Lezioni di Geometria e Algebra Lineare

Ingegneria Gestionale - I Modulo - a.a. 2002/2003

(Giambattista Marini)

Queste note costituiscono gli appunti del I modulo di geometria e sono rivolte agli studenti che seguono attivamente il corso.

Capitolo 1.

§1. Introduzione ai sistemi lineari.

L'esempio più elementare di sistema lineare è il sistema di una equazione in una incognita

$$a \cdot x \;=\; b\,, \qquad a\,,\, b \,\in\, \mathbb{R}\,.$$

In questo caso la discussione delle soluzioni è molto semplice: ci sono tre possibilità

i) se $a \neq 0$ esiste una unica soluzione $x = \frac{b}{a}$;

ii) se $a = b = 0$ ogni valore di x è una soluzione del sistema;

iii) se $a = 0$ e $b \neq 0$ il sistema non ha soluzioni.

Esempio. Discutiamo le soluzioni del sistema lineare di una equazione in due incognite

$$(1) \qquad a \cdot x + b \cdot y \;=\; c\,, \qquad a\,,\, b\,,\, c \,\in\, \mathbb{R}\,.$$

Anche in questo caso l'esistenza di soluzioni dipende dai valori dei coefficienti a, b, c.

Assumiamo $a \neq 0$ e lasciamo allo studente il problema di discutere gli altri casi possibili. Dividendo per a si ottiene

$$x \;=\; \big(c - by\big)/a\,.$$

Pertanto, se $a \neq 0$ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare (1) è

$$(2) \qquad \big\{\, x,\, y \;\big|\; x = (c-by)/a \,\big\}\,.$$

La notazione usata è la seguente: "$\{\,...\,\}$" significa "l'insieme ..." e la barra verticale "|" significa "tale che". In definitiva, (2) si legge dicendo "l'insieme degli x, y tali che $x = (c - by)/a$". Si osservi che y può assumere qualsiasi valore. Per questo motivo, diciamo che y è un *parametro libero* (relativamente alla descrizione data dello spazio delle soluzioni del sistema 1).

Esempio. Studiamo il sistema lineare di due equazioni in due incognite

$$(3) \qquad \begin{cases} a \cdot x + b \cdot y \;=\; \lambda \\ c \cdot x + d \cdot y \;=\; \mu \end{cases}, \qquad a\,,\, b\,,\, c\,,\, d\,,\, \lambda\,,\, \mu \,\in\, \mathbb{R}\,.$$

Se moltiplichiamo la seconda equazione per a e vi sostituiamo $ax = \lambda - by$ (ottenuta dalla prima equazione del sistema) troviamo

$$(4) \qquad (ad - bc) \cdot y \quad = \quad a\mu - c\lambda \, .$$

Si potrebbe obiettare che potremmo aver moltiplicato per zero (se $a = 0$). Vero, comunque l'uguaglianza scritta resta valida.[1] Un calcolo simile mostra che

$$(5) \qquad (ad - bc) \cdot x \quad = \quad d\lambda - b\mu \, .$$

Da (4) e (5) deduciamo quanto segue.

Proposizione. *Se* $\Delta := ad - bc \neq 0$, *esiste una unica soluzione del sistema lineare* (3), *si ha*

$$(6) \qquad x \quad = \quad \frac{d\lambda - b\mu}{ad - bc} \, , \qquad\qquad y \quad = \quad \frac{a\mu - c\lambda}{ad - bc}$$

Dimostrazione. Dividendo sia (4) che (5) per Δ troviamo le espressioni di x ed y che abbiamo scritto. Questo dimostra che c'è al più una soluzione, quella indicata.
L'esistenza è un facile conto: basta sostituire le espressioni trovate nel sistema (3).

□

Resta da studiare il caso $\Delta = 0$. A tal fine osserviamo che se $\Delta = 0$, cioè $ad = bc$, le due funzioni

$$f(x,y) \ := \ ax \, + \, by \qquad \text{e} \qquad g(x,y) \ := \ cx \, + \, dy$$

sono proporzionali: una delle due funzioni è un multiplo dell'altra. Infatti, se assumiamo $ab \neq 0$ (lasciamo allo studente l'esercizio di studiare i rimanenti casi possibili), dividendo la relazione $ad = bc$ per ab troviamo $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$. Posto $k := \frac{d}{b}$, abbiamo

$$cx + dy \quad = \quad k \cdot (ax + by) \, .$$

Ne segue che ci sono due possibilità:

i) $\mu = k\lambda$, in questo caso le due equazioni di (3) si riducono ad una ed abbiamo infinite soluzioni;

ii) $\mu \neq k\lambda$, in questo caso è evidente che il sistema (3) non ammette soluzioni.

Anche nel caso che abbiamo lasciato per esercizio "$ab = 0$" si presenta lo stesso fenomeno: il sistema (3) non ammette soluzioni oppure ne ammette infinite. In definitiva vale la proposizione che segue.

Proposizione. *Se* $\Delta := ad - bc = 0$, *possono verificarsi solo due possibilità:*

i) *esistono infinite soluzioni del sistema (3);*

ii) *il sistema (3) non ammette soluzioni.*

A questo punto ci domandiamo, cosa accade con i sistemi di n equazioni in n incognite, è possibile trovare delle formule che generalizzano (6) e caratterizzare il caso in cui esiste una unica soluzione? Inoltre, come si affronta lo studio dei sistemi lineari in cui il numero delle equazioni può essere diverso da quello delle incognite?

---

[1] Peraltro c'è un altro modo di ottenere la stessa equazione, quello di moltiplicare la prima equazione per c e di sostituirvi $cx = \mu - dy$. Osserviamo che se $a = c = 0$, (4) è l'uguaglianza banale $0 = 0$.

Capitolo 2.

§1. Sistemi lineari e matrici.

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto i sistemi lineari ed abbiamo visto alcune tecniche atte a trovarne le eventuali soluzioni. In questo capitolo, procedendo in maniera più sistematica e formale, spieghiamo un procedimento, l'*algoritmo di Gauss*, che consente di ridurre un qualsiasi sistema lineare dato ad un sistema a scala, e quindi di risolverlo. Cominciamo con l'introdurre un po' di terminologia.

Definizione. Un sistema lineare di m equazioni in n incognite è un sistema del tipo

$$(\star)\qquad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ \dots \ + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \ \dots \ + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \qquad\dots \\ \qquad\dots \\ a_{m,1}x_1 + \ \dots \ + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

dove gli $a_{i,j}$ ed i b_i sono numeri reali, mentre $x_1, \dots, x_n$ sono dei simboli detti *incognite* del sistema.
Una *soluzione* del sistema è una n^{-pla} di numeri $x'_1, \dots, x'_n$ che soddisfano tutte le equazioni.

Definizione. Se i coefficienti (detti anche *termini noti*) $b_1, \dots, b_m$ sono tutti nulli diciamo che il sistema è *omogeneo*.

Definizione. Il *sistema omogeneo associato* al sistema lineare $(\star)$ è il sistema di equazioni

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ \dots \ + a_{1,n}x_n = 0 \\ \qquad\dots \\ \qquad\dots \\ a_{m,1}x_1 + \ \dots \ + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Definizione. Un sistema lineare si dice *compatibile* se ammette soluzioni (una o più), se non ammette soluzioni si dice *incompatibile*.

Definizione. Due sistemi lineari si dicono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni.

Esempio. I sistemi lineari

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + 6y = 17 \\ 8x + 3y = 14 \end{cases}$$

sono equivalenti. Infatti, hanno entrambi $x = 1$, $y = 2$ come unica soluzione.

Esercizio. Risolvere i sistemi dell'esempio precedente.

Esempio 1. I sistemi lineari

$$\mathcal{S}_1 := \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 7 \\ 2x + 5y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 8 \end{cases}, \qquad \mathcal{S}_2 := \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 7 \\ 2x + 5y + 2z = 1 \\ 9x + 14y + 9z = 17 \end{cases}$$

sono equivalenti. Ma non è necessario risolverli per rendersi conto che sono equivalenti: le equazioni di $\mathcal{S}_2$ le abbiamo ricavate da quelle di $\mathcal{S}_1$ (ricopiando le prime due equazioni e sommando, alla terza equazione, la prima equazione più il doppio della seconda), quindi se x', y', z' è una soluzione di $\mathcal{S}_1$, soddisfa anche $\mathcal{S}_2$; viceversa, le soluzioni di $\mathcal{S}_2$ sono soluzioni anche di $\mathcal{S}_1$ perché è possibile ricavare le equazioni di $\mathcal{S}_1$ da quelle di $\mathcal{S}_2$ (basta ricopiare le prime due equazioni e sottrarre, alla terza equazione, la prima equazione più il doppio della seconda).

Passiamo dall'esempio al caso generale.

Definizione. Una *combinazione lineare* delle equazioni $f_1(...) = \lambda_1$, ..., $f_k(...) = \lambda_k$ è un'equazione del tipo $\sigma_1 f_1(...) + ... + \sigma_k f_k(...) = \sigma_1\lambda_1 + ... + \sigma_k\lambda_k$. I numeri $\sigma_1, ..., \sigma_k$ si chiamano *coefficienti* della combinazione lineare.

Esempio. La combinazione lineare di coefficienti 2 e 3 delle equazioni

$$\begin{aligned} 4x + 3y + 5z &= 7 \\ 2x + 4y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

è l'equazione

$$14x + 18y + 16z = 23 ,$$

ottenuta sommando il doppio della prima equazione al triplo della seconda equazione.

Generalizzando quanto visto nell'esempio (1), se modifichiamo un sistema lineare sommando ad una sua equazione una combinazione lineare delle altre, otteniamo un sistema lineare equivalente a quello da cui siamo partiti. Naturalmente, anche l'operazione di moltiplicare un'equazione per una costante non nulla non cambia la classe di equivalenza di un sistema lineare. In definitiva, abbiamo "l'osservazione fondamentale sulla quale si basano i metodi per risolvere un sistema lineare":

Osservazione. La classe di equivalenza di un sistema lineare non cambia se

(2)
- *i)* si moltiplica un'equazione per una costante non nulla;
- *ii)* ad un'equazione si somma una combinazione lineare delle altre;
- *iii)* si scambiano due equazioni tra loro .

Prima di concludere questo paragrafo torniamo al sistema $(\star)$ ed osserviamo che le informazioni che lo identificano sono racchiuse nei numeri $a_{i,j}$ e b_i , numeri che raccoglieremo in delle tabelle ponendo

$$A := \left(a_{i,j}\right) := \begin{pmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{m,1} & ... & a_{m,n} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{A} : = \begin{pmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,n} & b_1 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m,1} & ... & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

Tabelle di questo tipo si chiamano *matrici*.

Definizione. Le matrici A ed $\widetilde{A}$ si chiamano rispettivamente *matrice incompleta* e *matrice completa* associata al sistema lineare $(\star)$.

§2. L'eliminazione di Gauss (E.G.).

L'E.G. per righe (quella per colonne è analoga) è il procedimento che "semplifica" una matrice mediante le seguenti operazioni elementari:

$$(2') \qquad \begin{array}{rl} i) & \text{si moltiplica una riga per una costante non nulla;} \\ ii) & \text{ad una riga si somma una combinazione lineare delle altre;} \\ iii) & \text{si scambiano due righe tra loro.} \end{array}$$

Inciso. La definizione di *combinazione lineare* di righe di una matrice è analoga a quella di combinazione lineare di equazioni di un sistema: la combinazione lineare di coefficienti $\sigma_1, ..., \sigma_k$ delle righe $(c_{1,1} \dots c_{1,n})$, ..., $(c_{r,1} \dots c_{r,n})$ è la riga $(\sum_{t=1}^{r} \sigma_t c_{t,1} \dots \sum_{t=1}^{r} \sigma_t c_{t,n})$.

L'osservazione fondamentale che bisogna tenere sempre presente è la seguente:

Osservazione 3. Consideriamo una matrice $\widetilde{A}$, e trasformiamola eseguendo operazioni del tipo di quelle appena descritte. Chiamiamo $\widetilde{B}$ la matrice che otteniamo. Si ha che i sistemi lineari associati rispettivamente alle matrici $\widetilde{A}$ e $\widetilde{B}$ sono equivalenti.

La dimostrazione di questa osservazione è essenzialmente ovvia: scrivere una matrice non è altro che un modo compatto di scrivere le informazioni che individuano un sistema lineare e le operazioni descritte in $(2')$ non sono altro che la traduzione in termini di questa nuova notazione delle operazioni elementari di cui al punto (2).

Corollario dell'osservazione vista è che possiamo risolvere un sistema lineare applicando il metodo che segue: scriviamo la matrice completa associata al sistema lineare, la semplifichiamo utilizzando le "mosse" previste in $(2')$, risolviamo il sistema lineare la cui matrice completa associata è quella ottenuta mediante la "semplificazione" effettuata. Più avanti vedremo i dettagli di questa procedura, intanto illustriamo qualche esempio concreto.

Esempio. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ 4x + 9y + 3z = 8 \\ 3x + 5y + 2z = 7 \end{cases}.$$

Per risolverlo, il primo passo da fare consiste nello scrivere la matrice completa associata

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

A questo punto operiamo sulla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \sim^{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \sim^{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \sim^{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

dove i passaggi effettuati sono: 1) alla seconda riga abbiamo sottratto il quadruplo della prima ed alla terza abbiamo sottratto il triplo della prima, 2) alla terza riga abbiamo sottratto i quattro terzi della seconda, 3) alla seconda riga abbiamo sommato il triplo della terza, 4) alla prima riga abbiamo sommato la seconda e sottratto il triplo della terza, 5) abbiamo diviso la seconda riga per -3 ed abbiamo moltiplicato la terza riga per tre. Il sistema associato all'ultima matrice che abbiamo scritto è il sistema

$$\begin{cases} 1x + 0y + 0z = 2 \\ 0x + 1y + 0z = -1 \\ 0x + 0y + 1z = 3 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

In virtù dell'osservazione fondamentale (3) quest'ultimo sistema è equivalente a quello da cui siamo partiti, pertanto le soluzioni cercate sono proprio $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$.

Le cose non vanno sempre così bene, se non altro perché potremmo partire da un sistema che ammette infinite soluzioni o che non ne ammette affatto.

Esempio. Consideriamo il sistema lineare

$$x + 3y - 7z = 2 .$$

La matrice completa associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

e non c'è modo di "semplificarla". In compenso le soluzioni di questo sistema sono evidenti: possiamo considerare y e z come parametri liberi e scrivere $x = -3y + 7z + 2$.

Esempio. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 2 \\ 2x + 4y + 10z = 3 \end{cases}$$

La matrice completa associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 10 & 3 \end{pmatrix} .$$

Sottraendo alla seconda riga il doppio della prima troviamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

che è la matrice completa associata al sistema ovviamente incompatibile

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 2 \\ \qquad\qquad 0 = -1 \end{cases}$$

Torniamo alla teoria generale.

Definizione. Una matrice a *scala superiore* è una matrice $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ in cui $\nu(i)$, che per definizione è l'indice massimo ν tale che $a_{i,1} = ... = a_{i,\nu} = 0$, è una funzione strettamente crescente dell'indice di riga i (con l'ovvia eccezione che se una riga è tutta nulla non chiederemo alle successive di avere più di n zeri ...poverine hanno solo n elementi!).

Questo è un esempio di matrice a scala superiore:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -7 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 21 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} .$$

Si osservi che se una matrice A è quadrata ed è a scala superiore, allora è necessariamente triangolare superiore (ossia tutti gli elementi sotto la diagonale principale sono nulli).

Esercizio. Indicare quali matrici tra quelle che seguono sono a scala superiore.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Osservazione. I sistemi lineari la cui matrice completa associata è a scala superiore, che chiameremo *sistemi a scala*, si risolvono rapidamente per sostituzione partendo dall'ultima equazione e "tornando indietro":

Esempio. Il sistema a scala

$$(4) \qquad \begin{cases} 2x + y - 3z + w - s = 2 \\ \qquad\qquad 3z - w + 2s = 3 \\ \qquad\qquad\qquad w + 5s = 10 \end{cases}$$

si risolve nel modo che segue: si considera l'ultima equazione e si considerano come parametri liberi tutte le variabili che seguono w, quindi si scrive

$$w = -5s + 10 ,$$

si sostituisce quanto ottenuto nella penultima equazione e si isola la variabile z (sempre, prendiamo la prima variabile dell'equazione considerata), quindi si scrive

$$z = \big(-7s + 13\big)/3$$

(in questo passaggio non sono apparsi altri parametri liberi oltre s, che abbiamo già considerato) si sostituisce quanto ottenuto nella prima equazione e si isola la variabile x (ripeto, è sempre la prima variabile quella che prendiamo), quindi si scrive

$$x \quad = \quad \big(-y \; - \; s \; + \; 5 \big) \, / \, 2$$

tenendo le eventuali altre[2] variabili, in questo caso solamente la y, come parametri liberi. In definitiva, lo spazio delle soluzioni del sistema (4) è

$$(5) \qquad \left\{ x,\, y,\, z,\, w,\, s \;\middle|\; \begin{array}{lcl} x & = & \big(-y \; - \; s \; + \; 5 \big) \, / \, 2 \\ z & = & \big(-7s \; + \; 13 \big) / 3 \\ w & = & -5s \; + \; 10 \end{array} \right\},$$

dove, lo ripeto, y ed s sono parametri liberi, ovvero sono variabili che possono assumere qualsiasi valore.

L'esempio esposto non ha nulla di particolare, ogni sistema lineare la cui matrice completa associata è a scala superiore si risolve nello stesso modo. L'unica cosa che potrebbe accadere è che l'ultima equazione è qualcosa del tipo "$0 = 3$", in questo caso il nostro sistema lineare è palesemente incompatibile.

Il primo coefficiente non nullo di ogni equazione viene chiamato *pivot*. Si osservi che i parametri liberi sono le variabili che non corrispondono ad un pivot. Nell'esempio considerato i pivot sono $2,\, 3,\, 1$ (coefficienti di $x,\, z,\, w$, rispettivamente della prima, seconda e terza equazione) ed i parametri liberi sono le restanti variabili: y ed s.

Inciso. È opportuno usare i simboli $t_1,\, t_2,\, ...$ per indicare, ed evidenziare, i parametri liberi. In questo modo le soluzioni del sistema dell'esempio vengono scritte nella forma

$$(6) \qquad \left\{ x,\, y,\, z,\, w,\, s \;\middle|\; \begin{array}{lcl} x & = & \big(-t_1 \; - \; t_2 \; + \; 5 \big) \, / \, 2 \\ y & = & t_1 \\ z & = & \big(-7t_2 \; + \; 13 \big) / 3 \\ w & = & -5t_2 \; + \; 10 \\ s & = & t_2 \end{array} \right\}.$$

Visto che sappiamo risolvere i sistemi a scala resta da imparare a ridurre un qualsiasi sistema ad un sistema a scala, ed in virtù dell'osservazione (3), resta da illustrare l'algoritmo che trasforma una qualsiasi matrice in una matrice a scala. Questo algoritmo viene descritto nella prossima dimostrazione e si chiama *algoritmo di riduzione a scala* (ovvero di Gauss).

Proposizione 7. *Sia* $A = \big(a_{i,j}\big) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *una qualsiasi matrice rettangolare. L'E.G. per righe consente sempre di trasformarla in una matrice a scala superiore.*

Dimostrazione. Sia k l'intero più grande tale che la sottomatrice B costituita dalle prime k colonne di A è a scala. Ovviamente k può essere zero (per l'esattezza, $k \neq 0$ se e solo se $a_{2,1} = ... = a_{m,1} = 0$). Se B non ha righe identicamente nulle, A è a scala ed abbiamo concluso. Altrimenti, assumiamo $k < n$ (se $k = n$ la matrice A è già a scala e non c'è

[2] Oltre quelle già considerate.

nulla da dimostrare). Posto r uguale all'indice della prima riga identicamente nulla di B (se $k = 0$ scegliamo $r = 1$), consideriamo $a_{r,k+1}, ..., a_{m,k+1}$. Questi numeri non sono tutti nulli perché altrimenti la sottomatrice delle prime $k+1$ colonne di A sarebbe a scala. A meno di cambiare l'ordine delle righe di indice $r, ..., m$ possiamo assumere $a_{r,k+1} \neq 0$, quindi per ogni $i > r$ sottraiamo alla i^{-esima} riga il prodotto della r^{-esima} riga per $\frac{a_{i,k+1}}{a_{r,k+1}}$. In questo modo sotto $a_{r,k+1}$ otteniamo tutti zeri, quindi la sottomatrice delle prime $k+1$ colonne della "nuova" A (stiamo modificando la nostra matrice) è a scala.
Iterando questo procedimento arriveremo ad avere $k = n$ ed avremo quindi concluso la riduzione a scala di A.

$\square$

Esempio 8. Questa è la riduzione a scala di una matrice effettuata iterando il procedimento descritto nella dimostrazione precedente:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \sim^{(1)} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \sim^{(2)}$$

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \sim^{(3)} \quad D := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -8 \end{pmatrix}.$$

In quest'esempio, consideriamo la prima colonna. Poiché questa, come matrice 5×1, è a scala, andiamo avanti e consideriamo la sottomatrice 5×2 delle prime due colonne che è anch'essa a scala. Quindi guardiamo la sottomatrice delle prime tre colonne. Questa non è a scala e purtroppo $a_{2,3} = 0$, ma scambiando la seconda riga con la terza riga, passo (1), possiamo fare in modo che l'elemento della seconda riga e terza colonna diventi diverso da zero (in questo modo arriviamo alla matrice B). La sottomatrice delle prime tre colonne di B non è ancora a scala perché sotto $b_{2,3}$ non ci sono tutti zeri. Sottraendo alla quarta riga i tre mezzi della seconda, passo (2), otteniamo la matrice C, che è una matrice le cui prime tre colonne sono a scala. Andiamo avanti: consideriamo la sottomatrice delle prime quattro colonne di C. Questa non è a scala ma lo diventa se sottraiamo alla quarta riga i sette terzi della terza riga, passo (3). In questo modo otteniamo la matrice a scala D ed abbiamo concluso.

Ricapitolando, il metodo per trovare le soluzioni di un qualsiasi sistema lineare è il seguente: scriviamo la matrice completa ad esso associata $\widetilde{A}$, quindi la trasformiamo in una matrice a scala superiore effettuando l'E.G. per righe. Il risultato che si ottiene in questo modo è un sistema lineare equivalente a quello di partenza ma che si risolve immediatamente per sostituzione (partendo da x_n e "tornando indietro").

Esercizio. Risolvere i sistemi lineari le cui matrici complete associate sono quelle dell'esercizio precedente. In particolare, discutere la compatibilità ed indicare i parametri liberi.

Esercizio. Risolvere i sistemi lineari che seguono specificando quali incognite sono parametri liberi ed indicando lo spazio delle soluzioni nella forma

$$\left\{ x_1, x_2, \ldots \;\middle|\; \begin{array}{lll} x_1 & = & c_{1,1}t_1 + \ldots + c_{1,\ell}t_\ell \\ \ldots & & \\ x_n & = & c_{n,1}t_1 + \ldots + c_{n,\ell}t_\ell \ldots \end{array} \right\}$$

(vedi inciso 6), dove $t_1, \ldots, t_\ell$ denotano i parametri liberi.

$$\begin{cases} x + y - 7z + w - s = 3 \\ 3z + y + 2s = 8 \\ w + 3s = 6 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x + y - 7z + w - s = 3 \\ 3x + y + 2s = 2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x + y - z + 2w = 3 \\ x - y - z - w = -2 \\ x + 2y - 2z + 3w = 4 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x + 3y - z + 2w = 5 \\ 3x + y - 5z + w = 0 \\ 2x - 4z - 5w = -7 \\ x + 7y - 2z + 8w = 14 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - x_6 + x_7 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_5 + x_6 + x_7 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7 = 5 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_3 - x_4 + x_5 + x_6 - x_7 = 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_5 + 4x_6 + x_7 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_5 + x_6 + x_7 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_4 + 2x_5 - x_6 - x_7 = 2 \end{cases}.$$

Capitolo 3.

§1. Matrici.

Definizione. Una *matrice* $m \times n$ è una tabella di numeri costituita da m righe ed n colonne. L'insieme delle matrici $m \times n$ lo indichiamo con $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Consideriamo due matrici delle stesse dimensioni

$$A := \left(a_{i,j}\right) := \begin{pmatrix} a_{1,1} & . & . & . & a_{1,n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m,1} & . & . & . & a_{m,n} \end{pmatrix}, \qquad B := \left(b_{i,j}\right) := \begin{pmatrix} b_{1,1} & . & . & . & b_{1,n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ b_{m,1} & . & . & . & b_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Si definisce la loro somma $A+B$ ponendo

$$A+B \quad := \quad \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & . & . & . & a_{1,n}+b_{1,n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m,1}+b_{m,1} & . & . & . & a_{m,n}+b_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $A+B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Esempio.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 7 & 2 & 19 \\ 3 & 0 & -1 & 57 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 11 \\ 3 & 9 & 4 & 19 \\ 5 & -5 & -1 & 58 \end{pmatrix}.$$

Definizione 1. Siano $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $C = (c_{i,j}) \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ due matrici (si osservi che il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di C). Si definisce il *prodotto righe per colonne*

$$A \cdot C \quad \in \quad M_{m,k}(\mathbb{R})$$

ponendo

$$\left(A \cdot C\right)_{i,j} \quad := \quad \sum_{h=1}^{n} a_{i,h} \cdot c_{h,j}\,.$$

Si osservi che secondo questa formula, l'elemento di posto "i, j" della matrice prodotto è il "prodotto" della i^{-esima} riga di A per la j^{-esima} colonna di C. Ad esempio,

$$\begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ a & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \star & \star & \alpha & \star \\ \star & \star & \beta & \star \\ \star & \star & \gamma & \star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & a\alpha + b\beta + c\gamma & \star \end{pmatrix}.$$

Esempio.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 11 \\ 2 & -31 & -10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per giustificare la definizione (1), mi limito a fare una considerazione: se sostituiamo le relazioni

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + 2z_2 + 0z_3 + 3z_4 \\ y_2 = 0z_1 + 7z_2 + 2z_3 + z_4 \\ y_3 = 3z_1 + 0z_2 - z_3 - z_4 \end{cases} \quad \text{nelle relazioni} \quad \begin{cases} x_1 = 4y_1 + 0y_2 + y_3 \\ x_2 = 2y_1 - 5y_2 + 0y_3 \end{cases}$$

otteniamo proprio (si noti che le matrici associate sono quelle del prodotto nell'esempio)

$$\begin{cases} x_1 = 7z_1 + 8z_2 - z_3 + 11z_4 \\ x_2 = 2z_1 - 31z_2 - 10z_3 + z_4 \end{cases}$$

Proposizione. *Le operazioni tra matrici soddisfano le proprietà*

$$(A + B) + C = A + (B + C) \qquad \text{(associatività della somma)},$$
$$(A \cdot D) \cdot E = A \cdot (D \cdot E) \qquad \text{(associatività del prodotto)},$$
$$(A + B) \cdot D = A \cdot D + B \cdot D \qquad \text{(proprietà distributiva)},$$

dove ovviamente si richiede che le dimensioni delle matrici in questione siano compatibili con le operazioni scritte: $A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $D \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ *ed* $E \in M_{k,h}(\mathbb{R})$

Osservazione. Il prodotto non è commutativo (peraltro se le dimensioni delle matrici in questione non sono "giuste" non ha neanche senso invertire l'ordine dei fattori), ad esempio

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 29 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \quad \text{ma} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 12 & 23 \end{pmatrix}.$$

Osservazione 2. Un modo compatto per denotare il sistema lineare $(\star)$ introdotto all'inizio del capitolo precedente consiste nello scrivere

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b},$$

dove, per definizione, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, A è la matrice incompleta associata al sistema lineare dato ed il prodotto "$\cdot$" è il prodotto righe per colonne della definizione (1). Infatti, usando la definizione (1) di prodotto righe per colonne si ottiene proprio

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & . & . & . & a_{1,n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m,1} & . & . & . & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,n}x_n \\ ... \\ ... \\ ... \\ a_{m,1}x_1 + ... + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} \in M_{m,1}(\mathbb{R}).$$

Concludiamo il paragrafo con una definizione.

Definizione 3. Sia $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ una matrice. La matrice che si ottiene scambiando le righe con le colonne si chiama *trasposta* di A e si indica con ${}^tA$. Osserviamo che

$$\left({}^tA\right)_{i,j} = a_{j,i}, \qquad {}^tA \in M_{n,m}(\mathbb{R}).$$

Esempio. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 \end{pmatrix}$, allora ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

§2. Matrici quadrate.

Il prodotto tra matrici in $M_{n,n}(\mathbb{R})$ ha certamente senso ed il risultato che si ottiene è sempre in $M_{n,n}(\mathbb{R})$. In effetti $M_{n,n}(\mathbb{R})$, con le due operazioni di somma e prodotto, è un esempio di *anello unitario* (un anello è un oggetto algebrico che noi non studieremo). Non entrerò troppo in questioni algebriche, però due osservazioni le voglio fare.

Definizione. La matrice $n \times n$ che ha tutti 1 sulla *diagonale principale* e tutti zeri altrove

$$I_n \quad := \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

si chiama *matrice identica* di ordine n.

Osservazione.

$$A \cdot I_n \quad = \quad I_n \cdot A \quad = \quad A\,, \qquad \forall A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$$

Definizione. Consideriamo $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Se esiste B tale che $A \cdot B = I_n$ diciamo che A è invertibile, B la chiamiamo *inversa di* A e la denotiamo A^{-1}.

Proposizione. *Si ha che $A \cdot B = I_n$ se e solo se $B \cdot A = I_n$. L'inversa di una matrice, se esiste, è unica.*

Non dimostreremo quanto appena affermato.

Torniamo al sistema lineare $(\star)$ del capitolo 2, ovvero al sistema (vedi osservazione 2):

$$A \cdot \vec{x} \quad = \quad \vec{b} \tag{4}$$

Se il numero delle equazioni è uguale al numero delle incognite la matrice incompleta A è una matrice quadrata $n \times n$ mentre la matrice completa $\widetilde{A}$ è una matrice $n \times (n+1)$.

Assumiamo che esiste l'inversa di A. In questo caso possiamo moltiplicare ambo i membri dell'uguaglianza (4) per A^{-1}, ottenendo $A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x}) = A^{-1} \cdot \vec{b}$. Per l'associatività del prodotto, $A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x}) = (A^{-1} \cdot A) \cdot \vec{x} = I_n \cdot \vec{x} = \vec{x}$, quindi

$$\vec{x} \quad = \quad A^{-1} \cdot \vec{b}\,. \tag{4'}$$

Quest'uguaglianza mostra l'unicità dell'eventuale soluzione del nostro sistema e ci fornisce un candidato per tale soluzione. Poiché il passaggio effettuato è "invertibile" (rimoltiplicando per A torniamo al sistema di partenza), abbiamo l'esistenza della soluzione del sistema dato.

Il prossimo obiettivo è quello di studiare l'invertibilità e calcolare l'inversa di una matrice. A tal fine avremo bisogno della nozione di "determinante", oggetto di studio del prossimo paragrafo.

§3. Determinante.

In questo paragrafo introduciamo la funzione determinante, funzione che ad una matrice *quadrata* (cioè che ha uguale numero di righe e colonne) associa un numero. Ci sono diverse definizioni equivalenti del determinante, noi lo definiamo tramite lo sviluppo di Laplace (def. 5). La formula (6) e la proposizione (10) forniscono altri due modi possibili di definire il determinante. Cominciamo con alcuni casi particolari.

Se $A = (a)$ è una matrice 1×1 si pone

$$\det(A) \quad := \quad a \, .$$

Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è una matrice 2×2 si pone

$$\det(A) \quad := \quad ad - bc \, .$$

Per le matrici di ordine superiore la definizione è più complicata, ad esempio già per le matrici 3×3 si pone

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad := \quad aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg \, .$$

...ma vediamo la definizione generale! La definizione che segue è *induttiva,* nel senso che si definisce il determinante di una matrice di ordine n utilizzando il determinante di matrici di ordine più basso. Premettiamo una notazione.

Notazione. Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice. Indichiamo con $C_{i,j} \in M_{n-1,n-1}$ la matrice che si ottiene prendendo A e cancellando la i^{-esima} riga e la j^{-esima} colonna. Ad esempio,

$$\text{se} \qquad A \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ \mathbf{7} & 2 & \mathbf{4} \\ \mathbf{8} & 6 & \mathbf{9} \end{pmatrix} \, , \qquad \text{si ha} \qquad C_{1,2} \;=\; \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \, .$$

Definizione 5. *Sviluppo di Laplace del determinante.* Come abbiamo già menzionato, se $A = (a)$ è una matrice di ordine 1 si pone $\det A := a$. Sia quindi $n \geq 2$ e consideriamo $A = (a_{i,j}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Si definisce

$$(5') \qquad \det A \quad := \quad \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \, a_{1,j} \cdot \det C_{1,j} \; ,$$

dove la notazione usata è quella appena introdotta.

Si osservi che la definizione data ha senso, in effetti $(5')$ definisce in maniera ricorsiva il determinante: si sa calcolare il determinante delle matrici di ordine 1, quindi si sa calcolare il determinante di quelle di ordine 2, ne segue che si sa calcolare il determinante di quelle di ordine 3, ...di quelle di ordine 4, eccetera.

Osservazione. Applicando $(5')$ per $n = 3$ si ottiene

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} := a \cdot \det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \cdot \det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \cdot \det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$
$$= a \cdot (ei - fh) - b \cdot (di - fg) + c \cdot (dh - eg) \,,$$

che coincide con la definizione data precedentemente.

Esempio. Si ha

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} := 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} - 5 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= 2 \cdot (12 - 28) - 5 \cdot (18 - 7) + 3 \cdot (12 - 2) \qquad = \qquad -57 \,.$$

Visto che ci siamo vediamo cosa si ottiene per le matrici di ordine 4:

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & l & m & n \\ o & p & q & r \end{pmatrix} :=$$
$$a \cdot \det\begin{pmatrix} f & g & h \\ l & m & n \\ p & q & r \end{pmatrix} - b \cdot \det\begin{pmatrix} e & g & h \\ i & m & n \\ o & q & r \end{pmatrix} + c \cdot \det\begin{pmatrix} e & f & h \\ i & l & n \\ o & p & r \end{pmatrix} - d \cdot \det\begin{pmatrix} e & f & g \\ i & l & m \\ o & p & q \end{pmatrix} .$$

Si osservi che sviluppando i determinanti delle matrici di ordine 4 si perviene ad un polinomio costituito da 24 termini. Lo sviluppo del determinante di una matrice di ordine 5 è un polinomio molto lungo: ha 120 termini. Vedremo comunque che il calcolo del determinante di una matrice è una operazione molto più semplice di quanto si possa immaginare ...e temere!

Facciamo alcune considerazioni. Sia $A = (a_{i,j}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Chiaramente, $\det A$ è un polinomio negli $a_{i,j}$. Affermo che i monomi che lo costituiscono sono (a meno del segno) i prodotti di n elementi della matrice che stanno sia su righe che su colonne distinte. In effetti vale la seguente proposizione, che non dimostreremo.

Proposizione. *Si abbia* $A = (a_{i,j}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. *Si ha*

(6) $$\det(A) \quad := \quad \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} \,,$$

dove $\mathcal{S}_n$ *è l'insieme delle permutazioni dei primi* n *interi* $\{1, ..., n\}$, *e dove* $\epsilon(\sigma)$ *è il segno della permutazione* σ.

Quanto al segno di una permutazione, $\epsilon(\sigma) = 1$ se σ è ottenibile come composizione di scambi in numero pari, $\epsilon(\sigma) = -1$ se σ è ottenibile come composizione di scambi in numero dispari (è possibile dimostrare che il segno di una permutazione è ben definito). Ad esempio, la permutazione $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 1, \sigma(4) = 5, \sigma(5) = 4$, che verrà denotata con "(3,2,1,5,4)" si ottiene scambiando 3 con 1 nonché 5 con 4. Pertanto si realizza effettuando 2 scambi (i.e. è "pari"), quindi $\epsilon(\sigma) = 1$.

Lo studente non si deve spaventare perché non dovrà mai impelagarsi con il formalismo di questa formula. Il motivo per cui ho voluto enunciarla è che in qualche modo mette in luce lo straordinario "ordine" della funzione determinante. In particolare, da essa si evince quanto già menzionato che il determinante è il polinomio nelle variabili $a_{i,j}$ i cui monomi che lo costituiscono sono (a meno del segno) i prodotti di n elementi della matrice che stanno sia su righe che su colonne distinte. Un'altra conseguenza è che lo sviluppo di Laplace del determinante può essere effettuato rispetto ad una riga a piacere (a dirla tutta, anche rispetto ad una qualsiasi colonna): sia k un indice che fissiamo, si ha

$$(6') \qquad \det A \quad := \quad \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\, a_{k,j} \cdot \det C_{k,j} \ ,$$

dove come al solito $C_{k,j}$ è la matrice che si ottiene prendendo A e sopprimendo la k^{-esima} riga e la j^{-esima} colonna.

Esempio. Sviluppando rispetto alla seconda riga il determinante dell'esempio precedente si ottiene

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad & := \quad -3 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - 7 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ & = \quad -3 \cdot (30-12) + 2 \cdot (12-3) - 7 \cdot (8-5) \qquad = \qquad -57 \ . \end{aligned}$$

Come promesso dalla formula (6′) il risultato ottenuto è lo stesso di prima: -57.

Definizione 7. Il prodotto $(-1)^{i+j} \cdot \det C_{i,j}$ si chiama *complemento algebrico* di $a_{i,j}$.

Lemma 8. Il determinante è una funzione *antisimmetrica* delle righe della matrice: se scambiamo tra loro due righe di A il determinante cambia segno.

Dimostrazione. Da (6′) segue immediatamente che se scambiamo due righe adiacenti il determinante cambia segno: se A' è la matrice che si ottiene scambiando la k^{-esima} con la $(k+1)^{-esima}$ riga di A, lo sviluppo di Laplace di $\det A$ rispetto alla k^{-esima} riga coincide con lo sviluppo di Laplace di $\det A'$ rispetto alla $(k+1)^{-esima}$ riga eccetto che per il fatto che in questo secondo sviluppo il segno davanti $a_{k,j} \cdot \det C_{k,j}$ è $(-1)^{k+1+j}$ invece di $(-1)^{k+j}$ (vedi 6′).
Poiché è possibile scambiare due righe qualsiasi effettuando un certo numero di scambi di righe adiacenti e poiché questo numero è necessariamente dispari (questo è un dettaglio di teoria degli insiemi e delle permutazioni che qui non dimostro), il risultato è vero in generale. □

Lemma 8′. Il determinante è una funzione *multilineare* delle righe della matrice: sia k un indice di riga, λ un numero reale e siano A, A', A'' e B quattro matrici tali che

$$\begin{aligned} & a_{i,j} \ = \ a'_{i,j} \ = \ a''_{i,j} \ = \ b_{i,j} \ , && \forall\, i \neq k \,,\ \forall\, j \,; \\ & a_{k,j} \ + \ a'_{k,j} \ = \ a''_{k,j} \ , && \forall\, j \,; \\ & b_{k,j} \ = \ \lambda a_{k,j} \ , && \forall\, j \,. \end{aligned}$$

(cioè coincidono ovunque tranne che per il fatto che la k^{-esima} riga di A'' è la somma della k^{-esima} riga di A con quella di A', mentre la k^{-esima} riga di B è il prodotto della k^{-esima} riga di A per λ). Allora

$$\begin{aligned} & \det A \ + \ \det A' \quad = \quad \det A'' \ ; \\ & \det B \quad = \quad \lambda \cdot \det A \ . \end{aligned}$$

Dimostrazione. Poiché le matrici coincidono fuori della k^{-esima} riga, calcolando il determinante utilizzando lo sviluppo di Laplace proprio rispetto alla k^{-esima} riga (formula $6'$), si ottiene

$$\begin{aligned}
\det A \;+\; \det A' &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\, a_{k,j} \cdot \det C_{k,j} \;+ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\, a'_{k,j} \cdot \det C_{k,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \left(a_{k,j} + a'_{k,j}\right) \cdot \det C_{k,j} \\
&= \det A'' \;.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\, b_{k,j} \cdot \det C_{k,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\, \lambda \cdot a_{k,j} \cdot \det C_{k,j} \\
&= \lambda \cdot \det A'' \;.
\end{aligned}$$

□

Esempio. $\det\begin{pmatrix} 2\lambda & 5\lambda \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \;=\; \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$.

Esempio. $\det\begin{pmatrix} 2{+}3 & 5{+}1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \;=\; \det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \;+\; \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Calcolare i determinanti delle matrici indicate negli esempi.

Proposizione. *Si abbia* $A = (a_{i,j}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. *Si ha*

$$\det A \quad = \quad \det {}^tA$$

dove ${}^tA$ *è la matrice trasposta della matrice* A *(vedi def. 3, §1).*

Questa proposizione segue immediatamente dalla formula (6). Osserviamo che, come corollario, i lemmi 8 ed $8'$ continuano a valere qualora si sostituisca (ovunque) la parola "riga" alla parola "colonna".

Osservazione 9. Ricapitoliamo alcune proprietà utili per il calcolo del determinante di una matrice:

9_a) se scambiamo tra loro due righe di A il determinante cambia segno;

9_b) se ad una riga (ovvero colonna) sommiamo una combinazione lineare delle altre il determinante non cambia;

9_c) se moltiplichiamo una riga (ovvero colonna) per una costante λ, il corrispondente determinante risulta moltiplicato per λ;

9_d) se A ha una riga (ovvero colonna) nulla, allora $\det A = 0$;

9_e) il determinante di una matrice triangolare superiore è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale.

Sono tutte proprietà che seguono facilmente dai lemmi (8) e ($8'$), ometto le dimostrazioni.

Esempio. Per le proprietà dell'osservazione (9) sappiamo che

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \\ -3 & 8 & 9 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -3 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} ;$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \\ -3 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \\ 11 & 33 & -2 \end{pmatrix}$$

(alla terza riga abbiamo sommato la combinazione lineare di coefficienti 2 e 3 delle prime due righe);

$$5\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \\ -3 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 20 & 35 & -15 \\ -3 & 8 & 9 \end{pmatrix} ; \qquad \det\begin{pmatrix} 13 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 11 & 4 \end{pmatrix} = 0 ;$$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3\cdot 4\cdot(-6)\cdot 2 = -144 .$$

Osservazione. Le operazioni di cui ai punti $9_a)$ e $9_b)$ sono sufficienti per ridurre in forma triangolare superiore la matrice A, infatti basta eseguire l'algoritmo di Gauss descritto nella dimostrazione della proposizione (7) del capitolo 2.
D'altro canto, per $9_e)$, sappiamo calcolare facilmente il determinante di una matrice triangolare superiore.

Esempio. Utilizzando i passi $9_a)$ e $9_b)$ troviamo

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -4 & 5 \\ -3 & 8 & 15 & 23 \end{pmatrix} \sim^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & -4 & 5 \\ -3 & 8 & 15 & 23 \end{pmatrix} \sim^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 8 \\ 0 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & 14 & 12 & 29 \end{pmatrix} \sim^{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} \sim^{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} ,$$

dove: 1) abbiamo scambiato le prime due righe, 2) alla terza riga abbiamo sottratto quattro per la prima riga ed alla quarta riga abbiamo sommato il triplo della prima, 3) alla terza riga abbiamo sommato la seconda ed alla quarta abbiamo sottratto il doppio della seconda, 4) alla quarta riga abbiamo sottratto il doppio della terza. Il determinante dell'ultima matrice è $1\cdot 7\cdot 3\cdot 3 = 63$. Poiché abbiamo effettuato uno scambio di righe, abbiamo $\det A = -63$.

Le proprietà viste oltre ad essere importanti ed utili hanno il pregio di caratterizzare il determinante, più precisamente vale la proposizione che segue.

Proposizione 10. *Esiste una unica funzione F definita su $M_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che*

i) *F è multilineare rispetto alle righe di $M_{n,n}(\mathbb{R})$;*

ii) F *è antisimmetrica rispetto alle righe di* $M_{n,n}(\mathbb{R})$ *;*

iii) $F(I_n) \;=\; 1$, *dove* I_n *è la matrice identica.*

Dimostrazione. Per quel che riguarda l'esistenza di una tale F è stato già detto tutto: la funzione determinante soddisfa *i)*, *ii)* e *iii)*.
Per quel che riguarda l'unicità l'idea della dimostrazione (non entrerò nei dettagli) è la seguente. Sia F una funzione che soddisfa le proprietà *i)*, *ii)* e *iii)*. In particolare, le varie proprietà che sono soddisfatte dalla funzione F ci dicono come cambia $F(A)$ quando effettuiamo uno dei passi dell'eliminazione di Gauss (vedi $2'$ del cap. 2 §2). A questo punto l'osservazione che conclude la dimostrazione è il fatto che tramite i passi di Gauss ($2'$ del cap. 2 §2) è possibile trasformare qualsiasi matrice in una matrice che ha una riga di zeri oppure nella matrice identica. Nel primo caso $F(A) = 0$: se A' è la matrice ottenuta moltiplicando la riga nulla per due (si noti che $A' = A'$), allora $F(A) = F(A') = 2F(A)$ (quest'ultima uguaglianza segue dalla multilinearità) ma l'unico numero uguale al suo doppio è lo zero. Nel secondo caso siamo ugualmente in grado di dire quanto vale $F(A)$: basta che ci ricordiamo delle costanti (non nulle) che avremo fatto intervenire nell'applicare l'E.G. che trasforma A nella matrice identica e del numero degli eventuali scambi di righe effettuati. Si osservi che usiamo l'ipotesi $F(I_n) = 1$.
Poiché in entrambi (tutti) i casi siamo stati capaci di calcolare $F(A)$ utilizzando solo le proprietà che avevamo a disposizione, F è unica.

$\square$

Il determinante si comporta molto male rispetto all'operazione di somma di matrici, rispetto al prodotto si comporta invece nel modo migliore possibile: vale il teorema che segue.

Teorema (Binet).

$$\det\big(A \cdot B\big) \quad = \quad (\det A) \cdot (\det B) \ , \qquad \forall\ A,\, B \ \in\ M_{n,n}(\mathbb{R}) \ .$$

Ci sono molte dimostrazioni di questo teorema. In questa sede non ne vedremo nessuna. Comunque, non posso non dire che questo teorema è essenzialmente ovvio alla luce di una interpretazione geometrica del determinante della quale darò qualche cenno nel capitolo 5. Naturalmente, visto che in fin dei conti il determinante è un polinomio che sappiamo scrivere esplicitamente, ai fini della dimostrazione del teorema di Binet è possibile fare un conto che utilizza una delle definizioni o caratterizzazioni del determinante.

Osserviamo che, come conseguenza del teorema di Binet, una matrice il cui determinante è nullo non può essere invertibile: se A fosse una matrice invertibile e si avesse $\det A = 0$, si avrebbe

$$1 \quad = \quad \det I_n \quad = \quad \det\big(A \cdot A^{-1}\big) \quad = \quad \big(\det A\big) \cdot \big(\det A^{-1}\big) \quad = \quad 0 \ .$$

Viceversa, se $\det A \neq 0$, allora A è invertibile ed esiste una formula che ne calcola l'inversa. Tale formula è contenuta nel teorema che segue:

Teorema 11. *Consideriamo* $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ *. Si ha che* A *è invertibile se e solo se* $\det A \neq 0$ *. In questo caso risulta*

$$\big(A^{-1}\big)_{i,j} \qquad = \qquad (-1)^{i+j} \cdot \frac{\det C_{j,i}}{\det A} \ ,$$

dove come al solito $C_{j,i}$ *è la matrice ottenuta da* A *sopprimendo la* $j^{\text{-esima}}$ *riga e la* $i^{\text{-esima}}$ *colonna.*

Attenzione! Non mi sono sbagliato: a sinistra dell'uguaglianza ho scritto "$i,\, j$", a destra ho scritto "$j,\, i$".

Osservazione. La formula del teorema 11 ci dice che A^{-1} è la trasposta della matrice dei complementi algebrici (vedi def. 7, pag. 16) divisi per il determinante di A.

Avendo già provato che se A è invertibile allora $\det A \neq 0$, per concludere la dimostrazione del teorema è sufficiente calcolare il prodotto di A per la matrice indicata nel teorema e verificare che il risultato è la matrice identica. Tale calcolo lo omettiamo.

Esempio. Determiniamo l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Poiché $\det A = 2$, la matrice A è invertibile. La matrice dei complementi algebrici è la matrice

$$\begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} -1 & 12 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 19 \\ -4 & 14 & -43 \\ -4 & 12 & -37 \end{pmatrix}.$$

Dividendo per $\det A$ si ottiene la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 19/2 \\ -2 & 7 & -43/2 \\ -2 & 6 & -37/2 \end{pmatrix}$. Infine, trasponendo quest'ultima matrice si ottiene

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \\ 19/2 & -43/2 & -37/2 \end{pmatrix}.$$

La formula del teorema (11) non è molto pratica, per calcolare l'inversa di una matrice di ordine tre abbiamo dovuto fare molte operazioni. Nel § 5 vedremo che utilizzando l'algoritmo di Gauss è possibile calcolare l'inversa di una matrice abbastanza rapidamente.

Esercizio. Verificare che $\begin{pmatrix} -1 & 12 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \\ 19/2 & -43/2 & -37/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Si calcoli l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ -3 & 1 & -8 \\ -1 & 11 & -3 \end{pmatrix}$ utilizzando la formula del teorema (11). Si verifichi la correttezza del risultato ottenuto svolgendo il prodotto righe per colonne della matrice data per la matrice "inversa" trovata.

§4. Teorema di Cramer.

Torniamo a considerare il sistema lineare

$$A\vec{x} \;=\; \vec{b}\,, \qquad A \in M_{n,n}(\mathbb{R})\;.$$

Osservazione 12. Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice quadrata a scala. Dalla proprietà (9_e) il determinante $\det A$ è il prodotto degli elementi sulla diagonale. Inoltre, se $a_{k_0,k_0} = 0$, per un qualche indice k_0, si ha anche $a_{k,k} = 0$ per ogni $k > k_0$ (altrimenti A non sarebbe a scala). Pertanto le condizioni

$i)$ $\det A \neq 0$; $\qquad ii)$ $a_{n,n} \neq 0$; $\qquad iii)$ $a_{k,k} \neq 0\,,\ \forall\, k$;

sono equivalenti tra loro.

Lemma. *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice quadrata a scala. Il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ ha una unica soluzione se e solo se $\det A \neq 0$.*

Dimostrazione. Poiché A è a scala, abbiamo a che fare con un sistema lineare a scala del tipo

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 \;+\; \ldots \quad \ldots & = \; b_1 \\ \qquad\qquad a_{2,2}x_2 \;+\; \ldots & = \; b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{n,n}x_n & = \; b_n \end{cases} .$$

Se $\det A \neq 0$, per l'osservazione (12), tutti gli elementi sulla diagonale principale $a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}$ sono non nulli. È evidente che tale sistema si risolve (partendo dall'ultima equazione e tornando indietro) senza produrre parametri liberi né incompatibilità.
Viceversa, nel caso risulti $\det A = 0$, e quindi $a_{n,n} = 0$ (sempre per l'osservazione 12), ci sono due possibilità: il sistema è incompatibile oppure è compatibile. Nell'ipotesi che si verifichi questo secondo caso, l'ultima equazione deve essere l'equazione $0 = 0$ (se fosse $b_n \neq 0$ il nostro sistema sarebbe incompatibile) ed il sistema in questione è in realtà un sistema, compatibile per ipotesi, di al più $n-1$ equazioni in n incognite; il metodo visto nel capitolo 2 di "soluzione all'indietro" di un tale sistema a scala produce almeno un parametro libero e quindi infinite soluzioni.
In definitiva, abbiamo provato che nel caso risulti $\det A = 0$, il sistema è incompatibile oppure ammette infinite soluzioni.

$\square$

Teorema 13. *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice quadrata (non richiediamo che sia a scala). Il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ ha una unica soluzione se e solo se $\det A \neq 0$.*

In particolare, questo teorema ci dice che la proprietà di avere una unica soluzione non dipende da $\vec{b}$, cioè basta conoscere la matrice incompleta A per poter dire quale delle due seguenti eventualità si verifica:
$i)$ il sistema ammette una unica soluzione;
$ii)$ il sistema è incompatibile oppure ammette infinite soluzioni.

Dimostrazione. Effettuando la riduzione a scala di un sistema lineare quadrato si ottiene, in particolare, un sistema la cui matrice incompleta è a scala. Il determinante della matrice ottenuta è non nullo se e solo se $\det A \neq 0$. Per il lemma precedente abbiamo concluso. $\square$

Assumiamo $\det A \neq 0$. Si osservi che l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ segue anche[3] dal teorema (11): nella parte finale del §2 di questo capitolo abbiamo osservato che l'esistenza dell'inversa di A garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema lineare: si ha $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Teorema (Cramer). *Consideriamo il sistema lineare* $A\vec{x} = \vec{b}$ *ed assumiamo* $\det A \neq 0$. *Sia quindi* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *la soluzione (che esiste ed è unica per il teorema precedente). Si ha*

$$x_i \quad = \quad \frac{\det A_{\vec{b}/\mathrm{col}\, i}}{\det A},$$

dove $A_{\vec{b}/\mathrm{col}\, i}$ *è la matrice che si ottiene sostituendo la* $i^{\text{-esima}}$ *colonna di* A *con il "vettore" dei termini noti* $\vec{b}$.

Osservazione. Nel caso $n = 2$, ad esempio nel caso del sistema (3) del capitolo 1

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix},$$

questo teorema si riduce alla formula (6) del capitolo 1:

$$x \quad = \quad \frac{\det\begin{pmatrix} \lambda & b \\ \mu & d \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}, \qquad\qquad y \quad = \quad \frac{\det\begin{pmatrix} a & \lambda \\ c & \mu \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}.$$

Esempio. Risolviamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x + 3y + 4z = 19 \\ 5x + 6y - 7z = 13 \\ 7x + 9y - 17z = -31 \end{cases}.$$

Il determinante della matrice incompleta è tre, quindi la soluzione esiste ed è unica. Si ha

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 19 & 3 & 4 \\ 13 & 6 & -7 \\ -31 & 9 & -17 \end{pmatrix}}{3}, \quad y = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 19 & 4 \\ 5 & 13 & -7 \\ 7 & -31 & -17 \end{pmatrix}}{3}, \quad z = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 3 & 19 \\ 5 & 6 & 13 \\ 7 & 9 & -31 \end{pmatrix}}{3}.$$

[3] Oltre che dal ragionamento nella dimostrazione del teorema (13).

Esercizio. Risolvere il sistema lineare (utilizzando il teorema di Cramer)

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 19 \\ -3x - 5y + 7z = 13 \\ -2x - 3y + 13z = -31 \end{cases} .$$

Del teorema di Cramer ne espongo due dimostrazioni.

Dimostrazione #1. Poiché $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$, abbiamo che x_i è il prodotto della "i-esima riga di A^{-1}" per $\vec{b}$:

$$x_i = \sum_j (A^{-1})_{i,j} \cdot b_j = \sum_j (-1)^{i+j} \cdot \frac{\det C_{j,i}}{\det A} \cdot b_j ,$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla formula del teorema (11) (come al solito, $C_{j,i}$ è la matrice ottenuta da A sopprimendo la $j^{\text{-esima}}$ riga e la $i^{\text{-esima}}$ colonna). L'espressione trovata è esattamente il quoziente tra lo sviluppo di Laplace del determinante della matrice $A_{\vec{b}/\mathrm{col}\, i}$ rispetto alla $i^{\text{-esima}}$ colonna (quella dove appare il vettore dei termini noti $\vec{b}$) e $\det A$.

□

Dimostrazione #2. Da $A \cdot \vec{x} = I \cdot \vec{b}$ (dove I denota la matrice identica) si ottiene

$$A \cdot I_{\vec{x}/\mathrm{col}\, i} = A_{\vec{b}/\mathrm{col}\, i} , \tag{14}$$

dove $I_{\vec{x}/\mathrm{col}\, i}$ è la matrice che si ottiene sostituendo la $i^{\text{-esima}}$ colonna della matrice identica I con il "vettore" delle incognite $\vec{x}$. D'altro canto $\det I_{\vec{x}/\mathrm{col}\, i} = x_i$. Quindi prendendo il determinante dell'equazione (14) si ottiene

$$(\det A) \cdot x_i = (\det A) \cdot (\det I_{\vec{x}/\mathrm{col}\, i}) = \det\big(A \cdot I_{\vec{x}/\mathrm{col}\, i}\big) = \det A_{\vec{b}/\mathrm{col}\, i} .$$

Da $(\det A) \cdot x_i = \det A_{\vec{b}/\mathrm{col}\, i}$ segue immediatamente l'uguaglianza di Cramer.

□

Esercizio. Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + 7y + 2z = 2 \\ x + 4y + 5z = 3 \end{cases}$$

utilizzando

i) il metodo di Gauss;

ii) il calcolo dell'inversa della matrice incompleta A (nonché $4'$ del §2);

iii) il teorema di Cramer.

Se il risultato che vi viene non è sempre lo stesso ... rifate i conti!!!

§5. Il calcolo dell'inversa di una matrice mediante l'algoritmo di Gauss.

In questo paragrafo vediamo in che modo l'eliminazione di Gauss può essere utilizzata per calcolare l'inversa di una matrice. Sia $A = \big(a_{i,j}\big) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice invertibile, la ricetta da seguire per calcolare A^{-1} consiste dei seguenti passi (per non appesantire le notazioni, per descrivere questo procedimento considero il caso $n = 4$) :

i) si scrive la matrice $n \times 2n$ costituita da due blocchi $n \times n$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) ;$$

ii) con i passi dell'eliminazione di Gauss si trasforma la matrice considerata fino ad ottenere la matrice identica al posto del primo blocco $n \times n$;

iii) si ricopia il secondo blocco $n \times n$: tale blocco è l'inversa di A .

Esempio. Calcoliamo l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 18 \\ -4 & -9 & -22 \end{pmatrix}$. A tal fine scriviamo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 18 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -9 & -22 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim^{(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim^{(2)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^{(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^{(4)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) ,$$

dove: 1) alla seconda riga abbiamo sottratto il triplo della prima riga ed alla terza riga abbiamo sommato il quadruplo della prima riga; 2) alla terza riga abbiamo sommato la seconda; 3) alla seconda riga abbiamo sottratto il triplo della terza; 4) alla prima riga abbiamo sottratto il doppio della seconda ed il quintuplo della terza. L'inversa della matrice data è la matrice $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ -6 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Verificare l'uguaglianza

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 18 \\ -4 & -9 & -22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ -6 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Esercizio. Calcolare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ utilizzando il metodo di Gauss.

Il motivo per cui questo metodo funziona è abbastanza semplice: alla matrice a blocchi $(A|I)$, dove I denota la matrice identica, associamo il sistema lineare $A \cdot \vec{x} = I \cdot \vec{b}$; ai passi che trasformano la matrice $(A|I)$ nella matrice $(I|B)$ corrisponde il fatto di trasformare il sistema lineare $A \cdot \vec{x} = I \cdot \vec{b}$ nel sistema lineare $I \cdot \vec{x} = B \cdot \vec{b}$; poiché i passi dell'eliminazione di Gauss non cambiano la classe di equivalenza di un sistema lineare, i due sistemi lineari

$$A \cdot \vec{x} = I \cdot \vec{b} \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad I \cdot \vec{x} = B \cdot \vec{b}$$

sono equivalenti. Poiché questa equivalenza vale per ogni scelta di $\vec{b}$, la matrice B deve necessariamente essere l'inversa di A (quest'ultima affermazione oltre ad essere molto ragionevole si dimostra facilmente: dall'equivalenza dei due sistemi lineari si deduce, sostituendo la seconda equazione nella prima, $A \cdot B \cdot \vec{b} = \vec{b}$, sempre per ogni scelta di $\vec{b}$; ne segue che deve essere $A \cdot B = I$, cioè che B è l'inversa di A).

Capitolo 4.

§1. Spazi Vettoriali.

Accade spesso che "oggetti" molto diversi tra loro hanno una certa "struttura matematica" comune, in questo caso ci si inventa un nome per quella struttura e la si studia. Tra i vantaggi di questo modo di lavorare: in colpo solo si studiano più oggetti, si impara a capire cosa dipende da cosa il che consente una visione più profonda.

In questo capitolo la struttura matematica che studiamo è quella di *spazio vettoriale reale astratto.* La definizione la darò dopo aver illustrato alcuni esempi, comunque voglio anticipare che una spazio vettoriale reale astratto non è altro che un insieme, i cui elementi verranno chiamati "vettori", sul quale è definita una *somma tra vettori* e sul quale è definito *un prodotto per gli scalari* (operazione che ad un numero reale ed a un vettore associa un altro vettore). Naturalmente, per definizione, queste operazioni dovranno godere di alcune proprietà. Vogliamo procedere dal concreto all'astratto, per cui ora non ci soffermiamo su tali proprietà e passiamo subito agli esempi. Lo dico una volta per tutte: negli esempi che seguono λ denoterà sempre un numero reale.

Esempio 1. Spazio $\mathbb{R}^n$ delle $n^{\text{-}ple}$ di numeri reali. In questo caso i vettori sono elementi del tipo $(x_1, ..., x_n)$, la somma è definita ponendo $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$, ed il prodotto per gli scalari è definito ponendo $\lambda \cdot (x_1, ..., x_n) := (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$. Questo esempio è fondamentale perché nello studio degli spazi vettoriali di dimensione finita ci si riconduce sempre ad esso. Più avanti vedremo come e perché.

Nell'indicare un elemento di $\mathbb{R}^n$ abbiamo utilizzato una notazione "per righe" $(x_1, ..., x_n)$. In realtà la notazione giusta consiste nello scrivere le $n^{\text{-}ple}$ di numeri reali come "vettori colonna":

$$\text{è opportuno scrivere} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{invece di} \quad (x_1, ..., x_n) .$$

Si osservi che questa notazione diventa obbligata se si vuole che il prodotto righe per colonne $A \cdot \vec{v}$, dove $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, abbia senso.

Esempio 2. Spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo. In questo caso gli elementi del nostro insieme, cioè i vettori, sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$, dove $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e dove $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Per la proprietà distributiva del prodotto tra matrici, se $(s_1, ..., s_n)$ e $(t_1, ..., t_n)$ sono soluzioni del sistema dato, anche la "somma" $(s_1 + t_1, ..., s_n + t_n)$ nonché il "prodotto" $(\lambda \cdot s_1, ..., \lambda \cdot s_n)$ ne sono soluzioni. Queste "naturali" operazioni di somma tra vettori e prodotto per uno scalare sono, per definizione, le operazioni che definiscono la struttura di spazio vettoriale dell'insieme considerato. Il lettore sagace avrà intuito che questo spazio è un *sottospazio* di $\mathbb{R}^n$ (vedi esempio 1).

Esempio 3. Spazio delle funzioni continue definite su un intervallo I. Nel corso di analisi avete visto, o state per vedere, che la somma di due funzioni continue è ancora una funzione continua e che anche il prodotto $\lambda \cdot f(x)$ ha senso ed è una funzione continua, dove $\lambda \in \mathbb{R}$

ed $f(x)$ è una funzione continua. Di nuovo, queste operazioni definiscono la struttura di spazio vettoriale dell'insieme considerato.

Esempio 4. Spazio delle successioni. Chiaramente, se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono successioni, anche $\{a_n+b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\lambda a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono successioni... .

Esempio 5. Spazio delle successioni convergenti. Di nuovo, la somma di successioni convergenti è una successione convergente, il prodotto per un numero reale di una successione convergente è una successione convergente. In effetti questo esempio è un "sottospazio vettoriale" del precedente.

Nell'esempio che segue utilizzo la struttura di spazio vettoriale per risolvere un problema. È opportuno che lo studente legga ora questo esempio, accettando le considerazioni che inevitabilmente non hanno ancora una giustificazione formale, e che lo analizzi in maniera più critica dopo aver studiato gli spazi vettoriali in astratto.

Esempio 6. Spazio delle successioni di Fibonacci. Il problema è il seguente: trovare una formula per i termini della successione

$$\{1,\,1,\,2,\,3,\,5,\,8,\,13,\,21,\,34,\,55,\,89,\,...\}\ , \tag{6.1}$$

dove ogni numero è la somma dei due numeri che lo precedono, e.g. $13\ =\ 5{+}8$, $55\ =\ 21{+}34$, $89\ =\ 34+55$ eccetera.

Soluzione. Per risolvere questo problema consideriamo lo spazio delle successioni $\{a_0,\,a_1,\,a_2,\,...\}$ che soddisfano la legge

$$a_{n+2}\quad=\quad a_{n+1}\ +\ a_n\ ,\quad \forall\, n\,\geq\,2\ . \tag{6.2}$$

Non è difficile verificare che questo è uno spazio vettoriale, in particolare la somma di successioni che soddisfano (6.2) è ancora una successione che soddisfa (6.2) nonché il prodotto per uno scalare di una tale successione soddisfa anch'esso (6.2) . L'insieme, o meglio lo spazio vettoriale, di tali soluzioni lo chiameremo V. Chiaramente (6.1) è un vettore di V. Premesso ciò, dimentichiamoci di (6.1) e concentriamoci sullo spazio vettoriale, o meglio, sulla legge (6.2) che ne definisce gli elementi. Qualche vettore di V siamo in grado di trovarlo: tentiamo con una successione del tipo $\{a_n\ :=\ x^n\}$, con x numero reale. La proprietà (6.2) si traduce nella richiesta $x^{n+2}\ =\ x^{n+1}+x^n$, $\forall\, n\,\geq\,2$, cioè nella richiesta (portiamo al primo membro $x^{n+1}+x^n$ quindi raccogliamo x^n a fattore comune) $(x^2-x+1)\cdot x^n\ =\ 0$, $\forall n\geq 2$. A questo punto, risolvendo l'equazione di secondo grado $x^2-x+1\ =\ 0$ troviamo $x\ =\ (1\pm\sqrt{5})/2$ e quindi troviamo che le due successioni

$$i)\quad \left\{b_n\ :=\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}\ ,\qquad ii)\quad \left\{c_n\ :=\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

sono vettori di V, cioè soddisfano 6.2. A questo punto non abbiamo certo risolto il problema da cui siamo partiti. Lo ripeto, abbiamo semplicemente trovato due vettori di V. D'altronde sappiamo che questi vettori li possiamo moltiplicare per degli scalari e sommare tra loro. In termini più espliciti, sappiamo che ogni successione del tipo

$$\begin{aligned}\lambda\cdot\{b_n\}\ +\ \mu\cdot\{c_n\}\quad &=\quad \{\lambda\cdot b_n\ +\ \mu\cdot c_n\}\\ &=\quad \left\{\lambda\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\ +\ \mu\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}\ ,\qquad \lambda,\,\mu\,\in\,\mathbb{R}\end{aligned} \tag{6.3}$$

è un vettore di V. Ora che abbiamo a disposizione molti vettori di V siamo in grado di risolvere il problema dal quale siamo partiti: la successione (6.1) del nostro problema comincia con $a_0 = a_1 = 1$, mentre la successione (6.3) comincia con $a_0 = \lambda + \mu$, $a_1 = \lambda \cdot (1+\sqrt{5})/2 + \mu \cdot (1-\sqrt{5})/2$. Imponendo l'uguaglianza, ovvero risolvendo il sistema lineare di due equazioni in due incognite $\lambda + \mu = 1$, $\lambda \cdot (1+\sqrt{5})/2 + \mu \cdot (1-\sqrt{5})/2 = 1$ (sistema che lo studente è invitato a risolvere per esercizio), si trova $\lambda = (5+\sqrt{5})/10$ e $\mu = (5-\sqrt{5})/10$. Poiché la successione di Fibonacci (6.1) è univocamente individuata dai valori iniziali $a_0 = a_1 = 1$ e dalla legge (6.2), abbiamo risolto il nostro problema: (6.1) deve necessariamente essere la successione

$$\{a_n\} \quad = \quad \left\{ \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\} .$$

Lo studente scettico, ma anche quello che non lo è, verifichi ad esempio che per $n = 6$ questa espressione vale 13, che è il termine a_6 di (6.1), e che per $n = 8$ questa espressione vale 34, che è il termine a_8 di (6.1). ...sono rari i casi in cui calcolare qualche potenza di un binomio ha fatto male a qualcuno!

L'esempio che abbiamo appena discusso è importante perché l'equazione (6.2) è l'analogo discreto di un tipo di equazioni che descrivono dei fenomeni fisici: le equazioni differenziali lineari. Naturalmente non ho intenzione di studiare in questa sede tale tipo di equazioni, il che è oggetto di studio di un corso di analisi del secondo anno. Voglio comunque dire due parole a riguardo.

Esempio 7. Spazio delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare. Consideriamo un punto che si muove lungo una retta, la sua posizione sarà una funzione del tempo $x(t)$ (dove t indica il tempo trascorso). Questo punto sarà soggetto a delle forze, ad esempio possiamo supporre che c'è una molla ideale che lo spinge con una forza pari a $-3x\, newton$ (dove x è la coordinata sulla retta, relativa ad un sistema di riferimento la cui origine corrisponde al punto di equilibrio della molla) e che c'è una resistenza che ne rallenta la velocità pari a $-2v\, newton$, dove v denota la velocità del punto. Assumendo che il nostro punto ha massa unitaria troviamo che la legge che ne descrive il moto è data dall'equazione

$$\frac{d^2}{d^2 t}x(t) \quad = \quad -3x(t) \; - \; 2\frac{d}{dt}x(t) \; . \tag{7.1}$$

Ricordiamo che la velocità è la derivata della posizione rispetto al tempo e che l'accelerazione (derivata della velocità) è la derivata seconda della posizione rispetto al tempo ed è pari alla somma delle forze applicate diviso la massa del corpo considerato. Il bello dell'equazione che abbiamo trovato è che la somma di due sue soluzioni è ancora una sua soluzione (la derivata di una somma è la somma delle derivate), nonché il prodotto per una scalare di una sua soluzione è anch'esso una sua soluzione. In definitiva, l'insieme delle soluzioni di (7.1) ha la struttura di spazio vettoriale. Interrompo qui le mie considerazioni perché andare oltre sarebbe oggetto di un corso di analisi sulle equazioni differenziali.

È arrivato il momento di enunciare la definizione di spazio vettoriale reale[4].

[4] In realtà, tutto quello che dico in questo capitolo e nei prossimi due capitoli, oltre a valere per spazi vettoriali reali, vale anche per spazi vettoriali definiti sul campo dei numeri complessi nonché vale per spazi vettoriali definiti su un campo astratto arbitrario.

Definizione 8. Uno *spazio vettoriale reale* V è un insieme sul quale è definita una operazione di somma ed una operazione di moltiplicazione per gli scalari

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \longrightarrow & V \\ (\vec{v}\,,\,\vec{w}) & \mapsto & \vec{v}+\vec{w} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ (\lambda\,,\,\vec{v}) & \mapsto & \lambda\cdot\vec{v} \end{array}$$

che soddisfano le proprietà che seguono

$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) \;=\; (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}\,,\ \forall\,\vec{u},\,\vec{v},\,\vec{w}\,\in\,V$ (*associatività* della somma);

$\vec{u}+\vec{v} \;=\; \vec{v}+\vec{u}\,,\ \forall\,\vec{u},\,\vec{v}\,\in\,V$ (*commutatività* della somma);

$\exists\,\vec{0}\,\in\,V$ ed inoltre $\forall\vec{v}\,\in\,V\ \exists\,-\vec{v}\,\in\,V$ tali che
$\vec{0}+\vec{v} \,=\, \vec{v}, \qquad \vec{v}+(-\vec{v}) \,=\, \vec{0}, \qquad 0\vec{v} \,=\, \vec{0}, \qquad 1\vec{v} \,=\, \vec{v}, \qquad (-1)\vec{v} \,=\, -\vec{v}$
(in particolare, esistenza dell'*elemento neutro* e degli *opposti*);

$(\lambda+\mu)\vec{v} \,=\, \lambda\vec{v}\,+\,\mu\vec{v},\ \ \lambda(\vec{v}+\vec{w}) \,=\, \lambda\vec{v}\,+\,\lambda\vec{w},\ \ \lambda(\mu\vec{v}) \,=\, (\lambda\mu)\vec{v}\,,\ \ \forall\vec{v},\,\vec{w}\,\in\,V\,,\ \lambda,\,\mu\,\in\,\mathbb{R}$
(proprietà *distributive*).

Osserviamo che sono tutte proprietà molto naturali e che nei casi degli esempi discussi sono tutte praticamente ovvie. Nello scrivere queste proprietà non ci siamo preoccupati di "evitare le ripetizioni", ad esempio la proprietà $0\vec{v} \,=\, \vec{0}$ può essere dedotta dalle altre:

$$0\vec{v} \,=\, (1-1)\vec{v} \,=\, 1\vec{v}+(-1)\vec{v} \,=\, \vec{v}+(-\vec{v}) \,=\, \vec{0}\,. \tag{8.1}$$

Esercizio. Indicare, per ognuna delle uguaglianze in (8.1), quale proprietà della definizione (8) è stata utilizzata.

Definizione 9. Sia V uno spazio vettoriale. Un sottospazio vettoriale di V è un sottoinsieme W che, con le operazioni di somma e di moltiplicazione per gli scalari indotte da quelle di V, è anch'esso uno spazio vettoriale.

Si osservi che, in particolare, si richiede che tali operazioni abbiano senso come operazioni di W, cioè si richiede che

$$\begin{array}{ll} \vec{w}_1\,+\,\vec{w}_2\,\in\,W\,, & \forall\,\vec{w}_1,\,\vec{w}_2\,\in\,W\,; \\ \lambda\vec{w}\,\in\,W\,, & \forall\,\vec{w}\,\in\,W\,. \end{array} \tag{9'}$$

Osservazione 10. Se $W\subseteq V$ è un sottoinsieme dello spazio vettoriale V, allora W ne è un sottospazio vettoriale se e solo se le condizioni di cui al punto $(9')$ sono verificate. La dimostrazione di quanto affermato è essenzialmente ovvia: modulo garantirsi che somma e prodotto per gli scalari sono ben definite come operazioni su W (qui abbiamo bisogno di $9'$), tali operazioni soddisfano tutte le proprietà richieste dalla definizione (8) perché le soddisfano come operazioni su V (qui usiamo l'ipotesi che V è uno spazio vettoriale).

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\vec{v}_1,\,...,\vec{v}_k$ vettori in V. Una *combinazione lineare* dei vettori considerati è una espressione del tipo

$$\alpha_1\vec{v}_1\,+\,...\,+\,\alpha_k\vec{v}_k\,, \qquad \alpha_1,\,...,\alpha_k\,\in\,\mathbb{R}\,.$$

Definizione 11. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\vec{v}_1,\,...,\vec{v}_k$ vettori in V. Diciamo che i vettori considerati sono *linearmente dipendenti* se e solo se esistono $\alpha_1,\,...,\alpha_k\,\in\,\mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$\alpha_1\vec{v}_1\,+\,...\,+\,\alpha_k\vec{v}_k \;=\; \vec{0}\,. \tag{11'}$$

Altrimenti, diciamo che sono *linearmente indipendenti.* Gli aggettivi "dipendente" e "indipendente" possono riferirsi anche all'insieme dei vettori: è corretto dire $\{\,...\,\}$ è un insieme dipendente (ovvero indipendente) di vettori.

Osservazione 12. Un insieme $\mathcal{B}$ di vettori è un insieme indipendente di vettori se e solo se nessun vettore $\vec{v} \in \mathcal{B}$ è combinazione lineare degli altri vettori di $\mathcal{B}$.

La dimostrazione è ovvia: si guardi (11′).

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{S}$ un suo sottoinsieme. Si definisce $\mathrm{Span}\mathcal{S}$ l'insieme di tutte le combinazioni lineari di vettori di $\mathcal{S}$:

$$\mathrm{Span}\mathcal{S} \quad := \quad \left\{ \alpha_1\vec{v}_1 + ... + \alpha_k\vec{v}_k \;\middle|\; \begin{matrix} \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R} \\ \vec{v}_1, ..., \vec{v}_k \in \mathcal{S} \end{matrix} \right\}.$$

Proposizione. *Si abbiamo V ed $\mathcal{S}$ come sopra. Si ha che* $\mathrm{Span}\mathcal{S}$ *è un sottospazio vettoriale di V.*

Dimostrazione. Per l'osservazione (10) è sufficiente verificare che $\mathrm{Span}\mathcal{S}$ soddisfa le proprietà indicate al punto (9′). Chiaramente la somma di combinazioni lineari è una combinazione lineare ed il prodotto di una combinazione lineare per una costante è una combinazione lineare. Ad esempio

$$\lambda \cdot \big(\alpha_1\vec{v}_1 + ... + \alpha_k\vec{v}_k\big) \quad = \quad (\lambda\alpha_1)\vec{v}_1 + ... + (\lambda\alpha_k)\vec{v}_k \ .$$

□

Definizione 13. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{S}$ un suo sottoinsieme. Se $\mathrm{Span}\mathcal{S} = V$ diciamo che $\mathcal{S}$ *genera* V.
Se esiste un insieme finito che genera V diciamo che V è *finitamente generato.*

Studieremo esclusivamente gli spazi vettoriali finitamente generati. D'ora in poi, con la locuzione "spazio vettoriale" intenderò sempre "spazio vettoriale finitamente generato".

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{S}$ un suo sottoinsieme. Diciamo che $\mathcal{S}$ è una *base* di V se è un insieme indipendente che genera V.

Osservazione 14. Sia $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V. Poiché per ipotesi $\mathcal{B}$ genera V, per ogni $\vec{v} \in V$ esistono dei coefficienti $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tali che

$$\vec{v} \quad = \quad \alpha_1\vec{b}_1 + ... + \alpha_n\vec{b}_n \ ;$$

poiché $\mathcal{B}$ è un insieme indipendente, tali coefficienti sono unici: se $\alpha_1\vec{b}_1 + ... + \alpha_n\vec{b}_n = \vec{v} = \alpha'_1\vec{b}_1 + ... + \alpha'_n\vec{b}_n$, allora $(\alpha_1 - \alpha'_1)\vec{b}_1 + ... + (\alpha_n - \alpha'_n)\vec{b}_n = \vec{0}$ e quindi, essendo $\mathcal{B}$ un insieme indipendente, si deve avere $\alpha_i = \alpha'_i$, $\forall\, i = 1, ..., n$.

Definizione 15. I coefficienti dell'osservazione precedente $\alpha_1, ..., \alpha_n$ si chiamano *coordinate* del vettore $\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esempio. Una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ è costituita dai vettori $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Infatti, è chiaro che sono indipendenti e che generano $\mathbb{R}^2$: si ha $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2$. La base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ si chiama *base canonica* dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$. Si osservi che le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica sono proprio i coefficienti λ e μ.

Generalizziamo quanto abbiamo appena visto: consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. I vettori $\vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $\vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, costituiscono una base, detta *base canonica*, di $\mathbb{R}^n$. Anche in questo caso, le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica sono proprio i coefficienti $\alpha_1, ..., \alpha_n$ (lo studente verifichi quanto abbiamo appena affermato).

Esercizio. Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e sia $\vec{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$. Verificare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^2$, calcolare le coordinate di $\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Soluzione. I vettori di $\mathcal{B}$ sono chiaramente indipendenti e generano $\mathbb{R}^2$: il sistema lineare $\alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ammette soluzioni per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Imponendo $\alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ si trovano le coordinate di $\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$: $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 5$. $\boxdot$

Sia V uno spazio vettoriale. Nel momento in cui fissiamo una base di V abbiamo a disposizione delle coordinate; associando ad ogni vettore $\vec{v} \in V$ la n^{-pla} delle sue coordinate $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ otteniamo una identificazione di V con $\mathbb{R}^n$.

Lo studio della dipendenza lineare ed il problema della determinazione di una base di uno spazio vettoriale si basano su tre osservazioni fondamentali.

Osservazione 16. Se $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ allora $\mathrm{Span}\mathcal{S}' \subseteq \mathrm{Span}\mathcal{S}$.

Osservazione 16′. Se $\mathcal{S}$ è un insieme indipendente di vettori e $\vec{w} \notin \mathrm{Span}\mathcal{S}$, allora l'insieme $\mathcal{S} \cup \{w\}$ è anch'esso un insieme indipendente di vettori.

Osservazione 16″. Sia $\vec{w} \in \mathcal{S}$ e supponiamo che $\vec{w}$ è combinazione lineare degli altri vettori di $\mathcal{S}$, cioè supponiamo che esistono $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k \in \mathcal{S}$ e $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$\vec{w} \quad = \quad \alpha_1\vec{v}_1 + ... + \alpha_k\vec{v}_k \ .$$

Sia $\mathcal{S}' := \mathcal{S} - \{\vec{w}\}$ l'insieme ottenuto togliendo $\vec{w}$ dall'insieme $\mathcal{S}$. Allora

$$\mathrm{Span}\mathcal{S}' \quad = \quad \mathrm{Span}\mathcal{S} \ .$$

Dimostrazione. L'osservazione (16) è assolutamente ovvia. La (16′) è anch'essa immediata. Dimostriamo la (16″). A tal fine dobbiamo provare che ogni elemento di $\mathrm{Span}\mathcal{S}$ appartiene anche a $\mathrm{Span}\mathcal{S}'$ (il viceversa segue da 16). Se $\vec{u} \in \mathrm{Span}\mathcal{S}$ allora è possibile scrivere $\vec{u} = \lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_r\vec{u}_r$, dove gli $\vec{u}_i$ stanno in $\mathcal{S}$. Se tra gli $\vec{u}_i$ non c'è $\vec{w}$ non c'è nulla da dimostrare perché la combinazione lineare scritta è anche una combinazione lineare di vettori di $\mathcal{S}'$. Se tra gli $\vec{u}_i$ c'è $\vec{w}$, ad esempio $\vec{u}_1 = \vec{w}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \vec{u} \quad &= \quad \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + ... + \lambda_r\vec{u}_r \ , \\ &= \quad \lambda_1(\alpha_1\vec{v}_1 + ... + \alpha_k\vec{v}_k) + \lambda_2\vec{u}_2 + ... + \lambda\vec{u}_r \ . \end{aligned}$$

Quest'ultima espressione scritta è una combinazione lineare di vettori di $\mathcal{S}'$.

$\square$

Supponiamo di avere un insieme finito di vettori $\mathcal{S}$ e di essere interessati esclusivamente a $\mathrm{Span}\mathcal{S}$; l'osservazione (16″) ci consente di buttare via un vettore $\vec{v} \in \mathcal{S}$ qualora sia combinazione lineare degli altri vettori di $\mathcal{S}$, quindi ci consente di trovare una base di $\mathrm{Span}\mathcal{S}$:

Algoritmo 17 (dell'estrazione di una base). Consideriamo un primo vettore (non nullo) di $\mathcal{S}$; scegliamo un secondo vettore, se questo è un multiplo del primo lo scartiamo, altrimenti lo teniamo; scegliamo un terzo vettore e se questo è combinazione lineare dei primi due lo scartiamo, altrimenti lo teniamo. Quindi iteriamo il procedimento di scegliere un nuovo vettore e tenerlo solo se non è combinazione lineare di quelli scelti precedentemente (n.b.: per l'osservazione 16′, l'insieme dei vettori che stiamo tenendo è indipendente).

Terminati i vettori di $\mathcal{S}$, avremo trovato la base cercata. Infatti, come già osservato i vettori scelti sono indipendenti, d'altro canto generano anch'essi $\mathrm{Span}\mathcal{S}$ (per l'osservazione 16″).

In particolare, l'algoritmo dell'estrazione di una base ci assicura la seguente proposizione.

Proposizione 18. *Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{S} \subset V$ un sottoinsieme finito che genera V. Esiste una base $\mathcal{B}$ di V contenuta in $\mathcal{S}$, per trovarla è sufficiente applicare l'algoritmo* (17).

Esempio. Consideriamo i vettori $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ e determiniamo una base di $V := \mathrm{Span}\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\right\} \subseteq \mathbb{R}^4$:
prendiamo $\vec{b}_1$, quindi consideriamo $\vec{b}_2$ e lo teniamo perché non è un multiplo di $\vec{b}_1$, consideriamo $\vec{b}_3$ e lo eliminiamo perché è combinazione lineare di $\vec{b}_1$ e $\vec{b}_2$, consideriamo $\vec{b}_4$ e lo teniamo perché non è combinazione lineare degli altri vettori scelti. In definitiva abbiamo che l'insieme $\mathcal{B}' := \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_4\}$ è una base di $\mathrm{Span}\mathcal{S}$.

L'algoritmo dell'estrazione di una base (17) consente anche di effettuare il "completamento ad una base di un insieme indipendente di vettori": dati dei vettori indipendenti $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k$ di uno spazio vettoriale V, possiamo considerare (in questo ordine) i vettori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_m$, dove $\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\}$ è un insieme di vettori che genera V (l'esistenza di quest'insieme di vettori è garantita dall'ipotesi che V è finitamente generato, vedi definizione 13). Applicando l'algoritmo dell'estrazione di una base troviamo una base di V contenente i vettori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k$ (perché sono i primi che scegliamo e sono indipendenti). In particolare, abbiamo provato il teorema del "completamento ad una base di un insieme indipendente di vettori":

Teorema (del completamento). *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e siano $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k$ dei vettori indipendenti di V. Allora esiste una base di V contenente i vettori dati.*

Esercizio. Trovare una base di $\mathbb{R}^4$ contenente i vettori $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Suggerimento: utilizzare i vettori della base canonica per completare l'insieme $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$, cioè si applichi l'algoritmo (17) all'insieme dei vettori $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$.

Proposizione. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato (vedi definizione 13) e sia $\mathcal{B}$ una base di V. Allora $\mathcal{B}$ è costituita da un numero n finito di vettori, il numero n dipende solo da V : se $\mathcal{B}'$ è un'altra base di V allora anche $\mathcal{B}'$ ha n elementi. Inoltre, ogni insieme di vettori $\mathcal{S}$ che ha più di n elementi è linearmente dipendente nonché ogni insieme indipendente costituito da n vettori è una base.*

L'idea della dimostrazione, della quale ometto i dettagli, è che è possibile sostituire uno alla volta i vettori di $\mathcal{B}$ con quelli di $\mathcal{B}'$ mantenendo la proprietà di avere una base di V.

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia $\mathcal{B}$ una base. Si definisce la dimensione di V ponendo

$$\dim V \quad := \quad n \quad = \quad \text{“numero degli elementi di } \mathcal{B}\text{”} .$$

Esercizio. Siano $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$. Si determini una base di $V := \operatorname{Span}\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\right\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

Esercizio. Si determini una base di $\mathbb{R}^3$ contenente il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ una base di un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$. Si determini un'altra base di W.

Esercizio. Determinate le coordinate del vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\}$ quando:

$a)$ $\quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$b)$ $\quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$c)$ $\quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Determinate una base di $\mathbb{R}^3$ contenente il vettore $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

§2. Sottospazi di uno spazio vettoriale e formula di Grassmann.

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale e siano U e W due suoi sottospazi. Si definiscono la loro *somma* e la loro *intersezione* ponendo

$$\begin{aligned} U + W \quad &:= \quad \{\vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \mid \vec{u} \in U,\ \vec{w} \in W\} \\ U \cap W \quad &:= \quad \{\vec{v} \mid \vec{v} \in U,\ \vec{v} \in W\} \end{aligned}$$

Esercizio. Sia V uno spazio vettoriale e U, W due suoi sottospazi. Provare che $U + W = \mathrm{Span}\{U \cup W\}$, dove "$\cup$" denota l'unione di insiemi. Osservare che, in particolare, $U + W$ è anch'esso un sottospazio di V.

Teorema (formula di Grassmann). *Sia V uno spazio vettoriale e siano U, W due suoi sottospazi. Le dimensioni di somma e intersezione di U e W sono legate dalla seguente formula*

$$\dim\big(U+W\big) \quad = \quad \dim U \ + \ \dim W \ - \ \dim\big(U \cap W\big)$$

Dimostrazione. Consideriamo una base $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r\}$ di $U \cap W$ e la completiamo ad una base $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_s\}$ di U nonché ad una base $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_t\}$ di W. Il teorema segue dal fatto che $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_s, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_t\}$ è una base di $U + W$: è chiaro che questi vettori generano $U + W$, d'altro canto sono anche indipendenti per l'esercizio che segue.
Pertanto, $\dim(U+W) = r+s+t = (r+s)+(r+t)-r = \dim U + \dim W - \dim\big(U \cap W\big)$. □

Esercizio. Completare la dimostrazione del teorema precedente provando che se per assurdo esiste una relazione di dipendenza lineare

$$\alpha_1\vec{b}_1 + ... + \alpha_r\vec{b}_r + \alpha_{r+1}\vec{u}_1 + ... + \alpha_{r+s}\vec{u}_s + \alpha_{r+s+1}\vec{w}_1 + ... + \alpha_{r+s+t}\vec{w}_t \quad = \quad \vec{0}$$

si giunge ad una contraddizione.

Esempio. Consideriamo $\mathbb{R}^3$ e due piani distinti U e W passanti per l'origine. Si osservi che la loro intersezione deve essere una retta, quindi ha dimensione 1. Si ha $\dim\big(U+W\big) = 3$ nonché $\dim U + \dim W - \dim\big(U \cap W\big) = 2 + 2 - 1 = 3$.

Per determinare un insieme di generatori dello spazio somma $U + W$ è sufficiente considerare l'unione di un insieme di generatori di U ed un insieme di generatori di W; per determinarne una base è quindi sufficiente applicare l'algoritmo (17) all'insieme considerato.

Per determinare l'intersezione $U \cap W$ bisogna invece risolvere un sistema di equazioni: se $U = \mathrm{Span}\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_h\}$ e $W = \mathrm{Span}\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_k\}$, l'intersezione $U \cap W$ è data dalle combinazioni lineari $\sum_{i=1}^{h} x_i\vec{u}_i$ $\big($ovvero dalle combinazioni lineari $\sum_{i=1}^{k} y_i\vec{w}_i\big)$, dove $x_1, ..., x_h, y_1, ..., y_k$ sono le soluzioni del sistema lineare di $n = \dim V$ equazioni (una per ogni coordinata) in $h + k$ incognite

$$\sum_{i=1}^{h} x_i\,\vec{u}_i \quad = \quad \sum_{i=1}^{k} y_i\,\vec{w}_i\ .$$

Esempio. Siano $U = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}3\\5\\-7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ e $W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}8\\11\\19\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\8\\24\end{pmatrix}\right\}$ due sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} 3\,x_1 + 2x_2 = 8\,y_1 + 9\,y_2 \\ 5\,x_1 + x_2 = 11y_1 + 8\,y_2 \\ -7x_1 - x_2 = 19y_1 + 24y_2 \end{cases}$$

si trova $x_1 = t$, $x_2 = -2t$ (dove t è un parametro libero, vedi capitolo 2). Ne segue che

$$U \cap W = \left\{ \vec{v} = t \cdot \begin{pmatrix}3\\5\\-7\end{pmatrix} - 2t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\3\\-5\end{pmatrix}\right\}.$$

Esercizio. Sia $V = \mathbb{R}^4$, $U = \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, $W = \text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$. Determinate una base dello spazio somma $U + W$ ed una base dell'intersezione $U \cap W$ quando

$$a) \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix}-3\\-2\\5\\3\end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\4\end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix}2\\-2\\3\\2\end{pmatrix};$$

$$b) \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix}-2\\-2\\6\\5\end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}5\\-2\\0\\4\end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix}-3\\-2\\5\\3\end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix}4\\-2\\-1\\2\end{pmatrix};$$

$$c) \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix}-5\\-4\\11\\8\end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix}-3\\-2\\5\\3\end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\7\\7\end{pmatrix}.$$

Inoltre, verificate che le dimensioni degli spazi trovati soddisfano la formula di Grassmann (se non la soddisfano c'è un errore in quello che avete fatto).
...attenzione all'esercizio (c)!

Esercizio. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^{19}$. Determinate le possibili dimensioni della loro intersezione sapendo che $\dim U = 9$, $\dim W = 14$.

Esercizio. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^8$. Supponiamo che $\dim(U \cap W) = 3$ e che $\dim U = 6$. Provare che $3 \leq \dim W \leq 5$.

Soluzione. Per la formula di Grassmann abbiamo $\dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W) - \dim U = \dim(U+W) + 3 - 6 = \dim(U+W) - 3$. Poiché $6 = \dim U \leq \dim(U+W) \leq 8$, si deve avere $3 \leq \dim W \leq 5$.

$\boxdot$

§3. Rango di una matrice.

Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ una matrice.

Definizione. Un *minore* estratto da A è una matrice quadrata ottenuta cancellando alcune righe ed alcune colonne di A. Il *rango* di A, che indicheremo con $\mathrm{rg}A$, è l'ordine[5] massimo di un minore invertibile.

Esempio. Un minore di $A = \begin{pmatrix} -14 & \mathbf{-3} & \mathbf{4} & 2 \\ 5 & -1 & 7 & -9 \\ -9 & \mathbf{-4} & \mathbf{11} & -7 \end{pmatrix}$ è la matrice $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$ ottenuta cancellando la seconda riga, la prima colonna e la quarta colonna di A. Poiché $\det B \neq 0$, il rango di A è maggiore o uguale a 2. D'altro canto la terza riga di A è uguale alla somma delle prime due, ne segue che ogni minore di ordine 3 di A ha il determinante uguale a zero e quindi non può essere invertibile. In definitiva, $\mathrm{rg}A = 2$.

Teorema 19. *Il rango* $\mathrm{rg}A$ *di una matrice* $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *coincide con*

i) *il numero massimo di righe indipendenti di* A;

ii) *il numero massimo di colonne indipendenti di* A.

Questo teorema non lo dimostriamo. Si osservi comunque che, essendo nullo il determinante di una matrice quadrata B le cui righe (ovvero colonne) sono dipendenti, $\mathrm{rg}A$ non può superare né il numero massimo di righe indipendenti di A né il numero massimo di colonne indipendenti di A.

Osservazione. Se A è una matrice a scala, il suo rango è uguale al numero delle righe non nulle. Infatti, se A è una matrice a scala, la matrice che si ottiene cancellando le righe nulle e le colonne che non corrispondono ad alcun pivot[6] è una matrice quadrata, triangolare superiore, con gli elementi sulla diagonale che sono non nulli, e quindi invertibile. L'ordine di tale matrice quadrata, che è uguale al numero delle righe non nulle di A, è il rango di A.

Esempio. Consideriamo la matrice a scala

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & 3 & \mathbf{4} & \mathbf{5} & 6 & 7 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{8} & 9 & \mathbf{10} & \mathbf{11} & 12 & 13 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & -3 & -4 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-5} & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le colonne seconda, terza, quinta e sesta sono quelle dei pivot. Cancellando la quinta riga, la prima, la quarta, la settima e l'ottava colonna si ottiene il minore invertibile di ordine massimo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, si ha $\mathrm{rg}A = 4$.

---

[5] Una matrice quadrata di ordine k è una matrice in $M_{k,k}(\mathbb{R})$.

[6] Un pivot di una matrice a scala è, per definizione, il primo elemento non nullo di una riga non nulla.

Osservazione. Chiaramente, il rango di una matrice è invariante rispetto alle operazioni dell'eliminazione di Gauss ($2'$ del cap. 1, §2).

Esercizio. Determinare il rango delle matrici che seguono.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio. Determinare il rango delle matrici che seguono al variare di k.

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & 2 & 3 & k+2 \\ 4 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ k-1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & 3 \\ 0 & 0 \\ 3k & 9 \\ 2k & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & k-1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 2k-1 & 3 \\ 0 & 0 & k & 3k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4-k & 1 & 0 \\ -2 & k+2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 3k & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k & k-6 & 3k & 2k+12 \\ 0 & 0 & -1 & k+4 & -3 & 2k+8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & -4 & 12 \\ -9 & k & -3k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & k & k & k & k & k \\ 0 & 0 & k & k & k & k \\ 0 & 0 & 0 & k & k & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1-k \\ 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ k^2+k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k^3+k^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \\ k & k \end{pmatrix}.$$

§4. Sottospazi di uno spazio vettoriale II.

In questo paragrafo indichiamo come calcolare la dimensione di uno spazio vettoriale (teorema 20). Osserviamo che se conosciamo la dimensione di uno spazio vettoriale possiamo eseguire l'algoritmo (17) in modo più efficace: se sappiamo a priori che un certo "Span" ha dimensione k, una volta trovati k vettori indipendenti interromperemo l'esecuzione dell'algoritmo.

Consideriamo $W := \mathrm{Span}\left\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k\right\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Possiamo disporre le coordinate dei vettori $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k$ in una matrice: definiamo una matrice in $M_{n,k}$ ponendo le coordinate del vettore $\vec{b}_i$ nella i^{-esima} colonna. La matrice appena introdotta è qualcosa del tipo

$$B \quad := \quad \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{b}_1 & ... & \vec{b}_k \\ | & & | \end{pmatrix},$$

la chiameremo *matrice associata* ai vettori $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k$.

Teorema 20. *Consideriamo* $W = \mathrm{Span}\left\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k\right\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *e la matrice* B *associata ai vettori* $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k$. *Si ha*

$$\dim W \quad = \quad \mathrm{rg} B\ .$$

Inoltre, se $i_1, ..., i_r$ *sono le colonne di* B *individuate da un minore invertibile di rango massimo* r *(vedi la definizione di rango), l'insieme* $\{\vec{b}_{i_1}, ..., \vec{b}_{i_r}\}$ *è una base di* W.

Dimostrazione. La dimensione di W è il numero massimo di vettori indipendenti dell'insieme $\left\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k\right\}$. Per il teorema (19) questo numero è uguale al rango r di B. Inoltre, essendo le colonne di posto $i_1, ..., i_r$ indipendenti, i corrispondenti vettori devono costituire una base di W.

□

Esempio. Consideriamo il sottospazio $V := \mathrm{Span}\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\right\}$ di $\mathbb{R}^3$, dove $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice associata ai vettori $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ è la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & 2 \\ 2 & -3 & 7 & -1 \\ 5 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$. Poiché $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ è un minore invertibile di ordine tre ($\mathrm{rg} B = 3$), l'insieme di vettori $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_4\}$ è una base di V.

Si osservi che lo spazio V di questo esempio è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 3, quindi $V = \mathbb{R}^3$. È un errore non accorgersene!

Esercizio. Determinare la dimensione di $\mathrm{Span}\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\right\}$ quando:

a) $\quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

b) $\quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix}, \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

§5. Sottospazi di uno spazio vettoriale: equazioni parametriche e cartesiane.

Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^n$ ed un suo sottospazio $W = \mathrm{Span}\left\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r\right\}$. Possiamo rienunciare la definizione di "Span" dicendo che lo spazio W è l'insieme delle n^{-ple} $(x_1, ..., x_n)$ che soddisfano le equazioni

$$
(21) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & b_{1,1}t_1 + ... + b_{1,r}t_r \\ & ... & \\ x_n & = & b_{n,1}t_1 + ... + b_{n,r}t_r \end{array} \right.
$$

per qualche $t_1, ..., t_r \in \mathbb{R}$. Qui, come al solito, $B = (b_{i,j})$ è la matrice associata ai vettori $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r$: per definizione, $b_{i,j}$ è la i^{-esima} coordinata di $\vec{b}_j$.

Definizione. Assumiamo che $\left\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r\right\}$ sia una base di W. Le equazioni (21) si chiamano *equazioni parametriche* dello spazio W e le variabili $t_1, ..., t_r$ si chiamano *parametri* o *coordinate.*

Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^n$ ed una matrice di coefficienti $\Lambda = \left(\lambda_{i,j}\right) \in M_{s,n}(\mathbb{R})$. Abbiamo visto (esempio 2 del §1) che l'insieme U delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$
(22) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_{1,1}x_1 + ... + \lambda_{1,n}x_n & = & 0 \\ ... & & \\ \lambda_{s,1}x_1 + ... + \lambda_{s,n}x_n & = & 0 \end{array} \right.
$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Definizione. Le equazioni del sistema lineare omogeneo (22) si chiamano *equazioni cartesiane* dello spazio U.

Il passaggio da equazioni parametriche a cartesiane di un sottospazio W si effettua semplicemente "eliminando i parametri". Il passaggio inverso, ovvero quello da equazioni cartesiane a parametriche, si effettua risolvendo il sistema lineare.

Esempio. Per determinare delle equazioni cartesiane del sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$
W \quad := \quad \mathrm{Span}\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\right\}, \qquad \text{dove } \vec{b}_1 := \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix},
$$

dopo aver verificato che $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ è una base di W, si scrive il sistema di equazioni

$$
(23) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & 8t_1 + 3t_2 \\ x_2 & = & 6t_1 + 2t_2 \\ x_3 & = & 9t_1 + 11t_2 \\ x_4 & = & 4t_1 + 5t_2 \end{array} \right. ,
$$

quindi dalle ultime due equazioni si determina $t_1 = 5x_3 - 11x_4$, $t_2 = -4x_3 + 9x_4$. Sostituendo infine le espressioni trovate nelle prime due equazioni del sistema (23), si trovano le equazioni cartesiane di W :

$$
\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & 8(5x_3 - 11x_4) + 3(-4x_3 + 9x_4) \\ x_2 & = & 6(5x_3 - 11x_4) + 2(-4x_3 + 9x_4) \end{array} \right. ,
$$

ovvero le equazioni

$$\begin{cases} x_1 - 28x_3 + 61x_4 = 0 \\ x_2 - 22x_3 + 48x_4 = 0 \end{cases}.$$

Esempio. Per determinare delle equazioni parametriche del sottospazio U di $\mathbb{R}^5$ definito dalle equazioni

$$(24) \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases},$$

si risolve il sistema lineare (24), quindi si scrivono le soluzioni nella forma (6) del §2 del capitolo 2:

$$\left\{ x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5 \;\middle|\; \begin{array}{lcl} x_1 & = & -3t_1 - 3t_2 \\ x_2 & = & 6t_1 \\ x_3 & = & -14t_2 \\ x_4 & = & -30t_2 \\ x_5 & = & 6t_2 \end{array} \right\}.$$

Le equazioni appena trovate sono equazioni parametriche dello spazio U.

Osservazione. Sistemi diversi possono rappresentare lo stesso spazio, ad esempio il sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 5x + z = 0 \end{cases}$ ed il sistema $\begin{cases} 9x - 6y + z = 0 \\ -x + 9y + z = 0 \end{cases}$ definiscono la stessa retta dello spazio $\mathbb{R}^3$.

Esercizio. Provare che i due sistemi dell'osservazione precedente sono equivalenti, quindi dedurre che definiscono la stessa retta. Risolvere i due sistemi, quindi trovare delle equazioni parametriche della retta che definiscono.

Esercizio. Determinare delle equazioni cartesiane dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$

$$U = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2\\3\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\\2\\1 \end{pmatrix} \right\}; \qquad V = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\5\\1 \end{pmatrix} \right\};$$

$$W = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2\\3\\-5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3\\2\\1 \end{pmatrix} \right\}; \qquad H = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2\\2\\3\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\\4\\2\\1 \end{pmatrix} \right\};$$

$$K = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2\\2\\3\\-7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\\4\\1\\-9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\4\\1\\-6 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio. Determinare delle equazioni parametriche dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$U = \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}; \qquad V = \left\{ x_1 - 2x_3 = 0; \right.$$

$$W = \left\{ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0; \right. \qquad H = \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Esercizio. Determinare delle equazioni parametriche dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U \;=\; \begin{cases} x_1 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} ; \qquad V \;=\; \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} ;$$

$$W \;=\; \begin{cases} -3x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} ; \qquad H \;=\; \left\{ x_1 - 2x_3 = 0 \right. .$$

Abbiamo visto che la dimensione dello spazio $W = \mathrm{Span}\left\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r\right\}$ è uguale al rango della matrice B associata ai vettori $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r$ (teorema 20). Anche quando uno spazio è definito da equazioni cartesiane sappiamo calcolarne la dimensione. Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è definito da s equazioni cartesiane, ci si aspetta che la sua dimensione sia $\dim U = n - s$; questo perché ogni equazione "dovrebbe far scendere di uno la sua dimensione". Poiché potremmo avere delle equazioni ripetute più volte o che comunque non aggiungono nulla al sistema perché possono essere dedotte dalle altre, a priori possiamo solamente affermare che risulta $\dim U \geq n - s$. Vale il teorema che segue.

Teorema 25. *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ lo spazio vettoriale definito dalle equazioni cartesiane*

$$\begin{cases} \lambda_{1,1}x_1 + ... + \lambda_{1,n}x_n = 0 \\ ... \\ \lambda_{s,1}x_1 + ... + \lambda_{s,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Si ha

$$\dim U \;=\; n \;-\; \mathrm{rg}\Lambda \, ,$$

dove $\Lambda = \left(\lambda_{i,j}\right) \in M_{s,n}(\mathbb{R})$ è la matrice associata al sistema di equazioni.

Esercizio. Verificare che le dimensioni degli spazi dei due esercizi precedenti sono quelle previste dal teorema (25).

Esercizio. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^{19}$. Supponiamo che U sia definito da 4 equazioni cartesiane e che $\dim W = 10$. Provare che $6 \leq \dim(U \cap W) \leq 10$ e che $15 \leq \dim(U + W) \leq 19$.

Soluzione. La prima stima da effettuare riguarda la dimensione di U che deve essere compresa tra 15 e 19, infatti U è definito da 4 equazioni (che a priori potrebbero essere tutte banali). La stessa stima vale per la dimensione dello spazio somma $U + W$. A questo punto la stima $6 \leq \dim(U \cap W) \leq 10$ segue dalla formula di Grassmann. Un altro modo di ottenere quest'ultima stima è il seguente: $U \cap W$ si ottiene considerando i vettori di W le cui coordinate soddisfano le equazioni che definiscono U; i.e. è un sottospazio di uno spazio di dimensione 10, definito da 4 equazioni. Quindi la sua dimensione deve essere compresa tra $6 = 10 - 4$ e 10 .

$\boxdot$

Capitolo 5.

§0. Richiami di insiemistica.

Siano A e B due insiemi. Una *applicazione* o *funzione* da A a B è una legge f che ad ogni elemento di A associa un elemento di B. Una tale legge la denoteremo scrivendo $f: A \to B$.

Consideriamo un'applicazione $f: A \to B$. Dato $a \in A$, l'elemento $f(a)$ si chiama *immagine di a.* L'immagine di f, che denotiamo scrivendo $\mathrm{Im} f$, è il sottoinsieme di B costituito da tutti gli elementi del tipo $f(a)$ (con a che varia tra gli elementi di A).

Definizione. Sia $f: A \to B$ una applicazione

i) se $\mathrm{Im} f = B$ diciamo che f è *suriettiva*;

ii) se elementi distinti di A hanno immagini distinte diciamo che f è *iniettiva*;

iii) se f è sia suriettiva che iniettiva, diciamo che è *biunivoca*;

iv) fissato $b \in B$, l'insieme degli elementi $a \in A$ tali che $f(a) = b$ si chiama *fibra* (o immagine inversa) di b e si denota con $f^{-1}(b)$.

Si osservi che f è iniettiva se e solo se ogni sua fibra è l'insieme vuoto oppure è costituita da un solo elemento, f è suriettiva se e solo se ogni sua fibra è non-vuota.

§1. Applicazioni lineari.

Cominciamo brutalmente con due definizioni generali, subito dopo studiamo l'esempio delle applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$.

Definizione 1. Siano V e W due spazi vettoriali. Una applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} L: & V & \longrightarrow & W \\ & \vec{v} & \longmapsto & \vec{w} \end{array}$$

è una legge che ad ogni vettore $\vec{v} \in V$ associa un vettore $\vec{w} = L(\vec{v}) \in W$, che soddisfa le due proprietà:

$$(1') \qquad \begin{array}{lcl} L(\vec{v} + \vec{w}) & = & L(\vec{v}) + L(\vec{w}), \quad \forall \ \vec{v}, \vec{w} \in V; \\ L(\lambda \cdot \vec{v}) & = & \lambda \cdot L(\vec{v}), \quad \forall \ \vec{v} \in V, \ \lambda \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Definizione 2. Sia $L: V \to W$ una applicazione lineare. Si definiscono *nucleo* e *immagine* di L, che si indicano rispettivamente scrivendo $\ker L$ (dall'inglese "kernel" = "nucleo") ed $\mathrm{Im} L$ (dall'inglese "image" = "immagine"), ponendo

$$\begin{array}{lcl} \ker L & := & \left\{ \vec{v} \in V \,\middle|\, L(\vec{v}) = \vec{0} \right\}; \\ \mathrm{Im} L & := & \left\{ \vec{w} \in W \,\middle|\, \vec{w} = L(\vec{v}) \ \text{ per qualche } \ \vec{v} \in V \right\}. \end{array}$$

Voglio sottolineare che i vettori del nucleo di L sono quei vettori in V che vengono mandati nel vettore nullo, quindi $\ker L = L^{-1}(\vec{0})$ è la fibra del vettore nullo di W. I vettori nell'immagine di L, come la parola stessa suggerisce, sono quei vettori $\vec{w} \in W$ tali che c'è almeno un vettore $\vec{v} \in V$ al quale L associa $\vec{w}$.

Definizione 3. Consideriamo gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$. Si definisce l'applicazione L_A associata ad una matrice $A = \big(a_{i,j}\big) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ponendo

$$\begin{array}{rccc} L_A : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{array}$$

dove, come sempre, "$\cdot$" denota il prodotto righe per colonne tra matrici.

Proposizione. *La funzione L_A appena introdotta è lineare.*

Dimostrazione. Infatti, per la proprietà distributiva del prodotto righe per colonne,

$$\begin{aligned} L_A(\vec{v} + \vec{w}) &= A \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = A \cdot \vec{v} + A \cdot \vec{w} = L_A(\vec{v}) + L_A(\vec{w}) , \\ L_A(\lambda\vec{v}) &= A \cdot (\lambda\vec{v}) = \lambda\big(A \cdot \vec{v}\big) = \lambda L_A(\vec{v}) . \end{aligned}$$

per ogni $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

Esempio. Consideriamo l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} L_A : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha + 7\beta \\ 2\alpha + 4\beta \\ 5\alpha + \beta \end{pmatrix} \end{array}$$

Osserviamo che svolgendo il prodotto righe per colonne si ottiene

$$L_A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{nonché} \quad L_A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

ovvero nelle colonne della matrice A ci sono scritte le coordinate delle immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio. Sia L_A l'applicazione lineare dell'esempio. Calcolare $L_A\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Esempio. Determiniamo ora nucleo e immagine dell'applicazione lineare L_A dell'esempio precedente. Per definizione,

$$\ker L_A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; L_A(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3\alpha + 7\beta \\ 2\alpha + 4\beta \\ 5\alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} 3\alpha + 7\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \\ 5\alpha + \beta = 0 \end{cases} ,$$

troviamo $\alpha = \beta = 0$, quindi il nucleo di L_A è costituito solo dal vettore nullo: $\ker L_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

I vettori dell'immagine di L_A sono tutti i vettori in $\mathbb{R}^3$ del tipo $\begin{pmatrix} 3\alpha + 7\beta \\ 2\alpha + 4\beta \\ 5\alpha + \beta \end{pmatrix}$, dove α e β sono "parametri liberi"; pertanto, ricordando la definizione di "Span", si ha

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im} L_A &= \left\{ \begin{pmatrix} 3\alpha + 7\beta \\ 2\alpha + 4\beta \\ 5\alpha + \beta \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha,\, \beta \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha,\, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

I risultati trovati nell'esempio si generalizzano. Innanzi tutto, guardando la definizione (3) è del tutto evidente che vale l'osservazione che segue.

Osservazione. Si consideri $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Le coordinate dell'immagine dello $i^{\text{-esimo}}$ vettore $\vec{e}_i$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ sono scritte nella $i^{\text{-esima}}$ colonna di A.

Osservazione. Anche i conti della formula (4) si generalizzano: data $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, si ha

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im} L_A &= \left\{ \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{m,j} \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned} \tag{4'}
$$

Questo prova che l'immagine di L_A è lo "Span delle colonne della matrice A". In particolare,

$$\dim \operatorname{Im} L_A = \operatorname{rg} A \tag{5}$$

Per quel che riguarda l'iniettività e la suriettività di L_A vale la proposizione che segue.

Proposizione. *Si consideri* $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. *Si ha che*

i) L_A *è iniettiva se e solo se* $\ker L_A = \{\vec{0}\}$;

ii) L_A *è suriettiva se e solo se* $\operatorname{rg} A = m$ (*che è la massima possibile*).

Dimostrazione. Poiché $L_A(\vec{0}) = \vec{0}$, l'iniettività di L_A implica $\ker L_A = \{\vec{0}\}$. Viceversa, se ci sono due vettori distinti $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ che hanno la stessa immagine $\vec{w}$, si ha $L_A(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = L_A(\vec{v}_1) - L_A(\vec{v}_2) = \vec{w} - \vec{w} = \vec{0}$, ovvero $\ker L_A \neq \{\vec{0}\}$.
Ora proviamo l'affermazione *ii*). Per l'osservazione precedente, l'immagine di L_A è lo Span dei vettori costituiti dalle colonne di A; la dimensione di tale Span uguaglia il rango di A per il teorema (20) del capitolo 4, §4.

□

Abbiamo visto che $\mathrm{Im}\, L_A$ è uno Span, in particolare è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$. Questo risultato si generalizza all'affermazione che l'immagine di una applicazione lineare tra spazi vettoriali (qualsiasi) è un sottospazio vettoriale del codominio. L'affermazione analoga vale anche per il nucleo di una applicazione lineare. In definitiva, vale la proposizione che segue.

Proposizione. *Sia* $L : V \longrightarrow W$ *una applicazione lineare. Si ha che*

$$\begin{aligned} &\ker L \quad \text{è un sottospazio di} \quad V\,; \\ &\mathrm{Im}\, L \quad \text{è un sottospazio di} \quad W\,. \end{aligned}$$

Per dimostrare quanto affermato è sufficiente verificare che sussistono le condizioni (9′) del capitolo 4, §1. Questa verifica è veramente facile e la lascio per esercizio.

Proposizione. *Sia* $L : V \longrightarrow W$ *una applicazione lineare. Si ha che*

(6) $$\dim V \;=\; \dim \mathrm{Im}\, L \;+\; \dim \ker L$$

Dimostrazione. È sufficiente provare che se completiamo una base $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_s\}$ di $\ker L$ ad una base $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_s, \vec{c}_1, ..., \vec{c}_r\}$ di V, l'insieme di vettori $\{L(\vec{c}_1), ..., L(\vec{c}_r)\}$ è una base di $\mathrm{Im}\, L$.
Ora proviamo che $\{L(\vec{c}_1), ..., L(\vec{c}_r)\}$ è una base di $\mathrm{Im}\, L$. Chiaramente, $\mathrm{Span}\{L(\vec{c}_1), ..., L(\vec{c}_r)\} = \mathrm{Span}\{\vec{0}, ..., \vec{0}, L(\vec{c}_1), ..., L(\vec{c}_r)\} = \mathrm{Span}\{L(\vec{b}_1), ..., L(\vec{b}_s), L(\vec{c}_1), ..., L(\vec{c}_r)\} = \mathrm{Im}\, V$. D'altro canto, se i vettori $L(\vec{c}_1), ..., L(\vec{c}_r)$ fossero linearmente dipendenti, ovvero se esistessero dei coefficienti (non tutti nulli) $\lambda_1, ..., \lambda_r$ tali che $\sum \lambda_i L(\vec{c}_1) = \vec{0}$, per la linearità di L si avrebbe anche $L\big(\sum \lambda_i \vec{c}_1\big) = \vec{0}$, quindi si avrebbe $\sum \lambda_i \vec{c}_1 \in \ker L = \mathrm{Span}\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_s\}$. Questo non è possibile perché, per ipotesi, i vettori $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_s, \vec{c}_1, ..., \vec{c}_r$ sono indipendenti.

□

Esercizio. Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} L : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si determini una base di $\ker L$, si completi la base trovata ad una base di $\mathbb{R}^4$, si verifichi che le immagini dei vettori che sono stati aggiunti per effettuare tale completamento costituiscono una base dell'immagine di L.

Esercizio. Per ognuna delle matrici che seguono, si consideri l'applicazione lineare associata e se ne determini una base del nucleo ed una base dell'immagine.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 12 & 4 \\ -2 & -4 & -6 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dall'uguaglianza (6) segue che $\dim \operatorname{Im} L = \dim V$ se e solo se $\dim \ker V = 0$. Quindi, nell'ipotesi che si abbia $\dim V = \dim W$, l'applicazione lineare $L : V \to W$ è suriettiva se e solo se è iniettiva.

Proposizione 7. *Consideriamo l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^n$ in se stesso associata alla matrice A, $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Le affermazioni che seguono sono equivalenti tra loro:*

i) L_A *è suriettiva;*

ii) L_A *è iniettiva;*

iii) $\operatorname{rg} A = n$.

Ad una matrice $A \in M_{m,n}$ abbiamo associato una applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Viceversa, data una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è possibile trovare una matrice che la rappresenta (detta matrice associata ad L) : si ha $L = L_A$, dove A è la matrice le cui colonne sono le immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$. In definitiva c'è una corrispondenza biunivoca

$$\Big\{ \text{ matrici in } M_{m,n}(\mathbb{R}) \Big\} \qquad \leftrightarrow \qquad \Big\{ \text{ applicazioni lineari } L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \Big\}.$$

Modulo questa identificazione, il prodotto righe per colonne tra matrici corrisponde alla composizione di applicazioni lineari:

Proposizione. *Siano $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ed $L_B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ due applicazioni lineari. Ha senso considerare la composizione*

$$L_B \circ L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k .$$

Si ha

$$L_B \circ L_A = L_{B \cdot A} . \tag{8}$$

Esempio. Consideriamo le due applicazioni lineari (vedi l'esempio del capitolo 3, §1: le matrici sono le stesse)

$$\begin{aligned} L : \quad & \mathbb{R}^4 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M : \quad & \mathbb{R}^3 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La composizione $M \circ L$ è l'applicazione (verificarlo)

$$\begin{aligned} T : \quad & \mathbb{R}^4 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 11 \\ 2 & -31 & -10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice di questa composizione coincide con il prodotto della matrice associata ad M per la matrice associata ad L (verificarlo).

Esercizio. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Si calcoli, e si descriva esplicitamente (secondo le notazioni della definizione 3),

$$L_A \,, \qquad L_A \circ L_A \,, \qquad L_A \circ L_A \circ L_A \,, \qquad \left(L_A\right)^k = L_A \circ \ldots \circ L_A \text{ (ripetuto k volte).}$$

Esercizio. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Si calcoli, e si descriva esplicitamente,

$$L_A \circ L_B \,, \quad L_B \circ L_A \,, \quad L_A \circ L_B \circ L_C \,, \quad L_A \circ L_A \circ L_A \,, \quad L_B \circ L_C \circ L_C \,, \quad L_C \circ L_{(C^{-1})} \,, \quad L_{(A^3)} \,.$$

Esercizio. Per ognuna delle applicazioni dell'esercizio precedente si determini l'immagine del vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Consideriamo ora il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ e l'applicazione lineare: $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x} \mapsto \vec{y} = A\vec{x}$. Chiaramente, le soluzioni del sistema lineare sono i vettori della fibra (i.e. immagine inversa) di $\vec{b}$. In particolare, la compatibilità del sistema equivale alla proprietà $\vec{b} \in \operatorname{Im} L_A$. Alla luce di questa considerazione, dell'uguaglianza (4′) di questo capitolo e del teorema (19) del capitolo 4, abbiamo il teorema che segue.

Teorema (di Rouché-Capelli). *Sia* $A\vec{x} = \vec{b}$ *un sistema lineare di* m *equazioni in* n *incognite. Indichiamo con* $\widetilde{A}$ *la matrice completa associata a questo sistema lineare (stiamo usando le stesse notazioni del capitolo 2). Le affermazioni che seguono sono equivalenti.*

i) $A\vec{x} = \vec{b}$ *è compatibile;*

ii) $\vec{b} \in \operatorname{Im} L_A$;

iii) $\vec{b} \in$ Span{"colonne di A"};

iv) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \widetilde{A}$.

Notazione. In seguito, scriveremo anche:

$\ker A$, intendendo $\ker L_A$;

$\operatorname{Im} A$, intendendo $\operatorname{Im} L_A$.

Esercizio. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Calcolare $L_A \circ L_A \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Sia $L : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^{11}$ una applicazione lineare rappresentata da una matrice $A \in M_{11,7}(\mathbb{R})$ di rango 5. Calcolare $\dim \ker L$ e $\dim \operatorname{Im} L$.

Esercizio. Sia $L : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^5$ una applicazione lineare e sia $W \subseteq \mathbb{R}^8$ un sottospazio di dimensione 6. Provare che $\dim\left(\ker L \cap W\right) \geq 1$.

Soluzione. Per l'uguaglianza (6) abbiamo $\dim \ker L = \dim \mathbb{R}^8 - \dim \operatorname{Im} L \geq 8 - 5 = 3$. Per la formula di Grassmann abbiamo
$\dim\left(\ker L \cap W\right) = \dim \ker L + \dim W - \dim\left(\ker L + W\right) \geq 3 + 6 - 8 = 1$. $\boxdot$

Capitolo 6.

§1. Trasformazioni lineari di uno spazio vettoriale.

Concentriamo la nostra attenzione sulle applicazioni di $\mathbb{R}^n$ in se stesso dette anche trasformazioni di $\mathbb{R}^n$.

Per cominciare con un esempio, consideriamo la seguente *dilatazione*

$$\begin{array}{rccc} L\ : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

È abbastanza chiaro cosa fa questa applicazione: prende il piano e lo dilata nella direzione dell'asse delle ascisse. Si osservi che il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ha per immagine il punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, mentre il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ viene mandato in se stesso. Ma ora consideriamo l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} M\ : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix} \end{array}$$

Non è affatto chiaro a priori come si comporta questa applicazione, ma basta accorgersi del fatto che il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ha per immagine il punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, mentre il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ viene mandato in se stesso, per rendersi conto che questa applicazione è molto simile alla precedente. Infatti, esattamente come la precedente applicazione, anche M dilata il piano in una direzione e lascia fissati i punti della retta ortogonale a tale direzione, solo che questa volta la direzione lungo la quale stiamo dilatando il piano non è quella dell'asse delle ascisse bensì è quella della retta $x = y$.

Queste considerazioni suggeriscono che per comprendere la geometria di una trasformazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è importante vedere se ci sono delle direzioni privilegiate, ovvero dei sottospazi di $\mathbb{R}^n$ che vengono mandati in se stessi, più precisamente è importante domandarsi se esistono dei sottospazi sui quali L agisce in un modo particolarmente semplice: è la moltiplicazione per una costante λ.

Definizione. Sia $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow R^n$ una trasformazione lineare e supponiamo che esistono $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{w}_0 \in \mathbb{R}^n$, con $\vec{w}_0 \neq \vec{0}$, tali che

$$L(\vec{w}_0) \quad = \quad \lambda \vec{w}_0 \ .$$

In questo caso diciamo che λ è un *autovalore* della trasformazione L e che lo spazio

$$W_\lambda \quad := \quad \left\{ \vec{w} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; L(\vec{w}) = \lambda \vec{w} \right\}$$

ne è il relativo *autospazio.* I vettori $\vec{w}$ che soddisfano la proprietà indicata si chiamano *autovettori* (di L e di autovalore λ).

Le definizioni di autovalore, autovettore e autospazio possono riferirsi anche ad una matrice quadrata A : se λ è un autovalore della trasformazione L_A (vedi def. 3), è lecito dire (per definizione) che λ è un autovalore della matrice A, eccetera.

In questo capitolo discutiamo il problema della determinazione degli autovalori e dei corrispondenti autospazi di una trasformazione di $\mathbb{R}^n$.

Prima di procedere però osserviamo che la definizione si può dare più in generale: sia V uno spazio vettoriale e consideriamo una trasformazione lineare

$$T \; : \quad V \longrightarrow V \, .$$

Definizione. Diciamo che λ è un *autovalore* di T se esiste $\vec{v} \neq 0$ tale che

$$T(\vec{v}) \quad = \quad \lambda \vec{v} \tag{1}$$

L'insieme dei vettori che soddisfano (1) è un sottospazio di V (lo studente dimostri questa affermazione per esercizio). Tale sottospazio si chiama *autospazio* associato all'autovalore λ e si denota con V_λ . Si osservi che

$$V_\lambda \quad = \quad \ker(T - \lambda \mathcal{I}_d)\, , \tag{2}$$

dove $\mathcal{I}_d$ denota l'applicazione identica (che è la trasformazione che manda ogni vettore in se stesso). L'insieme degli autovalori di T si chiama *spettro* di T .

Osservazione 3. Se λ è un autovalore di T , il corrispondente autospazio V_λ , ovvero lo spazio $\ker(T - \lambda \mathcal{I}_d)$ (vedi 2), ha dimensione strettamente positiva.

Teorema. *Autospazi corrispondenti ad autovalori distinti sono indipendenti.*

Questo teorema, che generalizza il risultato dell'esercizio che segue, può essere dimostrato per induzione sul numero degli autospazi che si considerano (noi omettiamo questa dimostrazione).

Esercizio. Provare che due autospazi corrispondenti a due autovalori distinti sono indipendenti (i.e. la loro intersezione è il vettore nullo).

Torniamo a considerare $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (in realtà, tutto quello che stiamo per dire ha perfettamente senso anche per le trasformazioni lineari di uno spazio vettoriale astratto).

Definizione. Il *polinomio caratteristico* di L_A è il polinomio

$$P_{L_A}(\lambda) \quad := \quad \det\big(\, A - \lambda I \,\big) \quad = \quad (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}\mathrm{tr}(A) + \ldots + \det(A)\, ,$$

dove I denota la matrice identica e dove $\mathrm{tr}\, A$, detta *traccia* di A, è per definizione la somma degli elementi sulla diagonale principale di A : $\mathrm{tr}\, A = a_{1,1} + a_{2,2} + \ldots + a_{n,n}$. Naturalmente, per definizione, si può dire "il polinomio caratteristico di A" e si può scrivere $P_A(\lambda)$, intendendo sempre $\det(A - \lambda I)$.

Esempio. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, si ha

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 5 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 16\lambda + 21 . \end{aligned}$$

Esercizio. Calcolare il polinomio caratteristico delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Il numero λ è un autovalore di L_A se e solo se lo spazio $\ker(L_A - \lambda\mathcal{I}_d)$ (vedi 2), ha dimensione positiva. D'altro canto, poiché la matrice associata all'applicazione lineare $L_A - \lambda\mathcal{I}_d$ è la matrice $A - \lambda I$, l'insieme delle radici del polinomio caratteristico è lo spettro di L_A. A questo punto possiamo introdurre due numeri associati a λ :

$$\mu_g(\lambda) := \dim\ker(L_A - \lambda\mathcal{I}_d) = \dim V_\lambda ;$$

$$\mu_a(\lambda) := \text{“molteplicità di } \lambda \text{ come soluzione di } P_A(\lambda) = 0\text{”}.$$

Queste due quantità si chiamano, per definizione, rispettivamente *molteplicità geometrica* e *molteplicità algebrica* dell'autovalore λ. Vale il seguente risultato fondamentale.

Teorema 4. $\mu_g(\lambda) \leq \mu_a(\lambda)$.

Questo teorema non lo dimostriamo.

Esempio. Consideriamo la trasformazione lineare, associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} L : \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ -x+4y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e calcoliamone gli autovalori ed i relativi autospazi. Per prima cosa scriviamo il polinomio caratteristico:

$$P_L(\lambda) := \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 ;$$

poi ne calcoliamo le radici, che sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. A questo punto determiniamo il nucleo della matrice (ovvero della corrispondente trasformazione) $A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

e della matrice $A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Si ha $\ker \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ nonché $\ker \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Quindi, ci sono due autovalori: 2 e 3; i relativi autospazi sono l'autospazio $V_2 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e l'autospazio $V_3 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Entrambi gli autovalori hanno molteplicità algebrica e geometrica uguale a uno.

Esercizio. Calcolare autovalori e autospazi delle matrici che seguono (calcolare anche le molteplicità algebrica e geometrica di ogni autovalore)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Osservazione. Supponiamo che $\vec{v}$ sia un autovettore di A e che λ ne sia il relativo autovalore. Per ogni intero $k \geq 0$ si ha

$$A^k\,\vec{v} \quad = \quad \underbrace{A \cdot ... \cdot A}_{k \text{ volte}}\,\vec{v} \quad = \quad \underbrace{A \cdot ... \cdot A}_{k-1 \text{ volte}}\,\lambda\vec{v} \quad = \quad ... \quad = \quad \lambda^k\,\vec{v}$$

Esercizio. Verificare che $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ è un autovettore della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Calcolarne il relativo autovalore e determinare $A^2\vec{v}$, $A^3\vec{v}$, $A^5\vec{v}$, $A^{14}\vec{v}$.

§2. Problema della diagonalizzazione.

Consideriamo uno spazio vettoriale V ed una trasformazione lineare $T : V \to V$. Abbiamo visto che se fissiamo una base $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ di V, corrispondentemente abbiamo delle coordinate su V (vedi capitolo 4, osservazione 14 e definizione 15). Diciamo che T è rappresentata dalla matrice A se

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{b}_i\right) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{b}_i \,, \qquad \text{dove} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} := A \cdot \vec{\lambda},$$

cioè se $A \cdot \vec{\lambda}$ è il vettore delle coordinate di $T(\vec{v})$ (essendo $\vec{\lambda}$ è il vettore delle coordinate di $\vec{v}$).

Si osservi che quando $V = \mathbb{R}^n$ e $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ è la base canonica, T è rappresentata dalla matrice A se e solo se $T = L_A$.

Il problema della diagonalizzazione è il seguente: dati V e T come sopra, trovare una base di V rispetto alla quale la matrice che rappresenta T è una matrice diagonale. Chiaramente questo è possibile se e solo se esiste una base $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ tale che $T(\vec{b}_i) = \alpha_i \vec{b}_i$, per opportuni $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, i.e. se e solo se esiste una base di autovettori. Infatti, rispetto ad una tale base, T è rappresentata dalla matrice diagonale

$$\Delta(\alpha_1, ..., \alpha_n) \quad := \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \alpha_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Consideriamo $L = L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e chiediamoci: esiste una base di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla quale L è rappresentata da una matrice diagonale? Per l'osservazione precedente, da un punto di visto geometrico sappiamo che una tale base esiste se e solo se esiste una base di autovettori. Ora diciamo due parole sugli aspetti algebrici del problema.

Proposizione. *Sia $L = L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ un'altra base di $\mathbb{R}^n$. Sia B la matrice associata ai vettori $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n$. La matrice che rappresenta L rispetto alla base $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ è la matrice*

$$B^{-1} \cdot A \cdot B$$

Definizione. Due matrici $A, A' \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ si dicono *coniugate* se esiste una matrice invertibile C tale che

$$A' \quad = \quad C^{-1} \cdot A \cdot C$$

Come corollario della proposizione precedente e della definizione data abbiamo la seguente osservazione

Osservazione. La trasformazione lineare $L = L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se esiste una matrice invertibile C tale che $C^{-1} \cdot A \cdot C$ è una matrice diagonale.

Il problema della diagonalizzazione di una matrice A è il problema di trovare una matrice invertibile C tale che $A' = C^{-1} \cdot A \cdot C$ è diagonale. Risolviamo il seguente problema:

Problema. Trovare una matrice invertibile C che diagonalizza la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Scriviamo il polinomio caratteristico di A

$$P_A(\lambda) = \det\big(A - \lambda I\big) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -3 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 12,$$

ne calcoliamo le due radici $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 6$, quindi determiniamo i due autospazi V_2 e V_6 :

$$V_2 = \ker\big(A - 2I\big) = \ker\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\};$$

$$V_6 = \ker\big(A - 6I\big) = \ker\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

La matrice B, associata agli autovettori trovati, è la matrice che diagonalizza A : si ha

$$B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

o meglio,

$$(5) \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$\boxdot$

Osservazione. Sia T la trasformazione lineare di $\mathbb{R}^2$ associata alla matrice A, e sia Δ la matrice che rappresenta T rispetto alla base di autovettori $\{\vec{v}_2, \vec{v}_6\}$. La spiegazione geometrica del risultato ottenuto è la seguente: si ha $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ (infatti $T(\vec{v}_2) = 2\vec{v}_2 + 0\vec{v}_6$ e $T(\vec{v}_6) = 0\vec{v}_2 + 6\vec{v}_6$), d'altro canto, per la proposizione precedente si ha anche $\Delta = B^{-1}AB$.

Avvertenza. Nel risolvere il problema posto abbiamo effettuato delle scelte: abbiamo scelto di considerare $\lambda = 2$ come primo autovalore e $\lambda = 6$ come secondo autovalore; relativamente ai due autovalori trovati, abbiamo scelto gli autovettori $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Naturalmente avremmo potuto considerare $\lambda = 6$ come primo autovalore e $\lambda = 2$ come secondo autovalore, nonché, ad esempio, $\vec{v}_6{}' = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2{}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Seguendo queste scelte avremmo trovato

$$(5') \qquad \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio. Verificare le uguaglianze (5) e (5′).

Ora enuncio un lemma molto importante.

Lemma 6. Se A ed A' sono due matrici coniugate (e.g. $A' = B^{-1}\cdot A\cdot B$), hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Dimostrazione. Si ha $P_{A'}(\lambda) = \det\big(A' - \lambda I\big) = \det\big(B^{-1}\cdot A\cdot B - \lambda I\big) = \det\big(B^{-1}\cdot A\cdot B - B^{-1}\cdot\lambda I\cdot B\big) = \det\big[B^{-1}\cdot(A-\lambda I)\cdot B\big] = \det B^{-1}\cdot\det\big(A-\lambda I)\big)\cdot\det B = \det\big(A - \lambda I\big) = P_A(\lambda)$.

□

In particolare, tutti i coefficienti del polinomio caratteristico sono invarianti per coniugio. Poiché il termine noto ed il coefficiente di $(-\lambda)^{n-1}$ sono rispettivamente determinante e traccia, infatti $\det\big(A-\lambda I\big) = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}\mathrm{tr}(A) + ... + \det(A)$, si ha il seguente corollario.

Corollario. Se A ed A' sono due matrici coniugate, si ha

$$\det A = \det A' \, ; \qquad\qquad \mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, A'$$

(ricordiamo che la traccia di una matrice è la somma degli elementi sulla diagonale).

Corollario. Se A è una matrice diagonalizzabile,

i) il determinante $\det A$ è uguale al prodotto degli autovalori di A;

ii) la traccia $\mathrm{tr}\, A$ è uguale alla somma degli autovalori di A.

Avvertenza: se un autovalore ha molteplicità μ, deve essere ripetuto μ volte.

Dimostrazione. Per ipotesi, la matrice A è coniugata ad una matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix}\delta_1 & ... & 0\\ & \ddots & \\ 0 & ... & \delta_n\end{pmatrix}$. Si ha $\mathrm{tr}\,\Delta = \delta_1 + ... + \delta_n$ e $\det\Delta = \delta_1\cdot ... \cdot\delta_n$, quindi la matrice Δ, i cui autovalori sono proprio $\delta_1, ..., \delta_n$, soddisfa *i)* e *ii)*. D'altro canto A e Δ hanno lo stesso polinomio caratteristico (in particolare, hanno stessi autovalori, stessa traccia e stesso determinante), quindi anche A soddisfa *i)* e *ii)*.

□

Osservazione. All'inizio del paragrafo abbiamo introdotto la matrice A associata ad una trasformazione lineare T di uno spazio vettoriale V, rispetto ad una base $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$. Poi abbiamo visto che la matrice associata a T rispetto ad un'altra base è del tipo $A' = B^{-1}\cdot A\cdot B$. Poiché, per il lemma (6), $P_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda)$, ovvero il polinomio caratteristico non dipende dalla base scelta, abbiamo che

i) ha perfettamente senso scrivere $P_T(\lambda)$ (pur senza avere in mente la scelta di una base), in altri termini $P_T(\lambda)$ dipende solo dalla geometria di T;

ii) tutti i coefficienti di $P_T(\lambda)$ devono avere una interpretazione geometrica.

Inciso. Consideriamo T ed A come nell'osservazione. Poiché il determinante $\det A$ è uno dei coefficienti del polinomio caratteristico $P_A(\lambda)$, per l'osservazione precedente deve avere un senso anche $\det T$. L'interpretazione geometrica del determinante è la seguente: $\det T$ misura di quanto T dilata lo spazio V (è negativo quando T inverte l'orientazione di V). Non spiegherò meglio né formalizzerò questa affermazione.

Esercizio. Trovare una matrice C che diagonalizza la matrice $A = \begin{pmatrix}3 & 1\\ -6 & -4\end{pmatrix}$.

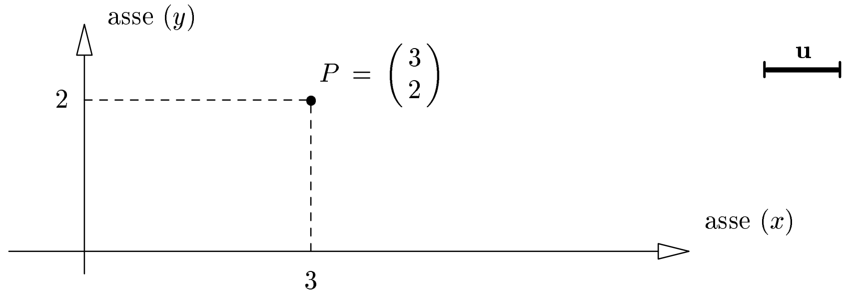
Capitolo 7.

§1. Geometria Euclidea del piano.

In questo capitolo discutiamo alcune applicazioni dell'algebra lineare alla geometria euclidea.

Consideriamo un piano $\mathcal{H}$ (quello che avete conosciuto alle scuole superiori e del quale né allora né mai vedrete una definizione formale), fissiamo un *sistema di riferimento* ed una unità di misura (vedi figura 1). Ad ogni punto $P \in \mathcal{H}$ possiamo associare le sue coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e viceversa (vedi figura 1). In questo modo i punti del piano vengono messi in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $\mathbb{R}^2$.

(fig. 1)



Per ragioni che saranno più chiare in seguito conviene introdurre la nozione di *vettore geometrico*, oggetto che in un certo senso rappresenta uno spostamento e che viene definito nel modo che segue.

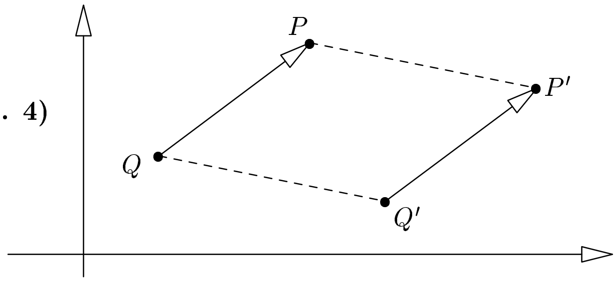
Definizione 2. Un *segmento orientato* $\overline{QP}$ è un segmento che ha un estremo iniziale Q ed un estremo finale P. Dichiariamo equivalenti due segmenti orientati $\overline{QP}$ e $\overline{Q'P'}$ se coincidono a meno di una traslazione del piano (cioè se sono due lati opposti di un parallelogramma). Per definizione, un *vettore geometrico del piano* è una classe di equivalenza di segmenti orientati.

Si osservi che, per definizione, i due segmenti orientati indicati nella figura (4) rappresentano lo stesso vettore geometrico.

Definizione 3. Siano $\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$ le coordinate di due punti Q e P. Per definizione, le coordinate del vettore rappresentato dal segmento orientato $\overline{QP}$ sono $\begin{pmatrix} p_x - q_x \\ p_y - q_y \end{pmatrix}$.

Osserviamo che la definizione è ben posta: le coordinate di un vettore geometrico non dipendono dal segmento orientato scelto per rappresentarlo (vedi figura 4).

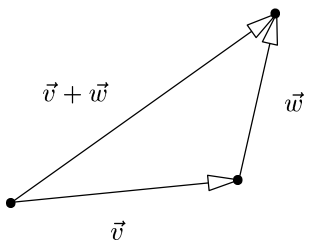
(fig. 4)



chiaramente,
$$\begin{pmatrix} p_x - q_x \\ p_y - q_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_x - q'_x \\ p'_y - q'_y \end{pmatrix}.$$

Osservazione/Definizione. L'insieme dei vettori geometrici è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}^2$. Definiamo la somma di due vettori geometrici ed il prodotto di un vettore geometrico per uno scalare utilizzando le corrispondenti operazioni definite per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$. Chiaramente, queste operazioni arricchiscono l'insieme dei vettori geometrici di una struttura di spazio vettoriale (vedi cap. 4, def. 8). Graficamente, la somma di due vettori geometrici è l'operazione rappresentata nella figura (5).

(fig. 5)



Osserviamo che gli elementi di $\mathbb{R}^2$ possono essere interpretati sia come punti del piano $\mathcal{H}$ che come vettori geometrici di $\mathcal{H}$. Ci stiamo complicando inutilmente la vita? Forse si, ma è estremamente utile mantenere le due nozioni "punti" e "vettori geometrici" distinte. D'ora in poi dirò semplicemente "vettore" invece di "vettore geometrico".

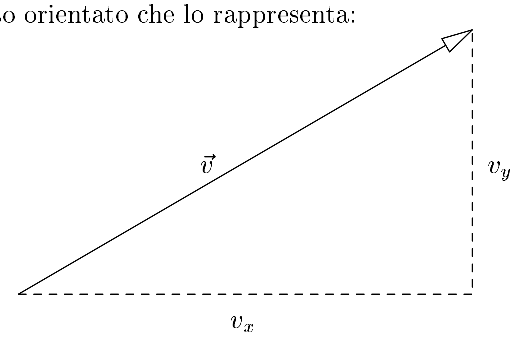
Definizione 6. Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$ due vettori. Si definisce il loro *prodotto scalare* mediante la formula

$$\vec{v}\cdot\vec{w} \quad := \quad v_x w_x \;+\; v_y w_y \;.$$

Si definisce inoltre la norma, o lunghezza, di un vettore ponendo

$$\|\vec{v}\| \quad := \quad \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} \quad = \quad \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

Osservazione 7. Per il teorema di Pitagora, la norma del vettore $\vec{v}$ coincide con la lunghezza di un segmento orientato che lo rappresenta:



Osservazione 7′. Sia $c \in \mathbb{R}$ una costante e sia $\vec{v}$ un vettore. Si ha

$$\|c\vec{v}\| \quad = \quad |c|\cdot\|\vec{v}\|$$

dove $|c|$ denota il valore assoluto di c.

Osservazione 8. È facilissimo verificare che valgono le proprietà che seguono:

i) $\vec{v}\cdot\vec{w} \;=\; \vec{w}\cdot\vec{v}$ (proprietà commutativa);

ii) $\vec{v}\cdot(\vec{w}+\vec{u}) \;=\; \vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{u}$ (proprietà distributiva);

iii) $\lambda(\vec{v}\cdot\vec{w}) \;=\; (\lambda\vec{v})\cdot\vec{w} \;=\; \vec{v}\cdot(\lambda\vec{w})$ (omogeneità).

Proposizione (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). *Si ha*

$$|\vec{v}\cdot\vec{w}| \quad\leq\quad \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|$$

Non dimostreremo questa disuguaglianza.

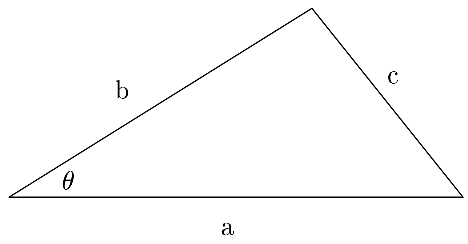
Proposizione 9. *Siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ due vettori del piano. Si ha*[7]

$$\vec{v}\cdot\vec{w} \quad=\quad \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos\theta \tag{9'}$$

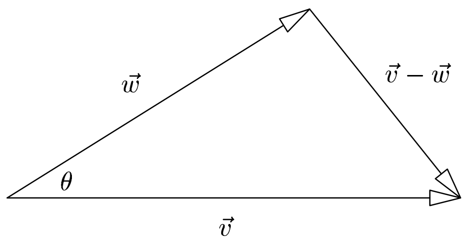
dove θ è l'angolo compreso tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Dimostrazione. Alle scuole superiori abbiamo visto che se a, b, c sono le misure dei lati di un triangolo e θ è l'angolo indicato nella figura, allora

$$a\cdot b\cdot\cos\theta \quad=\quad \tfrac{1}{2}\big(a^2+b^2-c^2\big)$$



Applicando questa regola al triangolo individuato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (per rappresentare i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ usiamo dei segmenti orientati che hanno origine nello stesso punto, non importa quale esso sia)



$a \;=\; \|\vec{v}\|$

$b \;=\; \|\vec{w}\|$

$c \;=\; \|\vec{v}-\vec{w}\|$

troviamo

$$\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos\theta \quad=\quad \frac{1}{2}\big(\|\vec{v}\|^2+\|\vec{w}\|^2-\|\vec{v}-\vec{w}\|^2\big) \quad=\quad \vec{v}\cdot\vec{w}\,.$$

La verifica dell'ultima uguaglianza è un facile esercizio: basta fare il conto esplicito. □

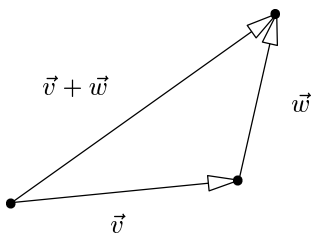
[7] Non abbiamo mai definito l'angolo compreso tra due vettori; rispetto al nostro modo di procedere, sarebbe più corretto definire l'angolo θ compreso tra due vettori non nulli $\vec{v}$ e $\vec{w}$ come l'arco-coseno di $\vec{v}\cdot\vec{w}\,\big/\,\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|$ (numero che per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz ha valore assoluto minore o uguale ad uno).

Osservazione 10. In particolare, due vettori sono perpendicolari se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.

Proposizione (disuguaglianza triangolare)**.** *Si ha* $\|v+w\| \;\leq\; \|v\|+\|w\|$.

Dimostrazione. Infatti, $\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 \;=\; \big(\vec{v}+\vec{w}\big)\cdot\big(\vec{v}+\vec{w}\big) \;=\; \|\vec{v}\|^2+\|\vec{w}\|^2+2\,\vec{v}\cdot\vec{w} \;\leq\; \|\vec{v}\|^2+\|\vec{w}\|^2+2\,\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\| \;=\; \big(\|\vec{v}\|+\|\vec{w}\|\big)^2$ (la disuguaglianza al centro segue dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). □

Osserviamo che questa disuguaglianza ci dice che la lunghezza di un lato di un triangolo non può superare la somma delle lunghezze degli altri due lati:

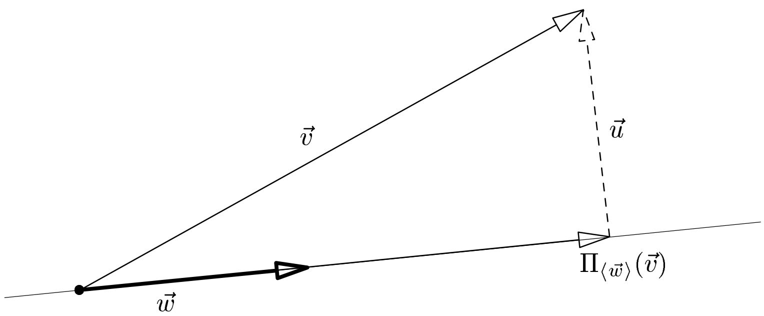


$$\|v+w\| \;\leq\; \|v\|+\|w\|$$

L'osservazione (10) ci consente di calcolare le proiezioni ortogonali (vedi figura). Siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ due vettori del piano ed assumiamo $\vec{w}\neq 0$. La proiezione del vettore $\vec{v}$ lungo la direzione individuata da $\vec{w}$, che denoteremo con $\Pi_{\langle\vec{w}\rangle}(\vec{v})$, è il vettore

$$\Pi_{\langle\vec{w}\rangle}(\vec{v}) \;=\; \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\right)\vec{w} \tag{11}$$

(si osservi che tra le parentesi c'è un numero reale).



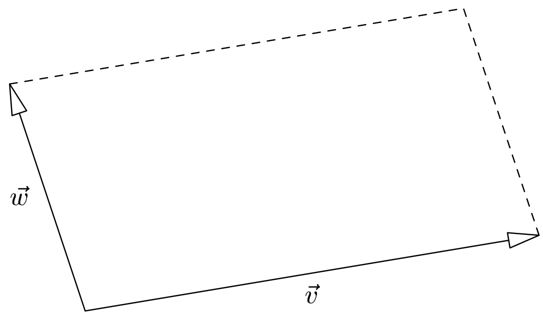
Dimostrazione. Il vettore $\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\right)\vec{w}$ è un multiplo del vettore $\vec{w}$, quindi è sufficiente verificare che il vettore differenza $\vec{u} := \vec{v} - \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\right)\vec{w}$ è effettivamente perpendicolare al vettore $\vec{w}$. Effettuiamo tale verifica (calcoliamo il prodotto scalare $\vec{w}\cdot\vec{u}$) : si ha $\vec{w}\cdot\vec{u} \;=\; \vec{w}\cdot\left[\vec{v}-\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\right)\vec{w}\right] \;=\; \vec{v}\cdot\vec{w}-\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\right)(\vec{w}\cdot\vec{w}) \;=\; \vec{v}\cdot\vec{w}-\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\right)\|\vec{w}\|^2 \;=\; \vec{v}\cdot\vec{w}-\vec{v}\cdot\vec{w} \;=\; 0.$ □

Un altro corollario della proposizione (9) è la proposizione che segue.

Proposizione 12. *Siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ due vettori del piano e sia $\mathcal{A}$ l'area del parallelogramma che individuano (vedi figura). Si ha*

$$\mathcal{A} \quad = \quad |\det\begin{pmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{pmatrix}|\ ,$$

dove le barre verticali denotano la funzione modulo (valore assoluto).



Dimostrazione. Alle scuole superiori abbiamo imparato che $\mathcal{A} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \mathrm{sen}\,\theta$; quindi è sufficiente provare che

$$\|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot \mathrm{sen}^2\theta \quad = \quad \left(\det\begin{pmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{pmatrix}\right)^2 .$$

Si ha $\|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot \mathrm{sen}^2\theta \ = \ \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot (1-\cos^2\theta) \ = \ \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot \cos^2\theta \ = \ \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - \big(\vec{v}\cdot\vec{w}\big)^2$, dove quest'ultima uguaglianza segue dalla proposizione (9). A questo punto resta da provare che

$$\|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - \big(\vec{v}\cdot\vec{w}\big)^2 \quad = \quad \left(\det\begin{pmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{pmatrix}\right)^2 .$$

Per verificare questa formula è sufficiente calcolare esplicitamente ambo i membri dell' uguaglianza (il conto algebrico non ha nulla di interessante quindi lo omettiamo).

$\square$

Esercizio. Dire quali sono le coordinate del vettore che è rappresentato dal segmento orientato il cui estremo iniziale è il punto $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$ ed il cui estremo finale è il punto $Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$. Disegnare i due punti ed il vettore.

Esercizio. Determinare la distanza tra i punti $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Dire quali sono le coordinate dell'estremo finale di un segmento orientato che rappresenta il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ed il cui estremo iniziale è il punto $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Disegnare i due punti ed il vettore.

Esercizio. Determinare l'estremo iniziale del segmento orientato che rappresenta il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 18 \end{pmatrix}$ e che ha per estremo finale il punto $P = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Determinare il coseno dell'angolo compreso tra i vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Trovare un vettore di norma uno.

Esercizio. Trovare un vettore di norma uno parallelo al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Suggerimento: si utilizzi l'osservazione 7.

Esercizio. Trovare un vettore ortogonale al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Trovare un vettore di norma 52 ed ortogonale al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Calcolare l'area del parallelogramma individuato da $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Calcolare l'area del parallelogramma individuato da $\vec{v} = \begin{pmatrix} 31 \\ 7 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}$. Disegnare i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Esercizio. Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Determinare la proiezione del vettore $\vec{v}$ lungo la direzione individuata dal vettore $\vec{w}$.

Esercizio. Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$. Determinare

a) la proiezione del vettore $\vec{v}$ lungo la direzione individuata dal vettore $\vec{w}$;

b) la proiezione del vettore $\vec{v}$ lungo la direzione individuata dal vettore $\vec{u}_1$;

c) la proiezione del vettore $\vec{v}$ lungo la direzione individuata dal vettore $\vec{u}_2$.

§2. Rette nel piano.

Definizione. Una *retta* r del piano $\mathcal{H}$ è il luogo dei punti $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ che soddisfano un'equazione di primo grado, i.e. un'equazione del tipo

$$(13) \qquad ax + by + c = 0,$$

con a e b non entrambi nulli. Tale equazione si chiama *equazione cartesiana* della retta r.

Esiste un modo equivalente di introdurre la nozione di retta:

Definizione. Una *retta* r del piano $\mathcal{H}$ è il luogo dei punti $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ del tipo

$$(14) \qquad \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ è un punto fissato, $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ è un vettore fissato e $t \in \mathbb{R}$ è un parametro (ad ogni valore di t corrisponde un punto di r).

Tale equazione prende il nome di *equazione parametrica* della retta r.

L'equivalenza delle due definizioni enunciate segue immediatamente dalla possibilità di passare da un'equazione cartesiana a equazioni parametriche e viceversa. Risolvendo il "sistema lineare" costituito dall'equazione (13) con i metodi visti nel capitolo II otteniamo, in particolare, equazioni del tipo (14) (dove t è un parametro libero, vedi cap. II, §2). Il passaggio da equazioni parametriche a cartesiane si effettua semplicemente eliminando il parametro libero t, i.e. ricavando t da una delle due equazioni e sostituendo l'espressione trovata nell'altra.

Esempio. Se r è la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 3 - 2t \end{cases},$$

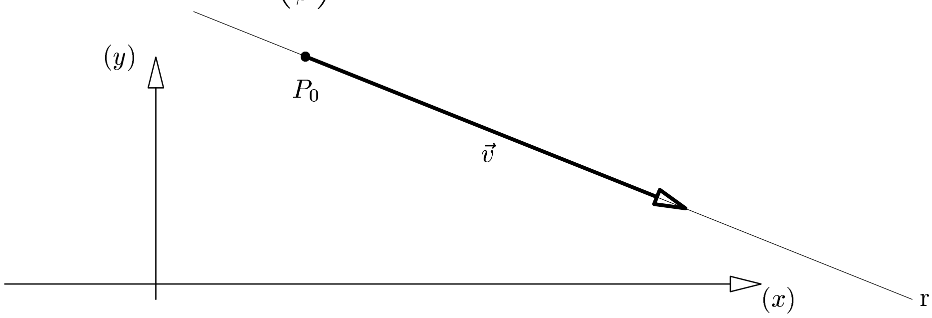
dalla prima equazione troviamo $t = (x-2)/5$, sostituendo questa espressione nella seconda equazione troviamo $y = 3 - 2(x-2)/5 = (19-2x)/5$, ovvero $2x + 5y - 19 = 0$; quest'ultima è un'equazione cartesiana di r.

Esercizio. Determinare un'equazione cartesiana della retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -18 - 15t \\ y = 11 + 6t \end{cases}.$$

Se avete svolto correttamente l'esercizio, avete ritrovato la retta dell'esempio precedente. Chiaramente, equazioni diverse possono rappresentare la stessa retta.

Osservazione. Dalle equazioni parametriche (14) si vede immediatamente qual è la posizione della retta nel piano. Infatti, chiaramente il punto $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ appartiene alla retta, mentre il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ è un vettore parallelo alla retta:



La retta dell'esempio è la retta passante per il punto $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e parallela al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Proposizione 15. *Si ha la seguente interpretazione geometrica: se* $ax + by + c = 0$ *è l'equazione cartesiana di una retta* r, *il vettore* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *è ortogonale alla retta* r.

Dimostrazione. La retta r è parallela alla retta r' di equazione $ax + by = 0$ (dimostratelo per esercizio!), quindi è sufficiente verificare che il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ è ortogonale alla retta r'. Poiché la retta r' passa per l'origine, i punti $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ che ne soddisfano l'equazione rappresentano anche vettori paralleli ad essa. D'altro canto, poiché l'espressione $ax + by$ coincide con quella del prodotto scalare $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, i punti $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ di r' sono i punti del piano le cui coordinate annullano tale prodotto scalare. Infine, per l'osservazione (10) l'annullarsi del prodotto scalare è la condizione di ortogonalità, pertanto l'equazione di r' definisce la retta passante per l'origine ed ortogonale al vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

□

Osservazione 16. La retta r ortogonale al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e passante per il punto $P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$ ha equazione cartesiana

$$ax + by - ap_x - bp_y = 0 .$$

Infatti, l'equazione indicata rappresenta una retta parallela alla retta r (questo segue dalla proposizione precedente) nonché rappresenta una retta passante per il punto P.

Esempio. La retta r ortogonale al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ e passante per il punto

$P = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ ha equazione cartesiana

$$2x + 5y - 23 = 0 .$$

Osservazione 17. La retta passante per i punti $P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$ è descritta dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = p_x + \alpha t \\ y = p_y + \beta t \end{cases}, \qquad \text{dove } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \overline{QP} = \begin{pmatrix} p_x - q_x \\ p_y - q_y \end{pmatrix}$$

Esempio. La retta passante per i punti $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ è descritta dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 2 + 5t \end{cases}$$

Si noti che $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ è il vettore rappresentato dal segmento orientato $\overline{QP}$.

Esercizio. Determinare un'equazione cartesiana della retta r passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ e parallela alla retta s di equazione $2x - 3y + 1 = 0$.

Soluzione. Le rette parallele alla retta s sono descritte da equazioni del tipo $2x - 3y + c = 0$ (convincersene per esercizio). Imponendo il passaggio per il punto P troviamo $2 \cdot 6 - 3 \cdot 7 + c = 0$, quindi $c = 9$. In definitiva, $2x - 3y + 9 = 0$ è un'equazione cartesiana della retta r.

$\boxdot$

Esercizio. Determinare un'equazione cartesiana della retta r passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ e parallela alla retta s di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3 + 7t \end{cases}$.

Soluzione #1. È sufficiente trovare un'equazione cartesiana di s e procedere come nell'esercizio precedente.

$\boxdot$

Soluzione #2. Il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ è un vettore parallelo ad s, ovvero ad r. Quindi $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ è un vettore ortogonale ad r. Per la proposizione (15), r ha un'equazione del tipo $7x - 2y + c = 0$. Imponendo il passaggio per il punto P troviamo $c = -46$.

$\boxdot$

Soluzione #3. La retta r è descritta dalle equazioni parametriche $\begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = 5 + 7t \end{cases}$.
Un'equazione cartesiana la troviamo eliminando il parametro t.

$\boxdot$

L'intersezione di due rette si determina mettendo a sistema le equazioni. Ad esempio, se r ed s sono le rette di equazioni cartesiane $2x - y + 5 = 0$ e $3x + y - 10 = 0$, risolvendo il sistema lineare $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + y - 10 = 0 \end{cases}$ si trova che si intersecano nel punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$. Chiaramente, se il sistema ha infinite soluzioni le rette coincidono, se il sistema è incompatibile le rette sono parallele e distinte.

Esercizio. Determinare l'intersezione della retta r di equazione cartesiana $4x - 3y + 8 = 0$ con la retta s di equazione parametrica $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 8 - 2t \end{cases}$.

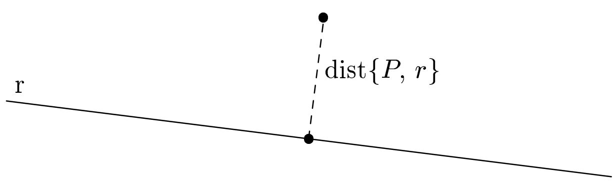
Soluzione. Naturalmente potremmo trovare un'equazione cartesiana di s e procedere nel modo già visto. Un altro modo di procedere è il seguente: $P(t) = \begin{pmatrix} 3 - t \\ 8 - 2t \end{pmatrix}$ è il punto generico di s, sostituendone le coordinate nell'equazione di r troviamo $4(3-t) - 3(8 - 2t) + 8 = 0$, quindi $t = 2$. Questo significa che il punto di s che corrisponde al valore del parametro $t = 2$ appartiene anche ad r. In definitiva $r \cap s = P(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. $\boxdot$

Il caso in cui entrambe le rette sono data in forma parametrica si tratta in modo analogo.

Proposizione. *Sia r la retta di equazione $ax + by + c = 0$ e sia $P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$ un punto del piano. La distanza di P da r, che per definizione è la "distanza minima", cioè il minimo tra le distanze di P dai punti di r, è data dalla formula*

$$\text{dist}\{P, r\} = \frac{|\, ap_x + bp_y + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \tag{18}$$

dove le barre verticali denotano la funzione modulo (valore assoluto).



Un modo per dimostrare questa proposizione è quello di effettuare il calcolo esplicito: la retta s passante per P ed ortogonale ad r ha equazioni parametriche (cfr prop. 15)

$$\begin{cases} x = p_x + at \\ y = p_y + bt \end{cases}$$

sostituendo queste equazioni nell'equazione cartesiana di r si ottiene l'equazione

$$a(p_x + at) + b(p_y + bt) + c = 0,$$

quindi si trova che l'intersezione $r \cap s$ è data dal punto $Q = \begin{pmatrix} p_x + at_0 \\ p_y + bt_0 \end{pmatrix}$, dove $t_0 = (-ap_x - bp_y - c)/(a^2 + b^2)$. Infine, calcolando la distanza tra i punti P e Q (che è anche la distanza del punto P dalla retta r) si ottiene il risultato annunciato:

$$\mathrm{dist}\{P, r\} = \|\overline{PQ}\| = \|\begin{pmatrix} at_0 \\ bt_0 \end{pmatrix}\| = |t_0| \cdot \|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\| = \frac{|-ap_x - bp_y - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

Un'altra dimostrazione si basa sulle seguenti considerazioni (non discuterò alcuni dettagli formali). L'espressione $ap_x + bp_y + c$ si annulla sui punti di r, quindi definisce una funzione che si annulla proprio sui punti che hanno distanza nulla dalla retta, ed è una funzione di primo grado in x ed y. Ora, restringiamo la nostra attenzione ad uno dei due semipiani in cui r divide il piano. Modulo tale restrizione, anche la nostra funzione distanza deve essere rappresentata da una funzione di primo grado in x ed y e poiché anch'essa si annulla su r, deve essere proporzionale alla funzione $ap_x + bp_y + c$. Pertanto, la distanza cercata deve soddisfare un'equazione del tipo

$$(18') \qquad \mathrm{dist}\{P, r\} = \gamma \cdot |\, ap_x + bP_y + c\,| ,$$

dove γ è una costante opportuna. Che la costante γ vale proprio $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ può essere verificato con un conto esplicito. Tale conto lo ometto però voglio far notare che tale scelta di γ rende l'espressione (18′) invariante per cambiamenti dell'equazione cartesiana scelta per rappresentare r ...ed una formula che si rispetti deve soddisfare tale condizione di invarianza!

Esercizio. Determinare un'equazione cartesiana della retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + 5t \end{cases}$$

Esercizio. Determinare equazioni parametriche della retta di equazione cartesiana

$$5x - 2y - 7 = 0 .$$

Esercizio. Determinare un'equazione cartesiana della retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 7 - 4t \\ y = 14 - 10t \end{cases}$$

Esercizio. Determinare equazioni parametriche della retta di equazione cartesiana $x - 2 = 0$.

Esercizio. Determinare equazioni parametriche della retta di equazione cartesiana $y = 0$.

Esercizio. Determinare la distanza del punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ dalla retta r di equazione $5x - 2y - 7 = 0$.

Esercizio. Determinare la distanza del punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dalla retta r di equazione $4x + y + 11 = 0$.

§3. Geometria Euclidea del piano: applicazioni ed esercizi.

I risultati del paragrafo precedente ci consentono di risolvere vari problemi elementari; in questo paragrafo ne vediamo alcuni.

Esercizio 19. Determinare un'equazione cartesiana che descrive la retta r passante per i punti $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Essendo $\vec{v} = \overline{PQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ un vettore parallelo alla retta passante per i punti dati, quest'ultima è descritta dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$$

Eliminando il parametro t troviamo l'equazione cartesiana $2x - 3y - 1 = 0$. ⊡

Esercizio. Determinare un'equazione cartesiana della retta s passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ e parallela alla retta r di equazione $2x - 3y - 4 = 0$.

Esercizio. Determinare delle equazioni parametriche che descrivono la retta passante per i punti $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Determinare delle equazioni parametriche che descrivono la retta passante per il punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ed ortogonale al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Determinare un'equazione cartesiana della retta s passante per il punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e parallela al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Determinare un'equazione cartesiana della retta s passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ed ortogonale al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 20. Determinare la distanza tra i punti $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Tale distanza è la lunghezza del vettore $\vec{v} = \overline{PQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Si ha

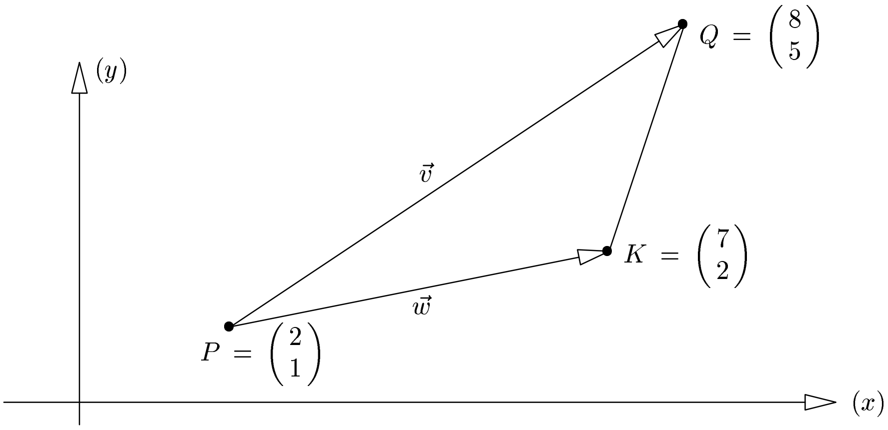
$$\operatorname{dist}\{P, Q\} = \|\vec{v}\| = \left\|\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}\,.$$

⊡

Esercizio. Determinare la distanza tra i punti $P = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Esercizio 21. Calcolare l'area $\mathcal{A}$ del triangolo di vertici $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Consideriamo i vettori $\vec{v} := \overline{PQ} = \begin{pmatrix} Q_x - P_x \\ Q_y - P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-2 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} := \overline{PK} = \begin{pmatrix} K_x - P_x \\ K_y - P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ (vedi figura).



Si ha

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right| = 7 \,. \qquad \boxdot$$

Esercizio. Calcolare l'area del triangolo di vertici $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Calcolare l'area $\mathcal{A}$ del triangolo di vertici $P = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Calcolare l'area $\mathcal{A}$ del triangolo di vertici $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Esercizio 22. Determinare la proiezione del vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ lungo la direzione individuata dal vettore $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Basta applicare la formula (11):

$$\Pi_{\langle \vec{w} \rangle}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \cdot \vec{w} = \frac{10}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} . \qquad \boxdot$$

Esercizio. Determinare la proiezione del vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ lungo la direzione individuata dal vettore $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 23. Determinare la proiezione K del punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ sulla retta r di equazione $x + 2y - 3 = 0$.

Soluzione #1. La retta r è descritta dalle equazioni parametriche (verificare!)

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \end{cases}$$

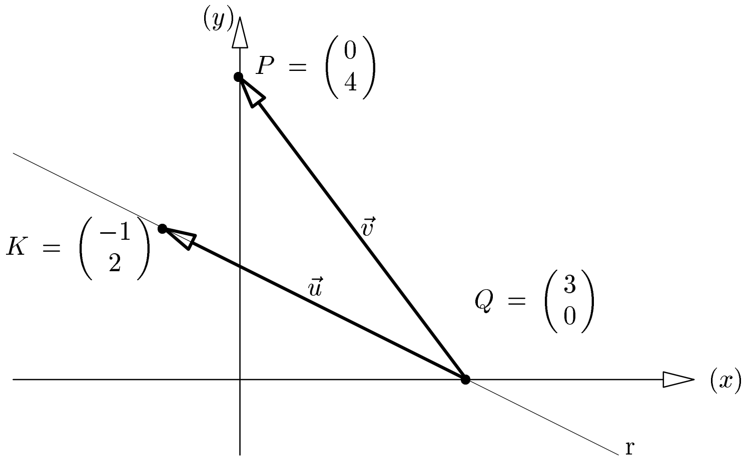
In particolare, il punto $Q := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene ad r nonché il vettore $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un vettore parallelo ad r. Proiettando il vettore $\vec{v} = \overline{QP} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sulla direzione individuata da $\vec{w}$ otteniamo

$$\vec{u} = \Pi_{\langle \vec{w} \rangle}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \cdot \vec{w} = \frac{10}{5} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché il punto K è l'estremo finale di un segmento orientato rappresentante il vettore $\vec{u}$ e che ha origine nel punto Q (vedi figura), abbiamo

$$K = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

È opportuno verificare che le coordinate del punto K soddisfano l'equazione che definisce la retta r e che il vettore $\overline{KP} = \begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è perpendicolare al vettore $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (il loro prodotto scalare è nullo). Queste due verifiche garantiscono la correttezza del risultato trovato.



$\boxdot$

Soluzione #2. Il punto K è il punto di intersezione della retta r con la retta ortogonale ad r passante per P. Quest'ultima ha equazioni parametriche

$$(\star) \qquad \begin{cases} x = t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$$

Sostituendo queste equazioni nell'equazione di r troviamo $t+2(4+2t)-3 = 0$, quindi $t = -1$. Sostituendo il valore $t = -1$ nelle equazioni $(\star)$ troviamo $K = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\boxdot$

Esercizio. Determinare la distanza del punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ dalla retta r di equazione $x + 2y - 3 = 0$.

Soluzione. Applicando la formula della distanza si trova

$$\operatorname{dist}\{P, r\} \;=\; \frac{|\,0 + 2\cdot 4 - 3\,|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \;=\; \frac{5}{\sqrt{5}} \;=\; \sqrt{5}$$

$\boxdot$

Si osservi che $\operatorname{dist}\{P, r\} = \operatorname{dist}\{P, K\}$, dove $K = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è la proiezione ortogonale di P su r (vedi esercizio 23).

Esercizio. Determinare la proiezione K del punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ sulla retta r di equazione $3x + 2y - 13 = 0$.

Esercizio. Determinare la proiezione K del punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ sulla retta r di equazione $x + 5y + 39 = 0$.

Esercizio. Determinare la proiezione K del punto $P = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ sulla retta r di equazione $4x - y - 4 = 0$.

Esercizio. Determinare un'equazione cartesiana della retta s passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ed ortogonale alla retta r di equazione $2x - 3y - 4 = 0$.

Esercizio. Determinare un'equazione cartesiana della retta s passante per i punti $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Calcolare l'area $\mathcal{A}$ del quadrilatero (irregolare) di vertici $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Suggerimento: dividetelo in due triangoli, quindi procedete come nell'esercizio 21.

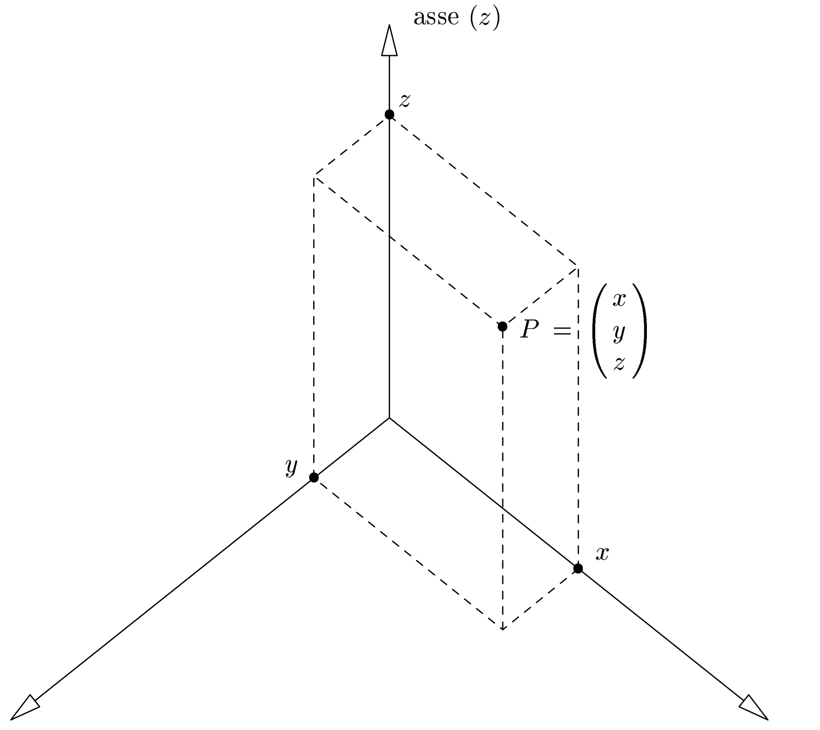
Esercizio. Calcolare l'area $\mathcal{A}$ del pentagono (irregolare) di vertici $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Suggerimento: dividetelo in tre triangoli.

§4. Geometria Euclidea dello spazio.

Molte definizioni e risultati che vedremo in questo paragrafo generalizzano quelli visti studiando il piano. Consideriamo lo spazio $\mathcal{S}$ e fissiamo un *sistema di riferimento* ed una unità di misura (vedi figura 24). Ad ogni punto $P \in \mathcal{S}$ possiamo associare le sue coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e viceversa (vedi figura 24). In questo modo i punti dello spazio vengono messi in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $\mathbb{R}^3$.

(fig. 24)



Definizione. Un *segmento orientato* è un segmento che ha un estremo iniziale Q ed un estremo finale P. Dichiariamo equivalenti due segmenti orientati $\overline{QP}$ e $\overline{Q'P'}$ se coincidono a meno di una traslazione dello spazio (cioè se sono due lati opposti di un parallelogramma). Per definizione, un *vettore geometrico dello spazio* è una classe di equivalenza di segmenti orientati.

Definizione. Siano $\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ le coordinate di due punti Q e P. Per definizione, le coordinate del vettore rappresentato dal segmento orientato $\overline{QP}$ sono $\begin{pmatrix} p_x - q_x \\ p_y - q_y \\ p_z - q_z \end{pmatrix}$.

Osserviamo che la definizione è ben posta: le coordinate di un vettore geometrico non dipendono dal segmento orientato scelto per rappresentarlo (vedi §1, pag. 56).

Osservazione/Definizione. L'insieme dei vettori geometrici dello spazio è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}^3$. Definiamo la somma di due vettori geometrici ed il prodotto di un vettore geometrico per uno scalare utilizzando le corrispondenti operazioni definite per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Chiaramente, queste operazioni arricchiscono l'insieme dei vettori geometrici dello spazio $\mathcal{S}$ di una struttura di spazio vettoriale (vedi cap. 4, def. 8). La somma di due vettori geometrici è l'operazione analoga a quella vista studiando il piano (vedi §1).

Definizione 25. Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$ due vettori. Si definisce il loro *prodotto scalare* mediante la formula

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \quad := \quad v_x w_x \ + \ v_y w_y \ + \ v_z w_z \ .$$

Si definisce inoltre la norma, o lunghezza, di un vettore ponendo

$$\|\vec{v}\| \quad := \quad \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad = \quad \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2}$$

Osservazione. Analogamente a quanto accadeva per i vettori del piano, la norma del vettore $\vec{v}$ coincide con la lunghezza di un segmento orientato che lo rappresenta (vedi oss. 7, §1). Inoltre, se $c \in \mathbb{R}$ è una costante e $\vec{v}$ è un vettore si ha

$$\| c\vec{v} \| \quad = \quad |c| \cdot \| \vec{v} \|$$

(vedi oss. 7′, §1). Continuano a valere anche le proprietà (8), la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, la disuguaglianza triangolare e la proposizione (9). Quest'ultima la ricordiamo:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \quad = \quad \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos\theta \tag{26}$$

dove θ è l'angolo compreso tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Osservazione. Di nuovo, due vettori sono ortogonali (i.e. formano un angolo di $\frac{\pi}{2}$ radianti) se e solo se il loro prodotto scalare vale zero.

L'osservazione precedente ci consente di calcolare le proiezioni ortogonali: se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono due vettori dello spazio (assumiamo $\vec{w} \neq \vec{0}$), la proiezione del vettore $\vec{v}$ lungo la direzione individuata da $\vec{w}$, che denoteremo con $\Pi_{\langle \vec{w} \rangle}(\vec{v})$, è il vettore

$$\Pi_{\langle \vec{w} \rangle}(\vec{v}) \quad = \quad \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \right) \cdot \vec{w} \tag{27}$$

(la dimostrazione è identica a quella vista nel §1.)

Passando dal piano allo spazio, la proposizione (12) diventa più complicata:

Proposizione 28. *Siano $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tre vettori dello spazio e sia $\mathcal{V}$ il volume del parallelepipedo (sghembo) che individuano. Si ha*

$$\mathcal{V} \quad = \quad \left| \det \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \right| ,$$

dove, come al solito, le barre verticali denotano il valore assoluto.

La dimostrazione di questa proposizione la vedremo più avanti.

Nello spazio, esiste una nuova operazione tra vettori.

Definizione 29. Dati due vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$, il *prodotto vettoriale* di $\vec{v}$ con $\vec{w}$, che si denota scrivendo $\vec{v} \wedge \vec{w}$, è il vettore

$$\vec{v} \wedge \vec{w} \quad := \quad \begin{pmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ -v_x w_z + v_z w_x \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix} .$$

C'è un modo per ricordarsi questa definizione. Infatti si ha

$$\vec{v} \wedge \vec{w} \quad = \quad \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$$

dove $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si noti che nella matrice indicata ci sono dei vettori nella prima riga e dei numeri nelle altre righe, questo non è un problema: "il determinante è una formula" e per come sono disposti vettori e numeri dentro la matrice in questione tale formula può essere applicata. Ma vediamo cosa si ottiene. Sviluppando il determinante rispetto alla prima riga si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{v} \wedge \vec{w} \quad &= \quad \vec{e}_1 \cdot \det \begin{pmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{pmatrix} \; - \; \vec{e}_2 \cdot \det \begin{pmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{pmatrix} \; + \; \vec{e}_3 \cdot \det \begin{pmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{pmatrix} \\ &= \quad (v_y w_z - v_z w_y)\vec{e}_1 \; + \; (-v_x w_z + v_z w_x)\vec{e}_2 \; + \; (v_x w_y - v_y w_x)\vec{e}_3 \; , \end{aligned}$$

che è proprio l'espressione della definizione (29).

Da un punto di visto geometrico, il prodotto vettoriale è caratterizzato dalle proprietà che seguono.

(30_a) $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$, se e solo se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono dipendenti;

(30_b) $\vec{v} \wedge \vec{w}$ è ortogonale al piano individuato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (se tale piano non è definito, allora $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono dipendenti e, in accordo con la (30_a), si ha $\vec{v} \wedge \vec{w} = 0$)

(30_c) la norma di $\vec{v} \wedge \vec{w}$ è uguale all'area del parallelogramma individuato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$;

(30_d) il verso di $\vec{v} \wedge \vec{w}$, se non siamo nelle condizioni di (30_a), è quello che rende positiva l'orientazione della terna $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \wedge \vec{w}\}$ (la posizione nello spazio dei tre vettori, nell'ordine indicato, appare come quella di pollice indice e medio della mano destra).

In realtà (30_a) segue da (30_c), ma *repetita iuvat.* Non dimostreremo queste proprietà. Lo studente dimostri, per esercizio, la (30_a) e la (30_b).

Si osservi che il prodotto vettoriale non è commutativo, infatti risulta

$$\vec{v} \wedge \vec{w} \quad = \quad -\vec{w} \wedge \vec{v}$$

Alla luce di quanto abbiamo visto siamo ora in grado di provare la proposizione (28).

Dimostrazione (della Proposizione 28). Sia $\mathcal{P}$ il parallelogramma individuato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$, sia $\mathcal{A}$ la sua area e sia θ l'angolo compreso tra il vettore $\vec{u}$ ed il piano del parallelogramma $\mathcal{P}$. Si osservi che l'angolo compreso tra $\vec{u}$ e la retta ortogonale al parallelogramma $\mathcal{P}$ è pari a $\pi/2 - \theta$ e che questa retta rappresenta la direzione individuata dal vettore $\vec{v} \wedge \vec{w}$ (vedi 30_b). Si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{V} \quad = \quad \mathcal{A} \cdot \|\vec{u}\| \cdot |\mathrm{sen}\,\theta| \quad &= \quad \mathcal{A} \cdot \|\vec{u}\| \cdot |\cos\big(\pi/2 - \theta\big)| \\ &= \quad \|\vec{v} \wedge \vec{w}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot |\cos\big(\pi/2 - \theta\big)| \\ &= \quad |\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})| \\ &= \quad |\det \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} | \end{aligned}$$

dove la 1^a uguaglianza segue dal fatto che l'altezza relativa alla base $\mathcal{P}$ del nostro parallelepipedo vale $\|\vec{u}\| \cdot |\mathrm{sen}\,\theta|$, la 2^a uguaglianza è ovvia, la 3^a uguaglianza segue da (30_c), la 4^a uguaglianza segue dalla formula (26), l'ultima uguaglianza si verifica immediatamente scrivendo esplicitamente ambo i membri.

$\square$

Esercizio. Determinare l'estremo iniziale del segmento orientato che rappresenta il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 18 \\ 5 \end{pmatrix}$ e che ha per estremo finale il punto $P = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Determinare la distanza tra i punti $P = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Determinare il coseno dell'angolo compreso tra i vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sia ora $\vec{v}$ il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Trovare un vettore di norma uno parallelo al vettore $\vec{v}$.

Esercizio. Trovare un vettore ortogonale al vettore $\vec{v}$. Trovare un altro vettore ortogonale al vettore $\vec{v}$.

Esercizio. Trovare due vettori indipendenti ortogonali al vettore $\vec{v}$.

Esercizio. Trovare un vettore di norma 21 ed ortogonale al vettore $\vec{v}$.

Esercizio. Trovare due vettori ortogonali tra loro ed ortogonali al vettore $\vec{v}$.

Esercizio. Calcolare i prodotti vettoriali che seguono

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio. Verificare, per ogni prodotto vettoriale dell'esercizio precedente, che $\vec{v} \wedge \vec{w}$ è ortogonale sia a $\vec{v}$ che a $\vec{w}$.

Esercizio. Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ due vettori. Calcolare l'area $\mathcal{A}$ del parallelogramma individuato dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Soluzione #1. Si ha $\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$. Pertanto, per la proprietà (30_c), si ha $\mathcal{A} = 5\sqrt{3}$.

$\boxdot$

Soluzione #2. Indichiamo con θ l'angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Applicando la formula del coseno (vedi 26) troviamo $\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{-3}{\sqrt{84}}$. Quindi, $|\mathrm{sen}\,\theta| = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{\frac{75}{84}}$. Infine, $\mathcal{A} = |\mathrm{sen}\,\theta| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| = \sqrt{\frac{75}{84}} \cdot \sqrt{84} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.

$\boxdot$

Esercizio. Determinare, utilizzando entrambi i metodi appena discussi, l'area $\mathcal{A}$ del parallelogramma individuato dai vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

§5. Rette e piani nello spazio.

Definizione. Un *piano* π dello spazio $\mathcal{S}$ è il luogo dei punti $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$ che soddisfano un'equazione di primo grado, i.e. un'equazione del tipo

$$ax + by + cz + d = 0,$$

con a, b, c non tutti nulli.

Proposizione 31. *Il vettore* $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *è un vettore ortogonale al piano* π.

La dimostrazione di questa proposizione è analoga a quella della proposizione (15) del §2.

Analogamente a ciò che accadeva nel caso delle rette nel piano (vedi §2), come conseguenza di quanto imparato sui sistemi lineari, abbiamo che un piano può essere anche descritto da *equazioni parametriche,* ovvero da equazioni del tipo

$$(32) \qquad \begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 t + \mu_1 s \\ y = y_0 + \lambda_2 t + \mu_2 s \\ z = z_0 + \lambda_3 t + \mu_3 s \end{cases},$$

dove t ed s sono parametri liberi.

Il punto $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ appartiene al piano; i vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}$ sono vettori paralleli al piano nonché sono vettori indipendenti.

Osservazione 33. Per trovare un'equazione cartesiana del piano definito dal sistema (32) si può procedere in due modi: *i*) si eliminano i parametri; *ii*) si definisce[8] $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{v} \wedge \vec{w}$, vedi ($30_b$) e (31), quindi si trova la costante d imponendo il passaggio per il punto P_0, ovvero si pone $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Esercizio. Siano P, Q, K tre punti dello spazio. Verificare che sono allineati se e solo se i due vettori $\overline{PQ}$ e $\overline{PK}$ sono dipendenti.

Osservazione. Siano $P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}$ e $K = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$ tre punti non allineati. Il piano passante per essi è descritto dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = P_x + \alpha_1 t + \beta_1 s \\ y = P_y + \alpha_2 t + \beta_2 s \\ z = P_y + \alpha_3 t + \beta_3 s \end{cases}, \qquad \text{dove } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \overline{PQ}, \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \overline{PK}.$$

[8] È sottinteso che le costanti a, b, c, d che sto per definire vanno sostituite nell'equazione $ax+by+cz+d = 0$.

Esempio. Il piano passante per i punti $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ e $K = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$ è descritto dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x &= 2 + 4t + 2s \\ y &= 0 + 5t + 9s \\ z &= 1 + 6t + 7s \end{cases} .$$

Per quel che riguarda la distanza di un punto da un piano, vale una formula analoga alla (18). Si ha infatti quanto segue.

Proposizione. *Sia π il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ e sia $P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ un punto dello spazio. La distanza di P da π, che per definizione è la "distanza minima", cioè il minimo tra le distanze di P dai punti di π, è data dalla formula*

$$\text{(34)} \qquad \operatorname{dist}\{P, \pi\} \;=\; \frac{|\, ap_x + bp_y + cp_z + d \,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} ,$$

dove le barre verticali denotano la funzione modulo (valore assoluto).

La dimostrazione di questa formula è del tutto identica alla dimostrazione della (18).

Osservazione $34'$. Il punto $Q \in \pi$ che ha distanza minima da P è il punto di intersezione di π con la retta r passante per P ed ortogonale a π. Vedremo più avanti come si determina Q.

Intersecando due piani non paralleli[9] si ottiene una retta, intersecare corrisponde a mettere a sistema le equazioni: se π_1 e π_2 sono due piani, definiti rispettivamente dalle equazioni $f_1 = 0$ ed $f_2 = 0$, un punto P appartiene all'intersezione $\pi_1 \cap \pi_2$ se e solo se soddisfa il sistema di equazioni $\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \end{cases}$. Quanto osservato suggerisce la seguente definizione.

Definizione. Una *retta* r dello spazio $\mathcal{S}$ è il luogo dei punti $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$ che soddisfano un sistema lineare del tipo

$$\text{(35)} \qquad \begin{cases} ax + by + cz + d &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' &= 0 \end{cases} , \qquad \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 .$$

Tali equazioni si chiamano *equazioni cartesiane* della retta r.

Si osservi che la condizione $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$ è, da un punto di vista geometrico, la condizione di non parallelismo tra i piani che stiamo intersecando ed è, da un punto di

[9] In particolare, non coincidenti.

vista algebrico (vedi i capitoli precedenti sui sistemi lineari), la condizione che assicura che il sistema lineare (35) è compatibile ed ha uno spazio delle soluzioni che dipende da un parametro libero. Analogamente ai casi delle rette nel piano e dei piani nello spazio, ciò che sappiamo sui sistemi lineari ci consente di osservare quanto segue.

Osservazione. Una *retta* r dello spazio $\mathcal{S}$ è il luogo dei punti $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$ del tipo

$$(36) \qquad \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove, $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ è un punto fissato, $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ è un vettore non-nullo fissato e, come al solito, t è un parametro libero.

Le intersezioni tra piani, oppure tra rette, oppure tra rette e piani, si determinano mettendo a sistema le equazioni degli oggetti geometrici in questione. Negli esercizi che seguono vediamo qualche esempio.

Esercizio. Determinare il punto P di intersezione della retta r di equazioni $\begin{cases} x = 2 + 7t \\ y = 5 + 2t \\ z = 8 + 3t \end{cases}$ con il piano $\mathcal{H}$ di equazione $x - 3y + 5z - 43 = 0$.

Soluzione. Sostituendo $x = 2 + 7t$, $y = 5 + 2t$, $z = 8 + 3t$ nell'equazione di $\mathcal{H}$ troviamo $(2 + 7t) - 3(5 + 2t) + 5(8 + 3t) - 43 = 0$, quindi $t = 1$. Pertanto $P = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$.

$\boxdot$

Esercizio. Determinare un'equazione parametrica della retta r ottenuta intersecando i piani $\mathcal{H} := \begin{cases} x = 2 + 7t + 2s \\ y = 4 + 2t - 6s \\ z = 8 + 3t + 5s \end{cases}$ ed $\mathcal{H}' := \{ 8x - 3y - 7z - 4 = 0 \}$.

Soluzione #1. Si trova un'equazione cartesiana anche per il piano $\mathcal{H}$ (utilizzando uno dei due metodi indicati nell'osservazione 33), quindi si risolve, con i metodi visti nei capitoli sui sistemi lineari, il sistema costituito da questa equazione e dall'equazione di $\mathcal{H}'$.

$\boxdot$

Soluzione #2. Imponendo che le espressioni $2+7t+2s$, $4+2t-6s$, $8+3t+5s$ soddisfino l'equazione di $\mathcal{H}'$ si trovano le coordinate del generico punto di $\mathcal{H}$ che appartiene anche ad $\mathcal{H}'$. Queste sono le coordinate del generico punto della retta r. Operativamente, questo significa che si procede come segue: sostituendo le espressioni di cui sopra nell'equazione di $\mathcal{H}'$ si trova $8(2+7t+2s) - 3(4+2t-6s) - 7(8+3t+5s) - 4 = 0$, quindi $s = 29t - 56$.

Pertanto,

$$\begin{cases} x = 2 + 7t + 2(29t - 56) = -110 + 65t \\ y = 4 + 2t - 6(29t - 56) = 340 - 172t \\ z = 8 + 3t + 5(29t - 56) = -272 + 148t \end{cases}$$

sono equazioni parametriche della retta r.

$\boxdot$

Torniamo alla proposizione (34) ed all'osservazione (34'). Abbiamo visto che $Q = \pi \cap r$, dove r è la retta ortogonale a π passante per P. Per la proposizione (31), si ha che r ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = p_x + at \\ y = p_y + bt \\ z = p_z + ct \end{cases},$$

dove a, b, c sono proprio i coefficienti che appaiono nell'equazione di π, $ax+by+cz+d = 0$. Si osservi inoltre che Q è la proiezione ortogonale di P sul piano π.

§6. Geometria Euclidea dello spazio: applicazioni ed esercizi.

Nello spazio, la proiezione ortogonale K di un punto P su una retta r può essere determinata con metodi analoghi a quelli visti nell'esercizio (23) del §3:
i) si sceglie un punto Q di r, si proietta il vettore $\overline{QP}$ su un vettore parallelo ad r, si determina K come estremo finale di un segmento orientato che ha Q come estremo iniziale e che rappresenta il vettore proiezione trovato;
ii) si interseca r con il piano passante per P ed ortogonale a r.

Esercizio 37. Determinare la proiezione K del punto $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$ sulla retta r di equazioni

$$\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 3 + t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$$

Soluzione #1. Il punto $Q := \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ appartiene ad r nonché il vettore $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è un vettore parallelo ad r. Proiettando il vettore $\vec{v} = \overline{QP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sulla direzione individuata da $\vec{w}$ otteniamo

$$\vec{u} = \Pi_{\langle \vec{w} \rangle}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \cdot \vec{w} = \frac{-12}{14} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18/7 \\ -6/7 \\ 12/7 \end{pmatrix}.$$

Poiché il punto K è l'estremo finale di un segmento orientato rappresentante il vettore $\vec{u}$ e che ha origine nel punto Q, abbiamo

$$K \quad = \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -18/7 \\ -6/7 \\ 12/7 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 17/7 \\ 15/7 \\ 61/7 \end{pmatrix}.$$

$\boxdot$

È opportune effettuare verifiche analoghe a quelle svolte risolvendo l'esercizio (23) del §3.

Soluzione #2. Il punto K è il punto di intersezione della retta r con il piano ortogonale ad r passante per P. Quest'ultimo ha equazione cartesiana (qui usiamo la proposizione 31, quindi imponiamo il passaggio per P)

$$(\star) \qquad 3x + y - 2z + 8 = 0$$

Sostituendo le equazioni di r nell'equazione $(\star)$ troviamo $3(5+3t)+(3+t)-2(7-2t)+8 = 0$, quindi $12+14t = 0$. Sostituendo infine il valore $t = -6/7$ nelle equazioni di r troviamo $K = \begin{pmatrix} 17/7 \\ 15/7 \\ 61/7 \end{pmatrix}$.

$\boxdot$

La proiezione ortogonale di un punto P su un piano π si determina intersecando π con la retta passante per P ed ortogonale a π.

Esercizio 38. Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ un punto e sia π il piano di equazione $3x+y+7z+4 = 0$. Determinare la proiezione K di P su π.

Soluzione. Per la proposizione (31), il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ è ortogonale al piano π. Ne segue che la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 4 + 7t \end{cases}$$

è la retta ortogonale a π nonché passante per P. Si ha $K = r \cap \pi$ (il calcolo di questa intersezione lo lasciamo per esercizio).

$\boxdot$

Osservazione 39. Nello spazio, per calcolare la distanza di un punto P da una retta r, conviene determinare la proiezione Q di P su r. Naturalmente si ha $\mathrm{dist}\{P, r\} = \mathrm{dist}\{P, Q\}$. I metodi più rapidi per trovare le coordinate Q sono i seguenti:
i) si procede come nella soluzione #1 dell'esercizio 37;
ii) si procede come nella soluzione #2 dell'esercizio 37.

Esercizio. Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ e sia r la retta di equazioni $\begin{cases} x = -11 + 5t \\ y = 3 - 12t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$.
Determinare la distanza $\text{dist}\{P, r\}$.

Esercizio. Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e sia r la retta di equazioni $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x + z - 5 = 0 \end{cases}$.
Calcolare la distanza $\text{dist}\{P, r\}$.

Concludiamo questo paragrafo con il calcolo della distanza tra due rette nello spazio.

Definizione 40. Siano r ed s due rette nello spazio, si pone

$$\text{dist}\{r, s\} \quad = \quad \min\left\{ \text{dist}(P, Q) \right\}_{P\in r,\, Q\in s}.$$

Supponiamo che r ed s non siano parallele (se lo sono, la distanza cercata è uguale alla distanza di un punto qualsiasi di r da s e si calcola con i metodi suggeriti nell'osservazione 39). Supponiamo inoltre che r ed s siano date in forma parametrica, e.g. siano[10]

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_0 + \vec{v}\,t \right\} \qquad s = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q_0 + \vec{w}\,t \right\}$$

Sia $\mathcal{H}$ il piano contenente r e parallelo ad s, sia $\mathcal{H}'$ il piano contenente s e parallelo ad r. Chiaramente (convincersene, per esercizio),

$$\text{dist}\{r, s\} \quad = \quad \text{dist}\{\mathcal{H}, \mathcal{H}'\} \quad = \quad \text{dist}\{Q, \mathcal{H}\}\,, \tag{41}$$

dove Q è un punto qualsiasi di $\mathcal{H}'$ (si può scegliere il punto Q_0, che è un punto di s).

Si osservi che <u>non</u> stiamo dicendo che Q_0 è il punto di s che realizza il minimo della definizione (40), in generale possiamo solamente dire che $\text{dist}\{Q_0, r\} \geq \text{dist}\{r, s\}$. Comunque valgono le uguaglianze (41) e queste ci consentono di risolvere il nostro problema.

Per trovare i punti che realizzano il minimo della definizione (40), si deve lavorare un po' di più:
(continuiamo ad assumere che r ed s non siano parallele) la proiezione della retta s sul piano $\mathcal{H}$ (che è il luogo dei punti ottenuti proiettando su $\mathcal{H}$ i punti di s) è una retta $\widetilde{s}$ che incontra r. Sia $\widetilde{P} = \widetilde{s} \cap r$ e sia $\widetilde{Q}$ il punto di $\widetilde{s}$ la cui proiezione è il punto $\widetilde{P}$. Si ha

$$\text{dist}\{r, s\} \quad = \quad \text{dist}\{\mathcal{H}, \mathcal{H}'\} \quad = \quad \text{dist}\{\widetilde{P}, \widetilde{Q}\}\,, \tag{42}$$

Si noti che la prima uguaglianza viene dalle relazioni (41), la seconda uguaglianza segue dal fatto che $\widetilde{Q}$ è stato ottenuto proiettando $\widetilde{P}$ (che è un punto di $\mathcal{H}$) sul piano $\mathcal{H}'$ (è opportuno ricordare che i due piani sono paralleli per costruzione).

[10] Si osservi che, a parte la notazione un minimo più compatta, queste equazioni sono equazioni parametriche di rette; le si confrontino con quelle dell'osservazione (36).

Infine, poiché $\widetilde{P}$ e $\widetilde{Q}$ sono punti di r ed s rispettivamente, abbiamo che sono proprio i punti che realizzano il minimo della definizione (40).

Esercizio. Calcolare la distanza tra le rette (si osservi che non sono parallele)

$$r \; : \; \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + 7t \end{cases} \qquad\qquad s \; : \; \begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + 7t \end{cases}$$

Soluzione. Il piano $\mathcal{H}$ contenente r e parallelo ad s ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + 3t + 6t' \\ y = -1 + 4t + 3t' \\ z = 4 + 7t + 7t' \end{cases}$$

Passando da equazioni parametriche a cartesiane troviamo che

$$7x + 21y + 15z - 53 = 0$$

è un'equazione cartesiana di $\mathcal{H}$. Per le osservazioni viste, posto $Q_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ si ha

$$\operatorname{dist}\{r, s\} = \operatorname{dist}\{Q_0, \mathcal{H}\} = \frac{|7 \cdot 5 + 21 \cdot 1 + 15 \cdot 2 - 53|}{\sqrt{49 + 441 + 225}} = \frac{33}{\sqrt{715}}$$

$\boxdot$

Esercizio. Trovare i due punti $\widetilde{P} \in r$ e $\widetilde{Q} \in s$ tali che

$$\operatorname{dist}\{r, s\} = \operatorname{dist}\{\widetilde{P}, \widetilde{Q}\} ,$$

dove r ed s sono le rette dell'esercizio precedente.

Soluzione. Una volta determinato il piano $\mathcal{H}$ contenente r e parallelo ad s (si veda la soluzione dell'esercizio precedente), calcoliamo la proiezione $\widetilde{s}$ di s su $\mathcal{H}$:
la retta $\widetilde{s}$ si ottiene intersecando il piano $\mathcal{H}$ con il piano $\widetilde{\mathcal{H}_s}$ contenente s ed ortogonale ad $\mathcal{H}$, che è il piano di equazioni (convincersene)

$$\begin{cases} x = 5 + 6t + 7t' \\ y = 1 + 3t + 21t' \\ z = 2 + 7t + 15t' \end{cases}$$

Si ha pertanto $\widetilde{P} = \widetilde{s} \cap r = \widetilde{\mathcal{H}_s} \cap r$ (nonché $\widetilde{Q} = \widetilde{\mathcal{H}_r} \cap s$, dove $\widetilde{\mathcal{H}_r}$ è il piano contenente r ed ortogonale ad $\mathcal{H}$).
Il calcolo esplicito delle intersezioni $\widetilde{\mathcal{H}_s} \cap r$ e $\widetilde{\mathcal{H}_r} \cap s$ lo lasciamo per esercizio.

$\boxdot$

Esame di Geometria del 2/2/2001 (secondo esonero)

1. Sia $M : \mathbb{R}^{19} \longrightarrow \mathbb{R}^{11}$ un'applicazione lineare il cui nucleo $\ker M$ ha dimensione 14 e sia $U \subseteq \mathbb{R}^{19}$ un sottospazio di $\mathbb{R}^{19}$ definito da 4 equazioni cartesiane indipendenti.

a) Determinare la dimensione $\dim \mathrm{Im}\, M$ dell'immagine di M;

b) determinare la dimensione $\dim U$ dello spazio U;

c) determinare le possibili dimensioni dell'intersezione $U \cap \ker M$.

2. Consideriamo $\mathbb{R}^3$ e due suoi sottospazi

$$V := \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad W := \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Determinare una base dell'intersezione $V \cap W$;

b) Determinare una base dello spazio somma $V + W$.

3. Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} L : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Determinare una base del nucleo $\ker L$;

b) determinare una base dell'immagine $\mathrm{Im}\, L$;

c) trovare delle equazioni cartesiane di $\mathrm{Im}\, L$;

d) calcolare $L\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ed $L \circ L\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (dove $L \circ L$ è la composizione di L con se stessa);

e) determinare gli autovalori ed i corrispondenti autospazi di L.

Soluzione dei primi due esercizi.

1. a) Per la proposizione (6), pag. 45, si ha $\dim \mathrm{Im}\, M = 19 - 14 = 5$.

1. b) La matrice associata alle equazioni che definiscono U ha rango 4, infatti tali equazioni sono indipendenti per ipotesi. Pertanto, $\dim U = 19 - 4 = 15$ (teorema 25, di pag. 41).

1. c) Per la formula di Grassman (pag. 34) abbiamo

$$\dim(U \cap \ker M) = \dim U + \dim \ker M - \dim(U + \ker M) = 15 + 14 - \dim(U + \ker M)$$

Poiché lo spazio somma $U + \ker M$ contiene entrambi U e $\ker M$ nonché è contenuto in $\mathbb{R}^{19}$ si hanno le seguenti disuguaglianze

$$\dim(U + \ker M) \geq \max\{15, 14\} = 15, \qquad \dim(U + \ker M) \leq 19.$$

Pertanto, $10 \leq \dim U \cap \ker M \leq 14$. Va osservato che questa stima non può essere migliorata: se $\ker M \subset U$, allora $U \cap \ker M = \ker M$ ed ha dimensione 14;

Si può ragionare anche in un altro modo: l'intersezione $U \cap \ker M$ si ottiene imponendo ai punti di $\ker M$ di soddisfare le equazioni che definiscono U; la disuguaglianza $10 \leq \dim U \cap \ker M \leq 14$ segue dal fatto che ogni equazione "può far scendere di uno la dimensione" (si osservi che <u>non</u> sappiamo se le restrizioni a $\ker M$ delle equazioni che definiscono U sono indipendenti o meno, in effetti nel caso estremo già menzionato in cui si ha $\ker M \subset U$, tali equazioni si riducono tutte all'equazione banale $0 = 0$).

2) Poiché gli spazi V e W sono rispettivamente un piano ed una retta (ed in quanto sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ passano per l'origine), ci sono solo due possibilità:
i) $W \subset V$;
ii) V e W si intersecano nell'origine (quindi generano tutto $\mathbb{R}^3$).
Poiché $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} = 2$, per gli spazi in questione si verifica il caso *i*); ovvero $V \cap W = W$ e $\left\{\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}\right\}$ ne è una base, $V + W = V$ e $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ ne è una base.

Esame di Geometria del 16/2/2001 (terzo esonero)

1. Siano $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ tre punti del piano. Determinare
a) l'area del triangolo $\mathbb{T}$ di vertici A, B, C;
b) la lunghezza del lato $\overline{BC}$;
c) il valore del coseno dell'angolo (del triangolo $\mathbb{T}$) opposto al lato $\overline{BC}$;
d) un'equazione cartesiana della retta passante per i punti B e C.

2. Sia $M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ una matrice.
a) Trovare una matrice B che diagonalizza la matrice M;
b) Come si interpretano geometricamente le colonne della matrice B?
c) Determinare $M^{30}(\vec{v})$, dove $\vec{v}$ è un autovettore di M.

3. Sia r la retta di equazione $2x + 3y - 9 = 0$. Determinare
a) le coordinate di un vettore parallelo ad r;
b) le coordinate di un vettore perpendicolare ad r;
c) le coordinate di un vettore di norma uno perpendicolare ad r;
d) un'equazione parametrica di r;
e) la distanza dell'origine degli assi $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dalla retta r;

Esercizio facoltativo: si consideri, oltre alla retta r, la retta s di equazione $3x + 4y - 10 = 0$. Trovare tutti i punti Q appartenenti alla retta r la cui distanza $\operatorname{dist}\{Q, s\}$ dalla retta s è uguale a 1.

Esame di Geometria del 21/2/2001 (primo appello)

1. Determinate le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 21 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^3$.

2. Si consideri $\mathbb{R}^3$ ed i suoi sottospazi

$$U = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

a) determinate una base della somma $U + W$;

b) determinare una base dell'intersezione $U \cap W$;

3. Si consideri l'applicazione lineare

$$L : \quad \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

a) Si determini una base del nucleo $\ker L$;

b) Si determini una base dell'immagine $\operatorname{Im} L$.

4. Si consideri il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$, dove $A \in M_{7,11}(\mathbb{R})$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{11} \end{pmatrix}$ e $\vec{b} \in \mathbb{R}^7$.

Sappiamo che $\vec{b}$ é la somma delle colonne della matrice A e che $rango(A) = 5$.

a) Trovare una soluzione esplicita del sistema lineare dato;

b) determinare da quanti parametri liberi dipendono le soluzioni del sistema lineare dato.

5. Sia r la retta del piano di equazione $2x + 3y - 1 = 0$.

a) sia s la retta perpendicolare ad r e passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$, calcolare un'equazione cartesiana ed un'equazione parametrica di s;

b) determinare le coordinate dell'intersezione $K = r \cap s$;

c) determinare un vettore di norma 1 parallelo alla retta passante per i punti $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

d) determinare l'area del triangolo di vertici P, K, Q.

6. Si consideri l'applicazione lineare

$$L : \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

a) determinare autovalori ed autospazi di L;

b) determinare la matrice che rappresenta la composizione $L^2 = L \circ L$;

Esercizio facoltativo: f) determinare la matrice che rappresenta la composizione L^{24}.

Esame di Geometria del 2 marzo 2001 (secondo appello)

1. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Sia $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$,

a) trovare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ che contiene il vettore $\vec{v}$.

b) determinate le coordinate del vettore $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata precedentemente.

2. Sia $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e si consideri l'applicazione lineare

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

a) si determini $L(7\vec{v})$;

b) si determini una base del nucleo $\ker L$;

c) si determini una base dell'immagine $\operatorname{Im} L$.

3. Si consideri $\mathbb{R}^3$ ed i suoi sottospazi

$$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

a) determinate una base dello spazio somma $U + W$;

b) determinare una base dell'intersezione $U \cap W$.

4. Sia r la retta del piano di equazione $2x + 9y + 3 = 0$ e sia $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ un punto del piano.

a) determinare la proiezione ortogonale Q del punto P sulla retta r;

b) trovare il punto medio M tra P e Q;

c) trovare un punto $K \in r$ tale che $dist(K, P) = \sqrt{5} \cdot dist(r, P)$, dove "*dist*" indica la funzione distanza;

d) determinare l'area del triangolo di vertici P, K, Q.

5. Sia $A \in M_{3,3}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$,

a) calcolare il polinomio caratteristico $P_A(\lambda)$ della matrice A;

b) provare che $\lambda = 2$ è un autovalore di A;

c) determinare il nucleo $\ker\big(A - 2I\big)$, dove I denota la matrice identità.

6. Siano A, B, $C \in M_{7,7}(\mathbb{R})$ tre matrici e supponiamo che: $\det A = 19$, $rango(C) = 5$, B è stata ottenuta dalla matrice A moltiplicando per 6 la quinta colonna e sommando alla terza colonna il doppio della prima colonna.

a) Calcolare $\det B$;

b) calcolare il nucleo della matrice B;

c) determinare il rango del prodotto $B \cdot C$;

d) determinare la dimensione del nucleo del prodotto $B \cdot C$.

Esame di Geometria del 20 settembre 2001 (I appello di recupero)

1. Sia $M = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ una matrice.

a) Calcolare $M^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

b) Determinare autovalori ed autovettori di M .

2. Si consideri $\mathbb{R}^4$ ed i suoi sottospazi

$$U = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right\},$$

a) determinate una base dello spazio somma $U + W$;

b) determinare una base dell'intersezione $U \cap W$.

3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calcolare il polinomio caratteristico della matrice A ;

b) dire se $\lambda = 0$ è un autovalore di A .

4. Determinare le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 8x + 3y - 4z = 3 \\ 14x - 2y - 7z = -2 \end{cases} .$$

5. Sia $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare. Supponiamo che $L \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e che $L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) si determini una base dell'immagine $\operatorname{Im} L$;

b) si determini una base del nucleo $\ker L$.

6. Siano $P = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ due punti del piano $\mathbb{R}^2$.

a) determinare le coordinate del punto medio M tra P e Q ;

b) determinare un'equazione cartesiana della retta r ortogonale al segmento $\overline{PQ}$ e passante per M ;

c) determinare le coordinate di un punto $K \in r$ tale che il triangolo di vertici P , M , K è isoscele.

Esame di Geometria del 27 settembre 2001 (II appello di recupero)

1. Sia $M_t = \begin{pmatrix} 2 & t-4 \\ 1-t & 1 \end{pmatrix}$ una matrice che dipende dal parametro t.

a) Indicare per quali valori di t la matrice M_t non è invertibile;

b) si determinino autovalori e autospazi della matrice M_4.

2. Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ un insieme di vettori di $\mathbb{R}^3$.

a) Verificare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$;

b) determinare le coordinate del vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

3. Si consideri $\mathbb{R}^3$ ed i sottospazi $U = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$, $W = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Determinate una base dello spazio somma $U + W$;

b) determinare una base dell'intersezione $U \cap W$.

4. Sia $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare, siano $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Supponiamo che $M(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $M(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Determinare le coordinate del vettore $\vec{w} = 5\vec{u} - 2\vec{v}$;

b) calcolare $M(\vec{w})$.

5. Sia $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} L : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) si determini $L(11\vec{v})$;

b) si determini una base del nucleo $\ker L$;

c) si determini una base dell'immagine $\mathrm{Im}\, L$.

6. Sia r la retta del piano di equazione $3x - 8y - 5 = 0$.

a) Determinare le coordinate di un vettore $\vec{v}$ di norma 1 e parallelo ad r;

b) determinare un'equazione cartesiana della retta s ortogonale ad r e passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$;

c) determinare le coordinate dell'intersezione $r \cap s$.

Esercizi assegnati il 19/3/2002.

1. Risolvere, utilizzando il metodo di Gauss, il sistema lineare

$$\begin{cases} x_3 - x_4 - x_5 - 2x_6 - x_7 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_5 + x_6 + x_7 = 2 \\ x_1 + 3x_4 - x_5 + 2x_6 + 2x_7 = 1 \end{cases}$$

Indicare i parametri liberi della soluzione trovata.

2. Si consideri il sistema lineare di due equazioni in due incognite $\begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ 5x - 2y = 11 \end{cases}$.

a) Cos'è che ci garantisce l'applicabilità del teorema di Cramer?

b) Risolvere il sistema dato utilizzando il teorema di Cramer.

3. Calcolare i seguenti prodotti tra matrici.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k & -1 \\ -k & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2k & -3k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -5 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Calcolare il determinante (in funzione del parametro k) delle matrici

$$A_k := \begin{pmatrix} 4 & -k \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B_k := \begin{pmatrix} k+1 & -k & 2-k \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_k := \begin{pmatrix} 1-k & 3 & 1-k \\ k & -k & k \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Indicare per quali valori di t le matrici

$$D_t := \begin{pmatrix} t+2 & t-4 \\ 1 & 2-3t \end{pmatrix} \qquad E_t := \begin{pmatrix} t+2 & t-4 \\ -3t-16 & 2-3t \end{pmatrix} \qquad F_t := \begin{pmatrix} -t+3 & t+2 \\ t & -1+t \end{pmatrix}$$

non sono invertibili.

6. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Verificare che sono indipendenti;

b) dedurre che $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$;

c) determinare le coordinate del vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

7. Sia $\vec{w}$ la combinazione lineare di coefficienti 2 , 3 , 5 dei vettori di $\mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare $\vec{w}$;

b) verificare che $\vec{w} \in \mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$!!!

c) dopo aver verificato che $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ è una base di $\mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, determinare le coordinate di $\vec{w}$ rispetto a tale base!!!

8. Verificare la seguente identità:

$$\mathrm{Span}\{\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\} \quad = \quad \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\}\,.$$

Esercizi assegnati il 10/4/2002.

1. Si determini la dimensione dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-4\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\4\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\};\quad \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-3\\-4\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-4\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\-7\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-4\\1\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

2. Determinare delle equazioni cartesiane dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$A=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\right\};\quad B=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\8\\1\end{pmatrix}\right\};\quad C=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\3\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

3. Determinare delle equazioni cartesiane dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$A\;=\;\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}4\\2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\4\\1\\1\end{pmatrix}\right\};\qquad B\;=\;\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\11\\-7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\4\\5\\-3\end{pmatrix}\right\}.$$

4. Determinare delle equazioni parametriche dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$ (con coordinate $x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4$):

$$U\;=\;\begin{cases} x_1+x_4=0\\ x_1+x_3+3x_4=0\end{cases};\qquad V\;=\;\begin{cases} x_1-x_4=0\\ x_1+x_3=0\\ x_3-x_4=0\end{cases};$$

$$W\;=\;\begin{cases} 7x_1+2x_2+2x_3=0\\ 2x_1-5x_2-3x_3=0\end{cases};\qquad H\;=\;\{\,x_1+x_3=0\,.$$

5. Sia $V=\mathbb{R}^4$, $U=\mathrm{Span}\,\{\vec u_1,\,\vec u_2\}$, $W=\mathrm{Span}\,\{\vec w_1,\,\vec w_2,\,\vec w_3\}$. Determinate una base dello spazio somma $U+W$ ed una base dell'intersezione $U\cap W$ quando

$$a)\quad \vec u_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\ \vec u_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \vec w_1=\begin{pmatrix}4\\6\\3\\3\end{pmatrix},\ \vec w_2=\begin{pmatrix}3\\4\\2\\2\end{pmatrix},\ \vec w_3=\begin{pmatrix}1\\7\\-3\\1\end{pmatrix};$$

$$b)\quad \vec u_1=\begin{pmatrix}4\\2\\5\\-1\end{pmatrix},\ \vec u_2=\begin{pmatrix}-7\\2\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \vec w_1=\begin{pmatrix}5\\2\\1\\3\end{pmatrix},\ \vec w_2=\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\-4\end{pmatrix},\ \vec w_3=\begin{pmatrix}13\\-2\\3\\-5\end{pmatrix};$$

Verificate che le dimensioni degli spazi trovati soddisfano la formula di Grassmann.

6. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^{37}$. Determinate le possibili dimensioni della loro intersezione sapendo che $\dim U=19$, $\dim W=21$.

Suggerimento: usare la formula di Grassmann e la stima $21\le\dim(U+W)\le 37$.

7. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^{49}$. Supponiamo che $\dim(U \cap W) = 3$ e che $\dim U = 30$. Provare che $3 \leq \dim W \leq 22$.

Suggerimento: usare la formula di Grassmann.

8. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^{50}$. Supponiamo che U sia definito da 8 equazioni cartesiane e che $\dim W = 36$. Provare che $28 \leq \dim(U \cap W) \leq 36$ e che $42 \leq \dim(U + W) \leq 50$.

Suggerimento: innanzi tutto stimate la dimensione di U, quindi osservate che $42 \leq \dim(U+W) \leq 50$, infine stimate $\dim(U \cap W)$ usando la formula di Grassmann.

9. Si considerino le applicazioni lineari associate alle matrici $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 8 & 11 & 3 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Per ognuna di esse,

a) indicare chiaramente dominio e codominio;

b) determinarne nucleo e immagine;

c) discutere suriettività e iniettività;

d) verificare la formula

$$(\star) \qquad \dim \text{“}\textit{dominio}\text{”} \quad = \quad \dim \text{“}\textit{nucleo}\text{”} \ + \ \dim \text{“}\textit{immagine}\text{”}.$$

10. Spiegare la formula $(\star)$ in termini della teoria dei sistemi lineari (il nucleo $\ker L$ è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare di n equazioni in m incognite ... le soluzioni di tale sistema sono anche ...).

11. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Si calcoli, e si descriva esplicitamente,

(a) $L_A \circ L_B$, $L_C \circ L_A \circ L_B$, $L_A \circ L_A \circ L_B$, $L_C \circ L_{A^{-1}} \circ L_B$, $L_C \circ L_{A^{-1}} \circ L_{A^{-1}} \circ L_B$,

(b) $L_C \circ L_A$, $L_C \circ L_A \circ L_A$, $L_A \circ L_{(A^{-1})}$, $L_{(A^3)}$, $L_C \circ L_{A^{-1}}$,

dove L_A è l'applicazione lineare associata alla matrice A, ecc..

Si determini, l'immagine del vettore $\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ per ognuna delle applicazioni in **(a)**, e l'immagine del vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ per ognuna delle applicazioni in **(b)**.

12. Discutere, al variare del parametro k, la compatibilità dei sistemi lineari $A\vec{x} = \vec{b}$ nei seguenti casi (si utilizzi il teorema di Rouché-Capelli):

a) $A := \begin{pmatrix} k+1 & 5 \\ -2k+2 & k \\ 4 & 10+k \end{pmatrix}$, $\vec{b} := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

b) $A := \begin{pmatrix} k & 2k & 1 \\ -2k & -4k & k-3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} := \begin{pmatrix} k \\ -2 \end{pmatrix}$;

c) $A := \begin{pmatrix} k+1 & k+2 \\ -2k-3 & 4k-6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} := \begin{pmatrix} -1+k \\ 3-k \end{pmatrix}$; **d)** $A := \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 4 \\ 1 & 4-k \end{pmatrix}$, $\vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 3-k \end{pmatrix}$.

13. Sia $L : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^{14}$ una applicazione lineare rappresentata da una matrice $A \in M_{14,8}(\mathbb{R})$ di rango 4. Calcolare $\dim \ker L$ e $\dim \operatorname{Im} L$.

14. Sia $L : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare e sia $W \subseteq \mathbb{R}^9$ un sottospazio di dimensione 7. Provare che $\dim \big(\ker L \cap W\big) \geq 3$.

Suggerimento: stimate la dimensione di $\ker L$ usando il fatto che $\dim \operatorname{Im} L \leq 4$, osservate che $\dim \left(\ker L + W\right) \leq 9$, infine stimate $\dim \big(\ker L \cap W\big)$ usando la formula di Grassmann.

15. Calcolare polinomio caratteristico, autovalori e autospazi delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

16. Verificare che $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è un autovettore della matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calcolarne il relativo autovalore e determinare $A\vec{v}$, $A^2\vec{v}$, $A^3\vec{v}$, $A^4\vec{v}$, $A^{38}\vec{v}$.

Esame di Geometria del 28/3/2002 (primo esonero)

1. Determinate le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^2$.

2. Determinare i valori della costante k per i quali il sistema, di due equazioni nelle due incognite x ed y ,

$$\begin{cases} (2k+4)\,x + k\,y = 7 \\ (k-13)\,x + (k-6)\,y = 9 \end{cases}$$

ammette una unica soluzione (nota: non viene chiesto di risolvere il sistema).

3. Calcolare il rango della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2k+1 & -1 \\ 0 & 0 & k-6 \end{pmatrix}$ al variare di k .

4. Calcolare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$.

5. Calcolare il prodotto $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Esame di Geometria del 26/4/2002 (secondo esonero)

1. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} \right\}.$$

Determinare:

a) le dimensioni di U e W ;

b) una base dell'intersezione $U \cap W$;

c) una base dello spazio somma $U + W$.

2. Si consideri il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Trovare due vettori, $\vec{w}$ e $\vec{z}$, indipendenti nonché entrambi ortogonali al vettore $\vec{v}$;

b) calcolare il prodotto vettoriale $\vec{w} \wedge \vec{z}$.

3. Si consideri la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 14 & 3 \\ 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$. Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ due vettori in $\mathbb{R}^3$.

a) È vero che $\vec{w}$ è un autovettore di A ?

b) Verificare che $\vec{v}$ è un autovettore di A e calcolarne il relativo autovalore.

c) Calcolare $A^5\vec{v}$;

4. Siano $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ due punti del piano. Determinare

a) un'equazione cartesiana della retta r passante per i punti A e B ;

b) un'equazione cartesiana della retta s passante per il punto A ed ortogonale alla retta r ;

c) la distanza del punto $P = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix}$ dalla retta r .

d) l'area del triangolo $\mathbb{T}$ di vertici A, B, P .

e) il valore del coseno dell'angolo (del triangolo $\mathbb{T}$) opposto al lato $\overline{AB}$;

5. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^{41}$. Supponiamo che U è definito da 5 equazioni cartesiane indipendenti, che $\dim(U \cap W) = 11$ e che $\dim(U + W) = 39$.

a) calcolare la dimensione di U ;

b) calcolare la dimensione di W .

Esame di Geometria del 3/5/2002 (primo appello)

1. Sia $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 11 & -8 \end{pmatrix}$ una matrice. Determinare

a) gli autovalori di A;

b) gli autospazi di A;

c) l'inversa di A.

2. Sia π il piano di equazione $2x+3y+2z+4 = 0$ e sia $P = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ un punto di $\mathbb{R}^3$.

Determinare

a) due vettori indipendenti, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, entrambi paralleli al piano π;

b) la distanza del punto P dal piano π;

c) le coordinate del punto $Q \in \pi$ tale che $distanza\{P, Q\} = distanza\{P, \pi\}$;

d) calcolare il prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{w}$.

3. Si consideri il sistema lineare $\begin{cases} (2k-3)\,x \;+\; (5k-11)\,y \;=\; -7 \\ (k+1)\,x \;+\; (3k-3)\,y \;=\; -6 \end{cases}$

nelle due incognite x ed y. Determinare i valori della costante k per i quali il sistema

a) è incompatibile;

b) ammette una unica soluzione;

c) ammette infinite soluzioni.

(nota: non viene chiesto di risolvere il sistema)

4. Sia W lo spazio vettoriale avente come base $\mathcal{B} = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} \right\}$

e si consideri il vettore $\vec{w} = \begin{pmatrix} 26 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) verificare che $\vec{w} \in W$;

b) determinare le coordinate di $\vec{w}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ di W;

c) determinare una base di $\mathbb{R}^3$ contenente i vettori $\vec{b}_1$ e $\vec{b}_2$.

5. Si consideri la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 & 4 \\ -2 & -14 & 2 & -8 \\ -1 & -7 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

a) determinare una base del nucleo $\ker A$;

b) determinare una base dell'immagine $\mathrm{im}\, A$;

Esercizio facoltativo.

Sia $A \in M_{5,7}(\mathbb{R})$ una matrice e sia $\vec{b} \in \mathbb{R}^5$ un vettore. Supponiamo che "le prime due colonne di A siano uguali al vettore $\vec{b}$".

-) Scrivere due soluzioni distinte (esplicite) del sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$.

Esame di Geometria del 9/5/2002 (secondo appello)

1. Sia $A := \begin{pmatrix} 2k+1 & 1-4k & 0 & k+2 \\ 3 & -5 & 0 & 2 \\ 19-k & k-29 & 0 & 14-k \end{pmatrix}$ una matrice. Determinare i valori di k per i quali

a) la matrice A ha rango 1;
b) la matrice A ha rango 2;
c) la matrice A ha rango 3.

2. Sia $P = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ un punto di $\mathbb{R}^3$, sia S il piano di equazione $2x-6y-3z+1 = 0$ e sia T il piano di equazione $3x+y-2z-6 = 0$. Determinare

a) le coordinate di un vettore $\vec{v}$ parallelo ad entrambi i piani S e T;
b) equazioni parametriche della retta $r = S \cap T$;
c) la distanza del punto P dalla retta r;
d) equazioni parametriche della retta s passante per P ed ortogonale al piano S.

3. Si consideri la matrice $A := \begin{pmatrix} 7 & 1 & -6 & -1 & 4 \\ 14 & 2 & -12 & 2 & -8 \end{pmatrix}$.

a) Calcolare la dimensione del nucleo $\ker A$ e la dimensione dell'immagine $\operatorname{im} A$;
b) determinare una base del nucleo $\ker A$;
c) determinare una base dell'immagine $\operatorname{im} A$;

4. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 5 & 14 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

a) calcolare il polinomio caratteristico $P_A(\lambda)$ della matrice A;
b) provare che $\lambda = 4$ è un autovalore di A;
c) determinare una base dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 4$.

5. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$, $W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. Determinare

a) una base dell'intersezione $U \cap W$;
b) una base dello spazio somma $U + W$.

Esercizio facoltativo.

Siano $U = \operatorname{Span}\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_7\}$ e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$. Supponiamo che si abbiano le relazioni $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{0}$, $\vec{u}_2 + \vec{u}_5 = \vec{0}$ e che tra i vettori $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_7$ non vi siano altre relazioni di dipendenza lineare (oltre alle combinazioni lineari delle relazioni indicate). Supponiamo inoltre che $\dim W = 4$, $\dim(U+W) = 5$, che le prime 5 coordinate dei vettori in W siano tutte nulle e che tutte le coordinate del vettore $\vec{u}_3 + \vec{u}_4$ siano uguali ad 1.

-) Dimostrare che U è univocamente determinato dalle condizioni indicate e scrivere esplicitamente una base di U.

Esame di Geometria del 16/9/2002 (I appello di recupero)

1. Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare, siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^2$.
Supponiamo che $L(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ e che $L(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) è vero che $\vec{u}$ e $\vec{v}$ devono necessariamente essere due vettori indipendenti? (Motivare la risposta);

b) calcolare $L(8\vec{u} - 3\vec{v})$;

c) determinare la dimensione dell'immagine $\operatorname{Im} L$ e del nucleo $\ker L$;

d) è vero che il vettore $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartiene allo spazio $\operatorname{Im} L$? (Giustificare la risposta).

2. Sia r la retta del piano di equazione $4x - 3y + 7 = 0$.

a) Determinare le coordinate di un vettore $\vec{v}$ di norma 20 nonché ortogonale ad r;

b) determinare un'equazione cartesiana della retta s parallela ad r e passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \end{pmatrix}$;

c) determinare la distanza tra le due rette.

3. Sia $M(k) = \begin{pmatrix} k & -k+3 \\ 6 & 2k+10 \end{pmatrix}$ una matrice che dipende dal parametro k.

a) Determinare i valori di k per i quali la matrice $M(k)$ è invertibile;

b) si determinino autovalori e autospazi della matrice $M(3)$.

4. Sia $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare.
Supponiamo che $L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e che $L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Si determini una base del nucleo $\ker L$;

b) si determini una base dell'immagine $\operatorname{Im} L$.

5. Si consideri $\mathbb{R}^3$ ed i suoi sottospazi
$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$, $W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Determinate una base dello spazio somma $U + W$;

b) determinare una base dell'intersezione $U \cap W$.

6. Siano $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$.

a) Calcolare il prodotto vettoriale $\vec{u} \wedge \vec{v}$;

b) determinare un'equazione cartesiana del piano π parallelo ad $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nonché passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Esame di Geometria del 27/9/2002 (II appello di recupero)

1. Sia $A \in M_{3,3}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 4 \\ 6 & 3 & 8 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

a) verificate che $\lambda = 2$ è un autovalore di A;

b) tra i valori -2, 0, 3, 5, 7, 10 c'è un autovalore della matrice A il cui autospazio ha dimensione 2. Trovatelo (n.b.: non è necessario calcolare il polinomio caratteristico);

c) determinate una base dell'autospazio relativo all'autovalore trovato;

2. Si consideri l'applicazione lineare

$$L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

a) Si determini $L \circ L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix})$ (il simbolo "$\circ$" denota la composizione);

b) si determini una base del nucleo $\ker L$;

c) si determini una base dell'immagine $\operatorname{Im} L$.

3. Sia $A(k) = \begin{pmatrix} 1 & k & k & k \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & 1 & -k \end{pmatrix}$ una matrice che dipende dal parametro k.

a) Calcolare il determinante $\det A(k)$;

b) calcolare il rango della matrice A al variare del parametro k.

4. Sia S il piano di equazione $x + 3y - 5z + 8 = 0$ e sia T il piano di equazione $2x - y - 3z + 9 = 0$. Determinare

a) le coordinate di un vettore $\vec{u}$ ortogonale al piano S e le coordinate di un vettore $\vec{v}$ ortogonale al piano T;

b) le coordinate di un vettore $\vec{w}$ parallelo ad entrambi i piani S e T;

c) equazioni parametriche della retta $r = S \cap T$;

5. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$U = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $W = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$. Determinare

a) le dimensioni di U e W;

b) una base dell'intersezione $U \cap W$;

c) una base dello spazio somma $U + W$;

d) una base di $\mathbb{R}^4$ contenente due vettori di W.

Indice

Capitolo 1

§1 Introduzione ai sistemi lineari 1

Capitolo 2

§1 Sistemi lineari e matrici 3
§2 L'eliminazione di Gauss 5

Capitolo 3

§1 Matrici 11
§2 Matrici quadrate 13
§3 Determinante 14
§4 Teorema di Cramer 21
§5 Il calcolo dell'inversa di una matrice mediante l'algoritmo di Gauss 24

Capitolo 4

§1 Spazi vettoriali 26
§2 Sottospazi di uno spazio vettoriale e formula di Grassmann 34
§3 Rango di una matrice 36
§4 Sottospazi di uno spazio vettoriale II 38
§5 Sottospazi di uno spazio vettoriale: equazioni parametriche e cartesiane 39

Capitolo 5

§1 Richiami di insiemistica 42
§2 Applicazioni lineari 42

Capitolo 6

§1 Trasformazioni lineari di uno spazio vettoriale 49
§2 Problema della diagonalizzazione 53

Capitolo 7

§1 Geometria Euclidea del piano 56
§2 Rette nel piano 62
§3 Geometria Euclidea del piano: applicazioni ed esercizi 67
§4 Geometria Euclidea dello spazio 71
§5 Rette e piani nello spazio 76
§6 Geometria Euclidea dello spazio: applicazioni ed esercizi 79

Compiti d'esame 83