} = \frac{v_1v_2^2}{v_1^2+v_2^2}.$$

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 3: conseguenze fondamentali della continuità e della differenziabilità.

Esercizio 1. Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme limitato. Detta $\overline{A}$ la chiusura di A, sia $f : \overline{A} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si provi che $f(A)$ è un insieme limitato.

Si dia un esempio di un insieme limitato $A \subset \mathbb{R}$ e di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ tale che $f(A)$ è un insieme illimitato.

Svolgimento.

L'insieme $\overline{A}$ è chiuso e limitato, dunque è compatto. Per il teorema di Weierstrass la funzione f ammette massimo e minimo su $\overline{A}$, siano rispettivamente M e m. Dunque $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in \overline{A}$. A maggior ragione $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$, e quindi l'immagine $f(A)$ è un insieme limitato.

Un esempio di un insieme limitato $A \subset \mathbb{R}$ e di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ tale che $f(A)$ è un insieme illimitato è $A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $f(x) = \operatorname{tg}\ x$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f(x, y) = \frac{1}{xy}$. Si osservi che $f(1, 1) = 1 > 0$ e $f(-1, 1) < 0$. Esistono punti $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ tali che $f(x, y) = 0$? Questo fatto contraddice il teorema di esistenza degli zeri?

Svolgimento.

Non esistono tali punti. Infatti per ogni numero reale non nullo t si ha $\frac{1}{t} \neq 0$ come è ben noto. Dunque se $x \neq 0$ e $y \neq 0$ si ha $f(x, y) \neq 0$. D'altra parte la funzione f non è definita in alcun punto in cui $x = 0$ oppure $y = 0$.

Si noti che il dominio della funzione è il piano $\mathbb{R}^2$ al quale dobbiamo togliere gli assi coordinati; dunque non è connesso e quindi il teorema di esistenza degli zeri non è applicabile.

Esercizio 3. Si calcoli il differenziale nel punto $(e, 3)$ della funzione $f(x, y) = x^y$.

Svolgimento.

Le derivate parziali della funzione f sono $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \log x$. Calcolate nel punto diventano $\dfrac{\partial f}{\partial x}(e, 3) = 3e^2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(e, 3) = e^3$.

Il differenziale è dunque l'applicazione lineare $L(u, v) = \langle \nabla f(e, 3), (u, v)^T \rangle = 3e^2 u + e^3 v$.

Esercizio 4. Si calcolino nell'origine le derivate parziali e le derivate direzionali rispetto alla direzione del vettore $(1, 1)^T$ della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0 & \text{se } (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}.$$

Vale la formula $\dfrac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f, v \rangle$? Come si giustifica questo fatto?

Svolgimento.

Le derivate parziali della funzione f nell'origine sono definite e sono entrambe nulle come subito si verifica utilizzando direttamente la definizione di derivata parziale, essendo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

La derivata direzionale in $(0,0)^T$ lungo la direzione $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ è

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left((0,0)^T + h\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T\right) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}h^3}{\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{4}h^4}}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

La formula $\dfrac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f, v\rangle$ non vale perché la funzione f non è differenziabile in $(0,0)^T$.

Esercizio 5. Si scriva l'equazione del piano tangente la superficie di equazione $z = \ln(2x+y)$ nel punto $(-1,3,0)^T$.

Svolgimento.
Controlliamo che il punto $(-1,3,0)$ appartenga alla superficie: $\ln(2\cdot(-1)+3) = 0$.
L'equazione del piano tangente sarà allora ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ indica il prodotto scalare)

$$z - z_0 = \langle \nabla f(x_0,y_0), (x-x_0, y-y_0)^T\rangle.$$

Calcoliamo il gradiente della funzione $f(x,y) = \ln(2x+y)$:

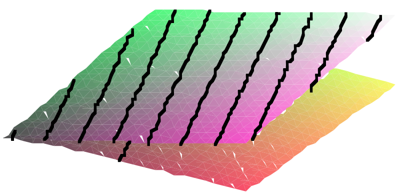
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{2x+y}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2x+y};$$

$$\nabla f(-1,3) = (2,1)^T.$$

L'equazione del piano sarà

$$z = 2(x+1) + (y-3) \qquad \text{cioè} \qquad 2x+y-z-1 = 0.$$

La superficie e il piano tangente



Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 4: Regole di derivazione e differenziazione.

Esercizio 1. Sia $B \subset \mathbb{R}^N$ una sfera (aperta) di centro x_0 e raggio R in $\mathbb{R}^N$. Sia $f : B \to \mathbb{R}$ una funzione e si supponga che tutte le derivate parziali di f esistano e siano nulle in B. Si provi che allora f è una funzione costante.

Svolgimento.
Per ipotesi tutte le derivate parziali della funzione sono nulle, in particolare sono funzioni continue e quindi, per il teorema del differenziale totale, la funzione f è differenziabile. Inoltre il differenziale della funzione f è nullo su tutto B.

Sia $x \in B$ un punto arbitrario. Sia $\varphi(t) = x_0 + t(x - x_0)$ con $t \in [0, 1]$ una parametrizzazione del segmento che congiunge il punto x con il punto x_0. Consideriamo la funzione composta $g(t) := f(\varphi(t))$. Per il teorema sul differenziale della funzione composta si avrà $g'(t) = \langle df(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle = 0$. Ma allora, per il noto teorema (applicazione del teorema di Lagrange) sulle funzioni di una variabile reale, g è una funzione costante su $[0, 1]$, e quindi $g(0) = g(1)$, cioè $f(x) = f(x_0)$. Si conclude allora che $f(x) = f(x_0)$ per ogni punto $x \in B$, dunque la funzione f è costante su B.

La proposizione appena dimostrata vale in ipotesi più generali di quelle enunciate. In particolare vale se B è un qualsiasi sottoinsieme aperto connesso di $\mathbb{R}^N$.

Esercizio 2. Si provi che è differenziabile nel suo dominio la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{se } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases} .$$

Svolgimento.
Si può applicare il teorema del differenziale totale.
Calcoliamo le derivate parziali in un punto $(x, y)^T \neq (0, 0)^T$. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^2\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(2y - \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right);$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2yx^2\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^3x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(2x - \frac{y^2x}{x^2+y^2}\right);$$

Si vede facilmente che la funzione ammette derivate parziali anche in $(0, 0)^T$ e che queste sono entrambe nulle. Infatti la funzione f ristretta agli assi è la funzione nulla.

Proviamo che le derivate parziali sono entrambe continue in $(0, 0)^T$.

Consideriamo la funzione $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Dalla disuguaglianza $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ si ottiene

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

e quindi

$$\lim_{(x,y)^T\to(0,0)^T} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Inoltre si ha

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le |x|\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}|x|;$$

e quindi il limite per $(x,y)^T \to (0,0)^T$ è zero.

In modo simile si ha

$$\left|\frac{y^2x}{x^2+y^2}\right| \le |y|\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}|y|;$$

e quindi il limite per $(x,y)^T \to (0,0)^T$ è zero.

Le funzioni y e x sono continue nell'origine e quindi non creano problemi.

Si conclude allora che

$$\lim_{(x,y)^T\to(0,0)^T} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)^T\to(0,0)^T} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Per il teorema del differenziale totale concludiamo che f è differenziabile in $(0,0)^T$.

La differenziabilità negli altri punti del dominio è evidente.

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se } (x,y)^T \ne (0,0)^T \\ 0 & \text{se } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}.$$

Si provi che la funzione f è differenziabile nell'origine anche se le sue derivate parziali non sono ivi continue.

Svolgimento.

Calcoliamo la derivata parziale $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Non esiste il limite per $(x,y)^T \to (0,0)^T$. Per convincersi di ciò si consideri ad esempio la restrizione della funzione all'asse delle x (cioè si ponga $y=0$).

Dunque le ipotesi del teorema del differenziale totale non sono soddisfatte. Ciononostante la funzione è differenziabile nell'origine. Infatti mostreremo che l'applicazione lineare nulla: $L(v)=0$ per ogni vettore v è il differenziale della funzione in $(0,0)^T$. Ricordiamo che per definizione l'applicazione lineare L è il differenziale di f nel punto $(0,0)^T$ se si ha $f(x,y) = f(0,0) + L(x,y) + \varepsilon(x,y)\cdot||(x,y)^T||$ con

$$\lim_{(x,y)^T\to(0,0)^T} \varepsilon(x,y) = 0.$$

Nel nostro caso è $\varepsilon(x,y) = \dfrac{f(x,y)}{||(x,y)^T||}$ e

$$\lim_{(x,y)^T\to(0,0)^T} \varepsilon(x,y) = \lim_{(x,y)^T\to(0,0)^T} \sqrt{(x^2+y^2)}\ \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$$

come si verifica facilmente osservando ad esempio che $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \le 1$.

Esercizio 4. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \text{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Si verifichi che la funzione f ammette tutte le derivate parziali del primo ordine e che queste sono continue su $\mathbb{R}^2$. Si calcolino poi le derivate seconde nell'origine e si facciano opportune osservazioni alla luce del teorema di Schwarz.

Svolgimento.

Questa funzione è già stata studiata nell'esercizio 4 della seconda lezione, dove si è verificato che è continua.

Le derivate parziali in un punto $(x,y)^T$ con $y \neq 0$ sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \text{ arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

Le derivate parziali nei punti in cui la seconda coordinata è nulla sono entrambe nulle. Infatti

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,0)-f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,h)-f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\text{arctg}(\frac{x}{h})}{h} = 0.$$

Si verifica facilmente che le derivate parziali sono continue anche nei punti in cui la seconda coordinata è nulla. Infatti si ha

$$\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \leq |y| \left|\frac{y^2+x^2}{x^2+y^2}\right| = |y|$$

e $|y|$ tende a 0 qualunque sia x_0 se $(x,y)^T$ tende a $(x_0,0)^T$;

$$\left|2y \text{ arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \pi|y| + |y|\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \pi|y| + \frac{1}{2}|y| = (\pi+\frac{1}{2})|y|$$

e $|y|$ tende a 0 qualunque sia x_0 se $(x,y)^T$ tende a $(x_0,0)^T$.
(Qui si è usata la disuguaglianza $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ già vista in precedenza.)
Calcoliamo le derivate parziali seconde della f nell'origine.
Si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{t^2}}{t} = 1.$$

Si osserva che le due derivate parziali seconde miste non sono uguali. Alla luce del teorema di Schwarz si può concludere che le derivate seconde non sono continue nell'origine.

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 5: Formula di Taylor.

Esercizio 1. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 3 della funzione $f(x,y) = e^{xy}$, dapprima centrato nell'origine e poi centrato nel punto $(1,0)^T$.

Svolgimento.
La formula del polinomio di Taylor di grado 3 si può scrivere come segue:

$$T_f^3(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0,y_0)\left((x-x_0,y-y_0),(x-x_0,y-y_0)\right) +$$

$$+\frac{1}{3!}d^3f(x_0,y_0)\left((x-x_0,y-y_0),(x-x_0,y-y_0),(x-x_0,y-y_0)\right);$$

dove i differenziali sono così definiti:

$$df(x_0,y_0)(v_1,v_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)v_2;$$

$$d^2f(x_0,y_0)\left((v_1,v_2),(v_1,v_2)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)v_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)v_1v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)v_2^2;$$

$$d^3f(x_0,y_0)\left((v_1,v_2),(v_1,v_2),(v_1,v_2)\right) =$$

$$= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0)v_1^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_0,y_0)v_1^2v_2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_0,y_0)v_1v_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^3}(x_0,y_0)v_2^3.$$

Calcoliamo le derivate successive della funzione f:

$$f(x,y) = e^{xy} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2e^{xy} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = e^{xy} + xye^{xy} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2e^{xy};$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = y^3e^{xy} \quad ; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(x,y) = 2ye^{xy} + xy^2e^{xy}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}(x,y) = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy}; \quad ; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = x^3e^{xy}.$$

Per calcolare lo sviluppo di Taylor nel punto $(0,0)^T$ le derivate vanno calcolate nel punto $(0,0)^T$; si ottiene

$$f(0,0) = 1 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 1 \quad ;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}(0,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) = 0.$$

Il polinomio cercato è dunque il seguente:

$$T_f^3(x,y) = 1 + 0 + \frac{1}{2}2(x-0)(y-0) + 0 = 1 + xy.$$

Si noti che in questo caso si poteva procedere in modo molto più semplice.

Ricordando lo sviluppo di Taylor di centro 0 per la funzione reale (in una sola variabile reale)

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \ldots,$$

posto $t = xy$ si può scrivere

$$e^{xy} = 1 + xy + \frac{1}{2}x^2y^2 + \ldots,$$

da cui si ricavava immediatamente $T_f^3(x,y) = T_f^2(x,y) = 1 + xy$.

Per calolare lo sviluppo di Taylor nel punto $(1,0)^T$ le derivate vanno calcolate nel punto $(1,0)^T$; si ottiene

$$f(1,0) = 1 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 1 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \quad ;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(1,0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(1,0) = 2 \quad ; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,0) = 1.$$

Il polinomio cercato è dunque il seguente:

$$T_f^3(x,y) = 1 + (0\cdot(x-1) + (y-0)) + \frac{1}{2}\left(0\cdot(x-1)^2 + 2(x-1)(y-0) + (y-0)^2\right) +$$
$$+\frac{1}{3!}\left(0\cdot(x-1)^2 + 6(x-1)y^2 + 0\cdot(x-1)^2y + y^3\right) = 1 + xy - \frac{1}{2}y^2 + xy^2 + \frac{1}{6}y^3.$$

Esercizio 2. Si scriva lo sviluppo di Taylor di ordine 4 della funzione $f(x,y) = e^y \log(1+x)$ centrato nell'origine.

Svolgimento.

In questo caso non è necessario calcolare tutti i differenziali successivi. Infatti, ricordando gli sviluppi delle funzioni in una variabile:

$$\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad ;$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \ldots;$$

si otterrà

$$f(x,y) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right)\cdot\left(1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \ldots\right);$$

dunque

$$T_f^4(x,y) = x + xy - \frac{x^2}{2} + \frac{xy^2}{2} - \frac{x^2y}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3y}{3} - \frac{x^2y^2}{4} + \frac{xy^3}{6}.$$

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile omogenea, cioè tale che $f(t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x})$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ (in particolare $f(\mathbf{0}) = 0$).

Si provi che $f(\mathbf{x}) = df(\mathbf{0})(\mathbf{x})$.

Svolgimento.

Applicando la formula di Taylor (di ordine 1) con il resto nella forma di Lagrange alla funzione f si ha

$$f(\mathbf{x}) = df(\xi)(\mathbf{x});$$

dove ξ è un punto di $\mathbb{R}^N$ che si trova sul segmento congiungente l'origine con $\mathbf{x}$.

Analogamente, per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(t\mathbf{x}) = df(\xi(t))(t\mathbf{x});$$

dove $\xi(t)$ è un punto di $\mathbb{R}^N$ che si trova sul segmento congiungente l'origine con $t\mathbf{x}$.

Per ipotesi $f(t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x})$; inoltre, poiché il differenziale è un'applicazione lineare, $df(\xi(t))(t\mathbf{x}) = t\,df(\xi(t))(\mathbf{x})$. Si ha allora

$$t\,f(\mathbf{x}) = t\,df(\xi)(\mathbf{x}) \quad \text{e}$$
$$t\,f(\mathbf{x}) = f(t\mathbf{x}) = df(\xi(t))(t\mathbf{x}) = t\,df(\xi(t))(\mathbf{x});$$

pertanto

$$df(\xi)(\mathbf{x}) = df(\xi(t))(\mathbf{x})$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

In particolare, essendo $\xi(0) = \mathbf{0}$, si ha $df(\xi)(\mathbf{x}) = df(\mathbf{0})(\mathbf{x})$ e si ottiene quindi

$$f(\mathbf{x}) = df(\mathbf{0})(\mathbf{x});$$

come si voleva dimostrare.

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 6: Massimi e minimi liberi. Forme quadratiche.

Esercizio 1. Determinare gli estremi della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 3 & \text{se } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases} .$$

Svolgimento.
Si osservi che per $(x,y)^T \neq (0,0)^T$ si ha

$$|f(x,y)| = |\frac{xy}{x^2+y^2}| \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}.$$

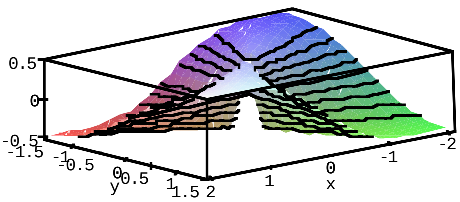
La funzione f è dunque limitata in $\mathbb{R}^2$. Essendo $f(0,0) = 3$ l'origine è punto di massimo ed il valore massimo è 3.

Calcoliamo il gradiente della funzione f nei punti $(x,y)^T \neq (0,0)^T$. Si ha

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2} \right)^T .$$

Il gradiente si annulla in tutti i punti del tipo $(x,x)^T$ e $(x,-x)^T$, con $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si ha $f(x,x) = \frac{1}{2}$ e $f(x,-x) = -\frac{1}{2}$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. I punti $(x,-x)^T$ sono dunque punti di minimo ed il valore minimo è $-\frac{1}{2}$.

Il grafico di f in un intorno di (0,0)



Esercizio 2. Uno scatolone a base rettangolare senza coperchio deve contenere un volume di 32000 cm^3. Si trovino le dimensioni (altezza, larghezza e profondità) che minimizzano la quantità di cartone impiegato.

Svolgimento.
Dette x, y, z la lunghezza, la profondità e l'altezza dello scatolone misurate in centimetri, la formula che definisce il volume dello scatolone è $V = xyz$. La quantità di cartone impiegato si ottiene misurando l'area della superficie dello scatolone; questa sarà $A = xy + 2xz + 2yz$. Noi vogliamo trovare il minimo di A e siamo vincolati dalla condizione $V = 32000$. Non è però necessario ricorrere ai teoremi sugli estremi vincolati. Infatti dall'equazione $xyz = 32000$ e considerando che una lunghezza non può essere nulla, si può scrivere $z = \frac{32000}{xy}$ e attuare la sostituzione nella formula di A. Si ottiene una funzione $A(x,y) = xy + 64000\frac{(x+y)}{xy} = xy + 64000(\frac{1}{y} + \frac{1}{x})$, definita per $x > 0,\ y > 0$. Cercheremo dunque il minimo, se esiste, di $A(x,y)$.

Calcoliamo il gradiente di A:

$$\nabla A(x,y) = \left(y - \frac{64000}{x^2}, x - \frac{64000}{y^2} \right)^T .$$

Il gradiente si annulla se e solo se $64000 = x^2y = xy^2$ dunque se e solo se $x = y = \sqrt[3]{64000} = 40$.

Perciò le misure che minimizzano la quantità di cartone impiegato sono $x = y = 40$cm e $z = \frac{32000}{1600} = 20$cm.

Il fatto che $x = y$ era prevedibile per ragioni di simmetria.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$; è possibile per f avere 2 punti di massimo relativo e nessun punto di minimo relativo? Si discuta tale questione confrontando con quanto avviene per funzioni in più variabili, considerando e studiando la funzione $f(x, y) = -(x^2-1)^2-(x^2y-x-1)^2$.

Svolgimento.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e supponiamo che x_1 e x_2 siano due punti di massimo relativo per f. Senza perdita di generalità possiamo supporre $x_1 < x_2$. L'intervallo $[x_1, x_2]$ è compatto e quindi per il teorema di Weierstrass, la funzione f ristretta a $[x_1, x_2]$ deve ammettere minimo. Sia x_3 un punto di minimo per questa funzione. Se $x_1 < x_3 < x_2$ tale punto è di minimo relativo anche per la funzione f. D'altra parte x_3 non può coincidere con uno degli estremi x_1 oppure x_2. Infatti, essendo tali punti di massimo relativo per la f la funzione f assume valori minori di $f(x_1)$ (rispettivamente minori di $f(x_2)$) in un loro intorno.

Consideriamo ora la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ proposta dal problema. Calcoliamo il gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \left(-2(x^2-1)\cdot 2x - 2(x^2y - x - 1)\cdot(2xy-1), -2(x^2y-x-1)\cdot x^2\right)^T .$$

Affinché il gradiente si annulli nel punto $(x, y)^T$ deve essere, studiando la seconda componente, $x = 0$ oppure $x^2y - x - 1 = 0$, cioè $y = \frac{1+x}{x^2}$.

Studiamo dapprima il caso $x = 0$. La prima componente diventa $-2\cdot(-1)\cdot(-1) = -2 \neq 0$.

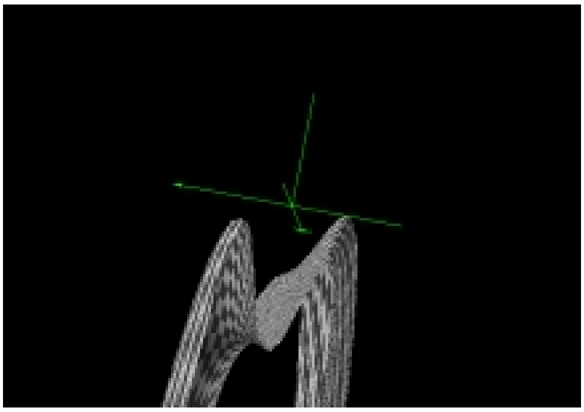
Studiamo ora il caso $x \neq 0$ e $y = \frac{1+x}{x^2}$. La prima componente diventa allora $-4x\cdot(x^2-1)$, e si annulla se e solo se $x = 1$ oppure $x = -1$.

Otteniamo allora i punti $(-1, 0)^T$ e $(1, 2)^T$.

Si noti che è sempre $f(x, y) \leq 0$. Poiché $f(-1, 0) = f(1, 2) = 0$ si ha che tali punti sono punti di massimo relativo (e assoluto) per la funzione f. La funzione f inoltre non presenta alcun punto di minimo.

La situazione perciò è ben diversa dal caso delle funzioni in una sola variabile.

La figura seguente mostra il grafico di f in un intorno dei punti di massimo.



Esercizio 4. Si provi il criterio sul segno del differenziale secondo per i punti di minimo e di massimo di una funzione:

"Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(A)$ e sia $\mathbf{x^0} \in A$ un punto critico per la f (cioè $\nabla f(\mathbf{x^0}) = \mathbf{0}$). Allora,

se $d^2f(\mathbf{x^0})$ è una forma quadratica definita positiva, il punto $\mathbf{x^0}$ è un punto di minimo relativo per la f,

se $d^2f(\mathbf{x^0})$ è una forma quadratica definita negativa, il punto $\mathbf{x^0}$ è un punto di massimo relativo per la f."

Svolgimento.

Per ipotesi si ha $d^2f(\mathbf{x_0})(\mathbf{x},\mathbf{x}) > 0$ per ogni vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$. Per la continuità del differenziale secondo su A si ha anche $d^2f(\xi)(\mathbf{x},\mathbf{x}) > 0$ per ogni vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ purché $||\mathbf{x^0} - \xi|| < \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ opportuno, e $B(\mathbf{x^0}, \varepsilon) \subseteq A$.

Sia dunque $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x^0}, \varepsilon)$. Applicando la formula di Taylor di ordine 2 con il resto nella forma di Lagrange, osservando che $df(\mathbf{x^0})(\mathbf{x} - \mathbf{x^0}) = 0$ per ipotesi, si ottiene

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x_0}) = d^2f(\xi)(\mathbf{x} - \mathbf{x^0}, \mathbf{x} - \mathbf{x^0}) > 0.$$

Si è dunque provato che per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x^0}, \varepsilon)$ si ha $f(\mathbf{x^0}) < f(\mathbf{x})$, cioè $\mathbf{x^0}$ è un punto di minimo relativo per la f.

In modo analogo si prova il risultato per i punti di massimo relativo.

Esercizio 5. Si trovino i punti di massimo e minimo relativo per la funzione $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

Svolgimento.

Calcoliamo il gradiente della funzione f:

$$\nabla f(x,y) = \left(4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x\right)^T.$$

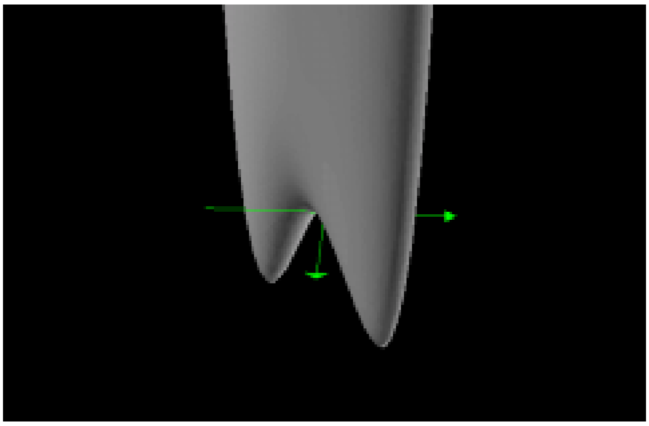
Il gradiente si annulla nei punti $(0,0)^T$, $(-1,-1)^T$ e $(1,1)^T$. Per capire quali di questi sono punti di minimo o massimo calcoliamo la matrice Hessiana:

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Calcolandola nei punti critici di f si ottiene

$$H(f)(-1,-1) = H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \quad ; \quad H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché le forme quadratiche $H(f)(-1,-1)$ e $H(f)(1,1)$ sono definite positive, i punti $(-1,-1)^T$ e $(1,1)^T$ sono punti di minimo relativo per la funzione. Il punto $(0,0)^T$ invece non è né di minimo, né di massimo per f perché la forma quadratica $H(0,0)$ è indefinita. Il punto $(0,0)^T$ è un punto di sella.



Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 7: funzioni a valori vettoriali; funzioni definite implicitamente.

Esercizio 1. Si calcoli il differenziale nel punto $(x, y, z, w)^T$ della funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dove $f = (f_1, f_2, f_3)^T$, $f_1(x, y, z, w) = xyz$, $f_2(x, y, z, w) = 2x^2y^2w$, $f_3(x, y, z, w) = \sin(xzw)$.

Svolgimento.
Il differenziale nel punto $(x, y, z, w)^T$ è un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e può essere rappresentata in forma matriciale mediante la matrice Jacobiana, che sarà una matrice a tre righe e quattro colonne. Per scrivere la matrice calcoliamo le derivate parziali che interessano:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = yz; \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = xz; \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z} = xy; \qquad \frac{\partial f_1}{\partial w} = 0;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 4xy^2w; \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 4x^2yw; \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0; \qquad \frac{\partial f_2}{\partial w} = 2x^2y^2;$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = zw\cos(xzw); \qquad \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial f_3}{\partial z} = xw\cos(xzw); \qquad \frac{\partial f_3}{\partial w} = xz\cos(xzw);$$

La matrice Jacobiana sarà quindi

$$J(f)(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy & 0 \\ 4xy^2w & 4x^2yw & 0 & 2x^2y^2 \\ zw\cos(xzw) & 0 & xw\cos(xzw) & xz\cos(xzw) \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Si calcoli la derivata direzionale nel punto $(1, 1, 1)^T$ lungo la direzione del vettore $\mathbf{v} = (1, 2, 3)^T$ della funzione $f = (f_1, f_2)^T$; $\quad f_1(x, y, z) = x^2y\log(xz)$; $\quad f_2(x, y, z) = \frac{y}{x}e^{xyz}$.

Svolgimento.
Il versore di direzione $\mathbf{v} = (1, 2, 3)^T$ si ottiene normalizzando il vettore $\mathbf{v}$: $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)^T$. La funzione f è differenziabile nel punto $(1, 1, 1)^T$. La derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$ si può allora calcolare usando la formula

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = J(f)(1, 1, 1)[\mathbf{v}].$$

La matrice Jacobiana è

$$J(f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy\log(xz) + xy & x^2\log(xz) & \frac{x^2y}{z} \\ \frac{y}{x}e^{xyz}(-\frac{1}{x} + yz) & e^{xyz}(\frac{1}{x} + yz) & y^2e^{xyz} \end{pmatrix},$$

che, calcolata nel punto $(1, 1, 1)^T$ diventa

$$J(f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2e & e \end{pmatrix}.$$

Perciò la derivata direzionale cercata è

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}(1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3), \frac{1}{\sqrt{14}}(0 \cdot 1 + 2e \cdot 2 + e \cdot 3)\right)^T = \frac{1}{\sqrt{14}}(4, 7e)^T.$$

Esercizio 3. Sia $f(x, y) = xe^y$. Si calcoli la rapidità in cui la funzione f varia nel punto $(2, 1)^T$ se ci muoviamo verso il punto $(1, 2)^T$. In quale direzione ci dobbiamo muovere affinché la variazione della funzione f sia più rapida?

Svolgimento.

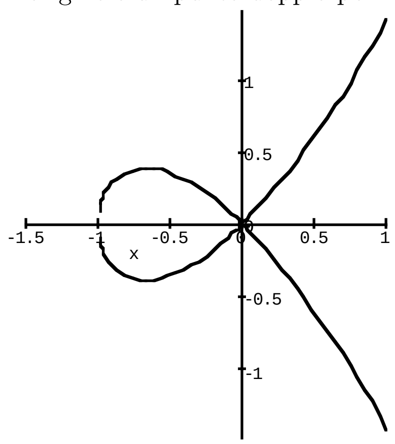
Il versore che rappresenta la direzione dal punto $(2,1)^T$ al punto $(1,2)^T$ è $\mathbf{v} = \dfrac{(1-2, 2-1)^T}{||(1-2, 2-1)^T||} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T$. La rapidità della variazione di f nel punto $(2,1)^T$ lungo la direzione di $\mathbf{v}$ è la derivata direzionale $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(2,1) = \langle \nabla f(2,1), \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) \rangle$. Il gradiente della funzione f è $\nabla f(x,y) = (e^y, xe^y)^T$; calcolato nel punto $(2,1)^T$ è $\nabla f(2,1) = (e, 2e)^T$. Si ottiene dunque $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(2,1) = \dfrac{e}{\sqrt{2}}$.

La direzione in cui avviene la variazione più rapida è quella del gradiente, cioè la direzione del vettore $(e, 2e)^T$, o, se si preferisce, del versore $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^T$.

Esercizio 4. Si consideri la curva piana definita dall'equazione $x^3 + x^2 - y^2 = 0$. Si stabilisca se esiste una funzione implicitamente definita dall'equazione in un intorno opportuno di ciascun punto della curva. Si calcoli la derivata di tale funzione.

Svolgimento.

Per poter applicare il teorema di U. Dini in un punto $(x_0, y_0)^T$ appartenente alla curva dobbiamo controllare che una delle due derivate parziali sia continua e non nulla nel punto. Il gradiente della funzione $F(x,y) = x^3 + x^2 - y^2$ è $\nabla F(x,y) = (3x^2 + 2x, -2y)^T$, e si annulla nei punti $(0,0)^T$ e $(-\frac{2}{3}, 0)^T$. Il secondo punto non appartiene alla curva mentre l'origine vi appartiene. Si può allora concludere che in tutti i punti della curva diversi dal punto $(0,0)^T$ si può ottenere la funzione implicitamente definita dall'equazione; questa sarà del tipo $y(x)$ oppure $x(y)$ a seconda dei casi (la prima è definita in tutti i punti della curva in cui $y \neq 0$, la seconda in tutti i punti della curva in cui $3x^2 + 2x \neq 0$). Nell'origine la funzione implicita non è definita. Si noti che l'origine è un punto doppio per la curva (cioè la curva interseca se stessa, vedi figura).



Per calcolare la derivata si può usare la formula di derivazione della funzione implicita:

$$y'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} = \frac{3x^2 + 2x}{2y(x)}$$

oppure, se esprimiamo la x come funzione di y,

$$x'(y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x(y), y)}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x(y), y)} = \frac{2y}{3x(y)^2 + 2x(y)}.$$

La derivata della funzione implicita si può anche ottenere, in alcuni casi, direttamente dall'equazione $x^3 + x^2 - y^2 = 0$. Derivando i due membri rispetto a x e considerando la y come funzione di x si ha

$$3x^2 + 2x - 2y \cdot y' = 0;$$

da cui

$$y'(x) = \frac{3x^2 + 2x}{2y}.$$

In modo simile si può ottenere la derivata di x rispetto a y.

È facile in questo esempio trovare esplicitamente l'espressione della funzione implicita. Ad esempio, se il punto $(x_0, y_0)^T$ è tale che $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$, si avrà $y(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$. Si noti che

$$y'(x) = \frac{3x^2 + 2x}{2\sqrt{x^3 + x^2}} = \frac{3x^2 + 2x}{2y(x)}$$

come previsto.

Esercizio 5. Sia $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(A)$ e si supponga che il punto $(x_0, y_0, z_0)^T$ appartenga alla superficie di equazione $F(x, y, z) = 0$ e la matrice Jacobiana della funzione F nel punto $(x_0, y_0, z_0)^T$ abbia rango massimo in modo tale che sia possibile definire la funzione $z(x, y)$ implicitamente definita dall'equazione $F(x, y, z) = 0$.

Si ricavino le espressioni delle derivate seconde di $z(x, y)$ rispetto a x e y.

Svolgimento. Dalla formula per le derivate delle funzioni implicite si ottengono

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x, y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, z(x, y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}.$$

Derivando la prima equazione rispetto a x, e facendo attenzione alla derivazione delle funzioni composte si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{-\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\dfrac{\partial F}{\partial z} + \dfrac{\partial F}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

Sostituendo nell'ultima equazione l'espressione della $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ si ottiene

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial z} + \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^3}.$$

Le espressioni di $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y)$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y)$ si ottengono in modo simile.

Esercizio 6. Si studi, utilizzando i teoremi sulle funzioni implicitamente definite da essa, la curva piana di equazione
$$e^{xy} + x - y - 1 = 0.$$

Svolgimento.
Il gradiente della funzione $F(x,y) = e^{xy} + x - y - 1$ è
$$\nabla F(x,y) = (ye^{xy} + 1, xe^{xy} - 1)^T.$$

Osserviamo che il gradiente non si annulla in alcun punto del piano. Infatti, se x e y sono tali che $ye^{xy}+1 = 0$ e $xe^{xy} - 1 = 0$, posto $t = e^{xy}$, deve essere $y = -\frac{1}{t}$ e $x = \frac{1}{t}$. Il punto $(\frac{1}{t}, -\frac{1}{t})^T$ non può però appartenere alla curva, infatti, se così fosse, avremmo
$$t + \frac{1}{t} + \frac{1}{t} - 1 = 0;$$
mentre l'equazione $t^2 + 2 - t = 0$ non ammette soluzioni reali.

Dunque esiste una funzione implicitamente definita in ogni punto della curva.

Osserviamo che l'origine appartiene alla curva ed è l'unico punto in cui la curva interseca gli assi cartesiani; infatti, se $x = 0$ si deve avere $1 - y - 1 = 0$ e quindi $y = 0$. Analogamente se $y = 0$ si ha $1 + x - 1 = 0$ e quindi $x = 0$.

Il punto $(0,0)^T$ è regolare per la F. Consideriamo la funzione implicita definita in un suo intorno: $y(x)$. La derivata è data dalla formula
$$y'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} = -\frac{ye^{xy} + 1}{xe^{xy} - 1}.$$

Nell'origine la derivata vale 1 e dunque la funzione $y(x)$ è crescente in $x = 0$.

Per studiare la concavità della funzione $y(x)$ nell'origine calcoliamo la derivata seconda:
$$y''(x) = -\frac{(y'e^{xy} + ye^{xy}(y + xy'))\ (xe^{xy} - 1) - (ye^{xy} + 1)\ (e^{xy} + xe^{xy}(y + xy'))}{(xe^{xy} - 1)^2};$$
che, calcolata nel punto $(0,0)^T$, dà $2 > 0$. Dunque la funzione è convessa nel punto.

Per studiare l'andamento della curva cerchiamo gli eventuali punti in cui la tangente è verticale o orizzontale. Questi si trovano imponendo rispettivamente
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0.$$

Cerchiamo eventuali soluzioni dell'equazione $xe^{xy} - 1 = 0$.

Si può chiaramente supporre $x > 0$, e quindi scrivere $e^{xy} = \frac{1}{x}$, cioè $y = \frac{-\log x}{x}$.

Poiché il punto deve appartenere alla curva, sostituiamo il valore di y trovato nell'equazione $e^{xy} + x - y - 1 = 0$. Otteniamo
$$\frac{1}{x} + x + \frac{\log x}{x} - 1 = 0,$$
che è equivalente alla
$$x^2 - x + 1 + \log x = 0.$$

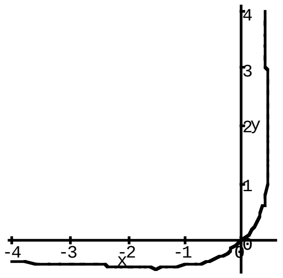
La funzione $h(x) = x^2 - x + 1 + \log x$ è crescente per $x > 0$, come si osserva calcolando la derivata $h'(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x} > 0$ per ogni $x > 0$. Inoltre $h(\frac{1}{3}) = \frac{7}{9} - \log 3 < 0$ mentre $h(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \log 2 > 0$. Dunque esiste un unico numero $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $h(\alpha) = 0$, ed è $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$.

Perciò nel punto $(\alpha, \frac{-\log\alpha}{\alpha})^T$ la curva ammette tangente verticale.

In modo simile si può risolvere l'equazione $ye^{xy}+1=0$. Si ottiene un'unico punto del tipo $\left(\frac{\log(-\frac{1}{\beta})}{\beta},\beta\right)^T$, con $\beta<0$.

Si potrebbe affinare la nostra indagine studiando la derivata seconda in tali punti. Si potrebbe anche calcolare le derivate successive della funzione implicita, ad esempio in $(0,0)^T$, e scrivere il polinomio di Taylor-McLaurin della funzione implicita in un intorno dell'origine.

Presentiamo il grafico della curva in un intorno dell'origine.



Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 8: estremi vincolati.

Esercizio 1. Scomporre il numero 411 nella somma di tre numeri positivi in modo che il loro prodotto sia massimo. Dimostrare che detto prodotto è effettivamente un massimo.

Svolgimento.
La condizione richiesta è $411 = x + y + z$ e la funzione da ottimizzare è $f(x, y, z) = xyz$. Il problema è un problema di massimo vincolato. Si noti che senza dubbio possiamo supporre $x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$ perché altrimenti il prodotto è uguale a 0 e questo non può essere il valore massimo.

Si può risolvere il problema in diversi modi. Proviamo ad esplicitare il vincolo. Si può scrivere $z = 411 - (x + y)$ ed attuare la sostituzione nell'espressione della funzione f. In questo modo otteniamo la funzione
$$g(x, y) := f(x, y, 411 - (x + y)) = xy(411 - x - y) = 411xy - x^2y - xy^2.$$
Calcoliamo il gradiente
$$\nabla g(x, y) = (411y - 2xy - y^2, 411x - x^2 - 2xy)^T.$$
Cerchiamo i punti in cui il gradiente si annulla. Cioè risolviamo il sistema
$$\begin{cases} 411y - 2xy - y^2 = 0 \\ 411x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} .$$
Sottraendo la seconda equazione dalla prima si ottiene $411(y - x) - (y^2 - x^2) = 0$ da cui $x = y$ oppure $x + y = 411$.

La $x + y = 411$ implicherebbe però $z = 0$ (essendo $x + y + z = 411$) e quindi è da scartare. Resta $x = y$ da cui, sostituendo in una delle due equazioni del sistema, $x = y = \frac{411}{3}$. Dall'equazione $x + y + z = 411$ si ricava infine $z = \frac{411}{3}$.

Se un massimo esiste, questo si ottiene quindi per $x = y = z = \frac{411}{3}$.

Vediamo ora come si può risolvere il problema utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

L'equazione del vincolo è $x+y+z = 411$. Posto $\phi(x, y, z) = x+y+z-411$ si ha $\nabla\phi(x, y, z) = (1, 1, 1)^T$. Il gradiente di f è $\nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy)^T$.

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange consiste nello studiare il sistema
$$\begin{cases} yz + \lambda = 0 \\ xz + \lambda = 0 \\ xy + \lambda = 0 \\ x + y + z = 411 \end{cases} .$$
Osservando come prima che le tre coordinate sono non nulle, sottraendo la terza equazione dalla seconda si ottiene $x(z - y) = 0$ e quindi $z = y$. Sottraendo la seconda dalla prima si ottiene $z(y - x) = 0$ da cui $y = x$. In conclusione, tenendo presente l'equazione del vincolo, si ottiene $x = y = z = \frac{411}{3}$.

Si osservi che il risultato era prevedibile. Il problema è perfettamente simmetrico nelle tre variabili $x,\ y,\ z$. Dunque i tre valori cercati di $x,\ y$ e z devono essere uguali. Dall'equazione del vincolo si ottiene poi $x = y = z = \frac{411}{3}$.

Resta da dimostrare che il punto trovato è proprio un punto di massimo. Poiché stiamo cercando numeri positivi, stiamo studiando la funzione $f(x, y, z) = xyz$ sull'insieme $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 411;\ \ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Tale insieme è chiuso essendo l'intersezione di un piano (chiuso) con il primo ottante. Inoltre è limitato perché le coordinate dei punti che appartengono a tale insieme sono limitate dal numero 411. Dunque è compatto e per il teorema di Weierstrass deve ammettere massimo e minimo. Il minimo si ottiene in tutti i punti in cui una coordinata è nulla. Il massimo si ottiene proprio nel nostro punto.

Esercizio 2. Si usi il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per trovare i valori estremi della funzione $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sul circolo unitario di centro l'origine.

Svolgimento.

Il gradiente delle funzione f è $\nabla f(x, y) = \langle 2x, 4y \rangle$. Il gradiente della funzione $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, che definisce il vincolo, è $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)^T$.

Per applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 \\ 4y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} .$$

Dalla prima equazione si ha che $\lambda = -1$ oppure $x = 0$. Se $x = 0$ allora, dall'equazione del cerchio, si ha $y = 1$ oppure $y = -1$. Se $\lambda = -1$ dalla seconda equazione si ottiene $y = 0$. Otteniamo in definitiva i punti $(0, -1)^T$, $(0, 1)^T$, $(-1, 0)^T$, $(1, 0)^T$.

Calcolando la funzione in tali punti si scopre che il valore massimo è 2, e si ottiene nei punti $(0, -1)^T$ e $(0, 1)^T$; il valore minimo è 1 e si ottiene nei punti $(-1, 0)^T$ e $(1, 0)^T$.

Naturalmente il problema si poteva risolvere in modo molto semplice parametrizzando il circolo con $x = \cos t$ e $y = \sin t$ e trovando gli zeri della derivata della funzione $f(\cos t, \sin t) = \cos^2 + 2 \sin^2 t = 1 + \sin^2 t$.

Esercizio 3. Si consideri l'ellissoide d'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Per ogni punto $(x_0, y_0, z_0)^T$ appartenente all'ellissoide si consideri il piano $\pi(x_0, y_0, z_0)$ tangente l'ellissoide nel punto $(x_0, y_0, z_0)^T$. Si indichino con $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_0, y_0, z_0)$ e $C(x_0, y_0, z_0)$ rispettivamente i punti di intersezione di $\pi(x_0, y_0, z_0)$ con l'asse delle x, con l'asse delle y e con l'asse delle z (questi non saranno definiti soltanto nel caso in cui il piano risulti parallelo ad un asse).

Definiamo la seguente funzione

$$f(x_0, y_0, z_0) = A(x_0, y_0, z_0) + B(x_0, y_0, z_0) + C(x_0, y_0, z_0).$$

Si trovi il punto $(x, y, z)^T$ appartenente all'ellisse, di coordinate tutte positive (cioè $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$) che rende minima la funzione f.

Svolgimento.

L'equazione del piano $\pi(x_0, y_0, z_0)$ si può ottenere dalla formula

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\,(z - z_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\,(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\,(x - x_0) = 0;$$

che nel nostro caso diventa

$$\frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) = 0.$$

Per calcolare l'intercetta del piano con l'asse delle x, poniamo $y = 0$ e $z = 0$ nell'equazione del piano. Si ottiene

$$A(x_0, y_0, z_0) = \frac{a^2}{2x_0}\left(\frac{2x_0^2}{a^2} + \frac{2y_0^2}{b^2} + \frac{2z_0^2}{c^2}\right) = \frac{a^2}{x_0},$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che il punto $(x_0, y_0, z_0)^T$ appartiene all'ellissoide.

In modo simile si trovano $B(x_0, y_0, z_0) = \frac{b^2}{y_0}$ e $C(x_0, y_0, z_0) = \frac{c^2}{z_0}$.

Abbiamo ricondotto il problema al calcolo del minimo della funzione

$$f(x,y,z) = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z}$$

vincolata all'ellissoide.

Applicheremo il teorema di Lagrange.

Il gradiente della funzione f è

$$\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{a^2}{x^2}, -\frac{b^2}{y^2}, -\frac{c^2}{z^2}\right)^T$$

mentre il gradiente della funzione che definisce il vincolo è

$$\left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)^T.$$

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} -\dfrac{a^2}{x^2} + \lambda\dfrac{x}{a^2} = 0 \\ -\dfrac{b^2}{y^2} + \lambda\dfrac{y}{b^2} = 0 \\ -\dfrac{c^2}{z^2} + \lambda\dfrac{z}{c^2} = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}.$$

Risolvendo la prima equazione si ottiene $x^3 = \frac{a^4}{\lambda}$, e in modo simile, $y^3 = \frac{b^4}{\lambda}$ e $z^3 = \frac{c^4}{\lambda}$. Sostituendo questi valori nell'equazione dell'ellissoide si trova dopo pochi calcoli

$$\lambda^{\frac{1}{3}} = \sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}}.$$

Sostituendo tale valore nelle espressioni per x, y, z si ottiene il punto di minimo

$$\left(\frac{a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}}}, \frac{b^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}}}, \frac{c^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}}}\right).$$

Esercizio 4. Si calcolino i valori massimo e minimo della funzione $f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2$ definita sul compatto $K = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \le 1\}$ (si tratta della porzione del paraboloide solido di equazione $z = 1 - x^2 - y^2$ contenuta nel semispazio $z \ge 0$).

Svolgimento.

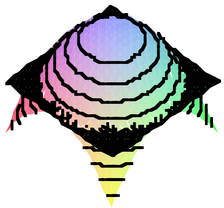
Il minimo e il massimo della funzione assegnata devono esistere per il teorema di Weierstrass. I punti di massimo e minimo possono trovarsi nell'interno di K oppure sulla frontiera.

Studiamo dapprima la situazione nell'interno di K. Il gradiente della funzione è

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 4y, 6z)^T$$

e si annulla soltanto nel punto $(0,0,0)^T$ che però non è interno a K. Dunque i punti di estremo devono appartenere alla frontiera di K.

La frontiera di K è costituita dall'unione della superficie $\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \colon z = 1 - x^2 - y^2,\ 0 < z \le 1\}$ e il disco $\{(x,y,0)^T \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \le 1\}$.



Cerchiamo eventuali punti sul paraboloide $\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2,\ 0 < z \leq 1\}$. Possiamo usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

L'equazione del vincolo è $x^2 + y^2 + z - 1 = 0$. Sia $x^2 + y^2 + z - 1 = \phi(x,y,z)$. Calcoliamo

$$\nabla\phi(x,y,z) = (2x, 2y, 1)^T\,; \qquad \nabla f(x,y,z) = (2x, 4y, 6z)^T\,.$$

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + \lambda 2x = 0, \\ 4y + \lambda 2y = 0, \\ 6z + \lambda = 0, \\ x^2 + y^2 + z = 1, \quad z > 0. \end{cases}$$

Si ricava facilmente $x(1+\lambda) = 0$, $\ y(2+\lambda) = 0$, $\ z = -\frac{\lambda}{6}$.

Deve essere $x = 0$ oppure $\lambda = -1$; inoltre $y = 0$ oppure $\lambda = -2$. Perciò una almeno delle due variabili x e y deve annullarsi.

Sia $x = 0$. Può essere $y = 0$ nel qual caso dalla quarta equazione si ottiene $z = 1$ (accettabile perché > 0). Abbiamo pertanto il primo punto: $(0,0,1)^T$. Supponiamo ora $y \neq 0$. Allora è $\lambda = -2$ e $z = \frac{1}{3}$ (accettabile perché > 0). Dalla quarta equazione si ottiene $y^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Abbiamo due ulteriori punti: $(0, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{3})^T$.

Supponiamo ora $y = 0$ e $x \neq 0$. Si ha $\lambda = -1$ e quindi $z = \frac{1}{6}$ (accettabile perché > 0). Si ottiene $x^2 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Otteniamo i due punti $(\pm\sqrt{\frac{5}{6}}, 0, \frac{1}{6})^T$.

Si poteva anche esplicitare il vincolo, senza ricorrere ai moltiplicatori di Lagrange, nel modo seguente.

Sul paraboloide si ha $z = 1 - x^2 - y^2$ e si può studiare la funzione in due variabili ottenuta dalla f operando la sostituzione su z: poniamo

$$g(x,y) := f(x,y,1-x^2-y^2) = x^2 + 2y^2 + 3(1-x^2-y^2)^2 = 3(x^4 + y^4 + 2x^2y^2) - 5x^2 - 4y^2 + 3.$$

Calcoliamo il gradiente:

$$\nabla g(x,y) = \left(12x^3 - 10x + 12xy^2, 12y^3 - 8y + 12x^2y\right)^T.$$

Affinché il gradiente si annulli deve essere soddisfatto il sistema

$$\begin{cases} 12x^3 - 10x + 12xy^2 = 0 \\ 12y^3 - 8y + 12x^2y = 0 \end{cases},$$

che si può riscrivere come segue

$$\begin{cases} 2x(x^2 - 5 + 6y^2) = 0 \\ 2y(y^2 - 4 + 6x^2) = 0 \end{cases}.$$

Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$ il sistema equivale a

$$\begin{cases} x^2 + 6y^2 = 5 \\ x^2 + 6y^2 = 4 \end{cases},$$

e quindi non ammette soluzioni.

Dunque deve essere $x = 0$ oppure $y = 0$.

Se $x = 0$ si deve avere $y = 0$ oppure $12y^2 - 8 = 0$ cioè $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Se $y = 0$ si deve avere $x = 0$ oppure $12x^2 - 10 = 0$ cioè $x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$.

Ricordiamo che stiamo studiando i punti $(x, y, z)^T$ tali che $z = 1 - x^2 - y^2$, $0 < z \leq 1$. Otteniamo i punti $(0,0)^T$, $(-\sqrt{\frac{5}{6}}, 0)^T$, $(\sqrt{\frac{5}{6}}, 0)^T$, $(0, -\sqrt{\frac{2}{3}})^T$, $(0, \sqrt{\frac{2}{3}})^T$. Nell'insieme K questi punti diventano $(0,0,1)^T$, $(-\sqrt{\frac{5}{6}}, 0, \frac{1}{6})^T$, $(\sqrt{\frac{5}{6}}, 0, \frac{1}{6})^T$, $(0, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{3})^T$, $(0, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{3})^T$ e i valori della funzione sono rispettivamente 3, $\frac{11}{12}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{17}{12}$.

Resta da controllare cosa succede sul "tappo" inferiore del nostro solido, cioè sul disco chiuso $\{(x, y, 0)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Nel disco aperto si può considerare la restrizione della funzione f al disco: $g(x, y) := f(x, y, 0)$. Si vede subito che l'unico punto di annullamento del gradiente $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)^T$ è l'origine . In tale punto la funzione f vale 0.

Restano da studiare i punti appartenenti alla circonferenza $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, \ z = 0\}$. Questi punti si possono parametrizzare come $x = \cos\vartheta$, $\ y = \sin\vartheta$, $\ z = 0$. La funzione f ristretta alla circonferenza si può scrivere come $k(\vartheta) := f(\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0) = 1 + \sin^2\vartheta$. Si calcola $k'(\vartheta) = 2\sin\vartheta\cos\vartheta$. I punti di annullamento si ottengono per $\vartheta \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{2}\}$. Questi punti corrispondono a $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$, $(-1,0,0)^T$, $(0,-1,0)^T$ rispettivamente e i valori della funzione sono 1, 2, 1, 2 rispettivamente.

Si può a questo punto concludere: il punto di massimo è il punto $(0,0,1)^T$ e il valore massimo è 3. Il punto di minimo è il punto $(0,0,0)^T$ e il valore minimo è 0.

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 9: equazioni differenziali ordinarie.

Esercizio 1. Si classifichino le seguenti equazioni, come ordinarie o alle derivate parziali; si dica se sono lineari, se lineari omogenee e se ne determini l'ordine:

$$a)\quad 2(u-1)u' = 2t+1 \quad ; \quad b)\quad \log\left(\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\right)\frac{dy}{dx} - e^{2x}y = \sin\sqrt{x} \quad ;$$

$$c)\quad xy\langle\nabla u(x,y),(x,y)^T\rangle = 3 \quad ; \quad d)\quad \frac{d}{dx}(xy'(x)) + 2y(x) = f(y) \quad ;$$

$$e)\quad y^{(4)}\sin x + 3y''\cos x + y^{(5)} - g(x) = 0 \quad ; \quad f)\quad \sum_{i=1}^{3} a_i(x)y^{(i)}(x) = 0 \quad .$$

Svolgimento.
L'equazione a) è ordinaria del primo ordine, non è lineare.
L'equazione b) è ordinaria lineare non omogenea del primo ordine.
L'equazione c) è alle derivate parziali, del primo ordine, lineare non omogenea.
L'equazione d) è ordinaria del secondo ordine; è lineare se e solo se la funzione f è lineare, ed è lineare omogenea se e solo se la funzione f è lineare omogenea.
L'equazione e) è ordinaria lineare del quinto ordine; è omogenea se e solo se $g = 0$.
L'equazione f) è ordinaria lineare omogenea del terzo ordine.

Esercizio 2. Si consideri l'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

che modella la diffusione dell'energia termica di un filo nel punto x all'istante t.
Si verifichi che la seguente funzione, espressa come serie, è soluzione di tale equazione:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t},$$

dove $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una qualunque successione limitata di numeri reali.

Svolgimento.
È sufficiente calcolare le derivate parziali della funzione $u(t,x)$, e sostituirle nell'equazione:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\left(-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\frac{n\pi}{L};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

Esercizio 3. Si risolva l'equazione differenziale

$$u' = 2^u.$$

Svolgimento.
È un'equazione a variabili separate e si può scrivere

$$\frac{du}{2^u} = dx.$$

Integrando a membro a membro si ottiene

$$-\frac{1}{\log 2} 2^{-u} = x + C$$

dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante.

Volendo si può scrivere la soluzione in forma esplicita. Sarà

$$u(x) = -\log_2[-\log 2(x + C)]$$

e la soluzione è definita nell'intervallo $]-\infty, -C[$.

Esercizio 4. Si risolva l'equazione differenziale

$$x^2 y' + y = 0.$$

Svolgimento.
Per $x \neq 0$ si può scrivere

$$y' = -\frac{y}{x^2}.$$

Questa è un'equazione a variabili separabili e si può scrivere

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2}.$$

Integrando a membro a membro si ottiene

$$\log|y| = \frac{1}{x} + C$$

con C costante e quindi

$$y(x) = ke^{\frac{1}{x}}$$

con k costante. In particolare la soluzione $y(x) = 0$ passa per il punto $x = 0$ mentre tutte le altre soluzioni non sono definite per $x = 0$.

Esercizio 5. Si risolva l'equazione

$$y' = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{ye^y}.$$

Svolgimento.
Naturalmente si deve supporre $y \neq 0$. L'equazione si può riscrivere nella forma

$$ye^y dy = x\sqrt{x^2 + 1}dx.$$

Integrando a membro a membro si ottiene

$$ye^y - e^y = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

e la soluzione in forma implicita è

$$e^y(y-1) = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Esercizio 6. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x} \\ y(1) = \pi/4 \end{cases}.$$

Svolgimento.

L'equazione proposta è omogenea nelle variabili x e y, conviene allora attuare una sostituzione. Ponendo $u = \frac{y}{x}$ e tenendo conto che $y' = u + xu'$ l'equazione diventa

$$xu' = \tan u$$

che si può riscrivere nella forma

$$\frac{u'}{\tan u} = \frac{1}{x}.$$

Integrando a membro a membro si ottiene

$$\log(\sin u) = \log|x| + C$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante.

La stessa si può riscrivere $\sin\frac{y}{x} = kx$ con $k \in \mathbb{R}$.

Dalla condizione $y(1) = \frac{\pi}{4}$ si ottiene infine $\frac{\sqrt{2}}{2} = k$ da cui

$$y(x) = x\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right).$$

Esercizio 7. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{xy-y^2}{x^2} \\ y(e) = e \end{cases}.$$

Svolgimento.

L'equazione è omogenea in x e y. Sostituendo $u = \frac{y}{x}$ si ottiene

$$xu' = -u^2$$

che si può riscrivere nella forma $-\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{x}$. Integrando a membro a membro si ottiene subito $u(x) = \frac{1}{\log x + C}$ con $C \in \mathbb{R}$ costante. La soluzione sarà $y(x) = \frac{x}{\log x + C}$ e dovendo soddisfare alla condizione $y(e) = e$ deve essere $C = 0$, dunque

$$y(x) = \frac{x}{\log x}.$$

Esercizio 8. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = yx\cos x \\ y(0) = 2 \end{cases}.$$

Svolgimento.

L'equazione è a variabili separabili. Si può scrivere $\frac{dy}{y} = x\cos x\,dx$. Integrando a membro a membro si ottiene $\log|y| = x\sin x + \cos x + C$ da cui $y(x) = ke^{x\sin x + \cos x}$. Imponendo la condizione $y(0) = 2$ si ottiene $k = 2e^{-1}$. Dunque

$$y(x) = 2e^{x\sin x + \cos x - 1}.$$

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 10: equazioni lineari del primo ordine, un tipo di equazioni del secondo ordine.

Esercizio 1.
Si risolva l'equazione ordinaria lineare del primo ordine

$$y' + 3x^2 y = 6x^2.$$

Svolgimento.
È un'equazione lineare completa del primo ordine. Dobbiamo dunque prima risolvere l'equazione omogenea associata e poi trovare una soluzione particolare.
L'equazione omogenea associata è

$$y' = -3x^2 y.$$

Il coefficiente del termine y è $-3x^2$; una primitiva della funzione $-3x^2$ è la funzione $-x^3$. Dunque una soluzione dell'equazione omogenea è e^{-x^3}.
Si potrebbe cercare la soluzione particolare con il metodo della variazione della costante. In questo caso però basta osservare l'equazione un momento per scoprire che la funzione costante $f(x) = 2$ è soluzione dell'equazione completa.
Le soluzioni dell'equazione proposta saranno pertanto le funzioni del tipo

$$y(x) = ce^{-x^3} + 2.$$

Esercizio 2. Si risolva l'equazione differenziale

$$y' + \frac{y}{x} = e^x.$$

Svolgimento.
È un'equazione lineare completa del primo ordine. Dobbiamo dunque prima risolvere l'equazione omogenea associata e poi trovare una soluzione particolare.
L'equazione omogenea associata è $y' = -\frac{y}{x}$ che ha per soluzione $y_h(x) = kx^{-1}$ (è sufficiente scrivere $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ e integrare a membro a membro).
Cerchiamo una soluzione particolare utilizzando il metodo della variazione della costante. Cerchiamo cioè una soluzione del tipo $c(x)x^{-1}$ dove $c(x)$ è una funzione incognita.
Si ha $y' = c'x^{-1} - cx^{-2}$ e sostituendo nell'equazione si ottiene

$$c'x^{-1} - cx^{-2} + cx^{-2} = e^x$$

cioè $c' = xe^x$ e integrando $c(x) = e^x(x-1)$.
Una soluzione particolare sarà allora $y_p(x) = e^x(1 - \frac{1}{x})$.
Le soluzioni dell'equazione assegnata sono allora tutte e sole le funzioni del tipo

$$y(x) = kx^{-1} + e^x(1 - \frac{1}{x})$$

con $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - xy^{1/3} \\ y(1) = \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

Svolgimento.

È un'equazione di Bernoulli, riconducibile ad un'equazione lineare mediante sostituzione. Si osservi che la funzione $y(x) = 0$ è soluzione dell'equazione differenziale ma non del problema di Cauchy. Dividiamo l'equazione per $y^{\frac{1}{3}}$ e osserviamo che $\frac{y'}{y^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{2}u'$ dove abbiamo posto $u(x) = (y(x))^{\frac{2}{3}}$. Possiamo dunque riscrivere l'equazione nella forma seguente:

$$\frac{3}{2}u' - u = -x.$$

Questa è un equazione lineare completa. L'equazione omogenea associata $3u' - 2u = 0$ ha come soluzioni le funzioni $ke^{\frac{2}{3}x}$ con $k \in \mathbb{R}$.

Si calcola facilmente una soluzione particolare dell'equazione completa. Possiamo cercarla tra le funzioni $ax + b$. Deve essere $\frac{3}{2}a - (ax + b) = -x$ e quindi $a = 1$, $b = \frac{3}{2}$.

La generica soluzione dell'equazione $\frac{3}{2}u' - u = -x$ è pertanto $u(x) = ke^{\frac{2}{3}x} + x + \frac{3}{2}$.

Sarà allora

$$y(x) = \left(ke^{\frac{2}{3}x} + x + \frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

ed imponendo la condizione $y(1) = \frac{\pi}{4}$ si ottiene $k = \left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{5}{2}\right] e^{-\frac{2}{3}}$. Si ottiene allora

$$y(x) = \left(\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{5}{2}\right] e^{\frac{2}{3}(x-1)} + x + \frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Esercizio 4. Si consideri un corpo in caduta libera immerso in un fluido (si pensi ad esempio ad un paracadutista durante un lancio). Si studino le leggi del moto.

La seconda legge di Newton stabilisce che $F = m\,a$. Nel nostro esempio la forza ha due componenti: la forza di gravità, $m\,g$, che agisce dall'alto verso il basso, e la forza di attrito f_{attr}, che agisce in senso inverso ed è funzione della velocità del corpo.

L'equazione del corpo in caduta si può allora scrivere come segue:

$$mx'' = mg - f_{\text{attr}}(x').$$

L'equazione è solo apparentemente di secondo grado. Infatti si può pensare di risolverla rispetto alla velocità $v = x'$. L'equazione diventa allora

$$mv' = mg - f_{\text{attr}}(v).$$

Si studi l'equazione proposta nei casi

a) $f_{\text{attr}}(x') = kx'$ (buona approssimazione ad esempio per un corpo non troppo veloce in caduta nell'acqua);

b) $f_{\text{attr}}(x') = k(x')^2$ (buona approssimazione ad esempio per il paracadutista in caduta libera).

Svolgimento.

a) L'equazione che stiamo studiando è

$$v' = g - \frac{k}{m}v, \qquad\qquad v' = -\frac{k}{m}(v - \frac{gm}{k}),$$

e, integrando,

$$\log|v - \frac{gm}{k}| = -\frac{k}{m}t + c,$$

$$v = \frac{gm}{k} + Ae^{-\frac{k}{m}t}$$

dove si è posto $A = e^c$.

Imponendo la condizione iniziale $v(0) = 0$ (la velocità del corpo in caduta libera è nulla al momento iniziale) si ottiene $A = -\frac{gm}{k}$ e quindi si ottiene

$$v = \frac{gm}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}).$$

Si noti che la velocità, come l'intuizione ci suggerisce, è decrescente e tende al valore asintotico $\frac{mg}{k}$. Questo valore rappresenta la velocità terminale del corpo. Tale velocità si può anche ottenere imponendo $v' = 0$ e risolvendo rispetto a v l'equazione $v' = g - \frac{k}{m}v$.

b) L'equazione che stiamo studiando è

$$v' = g - \frac{k}{m}v^2, \qquad v' = -\frac{k}{m}(v^2 - \frac{gm}{k}),$$

$$\frac{dv}{v^2 - \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m}dt \qquad \frac{dv}{(v + \sqrt{\frac{mg}{k}})(v - \sqrt{\frac{mg}{k}})} = -\frac{k}{m}dt,$$

e, integrando,

$$\sqrt{\frac{k}{4mg}} \log \left| \frac{v - \sqrt{\frac{gm}{k}}}{v + \sqrt{\frac{gm}{k}}} \right| = -\frac{k}{m}t + c,$$

$$\left| \frac{v - \sqrt{\frac{gm}{k}}}{v + \sqrt{\frac{gm}{k}}} \right| = Ae^{\sqrt{\frac{4mg}{k}}(-\frac{k}{m}t)} = Ae^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t},$$

dove si è posto $A = e^{c\sqrt{\frac{4mg}{k}}}$.

Si osservi che $v < \sqrt{\frac{mg}{k}}$ (perché la condizione iniziale è $v(0) = 0$). Risolvendo l'equazione rispetto a v si ottiene

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \frac{1 - Ae^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}{1 + Ae^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}.$$

Imponendo la condizione iniziale $v(0) = 0$ si ottiene $\frac{1-A}{1+A} = 0$ da cui $A = 1$.

Si ottiene infine

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \frac{1 - e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}{1 + e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}.$$

Anche in questo caso la velocità è decrescente e tende al valore asintotico $\sqrt{\frac{mg}{k}}$. Questo valore rappresenta la velocità terminale del corpo. Come nel caso precedente tale velocità si può ottenere imponendo $v' = 0$ e risolvendo rispetto a v l'equazione $v' = g - \frac{k}{m}v^2$.

Più in generale si potrebbe studiare il problema in cui $f_{\text{attr}}(x') = k(x')^\gamma$. L'integrazione nel caso generale risulta però alquanto complessa ed è talvolta preferibile, se non necessario, un approccio numerico. Anche senza risolvere l'equazione esplicitamente si può comunque studiare l'andamento della soluzione. In particolare si otterrà anche nel caso generale la velocità terminale pari a $v = \left(\frac{mg}{k}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$.

Esercizio 5. Si integri l'equazione differenziale del secondo ordine

$$y''y^3 + 1 = 0.$$

Svolgimento.

Questa equazione è del secondo ordine, ma è del tipo $y'' = f(y)$ e quindi si può ricondurre ad un'equazione del primo ordine.

Moltiplichiamo i due membri dell'equazione per $2y'$:

$$2y' \cdot y'' = 2y' \cdot (-y^{-3}); \qquad \frac{d}{dx}(y')^2 = -2y' \cdot y^{-3}.$$

Integrando i due membri in dx si ottiene un'equazione del primo ordine, dipendente da un parametro reale c:

$$(y')^2 = y^{-2} + c.$$

Studiando l'equazione a variabili separate

$$y' = \pm\sqrt{y^{-2} + c} \qquad \text{cioè} \qquad \frac{y'}{\sqrt{y^{-2} + c}} = \pm 1;$$

si ottiene

$$\frac{\sqrt{1 + cy^2}}{c} = \pm x + d \qquad \text{da cui} \qquad y(x) = \pm\sqrt{\frac{(\pm cx + cd)^2 - 1}{c}}.$$

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 11: equazioni e sistemi di equazioni differenziali.

Esercizio 1.
La seguente equazione differenziale ordinaria non lineare è nota con il nome di equazione di van der Pol:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \varepsilon(1-y^2)\frac{dy}{dt} + ay = 0;$$

dove $\varepsilon > 0$ e $a > 0$.

Si scriva un sistema di 2 equazioni del primo ordine equivalenti a tale equazione. Si separi inoltre la parte lineare dalla parte non lineare, si scriva cioè l'equazione nella forma $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + g(\mathbf{y})$ dove A è una matrice 2×2 e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è il termine non lineare.

Svolgimento.
Poniamo $y_1 = y$ e $y_2 = y'$. Il sistema proposto diventa

$$\begin{cases} y_1' = y_2 & , \\ y_2' = \varepsilon(1-y_1^2)y_2 + ay_1 & . \end{cases}$$

Poniamo $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & \varepsilon \end{pmatrix}$ e $g(\mathbf{y}) = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 y_2 \end{pmatrix}$. Potremo allora scrivere

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} - g(\mathbf{y}).$$

Esercizio 2. È dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$(*) \qquad \begin{cases} y_1'(x) = y_1 y_2 \sqrt{|x|} & , \\ y_2'(x) = y_1 - |x-1|y_2 & . \end{cases}$$

Si stabilisca se esiste una soluzione del problema di Cauchy definito dal sistema (*) e dalle condizioni iniziali

$$\begin{cases} y_1(0) = a & ; \\ y_2(0) = b & . \end{cases}$$

Si trovi la soluzione nel caso in cui $a = b$.

Svolgimento.
La funzione $F(x, \mathbf{y}) = \left(y_1 y_2 \sqrt{|x|}, y_1 - |x-1|y_2\right)^T$ è continua e quindi la soluzione del problema di Cauchy esiste. Inoltre, le derivate parziali della funzione F rispetto alle due componenti dellla variabile vettoriale $\mathbf{y}$ esistono e sono continue. Questo fatto ci permette di dire che la soluzione è anche unica.

Nel caso in cui $a = b$ si vede facilmente che la soluzione costante $\mathbf{y}(x) = (a, a)^T$ è la soluzione del problema.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + x(1-x^2-y^2) & , \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y(1-x^2-y^2) & . \end{cases}$$

Si verifichi che l'origine è l'unico punto critico del sistema. Si studino le traiettorie delle soluzioni nelle vicinanze del punto critico: si passi a coordinate polari e si trovi esplicitamente la soluzione del problema.

Svolgimento.

È evidente che l'origine è un punto critico del sistema. Verifichiamo che non esistono altri punti critici. Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} -y + x(1 - x^2 - y^2) = 0 & , \\ x + y(1 - x^2 - y^2) = 0 & . \end{cases}$$

Se $x = 0$, allora necessariamente $y = 0$, come si ottiene dalla prima equazione. Nello stesso modo se $y = 0$ si ottiene $x = 0$ dalla seconda equazione. Si può dunque supporre $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

Moltiplicando le due equazioni rispettivamente per x e per y si trova

$$\begin{cases} -xy + x^2(1 - x^2 - y^2) = 0 & , \\ xy + y^2(1 - x^2 - y^2) = 0 & . \end{cases}$$

Sommando le due equazioni si ottiene l'equazione $(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) = 0$, dunque $(1 - x^2 - y^2) = 0$. Ma sostituendo tale valore nelle equazioni originarie si ottiene $y = 0$ e $x = 0$. Dunque è provato che l'origine è l'unico punto critico del sistema.

Passiamo a coordinate polari: poniamo $x = \rho\cos\vartheta$ e $y = \rho\sin\vartheta$. Dall'uguaglianza $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\vartheta$ si ottiene

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}\frac{y'x - yx'}{x^2} = \frac{y'x - yx'}{x^2 + y^2}.$$

Sostituendo le espressioni di x' e y' ottenute dal sistema, si ottiene

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 1,$$

da cui segue $\vartheta(t) = t + \vartheta_0$.

In modo simile, ricordando che $\rho^2 = x^2 + y^2$ si ottiene

$$2\rho\frac{d\rho}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2\rho^2(1 - \rho^2).$$

Dall'ultima equazione si ottiene

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho(1 - \rho^2).$$

Separando le variabili si ha

$$\frac{d\rho}{\rho(1 - \rho^2)} = dt;$$

che si può anche scrivere nella forma

$$\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\frac{1}{2}}{\rho - 1} - \frac{\frac{1}{2}}{1 + \rho}\right) d\rho = dt.$$

Integrando, si ottiene

$$\log\left(\frac{\rho}{\sqrt{|\rho^2 - 1|}}\right) = t + c.$$

Cerchiamo di esplicitare la ρ :

$$\rho^2 = |\rho^2 - 1|k^2 e^{2t},$$

dove $k = e^c$.

Calcolando il valore $\rho(0) = \rho_0$ per $t = 0$ si ottiene la costante k in funzione di ρ_0:

$$k^2 = \frac{\rho_0^2}{|\rho_0^2 - 1|}.$$

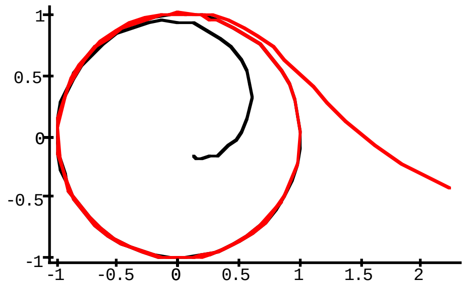
Dunque

$$\frac{\rho^2}{|\rho^2-1|} = \frac{\rho_0^2}{|\rho_0^2-1|}e^{2t};$$

da cui

$$(\rho_0^2-1)\rho^2 e^{-2t} = \rho_0^2(\rho^2-1);$$
$$\rho^2(\rho_0^2+(1-\rho_0^2)e^{-2t}) = \rho_0^2;$$
$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{\sqrt{\rho_0^2+(1-\rho_0^2)e^{-2t}}}.$$

La soluzione generale del nostro problema si può pertanto scrivere nella forma $x(t) = \rho(t)\cos(t+\vartheta_0)$ e $y(t) = \rho(t)\sin(t+\vartheta_0)$.



Quando $\rho_0 = 1$ l'orbita è il circolo di raggio unitario; altrimenti l'orbita gira intorno al circolo e tende al circolo per $t \to +\infty$, dall'interno se $0 < \rho_0 < 1$, dall'esterno se $\rho_0 > 1$.

Esercizio 4. (Modello predatore-preda di V.Volterra)
Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali non lineari del primo ordine:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy & , \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + dxy & , \end{cases}$$

dove a, b, c, d sono costanti positive.

Il sistema proposto è un classico modello matematico per descrivere l'evoluzione della popolazione di due specie animali in un sistema chiuso. La variabile y indica il numero di individui di una specie di predatori; la quantità delle loro prede è indicata con la variabile x. Ad esempio si può pensare ad una popolazione di conigli (x) e di volpi (y).

In assenza di predatori, la popolazione di prede crescerebbe in modo esponenziale, e l'aumento sarebbe descritto dall'equazione

$$\frac{dx}{dt} = ax;$$

con $a > 0$.

In assenza di prede, la popolazione di predatori sarebbe condannata all'estinzione, e la variazione sarebbe descritta dall'equazione

$$\frac{dy}{dt} = -cx;$$

con $c > 0$.

In contemporanea presenza di prede e predatori, ad ogni incontro tra preda e predatore corrisponde un incremento nella popolazione dei predatori, e un decremento nella popolazione delle prede.

Si trovino i punti critici del sistema e se ne descriva il significato. Si studino le traiettorie delle soluzioni.

Svolgimento.

I punti critici si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} ax - bxy = 0 & , \\ -cy + dxy = 0 & ; \end{cases}$$

le cui soluzioni sono i due punti $(0,0)^T$ e $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})^T$.

Il punto $(0,0)^T$ è un punto di sella. La soluzione che passa per tale punto è la soluzione banale in cui non vi sono né prede, né predatori. È chiaro che si tratta di un equilibrio instabile; è sufficiente la presenza di poche prede (in assenza di predatori) per dare origine ad un aumento esponenziale di popolazione. D'altra parte le presenza di predatori (e nessuna preda) porterà presto alla loro estinzione.

È più interessante la situazione nel punto $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})^T$. Questa è la situazione in cui prede e predatori possono coesistere. Ci chiediamo se tale punto di equilibrio è stabile.

Per studiare le traiettorie delle soluzioni, nello spazio delle fasi, dividiamo la seconda equazione $\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$ per la prima $\frac{dx}{dt} = ax - bxy$; otteniamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - by)}.$$

Risolviamo tale equazione separando le variabili; si ottiene

$$\frac{c - dx}{x} dx + \frac{a - by}{y} dy = 0,$$

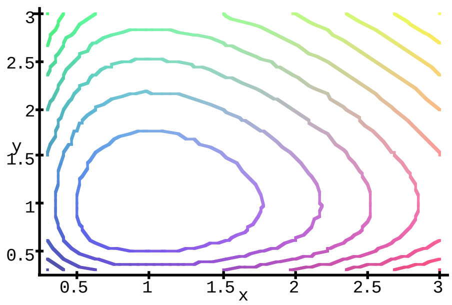
che, integrata, ci dà

$$c \log x - dx + a \log y - by = K,$$

dove K è una costante.

Dunque le traiettorie sono le linee di livello della funzione $g(x,y) = c \log x - dx + a \log y - by$.

La figura successiva mostra alcune di tali linee nel caso particolare $a = b = c = d = 1$:



Si può provare che anche nel caso generale, le traiettorie sono linee di questo tipo. Il punto $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})^T$ pertanto è un punto di equilibrio stabile.

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 12: Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti.

Esercizio 1.
Si considerino l'operatore differenziale

$$L = D^5(D-2)^2(D^2+5-2D)^2;$$

e l'associata equazione differenziale lineare

$$L(y) = 0.$$

Si trovi la soluzione generale di tale equazione.

Svolgimento
L'equazione è omogenea. L'equazione caratteristica dell'equazione è

$$\lambda^5(\lambda-2)^2(\lambda^2+5-2\lambda)^2.$$

Le radici sono: $\lambda = 0$, di molteplicità 5; $\lambda = 2$ di molteplicità 2 e le radici complesse coniugate $\lambda = 1 \pm 2i$ ciascuna di molteplicità 2.

Le soluzioni sono pertanto combinazioni lineari delle seguenti funzioni: 1, t, t^2, t^3, t^4, e^{2t}, te^{2t}, $e^t\cos(2t)$, $e^t\sin(2t)$, $te^t\cos(2t)$, $te^t\sin(2t)$.

Esercizio 2. Si risolva l'equazione differenziale

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Svolgimento.
È un'equazione lineare completa di secondo grado. L'equazione omogenea associata è $y'' + y = 0$ e le sue soluzioni si trovano facilmente considerando l'equazione caratteristica associata $t^2 + 1 = 0$, che ha soluzioni complesse coniugate $t = \pm i$. Dunque le soluzioni dell'equazione omogenea sono combinazioni lineari di seno e coseno.

Per trovare una soluzione particolare possiamo usare il metodo della variazione delle costanti. La soluzione particolare è

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,t)\frac{1}{\cos t}dt \quad \text{dove} \quad K(x,t) = \frac{\cos t\sin x - \cos x\sin t}{\cos t\cos t + \sin t\sin t} = \cos t\sin x - \cos x\sin t.$$

Si ottiene

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\cos t\sin x - \cos x\sin t}{\cos t}\,dt = \int_{x_0}^{x} \sin x\,dt - \cos x\int_{x_0}^{x}\tan t\,dt = x\sin x + \cos x\log(\cos x).$$

La soluzione sarà dunque

$$a\cos x + b\sin x + x\sin x + \cos(x)\cdot\log(\cos x).$$

Esercizio 3.
Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y, \\ y' = 6x - 7y, \\ x(0) = 2, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Svolgimento.
Risolvendo la seconda equazione in x si ottiene

$$x = \frac{1}{6}y' + \frac{7}{6}y;$$

derivando rispetto a t, e sostituendo a x' e y' le espressioni date dal sistema, si ottiene

$$x' = \frac{1}{6}y'' + \frac{7}{6}y';$$

$$\frac{1}{6}y'' + \frac{7}{6}y' = 4\left(\frac{1}{6}y' + \frac{7}{6}y\right) - 3y;$$

che si semplifica

$$y'' + 3y' - 10y = 0.$$

L'equazione caratteristica associata all'equazione è

$$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda - 2)(\lambda + 5) = 0.$$

La soluzione generale dell'equazione è pertanto

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t}.$$

Sostituendo l'espressione di y nell' equazione $x = \frac{1}{6}y' + \frac{7}{6}y$; si ottiene

$$x(t) = \frac{1}{6}(2c_1 e^{2t} - 5c_2 e^{-5t}) + \frac{7}{6}(c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t});$$

da cui

$$x(t) = \frac{3}{2}c_1 e^{2t} + \frac{1}{3}c_2 e^{-5t}.$$

Imponendo la condizione iniziale si trova infine

$$\frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 = 2 \qquad \text{e} \qquad c_1 + c_2 = -1;$$

da cui

$$\begin{cases} x(t) = 3e^{2t} - e^{-5t} \\ y(t) = 2e^{2t} - 3e^{-5t}. \end{cases}$$

Esercizio 4.
Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}; \\ y(\pi) = 0; \\ y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento.
le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono $y_1(x) = \cos x$ e $y_2(x) = \sin x$. Il Wronskiano del sistema fondamentale è

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1;$$

dunque la soluzione particolare si può ottenere nel modo seguente:

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,t) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} dt \quad \text{dove} \quad K(x,t) = \frac{\cos t \sin x - \cos x \sin t}{\cos t \cos t + \sin t \sin t} = \cos t \sin x - \cos x \sin t.$$

Si ottiene

$$\frac{\sin x}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} \, dt - \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt.$$

Gli integrali al secondo membro non sono calcolabili direttamente. Ne parleremo nella lezione sugli integrali generalizzati (lezione 17). Poniamo

$$\text{Fsin}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt$$

e

$$\text{Fcos}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} \, dt.$$

La soluzione della nostra equazione si può allora scrivere

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \text{Fsin}(x) \cos x + \text{Fcos}(x) \sin x;$$

e la sua derivata è

$$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x + \text{Fsin}(x) \sin x + \text{Fcos}(x) \cos x.$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(\pi) = 0$ e $y'(\pi) = 0$, si ottiene $c_1 = \text{Fsin}(\pi)$ e $c_2 = -\text{Fcos}(\pi)$.
Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = (\text{Fsin}(\pi)\text{Fsin}(x)) \cos x - (\text{Fcos}(\pi) - \text{Fcos}(x)) \sin x.$$

Si può verificare che una forma alternativa per la nostra soluzione è la seguente:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\pi} \frac{\sin(t-x)}{\sqrt{t}} \, dt.$$

Esercizio 5. Si risolva l'equazione

$$x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0;$$

osservando che la funzione $y(x) = x^3$ è una soluzione.

Svolgimento.
L'equazione proposta è lineare del secondo ordine e si può riscrivere nella forma

$$y'' - \frac{5}{x} y' + \frac{9}{x^2} y = 0$$

per $x > 0$.

Questo è un esempio di *equazione di Eulero-Cauchy* e, grazie alla conoscenza di una soluzione, è possibile ricondurla ad un'equazione del primo ordine.

Si verifica facilmente che la funzione $y_1(x) = x^3$ è effettivamente una soluzione dell'equazione.

Chiamiamo $y_2(x)$ la seconda soluzione, da noi cercata, linearmente indipendente rispetto alla $y_1(x)$.

Poniamo poi $v(x) = \dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}$ cosicché si ha $y_2(x) = v(x) y_1(x)$.

Sostituiamo $y_2(x)$ nell'equazione proposta, si ottiene

$$(vy_1'' + 2v'y_1' + v''y_1) - \frac{5}{x}(vy_1' + v'y_1) + \frac{9}{x^2}vy_1 = 0;$$

che, essendo $y_1'' - \frac{5}{x}y_1' + \frac{9}{x^2}y_1 = 0$, si riduce a

$$y_1v'' + (2y_1' - \frac{5}{x}y_1)v' = 0;$$

cioè, scrivendo x^3 al posto di y_1 e ponendo $u = v'$,

$$x^3u' + x^2u = 0.$$

L'ultima equazione scritta è lineare del primo ordine, e quindi si risolve agevolmente; una soluzione di tale equazione è $u(x) = \frac{1}{x}$, e quindi $v(x) = \log x$ e la soluzione cercata $y_2(x)$, indipendente dalla y_1, è $y_2(x) = x^3 \log x$.

La soluzione generale della nostra equazione sarà pertanto

$$y(x) = c_1x^3 + c_2x^3 \log x.$$

Il metodo descritto nel presente esercizio si può applicare in situazioni molto più generali. La conoscenza di una soluzione dell'equazione permette di ridurre l'equazione ad una nuova equazione di ordine un'unità inferiore all'ordine dell'equazione di partenza.

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 13: Termini noti di tipo particolare; oscillazioni forzate; sistemi di equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti.

Esercizio 1 Si risolva l'equazione differenziale

$$y'' - 2y' - 3y = \cos^2 x.$$

Svolgimento.
L'equazione omogenea associata è

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

ed ammette come radici i numeri reali $\lambda = 3$ e $\lambda = -1$. Dunque la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$y_h(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}.$$

Per trovare una soluzione particolare osserviamo che $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$.
Una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - 2y' - 3y = \frac{1}{2}\cos 2x$$

si può cercare tra le funzioni del tipo

$$y(x) = \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x.$$

Derivando tale funzione si ottiene

$$y'(x) = -2\alpha \sin 2x + 2\beta \cos 2x;$$

$$y''(x) = -4\alpha \cos 2x - 4\beta \sin 2x.$$

Sostituendo tali espressioni nell'equazione, si ottiene

$$(-4\alpha \cos 2x - 4\beta \sin 2x) - 2\left(-2\alpha \sin 2x + 2\beta \cos 2x\right) - 3\left(\alpha \cos 2x + \beta \sin 2x\right) = \frac{1}{2}\cos 2x;$$

che, uguagliando i coefficienti di $\sin 2x$ e $\cos 2x$, ci fornisce il sistema

$$\begin{cases} -7\alpha - 4\beta = \frac{1}{2} \\ -7\beta + 4\alpha = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottengono i valori $\alpha = -\dfrac{7}{130}$ e $\beta = -\dfrac{2}{65}$.
Dunque una soluzione particolare dell'equazione $y'' - 2y' - 3y = \frac{1}{2}\cos 2x$ è

$$y_p(x) = -\frac{7}{130}\cos 2x - \frac{2}{65}\sin 2x.$$

Dobbiamo ancora trovare una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - 2y' - 3y = \frac{1}{2}.$$

In questo caso la soluzione va cercata tra le funzioni costanti. Si vede facilmente che una soluzione particolare è la funzione $y_p(x) = -\dfrac{1}{6}$.

Dunque, la soluzione generale dell'equazione proposta è

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{7}{130}\cos 2x - \frac{2}{65}\sin 2x - \frac{1}{6}.$$

Esercizio 2. È dato un circuito elettrico RLC (resistenza- induttanza-capacità) con i componenti collegati in serie. Le leggi di Ohm e di Kirchhoff forniscono la seguente equazione: $L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t)$ dove I indica la corrente che circola nel circuito all'istante t, Q è la carica del condensatore all'istante t, E è la forza elettromotrice. Poiché $I = \frac{dQ}{dt}$ l'equazione diventa $L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$.

Il tempo $t = 0$ indica il momento in cui si chiude il circuito, dunque si suppone $I(0) = 0$. Supponiamo inoltre che il condensatore sia inizialmente scarico, dunque $Q(0) = 0$. Si supponga infine che la forza elettromotrice sia fornita da un generatore a corrente alternata del tipo $E(t) = 100\cos(10t)$. Si calcoli la carica del condensatore e la corrente del circuito al tempo t, supponendo che la resistenza sia pari a 40 Ω, la capacità a $16 \cdot 10^{-4}F$ e l'induttanza a 1 H.

Svolgimento.

L'equazione da studiare è la seguente:

$$x'' + 40x' + 625x = 100\cos(10t),$$

(dove si è posto $x = Q$), sotto le condizioni iniziali $x(0) = 0,\ x'(0) = 0$.

L'equazione è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $z^2+40z+625 = 0$ ammette come zeri le due radici complesse coniugate $-20 \pm 15i$. Le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono pertanto tutte e sole le funzioni del tipo $x(t) = c_1 e^{-20t}\cos(15t) + c_2 e^{-20t}\sin(15t)$ con c_1 e c_2 parametri reali.

Cerchiamo una soluzione particolare.

Questa si può ricercare tra le funzioni del tipo $g_{a,b}(t) = a\cos(10t) + b\sin(10t)$. Si ha

$$g'_{a,b}(t) = -10a\sin(10t) + 10b\cos(10t)$$

e

$$g''_{a,b} = -100a\cos(10t) - 100b\sin(10t).$$

Affiché la funzione $g_{a,b}$ sia soluzione deve verificare l'equazione e quindi deve essere

$$-100a\cos(10t) - 100b\sin(10t) - 400a\sin(10t) + 400b\cos(10t) + 625a\cos(10t) + 625b\sin(10t) = 100\cos(10t),$$

da cui si ottiene $b = \frac{64}{697}$ e $a = \frac{84}{697}$.

Le soluzioni dell'equazione sono pertanto tutte e sole le funzioni del tipo

$$x(t) = e^{-20t}(c_1\cos(15t) + c_2\sin(15t)) + \frac{4}{697}(21\cos(10t) + 16\sin(10t)).$$

Calcoliamo la derivata:

$$x'(t) = e^{-20t}[(-20c_1 + 15c_2)\cos(15t) + (-15c_1 - 20c_2)\sin(15t)] + \frac{40}{697}(-21\sin(10t) + 16\cos(10t)).$$

Imponendo le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$ si ottiene $c_1 = -\frac{84}{697}$ e $c_2 = -\frac{464}{2091}$.

Le funzioni che rappresentano la carica del condensatore e la corrente saranno allora rispettivamente

$$Q(t) = \frac{4}{697}\left[\frac{e^{-20t}}{3}(-63\cos(15t) - 116\sin(15t)) + (21\cos(10t) + 16\sin(10t))\right]$$

$$I(t) = \frac{1}{2091}\left[e^{-20t}(-1920\cos(15t) + 13060\sin(15t)) + 120(-21\sin(10t) + 16\cos(10t))\right].$$

Esercizio 3 Consideriamo un corpo di massa m che oscilla verticalmente in un fluido di attrito trascurabile (ad esempio un corpo agganciato ad una molla o anche un ponte soggetto a sollecitazioni). Supponiamo che sia presente una forza esterna che varia nel tempo secondo la legge $f(t) = A\sin(\omega_0 t)$. Vogliamo studiare le leggi del moto.

La seconda legge di Newton insieme alla legge di Hooke ci permette di scrivere l'equazione $ma+kx = f(t)$ che possiamo riscrivere, come consuetudine, nella forma

$$x'' + \omega^2 x = A\sin(\omega_0 t).$$

Si studino le leggi del moto e si consideri il caso particolare in cui $\omega_0 = \omega$.

Svolgimento.

L'equazione da studiare è un'equazione lineare di secondo grado completa a coefficienti costanti. L'equazione omogenea associata è $x''+\omega^2 x = 0$ ed ha come soluzioni tutte e sole le funzioni del tipo $c_1\cos(\omega t)+c_2\sin(\omega t)$ con c_1 e c_2 numeri reali arbitrari.

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa.

Nel caso in cui $\omega_0 \neq \omega$ una soluzione particolare si può ricercare tra le funzioni del tipo $g_{a,b}(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$. Si avrà

$$g'_{a,b}(t) = -a\omega_0\sin(\omega_0 t) + b\omega_0\cos(\omega_0 t)$$

e

$$g''_{a,b}(t) = -a\omega_0^2\cos(\omega_0 t) - b\omega_0^2\sin(\omega_0 t).$$

Affiché la funzione $g_{a,b}$ sia soluzione deve verificare l'equazione e quindi deve essere

$$(\omega^2 - \omega_0^2)(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)) = A\sin(\omega_0 t),$$

da cui si ottiene $a = 0$ e $b = \frac{A}{\omega^2-\omega_0^2}$.

Le soluzioni dell'equazione saranno perciò funzioni del tipo

$$x(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) + \frac{A}{\omega^2 - \omega_0^2}\sin(\omega_0 t).$$

Si noti che tali funzioni sono limitate.

Nel caso in cui $\omega_0 = \omega$ le cose si complicano. In questo caso una soluzione particolare si può ricercare tra le funzioni del tipo $g_{a,b}(t) = at\cos(\omega t) + bt\sin(\omega t)$. Si avrà

$$g'_{a,b}(t) = a\cos(\omega t) - at\omega\sin(\omega t) + b\sin(\omega t) + bt\omega\cos(\omega t)$$

e

$$g''_{a,b} = -a\omega\sin(\omega t) - a\omega\sin(\omega t) - at\omega^2\cos(\omega t) + \omega b\cos(\omega t) + b\omega\cos(\omega t) - bt\omega^2\sin(\omega t).$$

Affiché la funzione $g_{a,b}$ sia soluzione deve verificare l'equazione e quindi deve essere

$$-2a\omega\sin(\omega t) + 2b\omega\cos(\omega t) - \omega^2 g_{a,b}(t) + \omega^2 g_{a,b}(t) = A\sin(\omega t),$$

da cui si ottiene $b = 0$ e $a = -\frac{A}{2\omega}$.

Le soluzioni dell'equazione saranno perciò funzioni del tipo

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) - \frac{A}{2\omega} t \cos(\omega t).$$

Si noti che tali funzioni sono illimitate. L'ampiezza delle oscillazioni aumenta sempre più. Tale fenomeno è noto con il nome di risonanza.

Esercizio 4. Si risolva il sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti

$$\begin{cases} x' = ay + bz \\ y' = cz \\ z' = 0 \end{cases},$$

con le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = c_1 \\ y(0) = c_2 \\ z(0) = c_3 \end{cases}.$$

Svolgimento.
Scriviamo l'equazione in forma matriciale; posto

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

il sistema diventa

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}.$$

La matrice fondamentale è dunque e^{tA}.
Poiché

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

e $A^n = 0$ per $n > 2$, si ha

$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2!} t^2 A^2 = \begin{pmatrix} 1 & at & bt + \frac{1}{2}act^2 \\ 0 & 1 & ct \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché deve essere

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

la soluzione del sistema proposto è

$$\begin{cases} x(t) = c_1 + c_2 at + c_3 \left(bt + \frac{1}{2}act^2\right) \\ y(t) = c_2 + c_3 ct \\ z(t) = c_3 \end{cases}.$$

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 14: integrale di Riemann per funzioni di due e tre variabili su rettangoli.

Esercizio 1. Utilizzando la definizione di integrale di Riemann si calcoli l'integrale della funzione $f(x,y) = x$ sul rettangolo $[0,1] \times [0,1]$.

Svolgimento.
La funzione f è integrabile perché è continua sul rettangolo. Calcoliamo il valore dell'integrale.

Sia $\delta = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1; 0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = 1\}$ una decomposizione del rettangolo $[0,1] \times [0,1]$. L'estremo inferiore della funzione f, che è anche il minimo, sul rettangolino $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ è uguale a x_{i-1} e non dipende da j.

L'estremo superiore della funzione f, che è anche il massimo, sul rettangolino $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ è uguale a x_i e anch'esso non dipende da j.

Dunque la somma inferiore e la somma superiore della funzione f relativa alla decomposizione δ si possono scrivere nel modo seguente:

$$s(f,\delta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(x_i - x_{i-1});$$

$$S(f,\delta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i(x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1}).$$

Le somme non dipendono dalla variabile y, possiamo quindi sempre considerare la decomposizione banale rispetto alla y (cioè $m = 1$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$).

Per ogni numero naturale $n > 0$ sia δ_n la decomposizione $\delta_n = \{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < 1; 0 < 1\}$. Si ottiene

$$s(f,\delta_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}\frac{n^2 - n}{n^2} < \frac{1}{2};$$

$$S(f,\delta_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\frac{n^2 + n}{n^2} > \frac{1}{2}.$$

Poiché
$$\lim_{n\to+\infty} s(f,\delta_n) = \lim_{n\to+\infty} S(f,\delta_n) = \frac{1}{2},$$
l'elemento di separazione tra la classe delle somme inferiori e la classe delle somme superiori, che già sappiamo esistere, non può che essere $\frac{1}{2}$.

È dunque provato che
$$\int_R f(x,y)\,dxdy = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2. Senza utilizzare le formule di riduzione, ma tenendo presente le proprietà di linearità dell'integrale e la definizione di integrale, si calcoli l'integrale della funzione $f(x,y) = 3x + 4y$ sul rettangolo $[0,1] \times [0,2]$.

Svolgimento.
Per le proprietà di linearità dell'integrale sappiamo che

$$\int_{[0,1]\times[0,2]} (3x + 4y)\ dm = 3\int_{[0,1]\times[0,2]} x\,dm + 4\int_{[0,1]\times[0,2]} y\,dm.$$

Nello stesso modo in cui si è risolto il primo esercizio si può vedere che $\int_{[0,1]\times[0,2]} x\,dm = 1$.

In modo simile si verifica che $\int_{[0,1]\times[0,2]} y\,dm = 2$.

Il risultato finale sarà quindi $\int_{[0,1]\times[0,2]} (3x+4y)\ dm = 11$.

Esercizio 3 Detto a il numero reale

$$a = \iint_D \sqrt{x^3+y^3}\,dxdy\ ,$$

dove $D = [0,1]\times[0,1]$, si provi che $a \in [0,\sqrt{2}]$.

Svolgimento.

La funzione $f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$ è continua sul compatto D. Il suo minimo è 0 e il suo massimo è $\sqrt{2}$. Per il teorema della media si può concludere che

$$0 \le \iint_D \sqrt{x^3+y^3}\,dxdy\ \le \sqrt{2},$$

cioè $a \in [0,\sqrt{2}]$, come si voleva dimostrare.

Esercizio 4.

Si verifichi che la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{|x-y|} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}\ ,$$

è integrabile secondo Riemann sul rettangolo $R = [0,1]\times[0,1]$.

Svolgimento.

La funzione f non è continua nei punti di R del tipo $(t,t)^T$ con $0 \le t \le 1$. È invece continua in tutti gli altri punti. La f è inoltre limitata.

Per verificare che la funzione f è integrabile mostreremo che l'insieme dei suoi punti di discontinuità è trascurabile.

Ricordiamo che un insieme si dice trascurabile se è contenuto in un rettangolo, e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una decomposizione δ del rettangolo tale che la somma delle aree dei sottorettangolini della decomposizione che intersecano l'insieme è minore di ε.

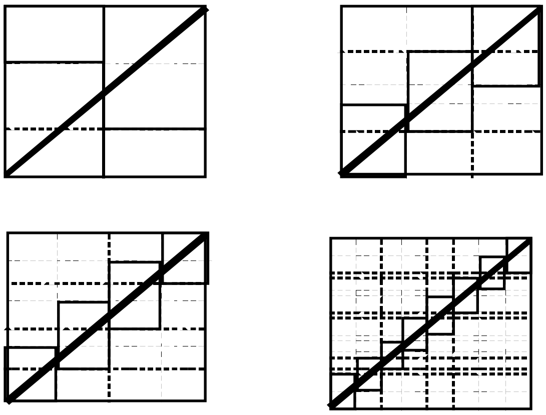
Mostriamo che il segmento di retta $\{(t,t)^T : 0 \le t \le 1\}$ è trascurabile.

Poiché $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+2}{n^2} = 0$, fissato $\varepsilon > 0$ esiste certamente un numero naturale n tale che $\dfrac{n+2}{n^2} < \varepsilon$.

Consideriamo la decomposizione del rettangolo R definita come segue (si vedano nella figura i casi $n=2$, $n=3$, $n=4$, $n=8$):

$$\delta_n = \{I_i \times J_j : i = 1,2,\dots,n;\ j = 1,2,\dots,2n-1\},$$

dove $I_i = [\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$; $J_1 = [0,\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}]$, $J_2 = [\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}]$, $J_3 = [\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2},\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}]$, $J_4 = [\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2},\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}]$, $\dots$, $J_{2n-1} = [\frac{n-1}{n}-\frac{1}{n^2},1]$.



L'area dell'unione dei rettangoli di δ_n che intersecano la retta $\{(t,t)^T : 0 \leq t \leq 1\}$ è

$$(n-2)\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)+2\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\leq\frac{n+2}{n^2}<\varepsilon.$$

(I primi $n-2$ contributi riguardano i rettangolini che non toccano i lati verticali del quadrato, gli ultimi due riguardano i rettangolini che toccano i lati verticali del quadrato; l'area di questi ultimi è più piccola rispetto a quella dei rettangolini interni; si faccia riferimento al disegno per una migliore comprensione.)

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 15: teoremi di riduzione per gli integrali di Riemann; integrazione su sottoinsiemi limitati.

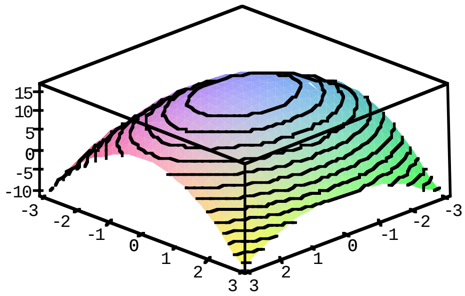
Esercizio 1. Si calcoli il volume del solido delimitato dal paraboloide ellittico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, dai piani $x = 2$, $y = 2$ e dai 3 piani coordinati.

Svolgimento.

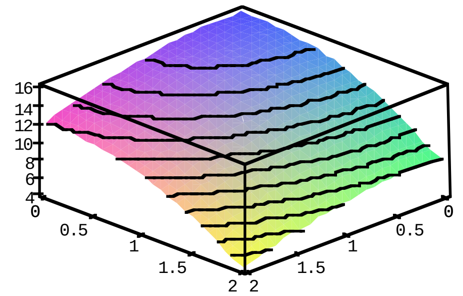
Possiamo considerare la funzione $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ definita sul rettangolo $R = [0, 2] \times [0, 2]$. Il solido di cui si cerca il volume è proprio il sottografico della funzione f (cioè la regione dello spazio compresa tra R e la superficie in $\mathbb{R}^3$ definita dall'equazione $z = 16 - x^2 - 2y^2$), dunque il suo volume si può interpretare come l'integrale della funzione esteso al rettangolo R.

$$\int_R f(x, y)\, dm = \int_0^2 \left(\int_0^2 \left(16 - x^2 - 2y^2\right) dy \right) dx = \int_0^2 \left[16y - x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right]_0^2 dx =$$

$$= \int_0^2 \left(32 - 2x^2 - \frac{16}{3} \right) dx = \left[32x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{16}{3}x \right]_0^2 = 64 - \frac{16}{3} - \frac{32}{3} = 48.$$



(Grafico della funzione f.)



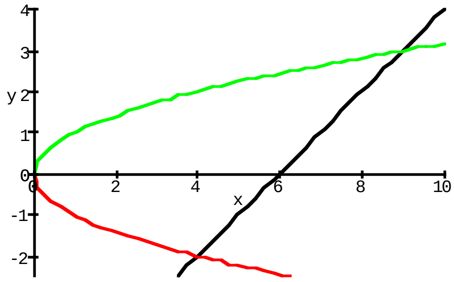
(Grafico della funzione f ristretta al rettangolo R.)

Esercizio 2. Si calcoli l'integrale

$$\int_D 4y^3\, dm$$

dove D è l'insieme del piano delimitato dalle curve $y = x - 6$ e $y^2 = x$.

Svolgimento.



Calcoliamo le intersezioni tra la parabola $y^2 = x$ e la retta $y = x - 6$. Si ottiene $y = 3$ oppure $y = -2$. Si ottengono allora gli estremi: per $-2 \le y \le 3$ e per $y^2 \le x \le y + 6$. L'integrale diventa

$$\int_{-2}^{3} \left(\int_{y^2}^{y+6} 4y^3 \, dx \right) dy = \int_{-2}^{3} 4y^3(y + 6 - y^2) \, dy = \left[\frac{4}{5}y^5 + 6y^4 - \frac{2}{3}y^6 \right]_{-2}^{3} = \frac{500}{3}.$$

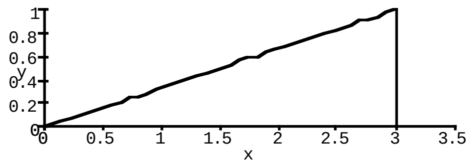
Esercizio 3. Si calcoli l'integrale

$$\int_0^1 \left(\int_{3y}^{3} e^{x^2} \, dx \right) dy.$$

Svolgimento.

Operando direttamente sul problema così come viene proposto si incontrano notevoli difficoltà. Conviene allora invertire l'ordine di integrazione. La regione considerata è l'insieme dei punti

$$\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y \le 1,\ 3y \le x \le 3\} = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 3;\ 0 \le y \le \frac{1}{3}x\}.$$



Perciò l'integrale si può scrivere

$$\int_0^3 \left(\int_0^{\frac{x}{3}} e^{x^2} \, dy \right) dx = \int_0^3 e^{x^2} \frac{x}{3} \, dx = \frac{1}{6}(e^9 - 1).$$

Esercizio 4. Si calcoli l'integrale

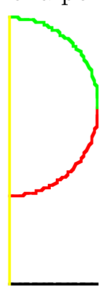
$$\iint_E \frac{x}{y} \, dxdy$$

nella regione

$$E = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon x \ge 0,\ x^2 + (y-2)^2 \le 1\}.$$

Svolgimento.

La regione E è la porzione del disco di centro $(0,2)^T$ e raggio unitario contenuta nel primo quadrante.



Si ha allora $1 \leq y \leq 3$ e $0 \leq x \leq \sqrt{1-(y-2)^2}$ e l'integrale si può scrivere come

$$\int_1^3 \left(\int_0^{\sqrt{4y-y^2-3}} \frac{x}{y}\,dx \right) dy = \int_1^3 \frac{1}{2y}(4y-y^2-3)\,dy = \left[2y - \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{2}\log|y| \right]_1^3 = 2 - \frac{3}{2}\log 3.$$

Esercizio 5. Si trovino la massa ed il centro di massa di una lamina triangolare di vertici $(0,0)^T$, $(1,0)^T$, $(0,2)^T$ la cui densità è descritta dalla funzione $\rho(x,y) = 1 + 3x + y$.

Svolgimento.
Ricordo che la massa è data da

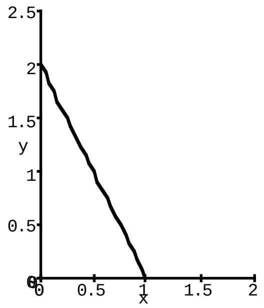
$$m = \iint_D \rho(x,y)\,dxdy$$

e le coordinate del centro di massa sono

$$\hat{x} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)\,dxdy \text{ e } \hat{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)\,dxdy.$$

La retta congiungente i punti $(0,2)^T$ e $(1,0)^T$ è la retta $y = 2 - 2x$.

La regione considerata è il triangolo che ha per lati il segmento di asse x compreso tra 0 e 1, il segmento di asse y compreso tra 0 e 2 e il segmento della retta $y = 2 - 2x$ compreso tra $(0,2)^T$ e $(1,0)^T$.



Calcoliamo la massa:

$$m = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} (1+3x+y)\ dy \right) dx = \int_0^1 \left((1+3x)(2-2x) + \frac{1}{2}(2-2x)^2 \right) dx = \frac{8}{3}.$$

Le coordinate del centro di massa sono

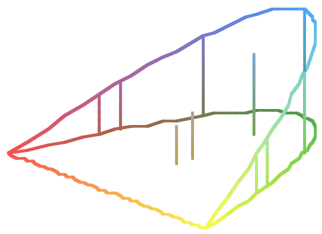
$$\hat{x} = \frac{3}{8}\int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} x(1+3x+y)\,dy \right) dx = \frac{3}{8};$$

$$\hat{y} = \frac{3}{8}\int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} y(1+3x+y)\,dy \right) dx = \frac{3}{8}\int_0^1 \frac{1}{2}\left((2-2x)^2 + 3x\frac{1}{2}(2-2x)^2 + \frac{1}{3}(2-2x)^3 \right) dx =$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^1 4(1-x^2)\left(\frac{1}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{1}{3}(2-2x) \right) dx = \frac{11}{16}.$$

Esercizio 6. Si calcoli il volume del solido delimitato dal cilindro $x = y^2$ e dai piani $z = 0$ e $x + z = 1$.

Svolgimento.
La proiezione del solido sul piano $z = 0$ è la regione interna alla parabola $x = y^2$. Noi consideriamo i punti che stanno sopra a questa regione e sotto al piano $x + z = 1$. Integrando per corde relative all'asse z , consideriamo l'integrale per z che va da 0 alla quota $1 - x$ (stiamo sotto al piano $x + z = 1$!).



Poi integriamo sulla regione del piano che sta sopra alla parabola $x = y^2$ e sotto la retta $x = 1$, cioè per $-1 \leq y \leq 1$ e $y^2 \leq x \leq 1$.

Si ottiene l'integrale

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{y^2}^{1} \left(\int_{0}^{1-x} dz \right) dx \right) dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{y^2}^{1} (1-x)\, dx \right) dy = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} y^4 - y^2 + \frac{1}{2} \right) dy = \frac{8}{15}.$$

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

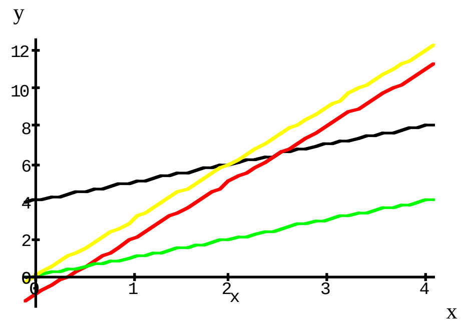
Lezione 16: cambiamento di variabili nell'integrale di Riemann.

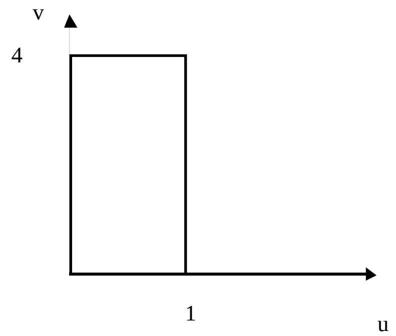
Esercizio 1. Si calcoli l'integrale

$$\iint_D (3x-y)^{\frac{1}{5}} \left(-\frac{x}{4}+\frac{y}{4}\right) dxdy,$$

nel parallelogramma delimitato dalle rette $y = 3x$, $y = x$, $y = 3x - 1$, $y = x + 4$.

Svolgimento.
Si calcolano velocemente i vertici del parallelogramma: $(0,0)^T$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$, $(\frac{5}{2},\frac{13}{2})^T$, $(2,6)^T$.





Si può calcolare l'integrale direttamente, oppure si può considerare una trasformazione lineare di coordinate che lo renda più semplice. Si consideri ad esempio la seguente:
$u = 3x - y$, $v = y - x$, e l'inversa $x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u+3v}{2}$.
La matrice Jacobiana della trasformazione è

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix};$$

e il suo determinante è $\frac{1}{2}$.
La trasformazione lineare manda i vertici del parallelogramma rispettivamente nei punti $(0,0)^T$, $(1,0)^T$, $(1,4)^T$ e $(0,4)^T$. L'integrale diventa allora

$$\int_0^1 \left(\int_0^4 u^{\frac{1}{5}} \frac{1}{4} v \, \frac{1}{2} \, dv\right) du = \frac{5}{6}.$$

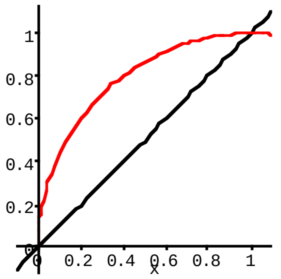
Esercizio 2. Si calcoli l'integrale

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy,$$

dove

$$D = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1;\ y \geq x\}.$$

Svolgimento.
Utilizzeremo coordinate polari. Dunque $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\sin\vartheta$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.



La disequazione $(x-1)^2+y^2 \leq 1$ diventa $\rho^2 \leq 2\rho\cos\vartheta$, che si semplifica in $\rho \leq 2\cos\vartheta$ per $\rho > 0$. Poiché $y \geq x$ si deve imporre $\rho\sin\vartheta \geq \rho\cos\vartheta$, cioè $\operatorname{tg}\vartheta \geq 1$, o $\vartheta \geq \frac{\pi}{4}$.

Il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione di coordinate è ρ. Calcolando l'integrale si ottiene

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\vartheta} \rho\,\rho\,d\rho \right) d\vartheta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\cos\vartheta)^3}{3}\,d\vartheta = \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2\vartheta\right)\cos\vartheta\,d\vartheta$$

ponendo $t = \cos\vartheta$ l'ultimo integrale diventa

$$\frac{8}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} (1-t^2)\,dt = \frac{8}{3}\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} = \frac{2}{9}(8-5\sqrt{2}).$$

Esercizio 3.
Si calcoli il volume del solido

$$D = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4;\ 0 \leq z \leq x^2+y^2\}.$$

Svolgimento.
Si tratta della regione compresa tra i due cilindri di raggio 1 e 2 rispettivamente, che si trova sotto al paraboloide di equazione $z = x^2+y^2$.

Conviene usare coordinate cilindriche. Posto dunque $x = \rho\cos\vartheta$ e $y = \rho\sin\vartheta$ si ottengono le condizioni $0 \leq z \leq \rho^2$ e $1 \leq \rho^2 \leq 4$.

Il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione di coordinate è ρ. Calcolando l'integrale si ottiene

$$\int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\rho^2} \rho\,dz \right) d\vartheta \right) d\rho = 2\pi \int_1^2 \rho^3\,d\rho = \frac{15}{2}\pi.$$

Esercizio 4.
Si calcoli il momento di inerzia rispetto al piano xy $I_{xy} = \int_S z^2 dm$ del solido S:

$$S = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4;\ z \geq 0;\ z^2 \geq x^2+y^2\}.$$

Svolgimento.
Conviene usare coordinate sferiche. Poniamo $x = \rho\sin\varphi\cos\vartheta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = \rho\cos\varphi$. Si ha dunque $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$.

Si ottengono le relazioni $1 \leq \rho^2 \leq 4$; $\rho\cos\varphi \geq 0$; $\rho^2\cos^2\varphi \geq \rho^2\sin^2\varphi$.

Dunque il dominio in coordinate sferiche è $1 \leq \rho \leq 2$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$ e $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

Il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione di coordinate è $\rho^2 \sin\varphi$. Calcolando l'integrale si ottiene

$$\int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \cos^2\varphi \, \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi \right) d\vartheta \right) d\rho = 2\pi \int_1^2 \rho^4 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi \right) d\rho =$$

$$= 2\pi \frac{31}{5} \left(- \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} t^2 dt \right) = \frac{62}{5}\pi \frac{4-\sqrt{2}}{12} = \frac{31}{30}\pi(4-\sqrt{2}).$$

Esercizio 5.
Si calcoli l'integrale

$$\iint_E (x+y) \; dxdy$$

dove E è la regione interna all'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Svolgimento.

La regione interna ad un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ si può descrivere mediante la funzione $\Phi(\rho, \vartheta) = (a\rho\cos\vartheta, b\rho\sin\vartheta)^T$ con $0 \le \rho < 1$, $-\pi \le \vartheta \le \pi$. Useremo dunque questo cambiamento di coordinate. La matrice Jacobiana di Φ è

$$\begin{pmatrix} a\cos\vartheta & -a\rho\sin\vartheta \\ b\sin\vartheta & b\rho\cos\vartheta \end{pmatrix};$$

e il suo determinante è $ab\rho$.

Calcoliamo l'integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 (a\rho\cos\vartheta + b\rho\sin\vartheta)\, ab\rho \, d\rho \right) d\vartheta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{3} \left(a^2 b\cos\vartheta + ab^2 \sin\vartheta \right) \, d\vartheta = 0.$$

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 17: integrali generalizzati; funzioni definite da integrali.

Esercizio 1. Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-5x}dx.$$

Svolgimento.
Sia $b > 0$. Calcoliamo

$$\int_0^b e^{-5x}dx = \left[-\frac{1}{5}e^{-5x}\right]_0^b = -\frac{1}{5}e^{-5b} + \frac{1}{5}.$$

Prendendo il limite per $b \to +\infty$ otteniamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-5x}dx = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{5}e^{-5b} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

Esercizio 2. L'energia E (in Joules) necessaria per separare due cariche q_1 e q_2, originariamente ad una distanza a, fino ad una distanza b, è data da

$$E = \int_a^b k\frac{q_1q_2}{r^2}\ dr,$$

dove q_1 e q_2 sono le cariche in Coulombs, a e b sono le distanze misurate in metri e $k = 9 \cdot 10^9$.

Si trovi l'energia necessaria per separare un protone da un elettrone (di cariche opposte pari a $1.6 \cdot 10^{-19}$ Coulombs) da una distanza iniziale di $R_B = 5.3 \cdot 10^{-11}m$ (pari al raggio di Bohr) fino ad infinito.

Svolgimento.

$$E = \int_{R_B}^{+\infty} k\frac{q_1q_2}{r^2}dr = kq_1q_2 \lim_{b\to+\infty}\int_{R_B}^b \frac{1}{r^2}dr =$$

$$= kq_1q_2 \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{R_B}\right) = k\frac{q_1q_2}{R_B} \simeq 4.35 \cdot 10^{-18}J.$$

Esercizio 3. Si stabilisca se la funzione

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{(x^2+y^2)^2}$$

è integrabile in senso generalizzato sull'insieme

$$E = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : ||(x,y)^T|| \in [\pi, +\infty)\}.$$

Svolgimento.
La funzione f è infinitesima per $||(x,y)^T|| \to +\infty$ dell'ordine di $||(x,y)^T||^{-4}$, e la dimensione dello spazio è 2. Per il criterio di convergenza la funzione f è assolutamente integrabile in senso generalizzato sull'insieme E. Di conseguenza è integrabile in senso generalizzato sullo stesso insieme.

Esercizio 4. Si stabilisca se le funzioni

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

sono integrabili in senso generalizzato sull'intervallo $(0, +\infty)$, e in caso positivo si calcolino tali integrali.

Svolgimento.

La funzione $|f|$ è infinitesima per $x \to +\infty$, ma purtroppo non tende a 0 in modo sufficientemente rapido (cioè non è un infinitesimo di ordine > 1). Si può provare che la funzione $|f|$ non è integrabile. Infatti, su tutti gli intervalli del tipo $[2k\pi - \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}]$, si ha $|f(x)| \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{8k+1}}$, e quindi

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}} |f(x)|\, dx \geq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{8k+1}}.$$

Mostriamo che invece la funzione f è integrabile su $[0, +\infty)$.

Si può scrivere

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx + \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$$

Il primo addendo non crea problemi in quanto la funzione $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ è infinita di ordine $\frac{1}{2}$ per $x \to 0$. Studiamo il secondo addendo: possiamo scrivere

$$\int_{\pi}^{b} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \left[\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right]_{\pi}^{b} + \int_{\pi}^{b} \frac{1}{2} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx;$$

e pertanto

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = -\frac{\sin \pi}{\sqrt{\pi}} + \lim_{b\to+\infty} \frac{\sin b}{\sqrt{b}} + \int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx.$$

Poiché la funzione $\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin x}{x^{3/2}}$ è infinitesima di ordine $> 1 + \frac{1}{4}$, questa funzione è assolutamente integrabile e quindi è anche integrabile.

Si può concludere che la funzione f è integrabile (ma non assolutamente integrabile) in senso generalizzato sull'intervallo $(0, +\infty)$.

In modo simile si verifica che la funzione g è integrabile (ma non assolutamente integrabile) in senso generalizzato sull'intervallo $(0, +\infty)$.

Vogliamo ora calcolare il valore dell'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$.

Ricordiamo l'importante integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}.$$

Questo significa che

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ponendo $t = \sqrt{x}y$ e osservando che $dt = \sqrt{x}dy$ si ottiene

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} e^{-xy^2}\, \sqrt{x}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

o anche

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy^2}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

Dall'ultima equazione, moltiplicando per $\cos x$, si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \cos x \cdot e^{-xy^2}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

Integrando rispetto alla variabile x si ha ancora

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \cos x \cdot e^{-xy^2}\, dy \right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Invertendo l'ordine di integrazione nell'integrale al primo membro (la cosa è giustificata dal fatto che la funzione è integrabile), si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \cos x \cdot e^{-xy^2}\, dx \right) dy.$$

Una primitiva della funzione $\cos x \cdot e^{-xy^2}$ è $\dfrac{e^{-xy^2}}{1+y^4}\left(-y^2 \cos x + \sin x\right)$, come si può verificare integrando successivamente due volte per parti.

Si ottiene pertanto

$$\int_0^{+\infty} \cos x \cdot e^{-xy^2}\, dx = \frac{y^2}{1+y^4}.$$

L'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^4}\, dy$ si può calcolare, con un po' di fatica, utilizzando il metodo della decomposizione di Hermite in frazioni semplici o, più agevolmente, utilizzando la teoria dei residui dell'analisi complessa. Il valore di tale integrale è $\pi\frac{\sqrt{2}}{4}$.

In conclusione otteniamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \pi \frac{\sqrt{2}}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

In modo simile si può provare che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Esercizio 5. Si dica per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \left(\frac{1}{\mathrm{tg}(x)}\right)^{\alpha}$ è integrabile in senso generalizzato sull'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$.

Svolgimento.

Sia $\alpha > 0$. La funzione f è allora limitata in un intorno sinistro di $\frac{\pi}{2}$ e quindi non vi sono problemi nell'estremo destro dell'intervallo.

La funzione f è invece infinita in 0 di ordine α. Posso usare il criterio dell'ordine di infinito essendo la funzione positiva nell'intervallo. La funzione sarà pertanto integrabile nell'intervallo se $0 < \alpha < 1$.

Se $\alpha = 0$ la funzione è costante e quindi è integrabile nell'intervallo.

Sia $\alpha < 0$. In questo caso è l'estremo sinistro a non creare problemi perché la funzione è infinitesima in tale punto. Nel punto $\frac{\pi}{2}$ la funzione invece è infinita di ordine $-\alpha$ e quindi la funzione risulta integrabile se $-1 < \alpha < 0$.

In definitiva la funzione f risulta integrabile nell'intervallo indicato se e solo se $\alpha \in (-1, 1)$.

Esercizio 6. Si provi che le funzioni $\sin(x^2)$ e $\cos(x^2)$ sono integrabili in senso generalizzato sull'intervallo $[0, +\infty)$. Si calcoli poi il loro valore.

(Gli integrali $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$ e $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx$ sono noti come Integrali di Fresnel).

Svolgimento.

È semplice convincersi che tali funzioni non sono assolutamente integrabili sull'intervallo.

Studiamo la funzione $\sin(x^2)$. Il caso di $\cos(x^2)$ sarà simile.

Per evitare problemi nella divisione per x studieremo l'integrabilità nell'intervallo $[\sqrt{2\pi}, +\infty)$. È chiaro che la funzione è integrabile in $[0, +\infty)$ se e solo se lo è in $[\sqrt{2\pi}, +\infty)$. Mediante la sostituzione $u = x^2$ possiamo calcolare, per $b > \sqrt{2\pi}$,

$$\int_{\sqrt{2\pi}}^{b} \sin(x^2)dx = \int_{2\pi}^{b^2} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du.$$

Ricordando ora (esercizio 4) che la funzione $\dfrac{\sin(u)}{\sqrt{u}}$ è integrabile sull'intervallo $[\pi, +\infty)$, si conclude

$$\int_{\sqrt{2\pi}}^{+\infty} \sin(x^2)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{2\pi}^{b^2} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du \in \mathbb{R},$$

e pertanto la funzione $\sin(x^2)$ è integrabile sull'intervallo $[0, +\infty)$.

Per calcolare i valori di questi integrali, ricordiamo, dall'esercizio 4, che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Poniamo $x = t^2$, allora $dx = 2t\, dt$; sostituendo nell'integrale si ottiene

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t^2}{t}\, 2tdt = 2\int_0^{+\infty} \cos t^2\, dt,$$

e pertanto

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Nello stesso modo si può provare che $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$.

Esercizio 7. Si calcoli la derivata (rispetto alla variabile x) della funzione

$$f(x) = \int_0^{x^2} \log(\sqrt{x^2 + t^2})\, dt.$$

Svolgimento. Si può pensare la funzione f come funzione composta dalla funzione

$$g(u, v) = \int_0^{u} \log(\sqrt{v^2 + t^2})\, dt;$$

con le funzioni $u(x) = x^2$ e $v(x) = x$.

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte ed il teorema di derivazione sotto il segno integrale si ottiene:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \log(\sqrt{x^2 + t^2})\, dt = \log(\sqrt{x^2 + x^4}) \cdot 2x + \int_0^{x^2} \frac{d}{dx} \log(\sqrt{x^2 + t^2})\, dt = 2x \log(\sqrt{x^2 + x^4}) +$$

$$+ \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + t^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + t^2}}\, dt = 2x \log(\sqrt{x^2 + t^2}) + \int_0^{x^2} \frac{1}{1 + (\frac{t}{x})^2} \frac{1}{x}\, dt = 2x \log(\sqrt{x^2 + x^4}) + \operatorname{arctg} x.$$

Esercizio 8. Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(xt)}\, dt.$$

Svolgimento. Si osservi che la funzione $\dfrac{t}{\cos^2(xt)}$ è la derivata della funzione $\mathrm{tg}(xt)$.

Dunque

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}(xt)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(xt)}\,dt.$$

Poiché

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}(xt)\,dt = -\frac{\log\left(\cos\frac{\pi x}{4}\right)}{x},$$

si ottiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2 xt}\,dt = \frac{\frac{\pi}{4}x\mathrm{tg}(\frac{x\pi}{4}) + \log\left(\cos(\frac{x\pi}{4})\right)}{x^2}.$$

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 18: curve e integrali curvilinei.

Esercizio 1. Sia $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ la curva

$$\gamma(t) = \left(\cos t \sin t, \sin^2 t, 2t\right)^T .$$

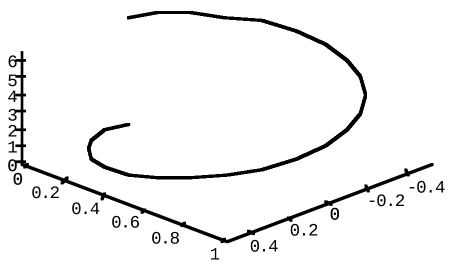
Si dica se γ è una curva continua, regolare, semplice. Si trovino le equazioni del vettore tangente la curva nel punto $\gamma(t)$. Si calcoli la lunghezza della curva γ.

Svolgimento.
La funzione γ è continua e derivabile. La curva dunque è continua. Per verificare che è anche regolare dobbiamo controllare che la sua derivata non si annulli in alcun punto dell'intervallo $[0, \pi]$.
Il vettore tangente la curva nel punto $\gamma(t)$ è

$$\gamma'(t) = \left(-\sin^2 t + \cos^2 t, 2 \sin t \cos t, 2\right)^T = (\cos 2t, \sin 2t, 2)^T .$$

Il vettore $\gamma'(t)$ non si annulla mai (la terza componente è costante!), dunque la curva è regolare.
La curva γ è semplice perché la terza componente della funzione γ è iniettiva.
Calcoliamo la lunghezza di γ:

$$l(\gamma) = \int_0^\pi |\gamma'(t)| \, dt = \int_0^\pi \sqrt{\cos^2 2t + \sin^2 2t + 4} \, dt = \sqrt{5}\pi.$$



Esercizio 2. Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva

$$\gamma(t) = \left(t^2 - t, 2t^3 - 3t^2 + t\right)^T .$$

Si dica se γ è una curva continua, regolare, semplice. Si trovino le equazioni del vettore tangente la curva nel punto $\gamma(t)$. Si trovino i valori del parametro t per i quali la curva è contenuta nel semipiano $x \leq 0$. Si dica se il sostegno dell'arco di curva contenuto in tale semipiano è un insieme limitato di $\mathbb{R}^2$. Si dica se la curva γ è limitata.

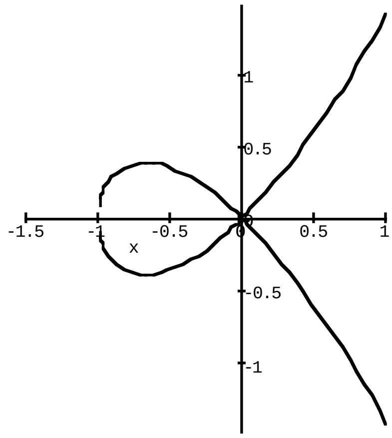
Svolgimento.
La curva γ è una curva continua, regolare, ma non è semplice. Infatti $\gamma(0) = \gamma(1)$. Il vettore tangente è

$$\gamma'(t) = \left(2t - 1, 6t^2 - 6t + 1\right)^T .$$

Si osservi che nel punto $(0, 0)^T$ vi sono due tangenti. Il punto $(0, 0)^T$ è un nodo della curva.
L'arco di curva contenuto nel semipiano $x \leq 0$ si ottiene risolvendo la disequazione $t^2 - t \leq 0$, che è soddisfatta dai valori di $t \in [0, 1]$.

Poiché la funzione γ è continua e l'intervallo $[0,1]$ è compatto, per il teorema di compattezza il sostegno dell'arco di curva contenuto nel semispazio $x \le 0$ è compatto, dunque è limitato.

La curva γ invece non è limitata. Entrambe le componenti tendono a $+\infty$ per $t \to +\infty$. Per $t \to -\infty$ la componente x tende ancora a $+\infty$ mentre la componente y tende a $-\infty$.



Questa curva è nota con il nome di *Folium di Cartesio.*

Esercizio 3. Sia $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ la curva

$$\gamma(t) = (\sin(6t), \cos(6t), 4t)^T.$$

Si calcoli l'ascissa curvilinea di γ e si riparametrizzi la curva secondo la lunghezza d'arco. Si verifichi che il vettore tangente, rappresentato in tale parametrizzazione, è unitario.

Svolgimento.

Ricordo che per ascissa curvilinea di una curva definita su un intervallo $[t_0, t_1]$ si intende la lunghezza $s(t)$ dell'arco di curva da t_0 a t.

Il vettore tangente la curva γ è

$$\gamma'(t) = (6\cos(6t), -6\sin(6t), 4).$$

L'ascissa curvilinea è

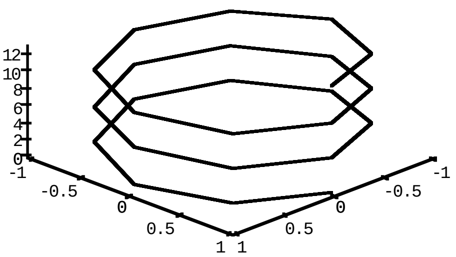
$$s(t) = \int_0^t |\gamma'(t)|\, dt = 2\sqrt{13}t.$$

Si ottiene dunque $t = \frac{s}{2\sqrt{13}}$. La parametrizzazione in lunghezza d'arco è

$$\phi(s) = \gamma(t(s)) = \left(\sin(\frac{3}{\sqrt{13}}s), \cos(\frac{3}{\sqrt{13}}s), \frac{2}{\sqrt{13}}s\right)^T.$$

Verifichiamo che il vettore $\phi'(s)$ è unitario:

$$|\phi'(s)|^2 = \frac{9}{13}\cos^2(\frac{3}{\sqrt{13}}s) + \frac{9}{13}\sin^2(\frac{3}{\sqrt{13}}s) + \frac{4}{13} = 1.$$



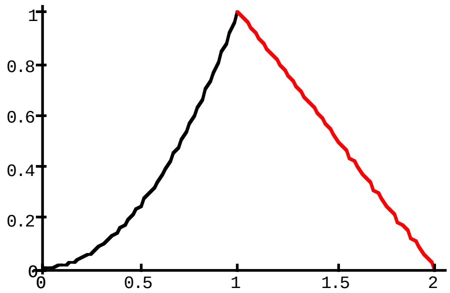
Esercizio 4. Sia $\gamma(t)$ una curva semplice il cui sostegno è il grafico nel piano xy della funzione $f(x) = x^2$ per $x \in [0,1]$, seguito dal segmento che congiunge il punto $(1,1)^T$ con il punto $(2,0)^T$.

Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_\gamma 2x\,ds$.

Svolgimento.

La curva γ si può parametrizzare nel modo seguente:

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, t^2)^T & \text{per } t \in [0,1], \\ (t, 2-t)^T & \text{per } t \in [1,2]. \end{cases}$$



Il vettore tangente è

$$\gamma'(t) = \begin{cases} (1, 2t)^T & \text{per } t \in [0,1], \\ (1, -1)^T & \text{per } t \in [1,2]. \end{cases}$$

L'integrale da calcolare è

$$\int_0^1 2t\sqrt{1+4t^2}\,dt + \int_1^2 2t\sqrt{2}\,dt = \frac{1}{4}\int_1^5 u^{\frac{1}{2}}\,du + 3\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{5}-1}{6} + 3\sqrt{2},$$

dove nel calcolo del primo integrale si è fatta la sostituzione $u = 1 + 4t^2$.

Esercizio 5. Una particella si muove su un piano su cui è presente una forza di attrito proporzionale alla velocità $F = -kv,\ k > 0$ secondo la legge

$$\begin{cases} x = 3\sqrt{2}t \\ y = 4t - 3t^2 \end{cases}.$$

Si calcoli il lavoro compiuto dalla forza di attrito nell'intervallo di tempo $t = 0,\ t = 4$.

Svolgimento.

La velocità della particella segue la legge

$$\begin{cases} x' = 3\sqrt{2} \\ y' = 4 - 6t \end{cases}.$$

La forza che agisce sulla particella ha dunque per componenti le funzioni $-3\sqrt{2}k$ e $-(4-6t)k$. Il lavoro compiuto si calcola allora integrando

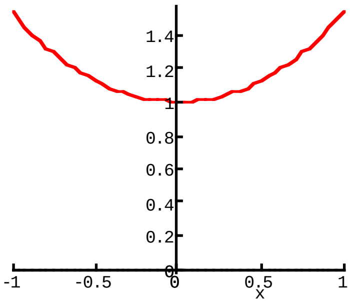
$$L = \int_0^4 \langle(-3\sqrt{2}k, -(4-6t)k)^T, (3\sqrt{2}, (4-6t)^T\rangle dt = -2k\int_0^4 \left(18t^2 - 24t + 17\right) dt = -520k.$$

Esercizio 6. Si calcoli il momento di inerzia rispetto all'asse z di un filo sospeso avente la forma di un arco di catenaria, di equazione $z = \cosh x$, per $|x| \le 1$.

Svolgimento.

Il momento di inerzia di un corpo C rispetto all'asse z è $I_z = \int_C (x^2 + y^2)\, dv$ dove dv è l'elemento di volume del corpo.

Nel nostro caso il corpo è filiforme e l'elemento di volume diventa elemento di lunghezza d'arco; inoltre la curva giace sul piano $y = 0$.



L'integrale da calcolare diventa quindi

$$\int_\gamma x^2\, ds \qquad \text{dove} \qquad \gamma(t) = (t, \cosh t)^T \qquad \text{per} \qquad t \in [-1, 1].$$

Si ha $\gamma'(t) = (1, \sinh t)^T$.

Calcoliamo l'integrale integrando successivamente per parti; si ottiene

$$\int_{-1}^{1} t^2 \sqrt{1 + \sinh^2 t}\, dt = \int_{-1}^{1} t^2 \cosh t\, dt = [t^2 \sinh t]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2t \sinh t\, dt =$$

$$= \sinh 1 - \sinh(-1) - [2t \cosh t]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} 2 \cosh t\, dt =$$

$$= 2 \sinh 1 - 2 \cosh 1 - 2 \cosh(-1) + 2[\sinh t]_{-1}^{1} = 6 \sinh 1 - 4 \cosh 1.$$

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 19: campi vettoriali e formule di Gauss-Green nel piano.

Esercizio 1. Si determini una funzione $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che il campo vettoriale $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\} \to \mathbb{R}^2$, definito da

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} \varphi(x,y) \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

sia conservativo su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$.

Svolgimento.
Si noti che in questo esempio non è sufficiente mostrare che il campo è irrotazionale poiché il dominio non è semplicemente connesso.
Affiché il campo sia conservativo deve esistere un potenziale $V(x,y)$ tale che

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = \varphi(x,y) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

In particolare sarà

$$V(x,y) = \int \frac{-y}{x^2+y^2}\, dy = -\frac{1}{2}\log|x^2+y^2| + c(x),$$

dove $c(x)$ è una funzione costante ripetto alla variabile y. Dovrà poi essere

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = \varphi(x,y)$$

e quindi ad esempio (ponendo $c(x) = 0$)

$$\varphi(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2}.$$

Esercizio 2. Sia $A = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0\}$.
Si determini una funzione $\varphi : A \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che il campo vettoriale $g : A \to \mathbb{R}^2$, definito da

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} \varphi(x,y) \\ \dfrac{-x}{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

sia conservativo su A.

Svolgimento.
In questo caso il dominio è semplicemente connesso e quindi un campo è conservativo se e solo se è irrotazionale.
Calcoliamo il rotore del campo:

$$||\mathrm{rot}(g)|| = \left|\left| \frac{\partial}{\partial x}\frac{-x}{x^2+y^2} - \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} \right|\right| = \left| \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} \right|.$$

Imponendo $||\mathrm{rot}(g)|| = 0$ otteniamo

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

e quindi mediante integrazione in y

$$\varphi(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + c(x)$$

dove $c(x)$ è una funzione costante rispetto a y.

Una soluzione del problema è data dalla funzione

$$\varphi(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Esercizio 3. Si dica se il campo vettoriale

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} x\log(y^2) \\ \\ \dfrac{x^2}{y} \end{pmatrix}$$

ammette potenziale. Interpretando g come una forza, si calcoli il lavoro da essa compiuto per portare una particella dal punto $(1,1)^T$ al punto $(0,\varepsilon)^T$ lungo una curva congiungente i due punti.

Si vuole poi calcolare il lavoro compiuto per portare una particella dal punto $(1,1)^T$ all'origine. Si noti però che l'origine non appartiene al dominio della funzione. Cosa succede in questo caso?

Svolgimento.

Il dominio del campo g non è connesso, ma è composto da due parti semplicemente connesse (i due semipiani $y > 0$ e $y < 0$). Studiamo il campo nel semipiano $y > 0$. Uno studio simile può essere fatto anche sul semipiano $y < 0$.

Calcolando il rotore del campo si vede subito che g è irrotazionale essendo

$$\frac{\partial}{\partial y} x\log(y^2) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2}{y} = \frac{2x}{y}.$$

Il campo è pertanto conservativo nel semipiano $y > 0$.

L'integrale richiesto non dipende dunque dal cammino seguito per portare la particella dal punto $(1,1)^T$ al punto $(0,\varepsilon)^T$, ma solo dagli estremi. Si può ad esempio scegliere il cammino descritto dal segmento verticale $(0,t)^T$ con $\varepsilon \le t \le 1$ unito al segmento orizzontale $(t,1)^T$ con $0 \le t \le 1$. Si avrà pertanto

$$\int_\gamma g\,ds = \int_\varepsilon^1 0\,dt + \int_0^1 \langle (0,t^2)^T, (1,0)^T \rangle\,dt = 0.$$

Si può facilmente anche calcolare il potenziale del campo. Integrando la funzione $x\log(y^2)$ rispetto alla variabile x oppure la funzione $\frac{x^2}{y}$ rispetto alla variabile y si ottiene $V(x,y) = x^2\log y + C$. Si osservi che

$$V(0,\varepsilon) - V(1,1) = 0,$$

come deve essere.

Studiamo ora il medesimo problema dove al posto del punto $(0,\varepsilon)^T$ consideriamo il punto $(0,0)^T$. Intuitivamente si potrebbe pensare che il lavoro sia ancora nullo, considerando il limite per $\varepsilon \to 0$ del lavoro compiuto fino al punto $(0,\varepsilon)^T$.

Come prima, si può calcolare l'integrale, questa volta in senso generalizzato, lungo il segmento verticale $(0,t)^T$ con $0 < t \le 1$ unito al segmento orizzontale $(t,1)^T$ con $0 \le t \le 1$. Evidentemente questo integrale vale 0.

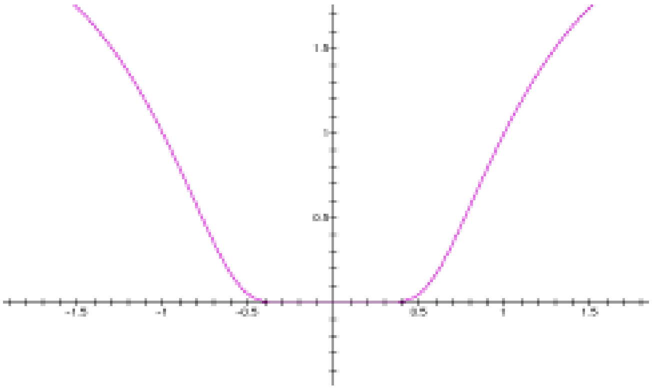
Consideriamo però ora la seguente curva che congiunge il punto $(1,1)^T$ con l'origine: $\gamma : (0,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = (x(t),y(t))^T = \left(t, e^{1-\frac{1}{t^2}}\right)^T.$$

Si ha $x'(t) = 1$ e $y'(t) = \dfrac{2}{t^3} e^{1-\frac{1}{t^2}}$.
Dunque l'integrale è

$$\int_0^1 \left(t \log \left(e^{1-\frac{1}{t^2}} \right)^2 + \frac{t^2}{e^{1-\frac{1}{t^2}}} \frac{2}{t^3} e^{1-\frac{1}{t^2}} \right) dt = \int_0^1 2t \, dt = 1 \neq 0.$$

Intuitivamente, il motivo per cui l'integrale non è nullo è che la curva $\gamma(t)$ "si avvicina moltissimo" all'asse delle x, sul quale il campo è illimitato. La figura seguente mostra l'andamento della curva in un intorno dell'origine



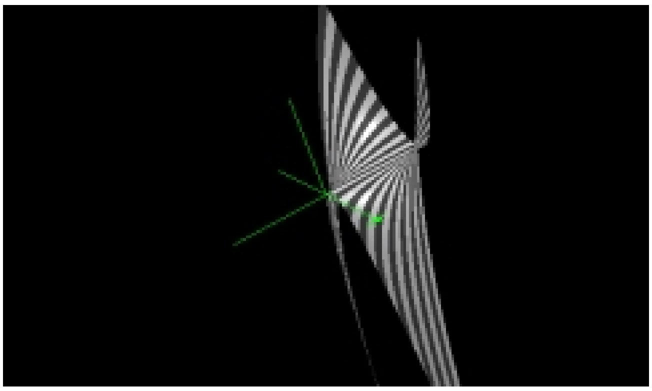
Il fatto che il campo sia conservativo nell'aperto $A = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ non garantisce affatto che lo sia anche sulla chiusura.

Si osservi che, a differenza di quanto un'occhiata superficiale possa suggerire, non si può estendere il potenziale V al punto $(0, 0)^T$.

Non esiste il limite per $(x, y)^T \to (0, 0)^T$ di $V(x, y)$. Infatti, la restrizione del potenziale sull'asse delle y è 0, e dunque tale limite, se esistesse, dovrebbe essere nullo. D'altra parte, considerando la restrizione del potenziale alla curva γ si ottiene

$$\lim_{(x,y)^T \to (0,0)^T} V(\gamma(t)) = \lim_{t \to 0} t^2 \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) = -1 \neq 0.$$

La figura seguente mostra l'andamento del potenziale in un intorno dell'origine; si noti che è illimitato in un intorno dell'origine.



Esercizio 4. Si stabilisca se il campo

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} z + xy \cos(xy) + \sin(xy) \\ x^2 \cos(xy) \\ x + 2z \end{pmatrix}$$

è conservativo.

Si calcoli

$$\int_\Gamma g(x,y,z)\,ds$$

dove Γ è la curva

$$\Gamma = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x = y,\ x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}$$

orientata in modo che il punto $(0,0,0)^T$ preceda il punto $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)^T$.

Svolgimento.

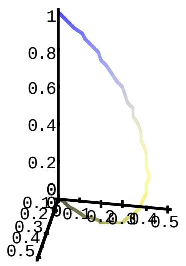
Calcoliamo il rotore del campo $g(x,y,z)$.

Posto $g_1(x,y,z) = z + xy\cos(xy) + \sin(xy)$, $g_2(x,y,z) = x^2\cos(xy)$ e $g_3(x,y,z) = x + 2z$, si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1(x,y,z)}{\partial y} = \dfrac{\partial g_2(x,y,z)}{\partial x} = 2x\cos(xy) - x^2 y \sin(xy); \\ \dfrac{\partial g_1(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial g_3(x,y,z)}{\partial x} = 1; \\ \dfrac{\partial g_2(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial g_3(x,y,z)}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Il rotore di g ha tutte e tre le componenti nulle. Pertanto il campo g è irrotazionale e quindi è conservativo perchè è definito su tutto $\mathbb{R}^3$.

La curva Γ è un arco di cerchio che giace sulla sfera di centro $(0,0,\frac{1}{2})^T$ e raggio $\frac{1}{2}$ e congiunge il punto $(0,0,0)^T$ con il punto $(0,0,1)^T$ (potremmo dire che Γ è un meridiano che congiunge il polo sud al polo nord).



Poiché il campo è conservativo per calcolare l'integrale richiesto si può scegliere un qualunque cammino che congiunga i punti $(0,0,0)^T$ e $(0,0,1)^T$. Il cammino più semplice e quello che percorre l'asse delle z, cioè $\gamma(t) = (0,0,t)^T$ con $0 \le t \le 1$.

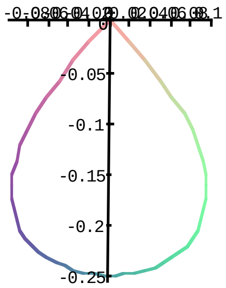
L'integrale richiesto diventa allora

$$\int_\Gamma g(x,y,z)\,ds = \int_0^1 \langle (t,0,2t)^T, (0,0,1)^T \rangle\,dt = \int_0^1 2t\,dt = 1.$$

Esercizio 5. Si calcoli l'area del dominio regolare racchiuso dalla curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t(t-1) \\ t(t-1)(2t-1) \end{pmatrix}.$$

Svolgimento.



Poniamo $x(t) = t(t-1)$ e $y(t) = t(t-1)(2t-1)$.
Si ha

$$\begin{cases} x' = 2t - 1 \\ y' = (2t-1)^2 + 2(t^2 - t) \end{cases}.$$

Applicando la formula di Green si ottiene facilmente l'area A del dominio :

$$A = \frac{1}{2}\int_0^1 (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))\ dt = \frac{1}{2}\int_0^1 2(t^2-t)^2\ dt = \frac{1}{30}.$$

Esercizio 6. Sia γ una qualunque curva regolare semplice chiusa che contenga nella sua parte interna l'origine $(0,0)^T$ del piano. Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\} \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$f(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)^T.$$

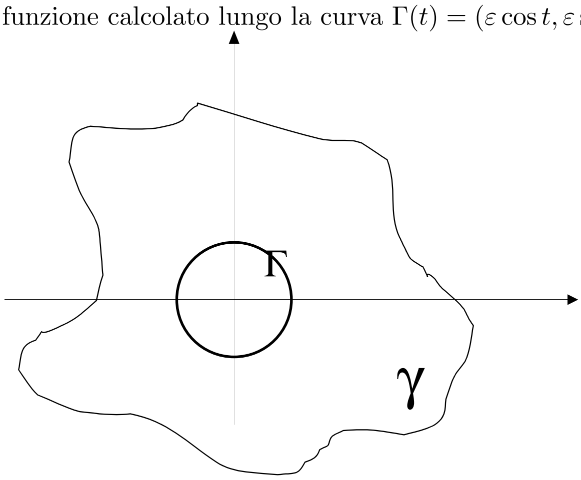
Si provi che

$$\int_\gamma f\, ds = 2\pi.$$

Svolgimento.

Poichè l'origine è contenuta nella parte interna della curva, esiste un circolo di centro l'origine e di raggio opportuno $\varepsilon > 0$ tutto contenuto all'interno della curva.

Useremo la formula di Gauss-Green per dimostrare che l'integrale cercato è uguale all'integrale della funzione calcolato lungo la curva $\Gamma(t) = (\varepsilon\cos t, \varepsilon \sin t)^T$ con $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$.



Per la formula di Gauss-Green si ha

$$\int_\gamma X\,dx + Y\,dy + \int_{-\Gamma} X\,dx + Y\,dy = \iint_D (Y_x - X_y)\ dxdy;$$

dove si è indicata con D la regione del piano compresa tra il sostegno della curva Γ e il sostegno della curva γ. Si ottiene allora

$$\int_\gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy \right) - \int_\Gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy \right) = \iint_D \left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \right) dxdy = 0.$$

Dunque è sufficiente calcolare l'integrale lungo il circolo di raggio ε:

$$\int_\Gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy \right) = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 \sin^2 t + \varepsilon^2 \cos^2 t}{\varepsilon^2 \sin^2 t + \varepsilon^2 \cos^2 t}\, dt = 2\pi.$$

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 20: superficie nello spazio; area e integrali superficiali; teorema della divergenza e teorema di Stokes.

Esercizio 1. Si trovi un'equazione parametrica per rappresentare la parte limitata del paraboloide ellittico

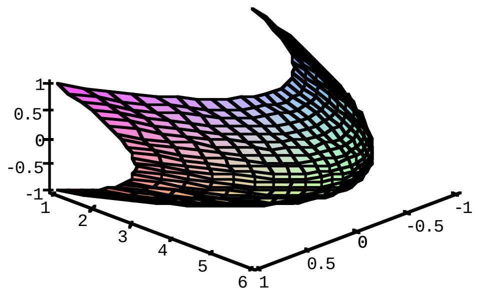
$$y = 6 - 3x^2 - 2z^2$$

delimitato dal piano xz.

Si scriva l'equazione del piano tangente nel generico punto.

Svolgimento.

Si tratta della parte del paraboloide ellittico $y = 6 - 3x^2 - 2z^2$, con $y \geq 0$.



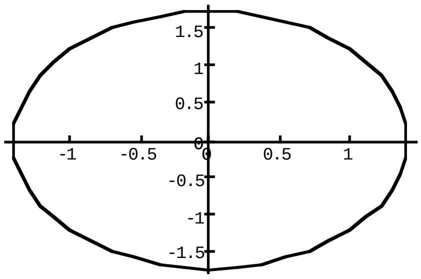
Possiamo rappresentarlo mediante equazioni parametriche come segue:

$$\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = 6 - 3u^2 - 2v^2, \\ z(u,v) = v, \end{cases}$$

dove

$$(u,v)^T \in \{(u,v)^T \in \mathbb{R}^2 : \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{3} \leq 1\};$$

(si tratta della regione interna ad un'ellisse).



Per scrivere l'equazione del piano tangente non è necessario ricorrere alla formula del versore normale mediante le derivate parziali della parametrizzazione. Poiché infatti la superficie considerata è il grafico della funzione $f(x,z) = 6 - 3x^2 - 2z^2$, l'equazione del piano tangente nel punto $(x_0, f(x_0,z_0), z_0)$ è

$$y - f(x_0, z_0) = -6x_0(x - x_0) - 4z_0(z - z_0),$$

cioè,

$$6x_0x + y + 4z_0z - 3x_0^2 - 2z_0^2 - 6 = 0.$$

Esercizio 2.
Si consideri la superficie rappresentata dalle seguenti equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(u,v) = uv, \\ y(u,v) = ue^v, \\ z(u,v) = ve^u, \end{cases}$$

con $(u,v)^T \in \mathbb{R}^2$.

Si dica se la superficie è regolare e si calcoli l'equazione del piano tangente nel generico punto della superficie.

Svolgimento.
Le funzioni $x(u,v)$, $y(u,v)$ e $z(u,v)$ sono di classe C^∞.
Calcoliamo le derivate parziali :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = v; \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = u;$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = e^v; \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = ue^v;$$
$$\frac{\partial z}{\partial u} = ve^u; \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = e^u.$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} v & e^v & ve^u \\ u & ue^v & e^u \end{pmatrix}$$

ha caratteristica 2 per ogni punto $(u,v)^T$ diverso dal punto $(1,1)^T$. Dunque la superficie è regolare in ogni punto ad eccezione del punto $(1,e,e)^T$.

Un vettore normale alla superficie nel punto $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))^T$ è

$$(v, e^v, ve^u)^T \wedge (u, ue^v, e^u)^T = (e^{u+v}(1-uv), ve^u(u-1), ue^v(v-1))^T,$$

e il versore normale è

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{e^{2(u+v)}(1-uv)^2 + v^2e^{2u}(u-1)^2 + u^2e^{2v}(v-1)^2}} \left(e^{u+v}(1-uv), ve^u(u-1), ue^v(v-1)\right)^T.$$

Il piano tangente la superficie nel punto $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))^T$ è

$$e^{u+v}(1-uv)(x-uv) + ve^u(u-1)(y-ue^v) + ue^v(v-1)(z-ve^u) = 0.$$

Si noti che il piano tangente non è definito nel punto $(1,e,e)$ che si ottiene per $(u,v)^T = (1,1)^T$.

Esercizio 3. Un'idea intuitiva per definire l'area di una superficie può essere quella di approssimare una superficie con tratti di superficie piane triangolari, prendendo poi l'estremo superiore di queste aree, in modo simile a quello che si fa per definire la lunghezza di una curva.

Si provi che questa idea non è praticabile.

Si consideri ad esempio un cilindro e si mostri che può essere ricoperto internamente con pezzettini di carta triangolari in modo che l'estremo superiore dell'area della carta necessaria per avvolgerlo sia infinito.

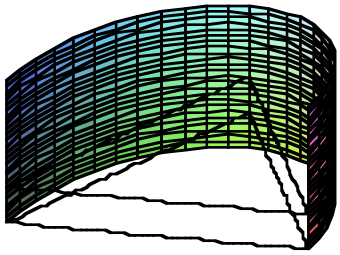
Svolgimento.
Consideriamo la metà di un cilindro (con il taglio passante per l'asse verticale) di raggio di base 1 e altezza 1. Si può rappresentare il cilindro come segue:

$$C = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Suddividiamo la superficie di tale oggetto in n striscioline orizzontali ciascuna di altezza $\frac{1}{n}$.

Costruiamo n triangoli ciascuno dei quali ha i vertici nei punti $(0, -1, \frac{i}{n})^T$, $(1, 0, \frac{i+1}{n})^T$, $(0, 1, \frac{i}{n})^T$, con $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

La figura seguente mostra due di questi triangoli:



Ciascuno di questi triangolini ha base 2 e altezza $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} > 1$. Dunque la somma delle aree di tutti i triangolini è $> n$. Si possono aggiungere altri triangolini in modo da ottenere una triangolazione completa della superficie. È chiaro che l'area totale della triangolazione sarà maggiore di n. Poiché n si può prendere grande a piacere possiamo concludere che l'estremo superiore delle aree delle triangolazioni della superficie considerata è infinito.

Esercizio 4.

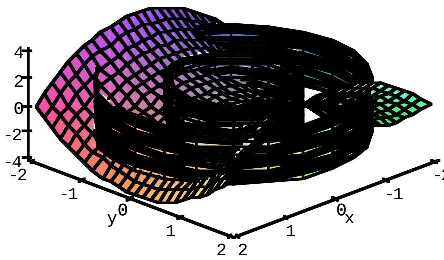
Si calcoli l'area della parte del paraboloide iperbolico $z = y^2 - x^2$ che è delimitata dai cilindri $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Svolgimento.

La superficie può essere parametrizzata dalla funzione

$$\varphi(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)^T;$$

con $(u, v)^T \in \mathbb{R}^2$ tali che $1 \le u^2 + v^2 \le 4$.



Calcoliamo il vettore normale:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (1, 0, -2u)^T, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (0, 1, 2v)^T;$$

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (2u, -2v, 1)^T.$$

Naturalmente si poteva anche osservare che la superficie considerata è il grafico della funzione $f(x, y) = y^2 - x^2$ e usare la formula $||\mathbf{n}|| = \sqrt{1 + ||\nabla f||^2}$.

Per calcolare l'area A della superficie S dobbiamo calcolare l'integrale

$$A(S) = \iint_S ||\mathbf{n}||\, du dv.$$

Conviene usare coordinate polari; si ottiene allora

$$A(S) = \int_1^2 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{4\rho^2 + 1}\, \rho\, d\vartheta \right) d\rho = \frac{\pi}{4} \int_5^{17} \sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{6} \left(17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}} \right);$$

dove per integrare rispetto a ρ si è fatta la sostituzione $t = 4\rho^2 + 1$, $dt = 8\rho\, d\rho$.

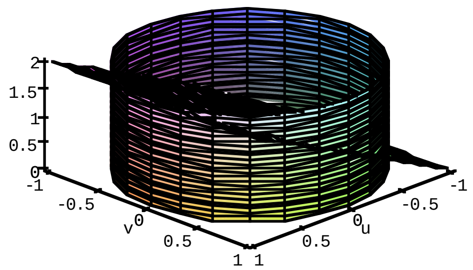
Esercizio 5. Si calcoli l'integrale

$$\iint_S z\, d\sigma,$$

dove S è la superficie definita dal cilindro di equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 1$, dal disco $D = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\}$ e dalla porzione di piano $\pi = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x - z + 1 = 0;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Svolgimento.

La superficie S è l'unione di tre superfici regolari, che chiameremo " tappo superiore", " superficie laterale" e " tappo inferiore".



L'integrale sul tappo inferiore D dà contributo nullo, perché su tale superficie la funzione z è identicamente nulla.

Studiamo l'integrale sul tappo superiore.

Questa superficie può essere parametrizzata dalla funzione

$$\varphi(u, v) = (u, v, u + 1)^T;$$

dunque

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (1, 0, 1)^T, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (0, 1, 0)^T;$$

$$\mathbf{n} = (-1, 0, 1)^T.$$

Naturalmente si poteva anche osservare che la superficie considerata è il grafico della funzione $f(x, y) = x + 1$ e usare la formula $||\mathbf{n}|| = \sqrt{1 + ||\nabla f||^2}$.

Per calcolare l'integrale su questa superficie conviene usare coordinate polari

$$\int_0^1 \left(\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \rho \cos \vartheta) \sqrt{2} \rho\, d\vartheta \right) d\rho = 2\pi \int_0^1 \sqrt{2} \rho\, d\rho + \int_0^1 \sqrt{2} \rho^2\, d\rho \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos \vartheta\, d\vartheta = \sqrt{2}\pi.$$

Calcoliamo ora l'integrale sulla superficie laterale. Questa può essere parametrizzata mediante la funzione

$$\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)^T;$$

dove $u \in [0, 2\pi]$ e $0 \leq v \leq 1 + \cos u$.

Si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (-\sin u, \cos u, 0)^T, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (0, 0, 1)^T;$$

$$\mathbf{n} = (\cos u, \sin u, 0)^T.$$

Calcolando l'integrale (si osservi che $||\mathbf{n}|| = 1$) si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{1+\cos u} v\, dv \right) du = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos^2 u + 2 \cos u)\, du = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \frac{1}{2}(\cos 2u + 1) + 2 \cos u)\, du = \frac{3}{2}\pi.$$

Sommando i contributi all'integrale delle tre superfici si ottiene infine

$$\iint_S z\, d\sigma = \pi\left(\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right).$$

Esercizio 6. Si calcoli la carica elettrica contenuta nella calotta sferica

$$\{(x,y,z,)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le r^2,\ z \ge 0\};$$

dove il campo elettrico è definito da $E(x,y,z) = (x,y,2z)^T$.

Svolgimento.

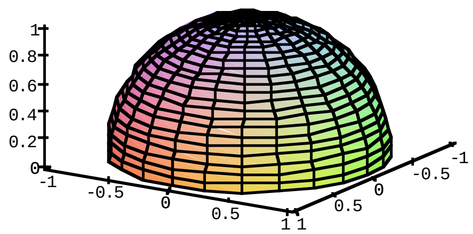
La legge di Gauss dice che la carica racchiusa da una superficie S è proporzionale al flusso del campo; cioè

$$Q = \varepsilon_0 \iint_S \langle E, \mathbf{n}\rangle\, d\sigma.$$

Possiamo parametrizzare la calotta sferica nel modo usuale:

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = r\cos\varphi; \end{cases}$$

con $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $\vartheta \in [-\pi, \pi]$.



Si ha

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = r\cos\varphi\cos\vartheta; \qquad \frac{\partial y}{\partial\varphi} = r\cos\varphi\sin\vartheta; \qquad \frac{\partial z}{\partial\varphi} = -r\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial x}{\partial\vartheta} = -r\sin\varphi\sin\vartheta; \qquad \frac{\partial y}{\partial\vartheta} = r\sin\varphi\cos\vartheta; \qquad \frac{\partial z}{\partial\vartheta} = 0;$$

dunque

$$\mathbf{n} = (r^2\sin^2\varphi\cos\vartheta, r^2\sin^2\varphi\sin\vartheta, r^2\sin\varphi\cos\varphi)^T.$$

Calcoliamo il flusso del campo:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin\varphi\cos\vartheta\cdot r^2\sin^2\varphi\cos\vartheta + r\sin\varphi\sin\vartheta\cdot r^2\sin^2\varphi\sin\vartheta + 2r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi\right) d\vartheta =$$

$$= r^3\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos^2\vartheta + \sin^3\varphi\sin^2\vartheta + 2\cos^2\varphi\sin\varphi\, d\varphi\right) d\vartheta =$$

$$= r^3\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi(\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi)\, d\varphi\right) d\vartheta = 2\pi r^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos^2\varphi)\sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= 2\pi r^3 \left[-\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\pi r^3.$$

Osserviamo che il flusso attraverso il tappo inferiore della superficie è nullo. Infatti su tale superficie la componente del campo parallelo alla normale (cioè la componente z) è nulla, essendo ivi $z = 0$.

Concludiamo che la carica elettrica contenuta in S è

$$Q = \varepsilon_0 \frac{8}{3}\pi r^3.$$

Esercizio 7. Si calcoli il flusso attraverso la superficie S del campo

$$F(x, y, z) = (xz^2, \frac{1}{3}y^3 + \operatorname{tg} z, x^2 z + y^2)^T,$$

dove S è la semisfera superiore

$$S = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}.$$

Svolgimento.

Si potrebbe calcolare direttamente il flusso attraverso la superficie, ma il conto non sarebbe molto agevole. Osserviamo che la divergenza del campo è una funzione molto semplice, essendo

$$\operatorname{div}(F) = z^2 + y^2 + x^2.$$

Si può dunque provare ad usare il teorema della divergenza.

Si noti però che la superficie S non è chiusa.

Consideriamo allora la superficie chiusa ottenuta dall'unione di S e del tappo inferiore

$$D = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\}.$$

Per il teorema della divergenza si ha

$$\iint_{S \cup D} \langle F, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma = \iiint_B \operatorname{div} F \, dm;$$

dove l'integrale triplo al secondo membro è calcolato sulla semisfera solida superiore

$$B = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}.$$

L'integrale triplo si calcola facilmente in coordinate sferiche:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \rho^2 \, \rho^2 \sin\varphi \, d\vartheta \right) d\varphi \right) d\rho = \frac{2}{5}\pi.$$

Calcoliamo ora il flusso attraverso il tappo inferiore D. La normale esterna è $(0, 0, -1)^T$, la funzione da integrare nel disco è $-y^2$; conviene usare coordinate polari:

$$\int_0^1 \left(\int_{-\pi}^{\pi} (-\rho^2 \sin^2\vartheta) \, \rho \, d\vartheta \right) d\rho = -\frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\vartheta \, d\vartheta = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{2}\vartheta - \frac{1}{4}\sin 2\vartheta \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{\pi}{4};$$

dove, nel calcolo dell'integrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\vartheta \, d\vartheta$ si è usata l'identità $\sin^2\vartheta = 1 - \frac{1}{2}(\cos 2\vartheta + 1)$.

Il flusso attraverso la superficie S sarà perciò $\frac{2}{5}\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{13}{20}\pi$.

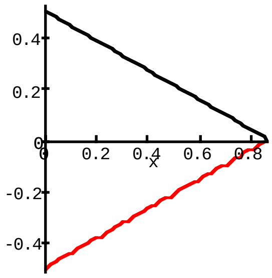
Esercizio 8. Si consideri il solido generato da un triangolo equilatero di lato a, ruotato attorno ad uno dei suoi lati. Si determinino la superficie e il volume del solido.

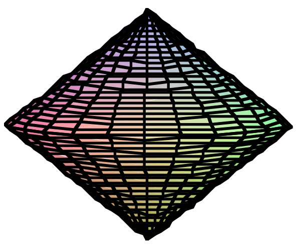
Svolgimento.

Useremo i teoremi di Pappo-Guldino.

Il baricentro di un triangolo è il punto di intersezione delle mediane che, per il triangolo equilatero, coincidono con bisettrici e altezze. In un sistema di assi cartesiani yz, con l'asse y orizzontale e l'asse z verticale, i vertici del triangolo equilatero di lato a, con un lato appoggiato all'asse verticale, sono $(0, \frac{a}{2})^T$, $(0, -\frac{a}{2})^T$, $(a\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)^T$. La coordinata y del baricentro è $\hat{y} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$.

Nella figura seguente si è posto $a = 1$:





L'area del triangolo è $A = \frac{1}{2}a \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Per il secondo teorema di Pappo-Guldino si calcola facilmente il volume del solido ottenuto ruotando il triangolo intorno all'asse z:

$$V = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}a \cdot a^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{4}a^3.$$

La coordinata y del baricentro della curva costituita dai due lati del triangolo che non sono adiacenti all'asse z è il punto medio dell'altezza del triangolo, dunque è $\hat{y} = a\frac{\sqrt{3}}{4}$.

La lunghezza di tale curva è $2a$.

Dunque, per il primo teorema di Pappo-Guldino si ottiene

$$A = 2\pi \cdot a\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \sqrt{3}\pi a^2.$$

I risultati ottenuti erano prevedibili. Il solido che abbiamo ottenuto è un doppio cono con raggio di base $a\frac{\sqrt{3}}{2}$, altezza $\frac{a}{2}$ e apotema a. Le formule del volume e dell'area della superficie laterale di un cono con raggio di base r, altezza h e apotema a sono rispettivamente

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad\qquad A = \pi r a.$$

Nel nostro caso, (moltiplicando per due perché il cono è doppio) si ottiene

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{3}{4}a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{\pi}{4}a^3;$$

$$A = 2 \cdot \pi \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \sqrt{3}\pi a^2.$$