Appunti: Analisi 1

Giovanni Simoni
lievi modifiche di Andrea Pugliese

ottobre 2005-2006

Indice

Capitolo 1

Premessa

Nell'A.A. 2005-06 lo studente Giovanni Simoni mi aveva mostrato gli appunti che aveva scritto sulla base delle mie lezioni di Analisi matematica per il Corso di Laurea in Informatica.

Sono certamente diversi da come li avrei scritti io, ma ho pensato che potessero essere utili per alcuni studenti, in quanto offrono un riassunto, dal punto di vista di uno studente, dei principali concetti e risultati ottenuti nella prima parte del corso (all'incirca le prime 6 settimane).

Mi sono limitato a correggere alcuni errori di stampa ed alcune imprecisioni matematiche, ma ho preferito non modificare la scelta dei risultati presentati.

Penso che sarebbe certamente utile se qualche altro studente volesse continuare l'opera, correggendo quanto scritto finora ed inserendo nuove parti.

Naturalmente questi appunti (e ancora di più il mio diario in rete delle lezioni) non possono sostituire lo studio di un libro, dove la materia è presentata con maggiore organicità e completezza.

Andrea Pugliese

Capitolo 2

Concetto di Funzione

Si definisce una funzione come legge che associa ad ogni elemento $a \in A$ uno ed un solo elemento $b \in B$:

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & A \longrightarrow B \\ & x \longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

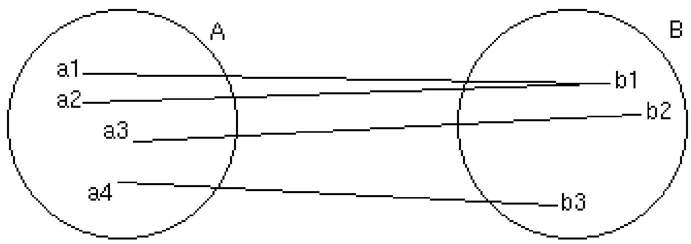


Figura 2.1: Funzione: associazione tra gli elementi di due insiemi

2.1 Esprimere una funzione

Una funzione può essere espressa mediante:

1. Proposizione verbale (verbalmente);
2. Tabella;
3. Formula;
4. Grafico;

2.1.1 Espressione mediante formula

Si riportano alcuni esempi di espressione mediante formula di funzioni:

- $x \longrightarrow x$ (bisettrice) $f(x) = x$;

- $x \longrightarrow k$ (retta costante k) $f(x) = k$;
- $x \longrightarrow x^2$ (parabola) $f(x) = x^2$;
- Funzione definita da sottofunzioni:

$$f(x) \begin{cases} x & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

2.1.2 Espressione mediante grafico

Una funzione, dal punto di vista grafico, é un sottoinsieme del piano, generalmente chiamato *curva* e formato da delle coppie ordinate di numeri.

$$\{(x, y) \; : \; y = f(x)\}$$

Non tutte le curve sono grafico di una funzione: una circonferenza, per esempio, non risponde a tale definizione, poichè esistono valori di x per i quali l'espressione della circonferenza assume due valori (vedi fig. 2.2).

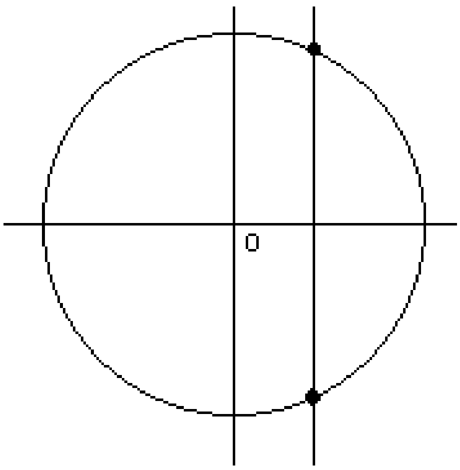


Figura 2.2: La circonferenza non é una funzione

Capitolo 3

Composizione di Funzioni

3.1 Traslazioni

3.1.1 Esempio: necessità di traslazione

Sia quello rappresentato in figura 3.1 il grafico di $f(x)$, relativo alla concentrazione di anidride carbonica nell'aria (sull'asse x il tempo, sull'asse y la concentrazione).

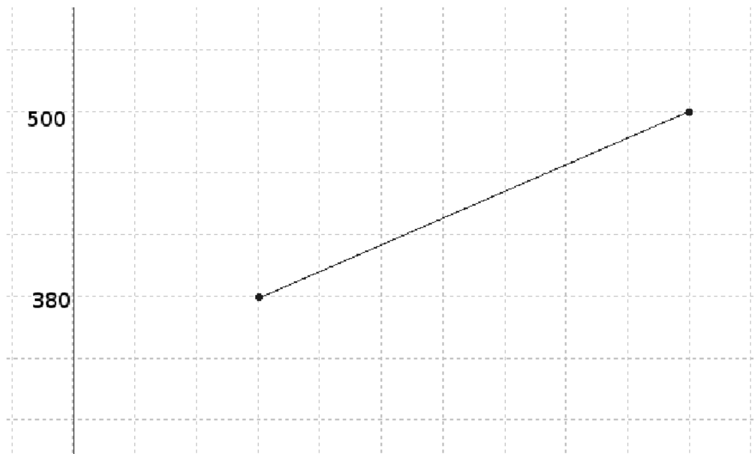


Figura 3.1: Ipotetici valori di concentrazione dell'anidride carbonica

Si richiede una traslazione al fine di ottenere la data di inizio della rilevazione (1980) all'origine degli assi (come in figura 3.2). Da questa traslazione deriva una nuova funzione:

$$f(x) = g(x + 1980) - 380$$

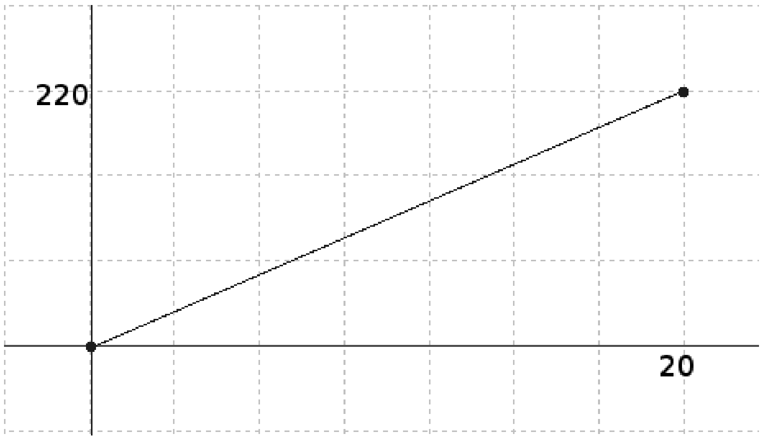


Figura 3.2: Ipotetici valori di concentrazione dell'anidride carbonica, grafico traslato

3.1.2 Modalità di traslazione

- La traslazione orizzontale avviene sommando o sottranendo un determinato valore all'interno dell'argomento della funzione:

$$g(x) = f(x + a)$$

- La traslazione orizzontale avviene sommando o sottraendo un determinato valore al risultato della funzione:

$$h(x) = f(x) + b$$

Esempio (riferimento fig. 3.3)

$$f(x) = x^3 - x^2 \qquad g(x) = f(x + 3) \qquad h(x) = g(x) + 900$$

3.1.3 Uso grafico delle traslazioni

É possibile utilizzare una traslazione per ricondurre al caso generale un caso particolare di una determinata funzione.

Esempio (riferimento a fig. 3.4)

$$\begin{aligned} h(x) &= x^2 + 4x + 1 \\ &= (x + 2)^2 - 3 \end{aligned} \tag{3.1}$$

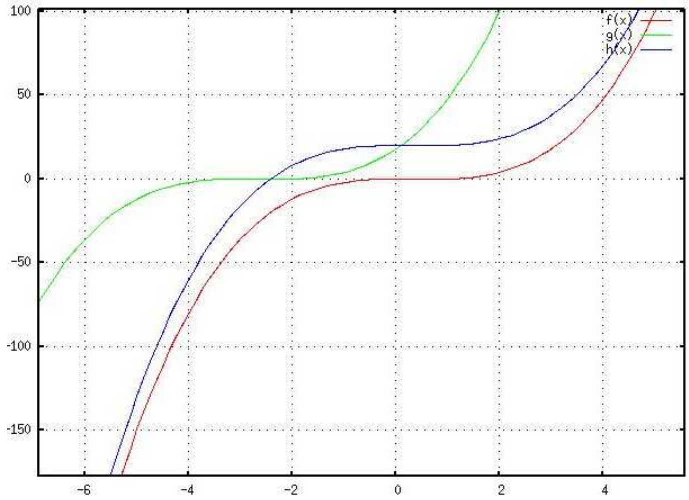


Figura 3.3: Alcune traslazioni di $f(x) = x^3 - x^2$

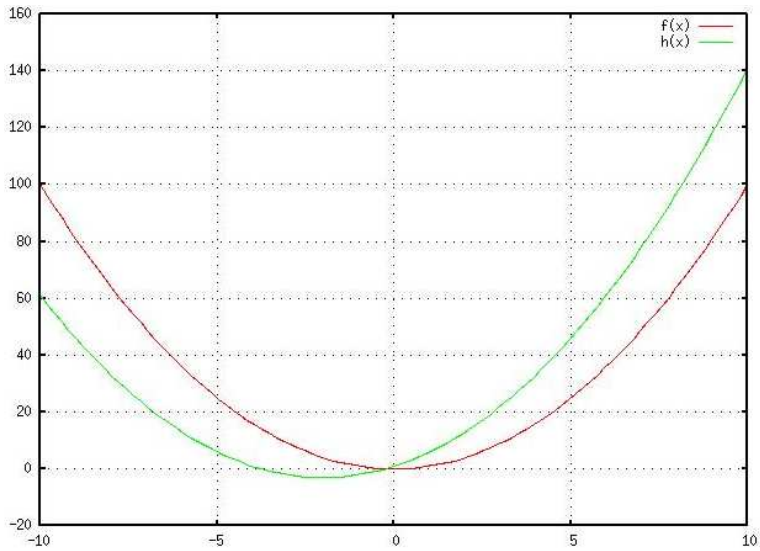


Figura 3.4: Confronto tra $f(x) = x^2$ e $h(x) = x^2 + 4x + 1$

3.2 Dilatazioni

3.2.1 Esempio: necessità di dilatazione

Si rende necessaria un'operazione di dilatazione del dominio di una funzione quando si desidera operare un calcolo su una determinata funzione utilizzando un'altra unità di misura:

Si supponga, per esempio, di voler relazionare al tempo un determinato fenomeno e di voler passare da una definizione di tempo in minuti $p(t)$ ad una definizione di tempo in ore $\rho(\tau)$

Si otterrà:

$$\rho(\tau) = p\left(\frac{t}{60}\right)$$

3.2.2 Modalità di dilatazione

La dilatazione avviene semplicemente moltiplicando o dividendo per un determinato valore l'argomento della funzione che si vuole dilatare.

Esempio (riferimento a fig. 3.5)

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = f(2 \cdot x) = (2 \cdot x)^2$$

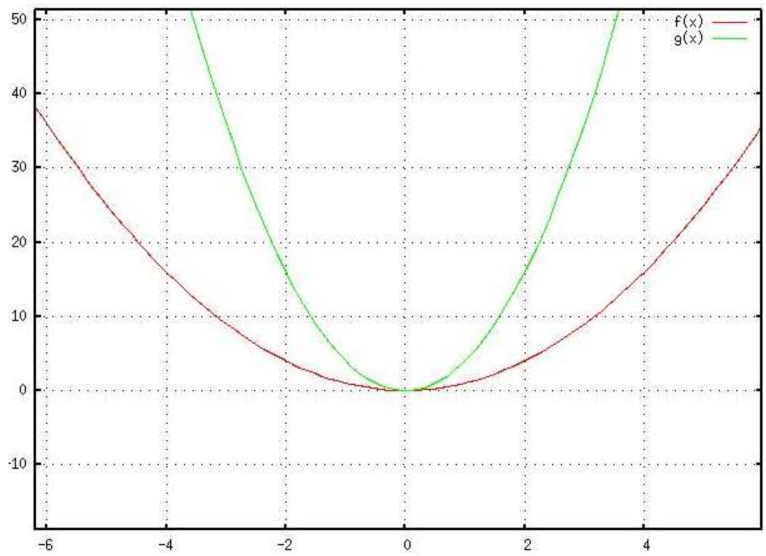


Figura 3.5: Confronto tra $f(x) = x^2$ e $g(x) = (2 \cdot x)^2$

3.3 Caso generale

3.3.1 Esempio di caso generale

Si abbia una sfera massiccia composta di un determinato materiale, ricavarne il peso:

- a partire dal raggio r della sfera (variabile);
- conoscendo il peso specifico del materiale: 7.8

$$P(V) = 7.8 \cdot V$$

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$r \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} P$$

$$P(V(r)) = P\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 7.8 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

Per deduzione logica, traslazioni e dilatazioni sono da ritenersi casi generali della composizione di funzioni

3.3.2 Altre informazioni sulla composizione di funzioni

Notazioni

1. Notazione standard:
$$h(x) = g(f(x))$$
2. Notazione funzionale:
$$h = g \circ f$$

Legge derivante dalla composizione

$$[g \circ f](x) = g(f(x)) \qquad g \circ f \neq f \circ g$$

NB
Può esistere $g \circ f$ senza che esista $f \circ g$:

$$f(x) = -x^2 - 2 \qquad g(x) = \sqrt{y} \qquad \Longrightarrow \qquad \nexists g(f(x))$$

Capitolo 4

Funzioni inverse

4.1 Funzioni iniettive, suriettive e bigettive

Una funzione può avere le seguenti proprietà:

- Funzione iniettiva:

  Una funzione si dice *iniettiva* quando

  $$a_1, a_2 \in A \; : \; a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

  ovvero quando non esistono due valori del dominio che, se passati alla funzione, vengono associati allo stesso valore nel codominio.

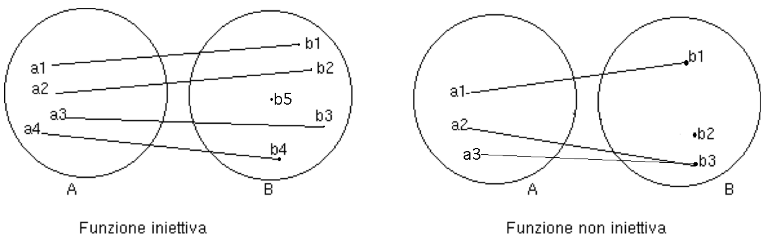


Figura 4.1: Iniettività

- Funzione suriettiva:

  Una funzione si dice *suriettiva* quando

  $$\forall b \in B \; \exists \, a \in A \; : \; f(a) = b$$

  ovvero quando non esistono valori del codominio che non possono essere associati dalla funzione ai valori del dominio.

Esistono dunque:

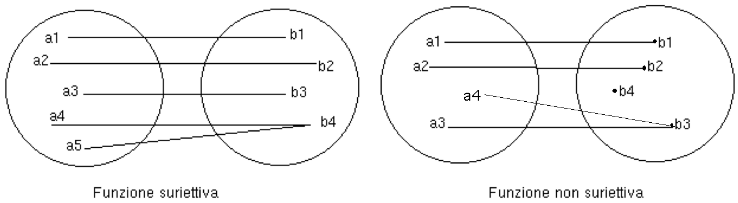


Figura 4.2: Suriettività

- Funzioni non iniettive e non suriettive;
- Funzioni iniettive ma non suriettive;
- Funzioni suriettive ma non iniettive;
- Funzioni iniettive e suriettive (dette anche *bigettive*):

$$\forall b \in B \exists! a \in A \ : \ f(a) = b \wedge f^{-1}(b) = a$$

4.1.1 Identificazione di una funzione iniettiva

Vista la definizione di iniettività, una funzione si dice iniettiva se ad ogni elemento del codominio corrisponde al più un valore del dominio. Questo si può verificare graficamente tracciando sul piano cartesiano delle rette parallele all'asse x:

Se una di queste rette interseca la funzione in più di un punto la funzione non é iniettiva, poichè essa assume lo stesso risultato per più di un valore differente di x (riferimento figura 4.3).

4.2 Significato di inversione

4.2.1 Esempio: necessità di inversione

Un tipico caso nel quale si avverte la necessità di trovare l'inverso di una funzione é la risoluzione di un problema inverso.

> Esepio
> Sia t il tempo e p la funzione che a partire dal tempo calcola la posizione di un corpo che cade verticalmente:
>
> $$p(t) = 4.9 \cdot t^2$$
>
> Trovare il tempo t per il quale il corpo é in posizione p

4.2.2 Proprietà dell'inversione

Possibilità di inversione

L'inversione da $A \longrightarrow B$ a $A \longleftarrow B$ é possibile solo per

- Funzioni bigettive;

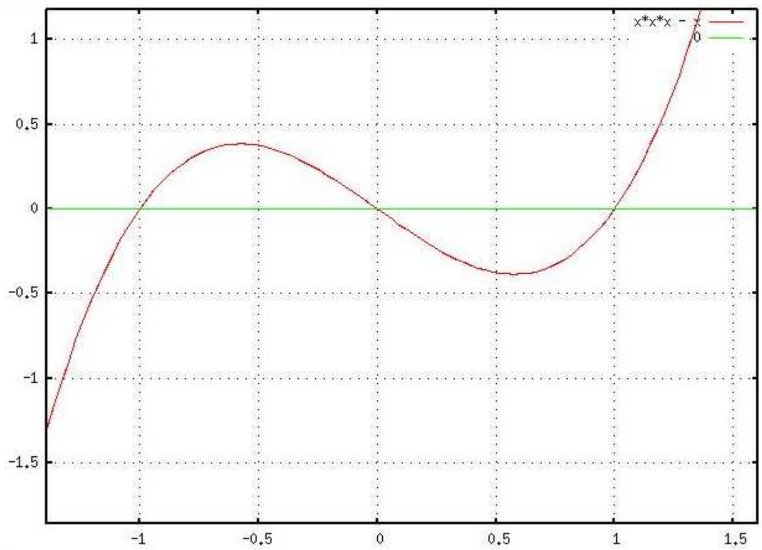


Figura 4.3: Aspetto grafico dell'iniettività

- Funzioni iniettive (solo se si eliminano dall'insieme di arrivo B gli elementi che non sono immagine di nessun punto dell'insieme di partenza A);

Definizione e notazione standard

Data una funzione $f : A \longrightarrow B$ ed una funzione $g : B \longrightarrow A$ tale che $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$[1], g é detta *funzione inversa*.

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

4.3 Modalità di inversione

L'inversione consiste, partendo da una funzione $f(x) = y$, nell'esplicitare la variabile x, trovando così una funzione $g : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ tale che $g(y) = x$.

Una volta calcolata tale formula, una semplice sostituzione tra x e y, fornirà la funzione inversa di quella cercata.

Esempio (riferimento a fig. 4.4)
Invertire la funzione $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x + 2 \\ 2(y-2) &= x \end{aligned}$$

La funzione inversa é:

$$y = 2(x-2)$$

[1] con id_A [o id_B] si indica la funzione identità dell'insieme A [B], ossia la funzione che associa ad ogni elemento x di A [B] se stesso: x

Notare che una funzione e la sua inversa sono sempre vicendevolmente speculari rispetto alla bisettrice

$$g(x) = x$$

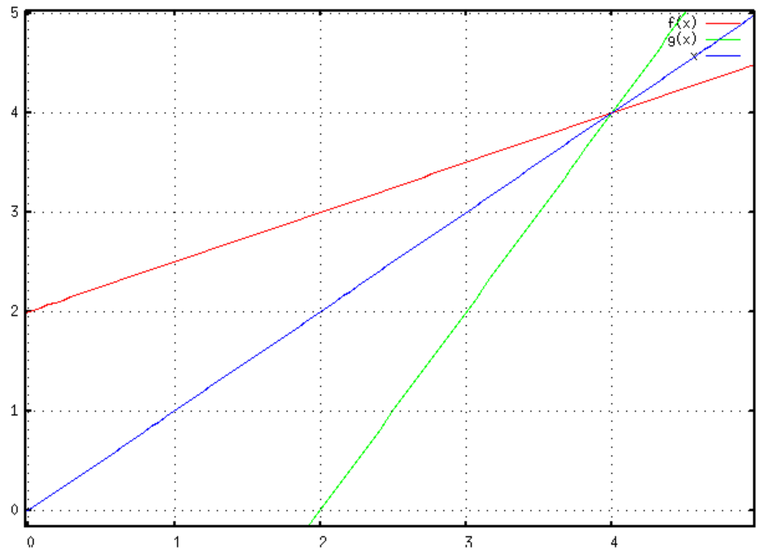


Figura 4.4: Funzioni invertite: $f(x) = \frac{x}{2} + 2$, x (bisettrice), $h(x) = 2(x - 2)$

In alcuni casi l'operazione di inversione può essere problematica: che succede se si inverte una funzione $y = f(x)$ non iniettiva? In questo caso la funzione inversa $x = g(y)$ violerebbe la stessa definizione di funzione, poichè potrebbe esistere un elemneto y appartenente al dominio di g per il quale esistono più elementi appartenenti al codominio.

Capitolo 5

Funzione esponenziale

5.1 Generalità sulla funzione esponenziale

Si definisce come *esponenziale* una funzione per la quale l'incognita x appare come esponente di una base a:

$$y = a^x$$

5.1.1 a^x per $x \in \mathcal{N}$

Ponendo:

- $x \in \mathcal{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$
- $a = 2$

si otterrà la seguente funzione (formato tabellare):

x	1	2	3	4	5	6
2^x	2	4	8	16	32	64

Ad ogni spostamento a destra (incremento unitario) della variabile x corrisponde un raddoppiamento del valore della funzione, poichè:

- $2^n = \overbrace{2 \times 2 \cdots \times 2}^{n \text{ volte}}$
- $2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y \quad x, y \in \mathcal{N}$

Il modello biologico: riproduzione batterica

Il comportamento esponenziale in base 2 é applicabile allo studio della riproduzione dei batteri, poichè essa avviene mediante sdoppiamento.

In questo caso si assume t come unità di tempo necessaria per lo sdoppiamento: nel momento t si avranno 2^t batteri.

5.1.2 a^x per $x \in \mathcal{Z}$

Ponendo:

- $x \in \mathcal{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\}$
- $a = 2$

si otterrà la seguente funzione (formato tabellare):

x	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Se ad ogni spostamento a destra (incremento unitario) della variabile x corrisponde un raddoppiamento del valore della funzione, allora per ogni spostamento a sinistra corrisponde un dimezzamento di tale valore.

Il modello economico: calcolo dell'interesse

Il conto corrente di una banca ha un interesse annuo del 5% (la banca è evidentemente immaginaria).

Sia C_0 l'ammontare del capitale iniziale, C_1 l'ammontare del capitale dopo un anno, C_n l'ammontare del capitale dopo l'anno n-esimo. Si avrà:

- $C_1 = 1.05 \cdot C_0$
- $C_2 = 1.05 \cdot C_1 = (1.05)^2 \cdot C_0$
- $\cdots$
- $C_n = (1.05)^n \cdot C_0$

5.1.3 a^x per $x \in \mathcal{Q}$

Per definizione, se l'esponente é un numero frazionario, si ha

$$a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b} \qquad c \neq 0;\ a \geq 0 \text{ per } c \text{ pari}$$

Ponendo:

- $x \in \mathcal{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\}$
- $a = 2$

si otterrà la seguente funzione (formato tabellare):

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	8

Infatti:

- Lo spostamento unitario a destra (dal valore $x = 0$ al valore $x = 1$) é divisibile in due fasi di incremento $\frac{1}{2}$;
- A tale spostamento deve corrispondere per due volte un incremento per la stessa quantità, definendo la seguente proporzione:

$$1 : x = x : 1 \qquad x^2 = 2 \Longrightarrow x = \sqrt{2}$$

Il modello economico: estensione del calcolo dell'interesse

Se il nostro conto corrente di capitale C_0 ha un interesse semestrale del 2.5% avremo

- $C_{\frac{1}{2}} = C_0 \cdot 1.025$
- $C_1 = C_0 \cdot (1.025)^2 \longrightarrow 1.025^2 > 1.05$

L'interesse in un anno, in questo caso, risulta essere maggiore rispetto all'interesse annuo del caso precedente. Per quale interesse semestrale otterremo il 5% annuo?

- $C_{\frac{1}{2}} = C_0 \cdot x$
- $C_1 = C_0 \cdot x^2 \longrightarrow x^2 = 1.05 \Longrightarrow x = \sqrt{1.05}$
- $C_n = C_0 \cdot (1.05)^n \qquad C_{\frac{1}{2}} = C_0 \cdot 1.05^{\frac{1}{2}} = C_0 \cdot \sqrt{1.05}$

Il modello fisico: decadimento radioattivo

Sia data una certa masssa radioattiva m_0. Al tempo t si avrà $m_t = m_0 \cdot a^t$.

Il tempo di dimezzamento sarà $t \,:\, m_t = \frac{1}{2}m_0$.

$$\frac{1}{2}m_0 = a^t \cdot m_0 \Longrightarrow a^t = \frac{1}{2}$$

Sapendo che il temp di dimezzamento è di 80 anni, quanto materiale rimane dopo 10 anni?

- $a^{80} = \frac{1}{2} \Longrightarrow a = \sqrt[80]{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{80}}$
- $m_{10} = m_0 \cdot a^{10} = m_0 \cdot (2^{\frac{1}{80}})^{10} = m_0 \cdot 2^{-\frac{1}{8}}$

Aumento della popolazione

Sia x_t il numero di individui di una certa popolazione al tempo t. Sapendo che tale valore cresce del 10% annuo, dopo quanto raddoppia?

- $x_1 = x_0 \cdot 1.10$
- $x_2 = x_0 \cdot (1.10)^2$
- $\cdots$
- $x_t = x_0 \cdot (1.10)^t$

Si ricerca un $t \,:\, x_0 \cdot (1.10)^t = x_0 \cdot 2$:

- Sicuramente il valore t sarà minore di 10, poichè la popolazione aumenta del 10% annuo sul numero di individui (che comprende l'incremento del 10% dell'anno precedente)
- Per tentativi (metodo della bisezione) si scopre che $7 < t < 8$, ovvero che $1.1^7 < 1.1^t < 1.1^8$

Si può dimostrare che non esiste alcun numero razionale t tale che $(1.1)^t = 2$:

$$\nexists t \in \mathcal{Q} \,:\, (1.1)^t = 2$$

Questa osservazione porta ad introdurre potenze ad esponente reale.

5.1.4 a^x per $x \in \mathcal{R}$

Viene definita a^x per ogni $x \in \mathcal{R}$ in modo che la funzione esponenziale $f(x) = a^x$ sia continua. Non è possibile definire esplicitamente quanto vale la potenza con esponente irrazionale (ad esempio 2^π o $3^{\sqrt{2}}$), ma è necessario approssimarlo tramite potenze ad esponente razionale.

5.2 Funzione inversa: il logaritmo

Proprietà generali sul logaritmo

Il logaritmo è definito come funzione inversa della funzione esponenziale:

$$a^x = y \qquad x = \log_a y$$

- $a^{\log_a y} = y$
- $\log_a a^x = x$

E' facile dimostrare che per i logaritmi vale la seguente formula:

$$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y.$$

Tramite il logaritmo, possiamo ora rispondere alla domanda del paragrafo precedente su quale sia t tale che $(1.1)^t = 2$. Si ha

$$(1.10)^t = 2 \Longrightarrow t = \log_{1.10} 2$$

Regola sul cambio di base

Come facciamo a calcolare questo logaritmo, essendo impossibile includere gli infiniti logaritmi nelle calcolatrici? É spesso indispensabile per il loro calcolo l'applicazione della seguente regola:

$$\log_{1.10} 2 = \frac{\log_e 2}{\log_e 1.10} = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1.10}$$

In generale:

$$\forall q \in \mathcal{R} \ \log_a b = \frac{\log_q b}{\log_q a}$$

5.2.1 Il numero di Nepero

Vedi Paragrafo 8.2.2.

Capitolo 6

Limiti

6.1 Concetto di limite

6.1.1 Definizione di limite

Si può definire il limite come il valore L che assume una generica funzione $f(x)$ al tendere di x ad un valore prefissato x_0.

Definizione analitica

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, : \quad \text{se } a - \delta < x < a + \delta \Longrightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \qquad x \neq a$$

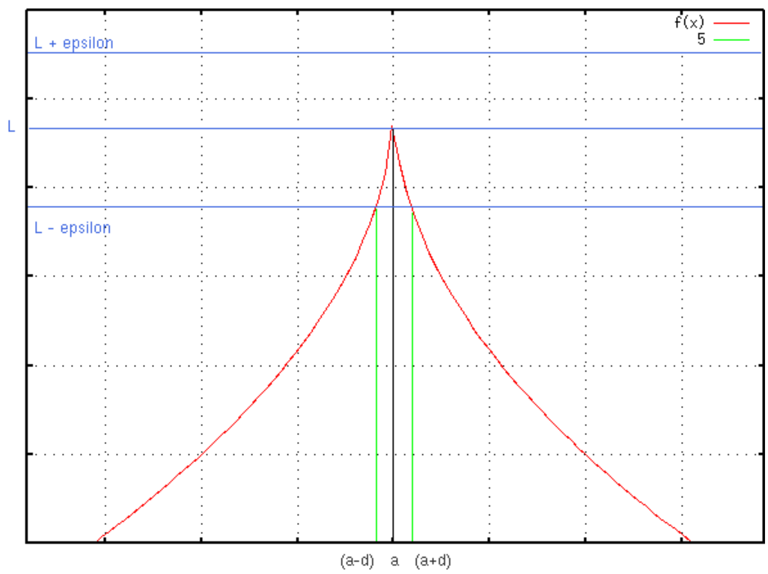


Figura 6.1: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Applicazione della definizione

Per verificare che

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

devo:

- Fissare un valore molto piccolo per ε, per esempio $\varepsilon = \frac{1}{10}$;
- Cercare un valore δ : se $2 - \delta < x < 2 + \delta \Longrightarrow 4 - \frac{1}{10} < x < 4 + \frac{1}{10}$;

$$\text{assumendo } x < 2 + \delta \Longrightarrow x^2 < (2+\delta)^2 \qquad x^2 < 4 + 4\delta + \delta^2$$

$$\begin{cases} x^2 & < & 4 + \frac{1}{10} \\ x^2 & < & 4 + 4\delta + \delta^2 \end{cases} \Longrightarrow 4\delta + \delta^2 = \frac{1}{10}$$

$$\delta < 1 \Longrightarrow \delta^2 < \delta$$

$$\begin{cases} 4\delta + \delta^2 & < & 4\delta + \delta \\ 4\delta + \delta^2 & = & \frac{1}{10} \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{10} < 5\delta$$

Deduzione: per $\delta = \frac{1}{50}$ risulta $4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon$. É importante notare che il δ trovato non é il valore massimo per il quale si verifica quanto descritto nella definizione di limite.

6.1.2 Applicazioni del concetto di limite

Verifica della continuità della funzione

Per definizione

- f si dice *continua* in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;
- f si dice *continua in un intervallo* I se $\forall x_0 \in I \; \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Per quanto riguarda la continuità delle funzioni si veda il capitolo 7

6.2 Calcolo dei limiti

6.2.1 Regole generali

Operazioni tra limiti

Sia $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, sono valide le seguenti affermazioni:

- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$;
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = L - M$;
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$;
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (valido solo se $M \neq 0$).

Altre proprietà

Le seguenti proprietà dei limiti sono dimostrabili per definizione:

- $\lim_{x \to a} x = a$;
- $\lim_{x \to a} c = c$ (dove c é costante).

Limiti di polinomi

Sia $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ un polinomio, ovvero un insieme di potenze intere di x moltiplicate per dei coefficienti. Usando i risultati dei due paragrafi precedenti, si vede che é valida la seguente affermazione:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

Sia $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ una funzione razionale, ovvero un quoziente di polinomi, é valida la seguente affermazione:

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = \frac{R(x_0)}{Q(x_0)} = R(x_0)$$

Le funzioni razionali sono continue in $\{Q(x) \neq 0\}$

6.3 Limiti destri e limiti sinistri

Dato il limite

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

É possibile analizzare il valore limite della funzione f sia per soli i valori di x maggiori di a (limite destro) che per i soli valori di x minori di a (limite destro):

- Limite sinistro: $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$;
- Limite destro: $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$;

Se il limite destro ed il limite sinistro di una funzione $f(x)$ in un punto x_0 non esistono o sono differenti si dice che:

$$\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$$

6.4 Limiti infiniti

Il valore limite di una funzione può essere infinito:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

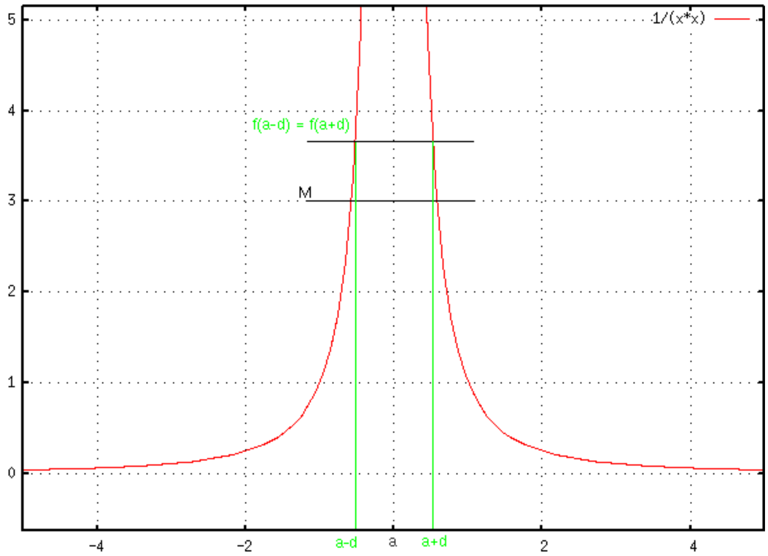


Figura 6.2: Limite infinito

Esempio di limite infinito

La funzione $f(x) = 1/x^2$ non é definita per $x = 0$. Per valori tendenti a 0 la funzione assume valori sempre maggiori.

É possibile definire un valore $M > 0$ e constatare che, per quanto grande M possa essere, esisterà sempre un valore δ vicino a x_0 tale che $f(\delta) > M$.

$$\forall M > 0 \, \exists \, \delta > 0 \; : \; a - \delta < x < a + \delta \Longrightarrow f(x) > M$$

Per estensione questo concetto é applicabile anche per definire un nuovo limite pari a $-\infty$

6.4.1 Limiti destro e sinistro con segni diversi

In alcune situazioni, nelle quali $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$, é possibile che i limiti destro e sinistro siano rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$ o, viceversa, $-\infty$ e $+\infty$.

Esempio 1

La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, comunemente nota come *iperbole* e visibile in figura 6.4.1

É interessante notare che il limite della funzione può essere interpretabile come limite del quoziente di due funzioni distinte:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{L}{M}$$

$$\lim_{x \to 0} 1 = L \qquad \lim_{x \to 0} x = M$$

In questo genere di situazioni é possibile generare dicendo che se $L \neq 0$ e $M = 0$, allora

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty$$

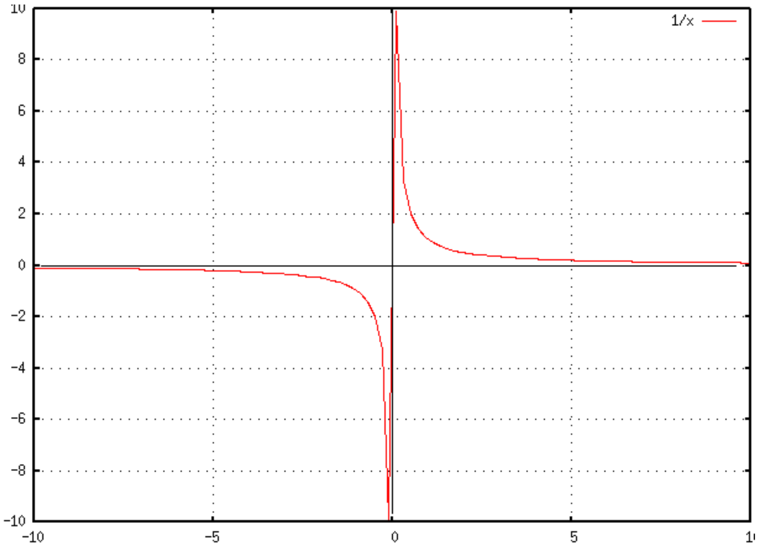


Figura 6.3: Limite infinito con segni opposti

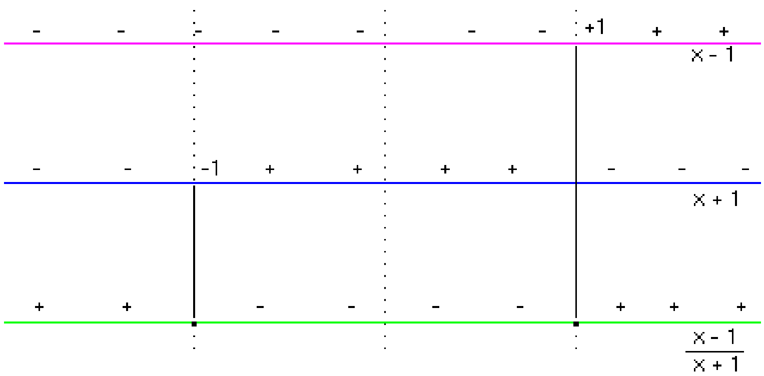
Mentre $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ in base al segno.

Esempio 2

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x+1}$$

$$\lim_{x \to 1} (x-1) = L = 2 \qquad \lim_{x \to 1} (x+1) = M = 0$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{|x+1|} = +\infty$$



Quindi

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x-1}{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty$$

Capitolo 7

Continuità

7.1 Definizione di continuità

Una funzione $f(x)$ si dice continua in un punto x_0 se si verificano le seguenti condizioni:

1. $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$;
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq \infty$;

7.1.1 Non esiste il limite

Una funzione discontinua

Data la funzione $f(x)$ (vedi figura **??**)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

É possibile dimostrare che la funzione non é continua in $x = 0$, poichè

a. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

b. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

Dato che il limite destro della funzione é diverso dal limite sinistro, la funzione non é continua

La funzione parte intera di x

Questa particolare funzione ritorna per ogni x in ingresso il più grande intero minore o uguale a x (vedi figura 7.1.1).

$$f(x) = [x] = max\{n \in \mathcal{Z} \ : \ n \leq x\}$$

Alcuni valori della funzione:

- $[3.5] = 3$

- $[2.2] = 2$
- $[-3.2] = -4$
- $[-\pi] = -4$

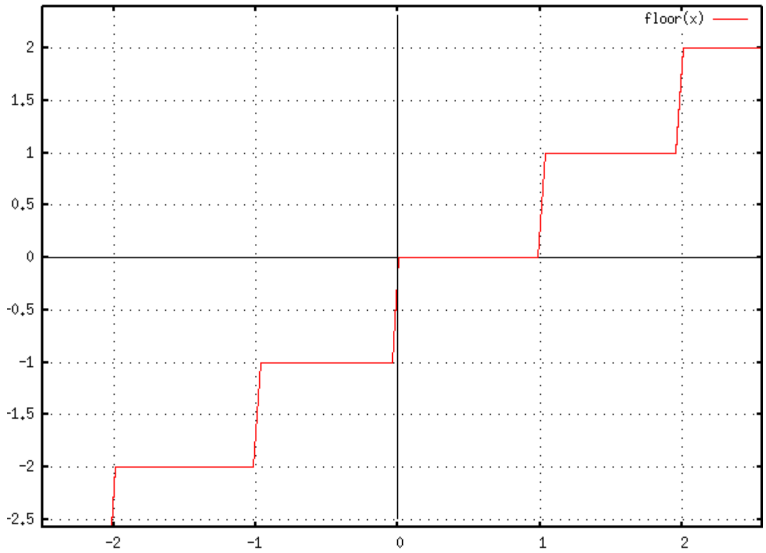


Figura 7.1: $f(x) = [x]$

La funzione non é continua:

$$\forall x_0 \in \mathcal{Z} \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

7.1.2 Il limite $\lim_{x \to a} f(x)$ esiste ma é diverso da $f(a)$

$$f(x) = [x] + [-x]$$

Alcuni valori della funzione

- $f(1.5) = [1.5] + [-1.5] = -1$
- $f(-4.71) = [-4.71] + [4.71] = -1$
- $f(0) = [0] + [0] = 0$
- $f(12) = [12] + [-12] = 0$

$$\forall x \in \mathcal{Z}\ f(x) = 0$$
$$\forall x \in (\mathcal{R} \setminus \mathcal{Z})\ f(x) = 1$$

La funzione non é continua poichè, sia $x_0 \in \mathcal{Z}$:

a. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \Longrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x)$

b. $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

7.1.3 Il limite esiste ma é ∞

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad x \neq 0$$

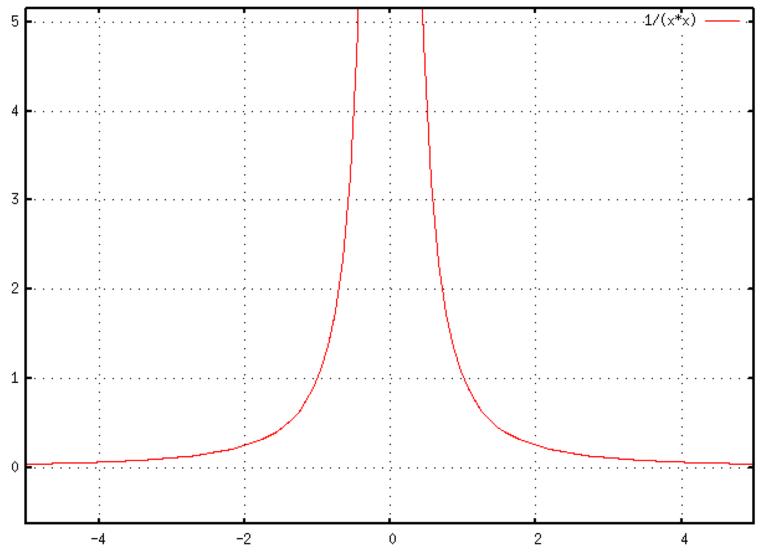


Figura 7.2: $f(x) = \frac{1}{x^2}$

La funzione non é definita in $x = 0$, dove:

- Il limite esiste (vedi figura 7.1.3;
- $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

7.2 Funzioni particolari

7.2.1 Continuità di funzioni composte

Sia $g \circ f$ una generica funzione composta definita tramite

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

Se f é continua nel punto x_0 e se g é continua nel punto $y_0 = f(x_0)$, allora $g \circ f$ é continua in x_0.

Per estensione, se f é continua per ogni x in cui é definita e g é continua per ogni y in cui é definita, allora $g \circ f$ é continua per ogni x in cui é definita.

7.2.2 Continuità di funzioni inverse

Se f é continua e iniettiva nell'intervallo I, la funzione inversa f^{-1} é continua nell'immagine (codominio) di f

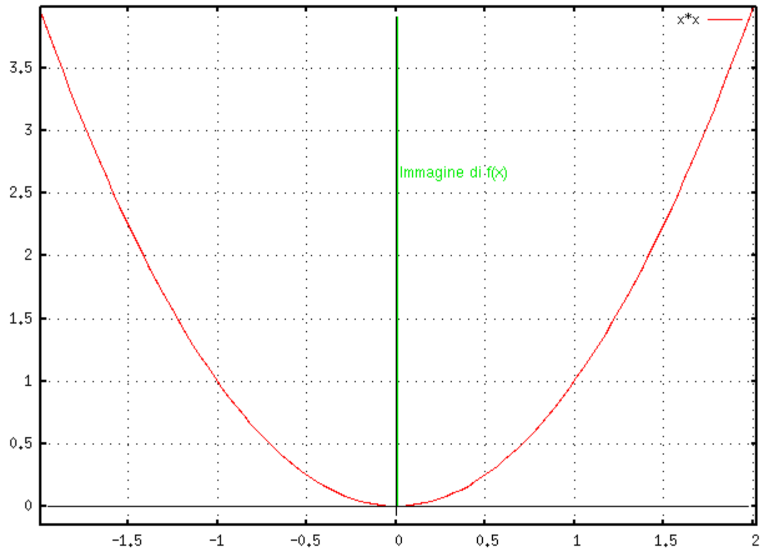


Figura 7.3: Continuità di funzioni inverse

Esempio

$$f(x) = x^2$$

la funzione non é iniettiva, ma la posso rendere comunque invertibile considerando come dominio il solo $\mathcal{R}_+$. Comunque sia il codominio di $f(x)$ é $\mathcal{R}_+$.

La funzione inversa, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ha il dominio uguale al codominio di $f(x)$, ed in esso é continua.

7.3 Teorema dei valori intermedi

Sia f una funzione *continua* nell'intervallo $[a, b]$, fissato un qualunque valore c compreso tra $f(a)$ e $f(b)$ esiste almeno un punto x_0 compreso tra a e b, tale che $f(x_0) = c$

$$\text{se } f(x) \text{ é continua in } [a, b]\ \exists c \in [f(a), f(b)]; x_0 \in [a, b]\ :\ c = f(x_0)$$

7.3.1 Osservazioni al teorema dei valori intermedi

É essenziale che $f(x)$ sia continua!

$$f(x) = [x]$$

$$f(0) = 0 \qquad f(1) = 1$$

Se fisso $c \in]0, 1[\ \nexists x\ :\ [x] = c$

Capitolo 8

Derivazione

8.1 Concetto di Derivata

8.1.1 Definizione

Si dice *derivata di una funzione* $f(x)$ in un punto generico appartenente alla funzione ed avente ascissa $x = x_0$ il valore che rappresenta la pendenza del grafico di $f(x)$ in $x = x_0$, ovvero il valore del coefficiente angolare della retta tangente a $f(x)$ in $x = x_0$.

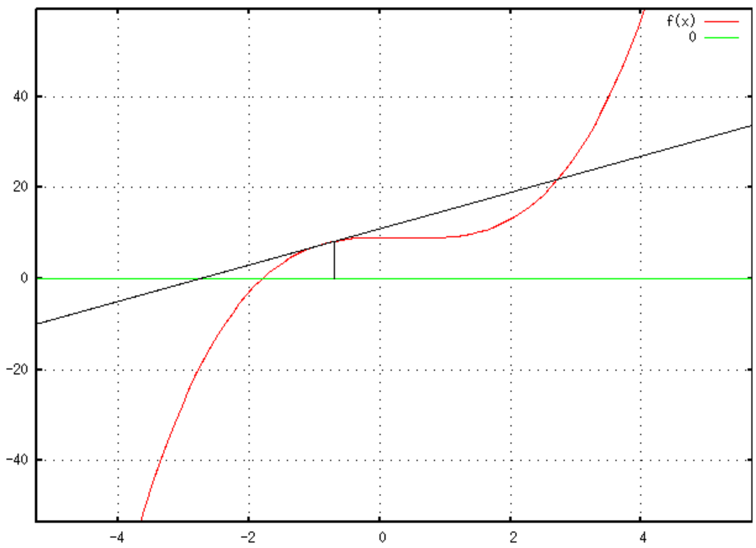


Figura 8.1: Retta tangente ad una funzione $f(x)$

8.1.2 Aspetti teorici

Sfortunatamente non é possibile identificare una retta passante per un solo punto, poichè per un punto passano infinite rette.

Per il calcolo di una derivata si ricorre quindi alla definizione di un nuovo punto avente ascissa x_1 ed appartenente alla funzione, per il quale sia possibile calcolare una retta secante a $f(x)$.

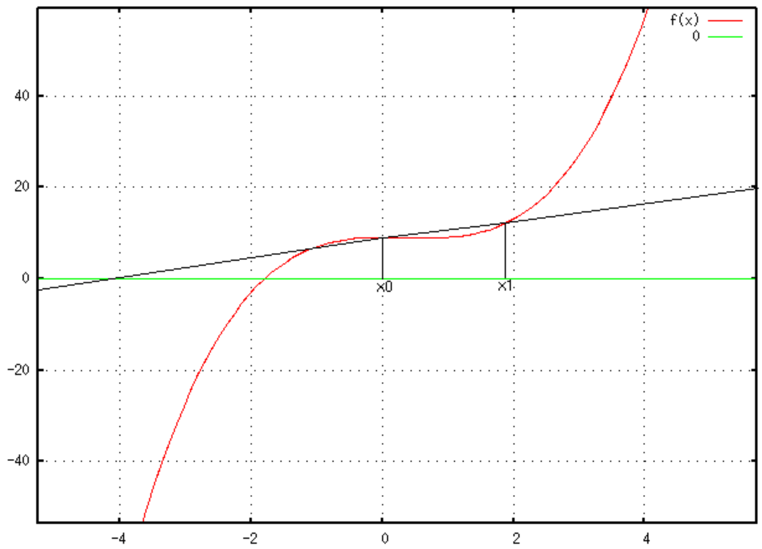


Figura 8.2: Retta secante ad una funzione $f(x)$

Il coefficiente angolare della retta secante sarà il seguente:

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

A questo punto é possibile approssimare il valore di pendenza della funzione calcolando il coefficiente angolare delle rette passanti per i due punti, assumendo che la distanza tra x_0 e x_1 sia sempre minore. Per fare questo si ricorre al concetto di limite, definendo la derivata di $f(x)$ come:

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

8.1.3 Notazioni

Esistono altri modi per scrivere la definizione di derivata:

- Essendo $f(x_1) - f(x_0)$ l'incremento della y, può essere sostituito da Δy;
- Essendo $x_1 - x_0$ l'incremento della x, può essere sostituito da Δx oppure, in base alla convenzione, da h;

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Per ragioni storiche esistono diverse notazioni per esprimere simbolicamente il concetto di derivata:

1. Derivata:
   a. $f'(x)$
   b. $\frac{dy}{dx}$
   c. $\frac{d}{dx} \cdot f(x)$
   d. $D(f)$
2. Derivata in un punto:
   a. $f'(x_0)$
   b. $\frac{d}{dx}f(x)\Big|_{x=x_0}$

8.1.4 Definizione di una funzione derivata

Se $\forall x_0 \in \mathcal{R} \; \exists \; f'(x_0)$, é possibile definire una funzione

$$x \longrightarrow f'(x)$$

a partire dalla definizione di derivata. La funzione in questione si dice appunto *funzione derivata* e descrive l'andamento del coefficiente angolare delle rette tangenti alla funzione $f(x)$ al variare di x, ovvero la velocità di cambiamento di $f(x)$ al variare di x.

Naturalmente é possibile anche derivare la derivata di una funzione, ottenendo così una *derivata seconda*

8.1.5 Alcune applicazioni della derivata

Analisi di funzioni

Si supponga di voler analizzare l'andamento grafico di una funzione $f(x)$. Dato che la derivata $f'(x)$ esprime la funzione della pendenza di $f(x)$, possiamo utilizzarla per capire in quali punti la funzione passa da uno stato di decrescenza ad uno stato di crescenza.

Infatti:

- Se $f'(x) > 0$ la pendenza é positiva, quindi la funzione $f(x)$ é crescente;
- Se $f'(x) = 0$ la pendenza é nulla, quindi la tangente é orizzontale;
- Se $f'(x) < 0$ la pendenza é negativa, quindi la fuznione $f(x)$ é decrescente.

Questo é particolarmente evidente dal punto di vista grafico: sia

$$f(x) = x^2 - 7x + 2 \qquad f'(x) = 2x - 7$$

(vedi figura **??**).

Si può notare che nel punto in cui la derivata assume valori positivi la funzione é crescente.

Figura 8.3: Una parabola $f(x)$ e la sua derivata $g(x)$

Applicazioni in fisica

Sia $f(t)$ la posizione di un oggetto al tempo t.

- Secondo la definizione $f'(t)$ rappresenterà la velocità di movimento dell'oggetto nel tempo
- Analogamente $f''(t)$, ovvero la derivata di $f'(t)$, rappresenterà la velocità di incremento della velocità dell'oggetto, chiamata anche *accelerazione*

8.2 Il calcolo di una derivata

É possibile ricavare la derivata a partire da una funzione semplicemente applicando la definizione al caso specifico, come illustrato negli esempi che seguono. Nella sezione 8.2.2 é presente una tabella riportante tutti i casi notevoli di derivazione.

Esempio 1

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \\ f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 \end{aligned}$$

$$= 3x^2$$

Esempio 2

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot(2x+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 2x+h \\
&= 2x
\end{aligned}$$

8.2.1 Funzioni non derivabili

Non tutte le funzioni sono derivabili: esistono delle funzioni per le quali, quando x assume determinati valori, non é possibile calcolare la derivata.

Esempio 1

$$f(x) = |x^2 - 1|$$

La funzione ha due punti angolosi, per i quali nessuna retta è tangente (come si può vedere nelle figure 8.2.1 e 8.2.1)

> Nota Bene
> Per retta tangente non si intende la retta che interseca il grafico in un solo punto, bensì quella che *approssima* il grafico di una funzione f nell'intorno del punto x_0 essendo il limite delle rette secanti

Esempio 2

Sia $f(x) = |x|$. La funzione avrà un punto angoloso per $x = 0$. La derivata, secondo la definizione, sará la seguente:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}
\end{aligned}$$

dato che

$$|h| = \begin{cases} h & \text{per} \quad h > 0 \\ -h & \text{per} \quad h < 0 \end{cases}$$

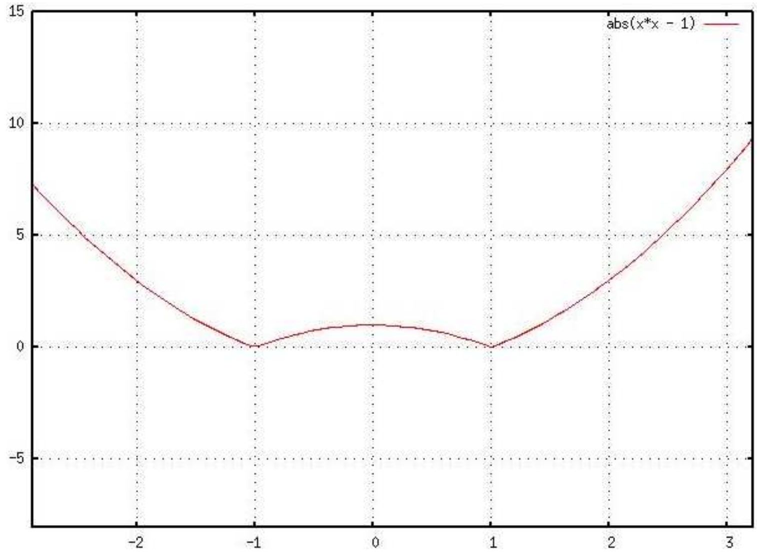


Figura 8.4: $f(x) = |x^2 - 1|$

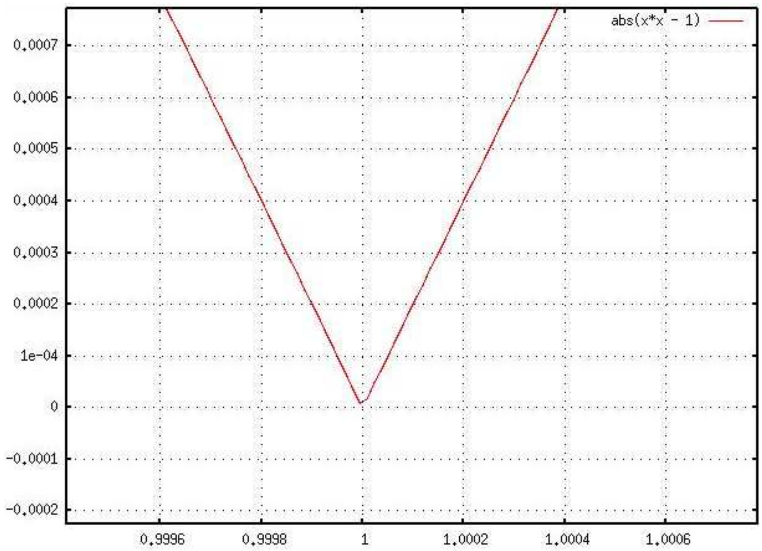


Figura 8.5: Ingrandimento di $f(x) = |x^2 - 1|$

il limite da destra é diverso dal limite da sinistra, quindi non esiste limite ne derivata

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ \text{non esiste} & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Esempio 2

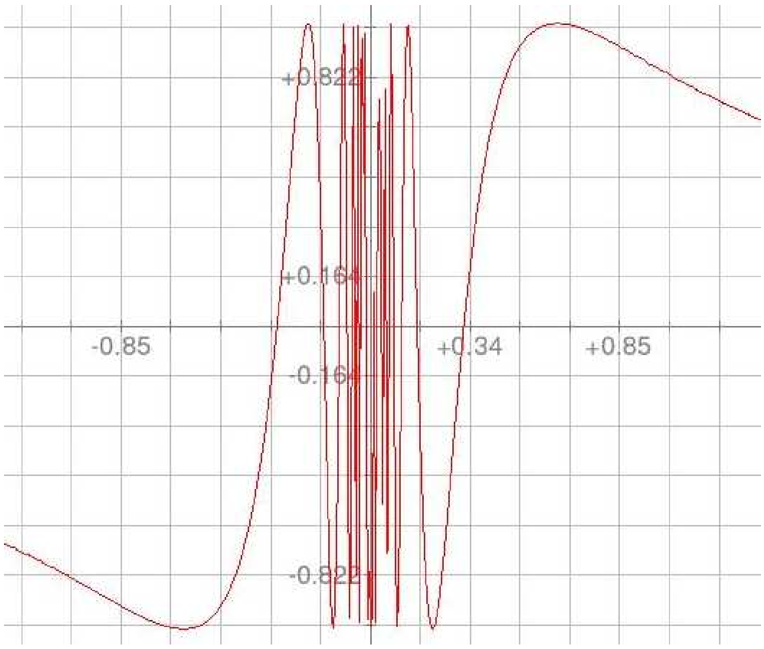


Figura 8.6: $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \textit{per} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{per} \quad x = 0 \end{cases}$$

8.2.2 Regole di derivazione

Regole per le funzioni comuni

1. Se $h(x) = f(x) + g(x)$ allora $h'(x) = f'(x) + g'(x)$ ovvero

$$\frac{\delta}{\delta x}\left[f(x) + g(x)\right] = f'(x) + g'(x)$$

2. Se $h(x) = c \cdot f(x)$ (c = costante) allora $h'(x) = c \cdot f'(x)$ ovvero

$$\frac{\delta}{\delta x}\left[f(x) \cdot c\right] = c \cdot \frac{\delta}{\delta x} f(x)$$

Derivata di prodotto tra funzioni

$$\frac{\delta}{\delta x}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

Derivata di divisione tra funzioni

$$\frac{\delta}{\delta x}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$

Derivata di funzioni composte

$$\left.\frac{\delta}{\delta x} g(f(x))\right|_{x=x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x)$$

Dato $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$

$$y = f(x) \qquad z = g(f(x))$$
$$\frac{\delta}{\delta x} g(f(x)) = \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta z}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta x} = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Derivazione di funzione esponenziale

$$\begin{aligned}
f(x) &= a^x \\
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{a^(x_0 + h) - a^{x_0}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x_0} \cdot a_h - a^{x_0}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x_0}(a_h - 1)}{h} \\
&= a^{x_0} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}
\end{aligned}$$

Dato che a^{x_0} non dipende da h può essere escluso dal calcolo dal limite. Tuttavia avremo:

$$\begin{aligned}
f'(0) &= a^0 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \\
f'(x_0) &= a^{x_0} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \\
&= a^{x_0} \cdot f'(0)
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'argomento del limite, esso assumerà la classica configurazione $\frac{0}{0}$. Non possiamo determinare il valore di tale limite se non mediante elaborazione elettronica, per la quale si ha

- $\lim_{h\to 0} \frac{1^h - 1}{h} = 0$
- $\lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h} \simeq 0.69$

- $\lim_{h\to 0} \frac{3^h-1}{h} \simeq 1.09$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x} 2 \bigg|_{x=x_0} &\simeq 0.69 \cdot 2^{x_0} \\ \frac{\delta}{\delta x} 3 \bigg|_{x=x_0} &\simeq 1.97 \cdot 3^{x_0} \end{aligned}$$

Teorema

Esiste un numero a tale che

$$\frac{d}{dx} a^x \bigg|_{x=0} = 1$$

Tale numero é detto *numero di nepero* e si simboleggia con e. Per successive approssimazioni il suo valore é:

$$e \simeq 2.71$$

Ne segue che

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \qquad \forall\ x.$$

Tabella delle derivate

$f(x)$	$f'(x)$
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
x^n	nx^{n-1}
	valido $\forall n \in \mathcal{R}$
e^x	e^x
$\log(x)$	$1/x$

8.3 Massimi e minimi

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo I, e sia x_0 un generico punto appartenente all'intervallo in questione.

a. x_0 é un punto di massimo *globale* per f sull'intervallo I se $\forall x \in I\ f(x_0) > f(x)$

b. x_0 é punto di massimo *locale* se esiste $h > 0$ tale che x_0 é punto di massimo per f su $[x0 - h, x_0 + h]$

c. x_0 é punto di minimo *globale* per f su I se $\forall x \in I\ f(x_0) \geq f(x)$

d. x_0 é punto di minimo *locale* se esiste $h > 0$ tale che x_0 é punto di minimo per f su $[x_0 - h, x_0 + h]$

Come si può vedere in figura 8.3, il valore del massimo (o del minimo) locale può variare in base all'intervallo I (nell'esempio, dato che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, il massimo assoluto corrisponderà con il valore della funzione nell'estremo sinistro dell'intervallo disegnato in verde)

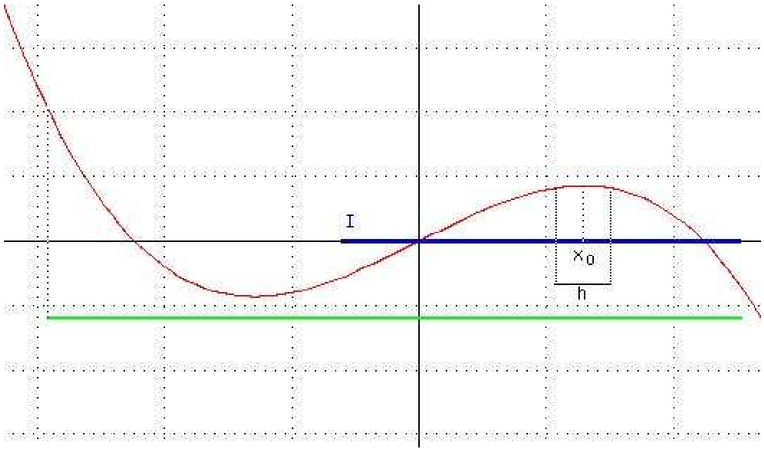


Figura 8.7: Un punto di massimo locale

In alcuni casi non esistono punti di minimo o massimo locale: é il caso della funzione $f(x) = x$ (bisettrice), per la quale il punto di massimo su un qualsiasi intervallo $[a, b]$ é sempre l'estremo destro dell'intervallo , cioè b

8.3.1 Principio di Fermat

Se $f(x)$ é derivabile in x_0, e x_0 é un punto di minimo locale o di massimo locale, allora $f'(x_0) = 0$.

Per riconoscere i punti di minimo o massimo locale cerco i punti in cui $f'(x_0) = 0$

Esempio

$$A(x) = 2x(8 - x^2) = 16x - 2x^3$$
$$A'(x) = 16 - 6x^2$$
$$A'(x) = 16 - 6x^2 = 0$$
$$x^2 = \frac{8}{3} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$$

Dimostrazione del principio di Fermat

Sia x_0 un punto di massimo locale.

$$\forall x_1 \in [x_0 - h, x_0 + h]\; f(x_0) \leq f(x_1)$$

La derivata di $f(x)$ si definisce come

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

a. Limite destro:

Per calcolare il limite destro si utilizza un x_1 tale che $x_0 < x_1 < x_0 + h$.
Si calcola il segno del rapporto incrementale, da cui deriverà quello della derivata

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)(\leq 0)}{x_1 - x_0(>0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq 0$$

Deduzione: il limite destro della derivata é minore o uguale a zero

b. Limite sinistro:

Analogamente al limite destro, si utilizza un x_1 tale che $x_0 - h < x_1 < x_0$.

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)(\leq 0)}{x_1 - x_0(<0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq 0$$

Deduzione: il limite sinistro della derivata é minore o uguale a zero

Dato che

- La funzione é derivabile solo se il limite esiste;
- Il limite esiste solo se i limiti destro e sinistro sono uguali

Le condizioni si verificano contemporaneamente solo se il valore della derivata é zero.

Casi particolari

La funzione $f(x) = |x|$ costituisce un caso particolare, poichè $x = 0$ è un punto di minimo locale (anche globale), però in $x = 0$ la funzione f non è derivabile, ossia $f'(0)$ non esiste.

In questo caso il principio di Fermat non é applicabile. Nella sua definizione é specificato che la funzione deve essere derivabile nel punto x_0.

Considerazioni

- Se x_0 é punto di massimo o minimo e $f'(x_0)$ esiste, allora $f'(x_0) = 0$
- Se $\forall x \in I\ f'(x) > 0$ allora $f(x)$ é crescente in I
- Se $\forall x \in I\ f'(x) < 0$ allora $f(x)$ é decrescente in I

É importante tenere presente che le considerazioni non sono valide bidirezionalmente, poichè:

- $f'(x_0)$ potrebbe essere nullo anche se la funzione é crescente: $f(x) = x^3$ per $x = 0$
- Un intervallo su cui f è crescente potrebbe comprendere dei punti per i quali f ha pendenza nulla, ossia $f'(x_0) = 0$;
- Analogamente per le funzioni decrescenti.

8.3.2 Teorema di Weiestraß (o dei valori estremi)

Se una funzione f é continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ allora esistono due punti $x_M, x_m \in [a, b]$ tali che

$$\forall x \in [a, b] \qquad f(x_m) \geq f(x) \geq f(x_M)$$

É bene tenere presente che possono comunque esistere funzioni che hanno più punti di minimo o di massimo.

L'intervallo deve essere chiuso

Si supponga che la funzione f sia continua su un'intervallo aperto (a, b), in violazione delle ipotesi poste dal teorema:

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{definita su } (0, 1)$$

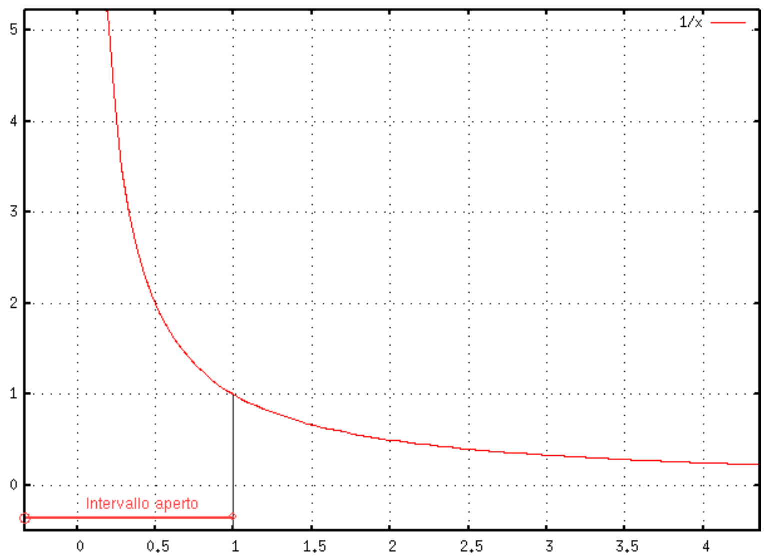


Figura 8.8: $f(x) = \frac{1}{x}$

- La funzione é continua $\forall x \in (0, 1)$ (notare che il punto $x = 0$ viene automaticamente escluso dall'intervallo);
- La funzione non ha massimo: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{0} = +\infty \Longrightarrow \nexists x_M$;
- La funzione non ha minimo: $\nexists x_m \in (0, 1) \ : \ f(x_m) = 1$ poichè 1 non é nell'intervallo.

Naturalmente possono esistere funzioni continue in un intervallo aperto per le quali esistono massimi e minimi (vedi figura 8.3.2), ma il teorema non può assicurare che questo accada.

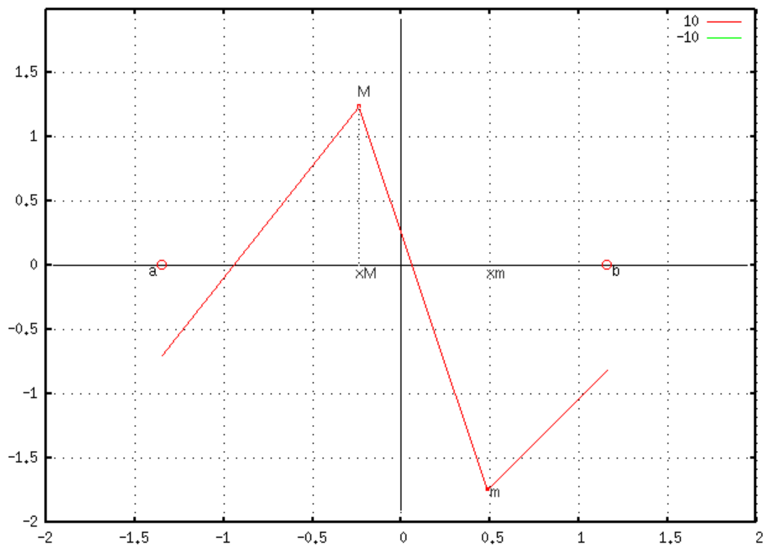


Figura 8.9: Minimi e massimi con intervallo aperto

L'intervallo deve essere limitato

Si supponga che $f(x)$ sia continua in $[1, +\infty)$:

$$f(x) = x \qquad \text{definita per } \{x \geq 1\}$$

La funzione non ha un massimo perchè non é limitata.

Definizione di funzione limitata

Una funzione $f(x)$ si dice limitata su un intervallo I se

$$\exists m < M \ : \ \forall x \in I, \ \ m \leq f(x) \leq M$$

Sia data la seguente funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{definita per } [1, +\infty)$$

- La funzione é continua;
- La funzione é limitata ($f(x)$ é compresa tra 1 e 0 $\forall x \in [1, +\infty)$);
- La funzione *non ha un minimo*

Applicazione del teorema

Per ricercare i minimi ed i massimi di una funzione f continua in $[a, b]$

- Si cercano i punti $x \in (a, b)$ per i quali $f'(x) = 0$ [1]

[1] I punti di massimo vannno ricercati nell'intervallo aperto, poichè se il massimo fosse in un punto estremo, esso non sarebbe un massimo locale.

- Si controllano gli estremi di definizione dell'intervallo;
- Si controllano i punti per i quali la derivata prima non esiste (in caso di cuspidi, punti angolosi);
- Per tutti i punti citati si osservano i valori della funzione determinando massimi e minimi.

  Esempio (calcoli abbreviati)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= |x^2-2x-3|-(x^3+1) \qquad \text{definita in } [-2,2] \\
&= \begin{cases} x^2-2x+3-x^3-1 & \text{se } x^2-2x-3>0 \\ -x^2+2x-3-x^3-1 & \text{se } x^2-2x-3\le 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} -x^3+x^2-2x+2 & \text{se } x\le -1 \\ -x^3-x^2+2x-2 & \text{se } -1<x\le 2 \end{cases} \\
f'(x) &= \begin{cases} -3x^2+2x-2 & \text{se } x<-1 & \longrightarrow \text{Non si annulla mai} \\ -3x^2-2x+2 & \text{se } -1<x<2 & \longrightarrow \text{Si annulla per } x=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3} \end{cases}
\end{aligned}
$$

  I punti da esaminare saranno

  - $x = \frac{1\pm\sqrt{7}}{7}$
  - Gli estremi dell'intervallo $[-2, 2]$
  - I punti angolosi (per $|x^2 - 2x - 3|$ avremo due punti angolosi, dei quali solo $x = -1$ é interno all'intervallo $[-2, 2]$

8.3.3 Teorema di Lagrange (o del valor medio)

Se f é continua sull'intervallo $[a, b]$ ed é derivabile in (a, b), allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Nb: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ é il coefficiente angolare della retta passante per i punti P e Q (vedi figura 8.3.3)

Dal punto di vista grafico, il teorema afferma che esiste almeno un punto $x = c$ tale che la tangente passante per il punto $(c, f(c)$ è parallela alla secante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Dimostrazione del teorema

Sia $f(x)$ la funzione alla quale si vuole applicare il teorema, definita nell'intervallo $[a, b]$. É possibile definire la retta passante per i punti avente ascissa pari agli estremi dell'intervallo:

$$\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} = \frac{(y-y_0)}{(y_1-y_0)} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}$$

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$$

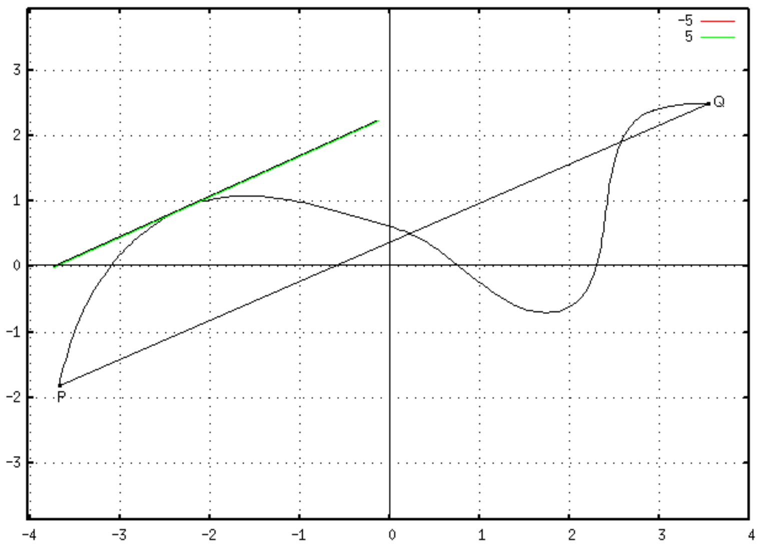


Figura 8.10: Teorema di lagrange

Si definisce quindi la funzione ausiliaria $G(x)$ data dalla differenza tra la funzione e la retta appena definita

$$G(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \right]$$

- $G(x)$ é continua $\forall x \in [a, b]$, quindi esistono minimi e massimi;
- $G(a) = G(b) = 0$, poichè la differenza tra le due funzioni in $x = a$ e $x = b$ é sicuramente nulla;
- Ogni punto c per cui ci sia un minimo o un massimo interno all'intervallo avremo $G'(c) = 0$

Applicazioni del teorema

É possibile utilizzare il teorema per dimostrare che

$$\forall x \in (a, b)\ f'(x) > 0 \Longrightarrow f \text{ é crescente } \forall x \in [a, b]$$

Una funzione é crescente in un intervallo se, presi due punti $x_1 < x_2$ appartenenti all'intervallo si ha $f(x_1) < f(x_2)$

$$x_1, x_2 \in [a, b] \ : \ x_1 < x_2 \qquad \exists c \in (x_1, x_2) \ : \ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0$$

Sapendo che $x_2 - x_1 > 0$ (perchè $x_1 < x_2$) allora avremo sicuramente $f(x_2) - f(x_1) > 0$, che é proprio la definizione di crescenza

8.3.4 Applicazione di minimi e massimi

Sia $A(x) = 16x - 2x^3$. Passando per la derivata $A'(x) = 16 - 6x^2$ é possibile capire:

- Per quali punti la funzione é crescente e decrescente;
- Quali sono i punti di massimo locale e di minimo locale per la funzione.

$$A'(x) = 16 - 6x^2$$
$$A'(x) = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$$

Ho due punti per i quali $A'(x) = 0$:

a. $x = \frac{8}{3}$

b. $x = -\frac{8}{3}$

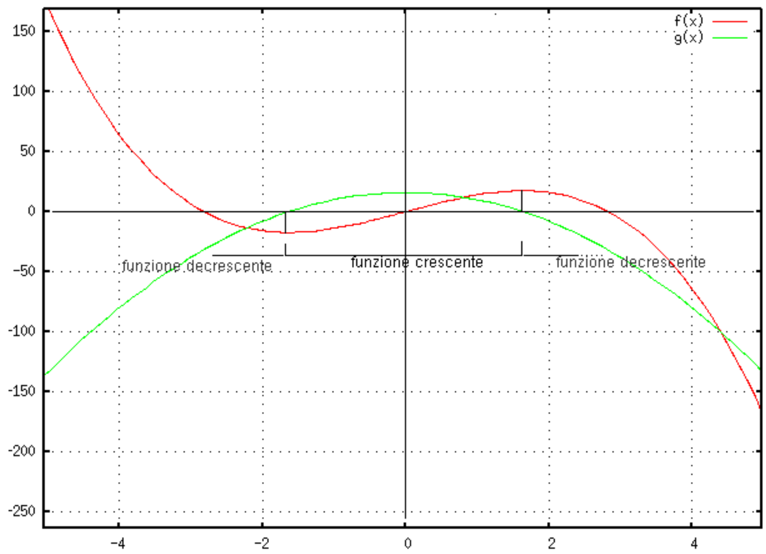


Figura 8.11: Le due funzioni a confronto

Quindi se

a. $f'(x_0) = 0$

b. $f'(x) > 0$ per $x < x_0$ vicino a x_0

c. $f'(x) < 0$ per $x > x_0$ vicino a x_0

allora x_0 é un punto di massimo locale

8.4 Concavità

- Una funzione f é convessa in un intervallo (a,b) se $f'(x)$ é crescente in (a,b);
- Una funzione f é concava in un intervallo (a,b) se $f'(x)$ é decrescente in (a,b).

In generale, se esiste $f''(x)$ allora:

- $\forall x \in (a,b)\ f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ convessa in (a,b);
- $\forall x \in (a,b)\ f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ concava in (a,b).

8.4.1 Primo teorema sulle funzioni convesse

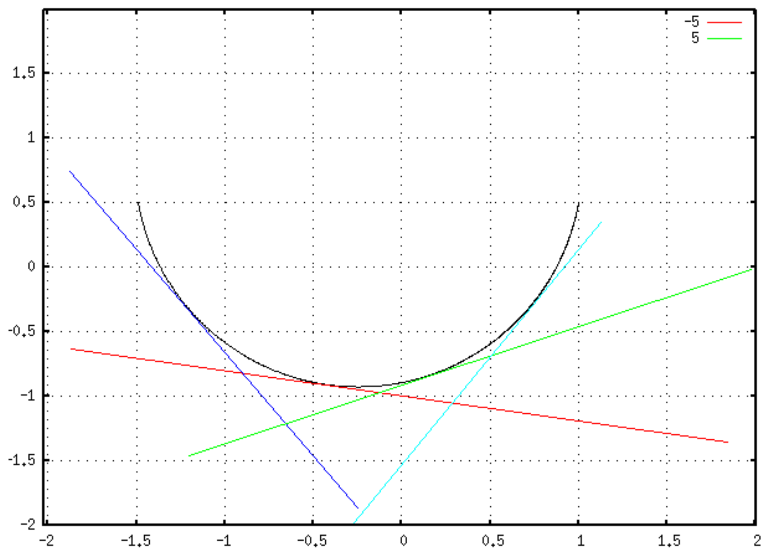


Figura 8.12: Il grafico della funzione convessa sta al di sopra di tutte le sue tangenti

Se f é una funzione convessa in un intervallo $[a,b]$, i suoi valori saranno sempre maggiori rispetto a quelli di una qualsiasi retta ad essa tangente nell'intervallo.

$$\forall x, x_0\ f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ciò si può dimostrare usando il Teorema di Lagrange sull'intervallo $[x_0, x]$ (se $x > x_0$) o $[x, x_0]$ (se $x < x_0$).

8.4.2 Secondo teorema sulle funzioni convesse

f é concava in un intervallo $[a,b]$ se e solo se l'epigrafico[2] di f é una *figura concava*, ovvero se un qualsiasi segmento tracciato tra due punti appartenenti

[2]insieme dei punti che stanno sopra il grafico

all'intervallo assume sempre valori maggiori rispetto alla funzione (vedi figura 8.4.2)

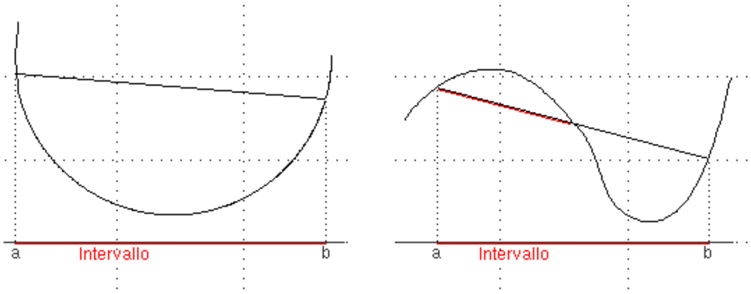


Figura 8.13: Funzione convessa e funzione non convessa

8.4.3 Punto di flesso

Si dice *punto di flesso* il punto in cui la funzione passa da concava a convessa o viceversa. Per definizione, sia ε un numero piccolo a piacere:

- x_0 é punto di flesso se la funzione é concava per $x = x_0$ e convessa per $x = x_0 + \varepsilon$;
- x_0 é punto di flesso se la funzione é convessa per $x = x_0$ e concava per $x = x_0 + \varepsilon$.

Se per $x = x_0$ la funzione $f(x)$ ha un punto di flesso, allora si avrà $f''(x) = 0$.

Appendice A

GNU Free Documentation License

Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document free in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of copyleft, which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The

Document, below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as **you**. You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A **Modified Version** of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A **Secondary Section** is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The **Invariant Sections** are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The **Cover Texts** are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A **Transparent** copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not Transparent is called **Opaque**.

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The **Title Page** means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, Title Page means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

A section **Entitled XYZ** means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as **Acknowledgements**, **Dedications**, **Endorsements**, or **History**.) To **Preserve the Title** of such a section when you modify the Document means that it remains a section Entitled XYZ according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept

compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an

Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.

B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.

C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.

D. Preserve all the copyright notices of the Document.

E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.

F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.

G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.

H. Include an unaltered copy of this License.

I. Preserve the section Entitled History, Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled History in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.

J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the History section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.

K. For any section Entitled Acknowledgements or Dedications, Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.

L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.

M. Delete any section Entitled Endorsements. Such a section may not be included in the Modified Version.

N. Do not retitle any existing section to be Entitled Endorsements or to conflict in title with any Invariant Section.

O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled Endorsements, provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties–for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled History in the various original documents, forming one section Entitled History; likewise combine any sections Entitled Acknowledgements, and any sections Entitled Dedications. You must delete all sections Entitled Endorsements.

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an aggregate if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled Acknowledgements, Dedications, or History, the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License or any later version applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

> Copyright ©YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled GNU Free Documentation License.

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the with...Texts. line with this:

> with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.