M. Mosconi

Appunti di Scienza delle Costruzioni

1 Giugno 2000

Elementi di Algebra e Analisi Tensoriale

INDICE

La presenta dispensa è una raccolta di appunti di algebra e analisi vettoriale e tensoriale. Sarò grato a coloro che mi segnaleranno sviste, errori o quant'altro.

1. ALGEBRA VETTORIALE E TENSORIALE

Sia $\mathscr{E}$ lo spazio euclideo tridimensionale, e sia $\mathscr{V}$ lo spazio vettoriale ad esso associato[1]. Gli elementi p, x, o di $\mathscr{E}$ sono detti *punti* e quelli $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ di $\mathscr{V}$ *vettori*. Per differenza di due punti x, o si intende il vettore $\mathbf{x} = x - o$. Dunque, un vettore è un operatore che trasporta un punto o in un altro punto x (definizione di Hamilton).

Si dice *sottospazio* di un generico spazio vettoriale $\mathscr{V}$ generato da $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, e lo si indica con $\operatorname{span}\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$, l'insieme di tutte le combinazioni lineari del tipo

$$\alpha\,\mathbf{u}+\beta\,\mathbf{v}+\gamma\,\mathbf{w}\in\mathscr{V}, \quad \text{con } \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}.$$

Inoltre, si chiama *dimensione* di uno spazio vettoriale il massimo numero n dei vettori che lo generano; per lo spazio $\mathscr{V}$ associato allo spazio euclideo $\mathscr{E}$ risulta $n = \dim\mathscr{V} = 3$. Si definisce dunque *base* per uno spazio vettoriale una collezione di n vettori linearmente indipendenti in $\mathscr{V}$.

Si definisce *prodotto scalare* l'applicazione $\mathscr{V}\times\mathscr{V}\to\mathbb{R}$ che associa ad ogni coppia di vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ il numero reale $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$; se risulta $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$, i due vettori si dicono *ortogonali*.

Si chiama *modulo* o *norma* del vettore $\mathbf{u}$, e lo si indica con $\|\mathbf{u}\|$, il numero

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\,. \tag{1.1}$$

Un vettore $\mathbf{e}$ per il quale risulti $\|\mathbf{e}\|=1$ è detto *versore* (o *vettore unitario* o *vettore normale*). Dato un vettore $\mathbf{v}$ non normale il suo versore si ottiene dalla seguente:

$$\operatorname{vers}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\,,$$

e quindi:

[1] O spazio delle traslazioni.

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \text{ vers } \mathbf{v} .$$

Scegliamo un punto $o \in \mathcal{E}$ che diremo *origine*, e prendiamo in $\mathcal{V}$ tre vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ indipendenti: questi vettori formano una base per $\mathcal{V}$, che indicheremo brevemente con $\{\mathbf{e}_i\}$, con $i = 1,2,3$.[2] L'insieme $\{o;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ costituisce un *sistema di riferimento cartesiano*; per un punto x e un vettore $\mathbf{u}$ valgono le seguenti rappresentazioni

$$x - o = x^i \mathbf{e}_i\ ,\ x = o + x^i \mathbf{e}_i\ ,\ \mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i\ , \tag{1.2}$$

dove i numeri reali

$$x^i = (x - o) \cdot \mathbf{e}^i\ ,\ \ u^i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^i\ , \tag{1.3}$$

sono, rispettivamente, le *coordinate* di x e le *componenti* di $\mathbf{u}$ nella *base duale* $\{\mathbf{e}^i\}$. La base duale è caratterizzata dalla condizione $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i{}_j$, dove $\delta^i{}_j = \delta_i{}^j = \delta^{ij} = \delta_{ij}$ sono i *delta di Kronecker*, che valgono 1 se $i = j$ e valgono 0 se $i \neq j$. Le base originale $\mathbf{e}_i$ e quella duale $\mathbf{e}^i$ coincidono se e solo se il sistema di coordinate scelto è ortonormale, come spesso accade; infatti in questo caso $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \delta^i{}_j$ e dunque $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i$ per ogni i. Le coordinate x^i e le componenti u^i sono dette *controvarianti* per distinguerle dalle corrispondenti *covarianti* x_i e u_i date da

$$x_i = (x - o) \cdot \mathbf{e}_i\ ,\ \ u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i\ , \tag{1.4}$$

in termini delle quali si ha

$$x = o + x_i \mathbf{e}^i\ ,\ \mathbf{u} = u_i \mathbf{e}^i . \tag{1.4b}$$

Supporremo d'ora in poi che $\{o;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ sia un *sistema di riferimento cartesiano ortonormale*. Dunque risulta:

$$\mathbf{x}(x) = x - o = x_i \mathbf{e}_i,\ \ \mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i\ , \tag{1.5}$$

dove le componenti x_i del *vettore posizione* $\mathbf{x}$ del punto x sono le coordinate cartesiane (ortonormali) del punto.

La scrittura in componenti del prodotto scalare di due vettori è

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = u_i v_i\ . \tag{1.6}$$

---

[2] Salvo diversa indicazione, assumeremo per gli indici latini l'intervallo di variazione {1,2,3} e per quelli greci l'intervallo {1,2}; inoltre, useremo la *convenzione degli indici muti* (o *notazione di Einstein*), secondo la quale gli indici ripetuti si intendono sommati sul loro intervallo di variazione.

Si definisce *prodotto vettoriale* l'applicazione di $\mathcal{V}\times\mathcal{V}\rightarrow\mathcal{V}$ che associa ad ogni coppia di vettori **u** e **v** il vettore

$$\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}\,,\ \text{con}\ \mathbf{u}\in\mathcal{V}, \mathbf{v}\in\mathcal{V}, \mathbf{w}\in\mathcal{V}\ ; \tag{1.7}$$

in termini di componenti risulta:

$$w_k=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_k=\varepsilon_{ijk}u_i v_j=\varepsilon_{kij}u_i v_j\,, \tag{1.8}$$

dove ε_{ijk} è il *simbolo di permutazione di Ricci*, che è definito

$$\varepsilon_{ijk}=\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_k\,, \tag{1.9}$$

e assume i seguenti valori:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1\,,\\ &\varepsilon_{132}=\varepsilon_{321}=\varepsilon_{213}=-1\,,\\ &\varepsilon_{ijk}=0\quad se\ \ i{=}j,\ i{=}k,\ j{=}k\,.\end{aligned}$$

Indichiamo con Lin l'insieme delle trasformazioni lineari di $\mathcal{V}$ in se. Gli elementi di Lin sono detti *tensori del secondo ordine* (o *tensori doppi*). La notazione

$$\mathbf{v}=\mathbf{A}\mathbf{u}=\mathbf{A}(\mathbf{u})=\mathbf{A}[\mathbf{u}]=[\mathbf{A}]\mathbf{u}=\mathbf{A}\circ\mathbf{u} \tag{1.10}$$

significa che il vettore **v** è ottenuto applicando ad **u** la trasformazione lineare **A**. Una trasformazione lineare di uno spazio vettoriale in sé è anche detta *endomorfismo*.

Particolari elementi di Lin sono la *trasformazione identica* **I** e la *trasformazione nulla* **O**, definite rispettivamente da

$$\mathbf{I}\mathbf{u}=\mathbf{u}\,,\quad \mathbf{O}\mathbf{u}=\mathbf{0}\,,\quad \forall\mathbf{u}\in\mathcal{V}\,. \tag{1.11}$$

Lin è uno spazio vettoriale sul corpo reale $\mathbb{R}$, con le solite operazioni di somma e di moltiplicazione:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{u}:=\mathbf{A}\mathbf{u}+\mathbf{B}\mathbf{u}\,,\quad (\alpha\mathbf{A})\mathbf{u}:=\alpha(\mathbf{A}\mathbf{u})\,, \tag{1.12}$$

con **A**, **B** $\in$Lin, u$\in\mathcal{V}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, ed è un gruppo rispetto al prodotto di composizione:

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{u}:=\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{u})\,; \tag{1.13}$$

nella relazione precedente si è indicato con **AB** il prodotto di composizione $\mathbf{A}\circ\mathbf{B}$. Inoltre si definisce $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}\circ\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^3=\mathbf{A}\circ\mathbf{A}\circ\mathbf{A}$, e così via.

Per ogni tensore **A** esiste un unico tensore $\mathbf{A}^T$ detto *trasposto* di **A** che verifica la seguente identità:

$$\mathbf{Au}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}^T\mathbf{v}\,,\quad \forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathcal{V}\,. \tag{1.14}$$

Dalla definizione di trasposizione di un tensore discendono le seguenti proprietà: dati $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ e $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}\in$Lin si ha:

$$(\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A}\,, \tag{1.15}$$

$$(\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{B})^T=\alpha\mathbf{A}^T+\beta\mathbf{B}^T\,, \tag{1.16}$$

$$(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\,,\quad (\mathbf{ABC})^T=\mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\,. \tag{1.17}$$

Se accade che $\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$ si dice che $\mathbf{A}$ è *simmetrico*, e se $\mathbf{A}=-\,\mathbf{A}^T$ si dice che $\mathbf{A}$ è *antisimmetrico*. L'identità (1.15) mostra che i seguenti tensori:

$$\mathrm{sym}\mathbf{A}:=\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)\,,\quad \mathrm{skw}\mathbf{A}:=\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T) \tag{1.18}$$

sono rispettivamente simmetrico e antisimmetrico. Essi sono detti la *parte simmetrica* e la *parte antisimmetrica* di $\mathbf{A}$. Vale il seguente *Teorema di decomposizione in somma*: ogni tensore del secondo ordine può decomporsi in unico modo nella somma di un tensore simmetrico e uno antisimmetrico:

$$\mathbf{A}=\mathrm{sym}\mathbf{A}+\mathrm{skw}\mathbf{A}\,. \tag{1.19}$$

Un tensore $\mathbf{A}$ si dice *invertibile* se esiste un tensore $\mathbf{A}^{-1}$, detto l'*inverso* di $\mathbf{A}$, tale che

$$\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}\,. \tag{1.20}$$

Gli insiemi dei tensori simmetrici e antisimmetrici si indicano rispettivamente con Sym e con Skw, mentre l'insieme dei tensori invertibili si indica con Inv. Sym e Skw costituiscono dei sottospazi vettoriali di Lin, e in particolare vale la seguente:

$$\mathrm{Lin}=\mathrm{Sym}\oplus\mathrm{Skw}\,; \tag{1.21}$$

Inv è invece un sottogruppo di Lin.

Si definisce *diade* formata da (o *prodotto tensoriale* tra) due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e si indica con $\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$, la trasformazione che ad ogni vettore $\mathbf{a}\in\mathcal{V}$ associa il vettore

$$(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\mathbf{a}:=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\mathbf{u}\,. \tag{1.22}$$

Poiché si tratta di una trasformazione lineare, allora $\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$ è un particolare tensore del secondo ordine. Il sottoinsieme di Lin formato dalle diadi viene indicato con Dya. Esso gode della seguente proprietà: dati tre vettori $\mathbf{a}_i$ fra loro linearmente indipendenti, ogni elemento di Lin può essere rappresentato come combinazione lineare delle diadi $\mathbf{a}_i\otimes\mathbf{a}_j$. In altre parole $\{\mathbf{a}_i\otimes\mathbf{a}_j\}$ è una base per lo spazio Lin. La base naturale per Lin si costruisce usando i vettori $\mathbf{e}_i$ che definiscono il sistema di riferimento, ovvero

$$\mathrm{Lin} \equiv \mathrm{span}\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\} \ . \tag{1.23}$$

Per ogni $\mathbf{A} \in \mathrm{Lin}$ si ha allora la seguente rappresentazione:

$$\mathbf{A} = A_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \,, \tag{1.24}$$

dove i nove numeri reali A_{ij} sono detti le *componenti* di **A**. E’ immediato verificare che

$$A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_j \,; \tag{1.25}$$

infatti:

$$\mathbf{e}_h \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_k = A_{ij}\mathbf{e}_h \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_k = A_{ij}\delta_{jk}\delta_{ih} = A_{hk} \,. \tag{1.26}$$

Si hanno dunque le seguenti rappresentazioni per componenti:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j \,, \tag{1.27}$$
$$(\mathbf{I})_{ij} = \delta_{ij} \,, \tag{1.28}$$
$$(\mathbf{O})_{ij} = 0 \,, \tag{1.39}$$
$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = A_{ji} \,. \tag{1.30}$$

Si dimostra facilmente che per la trasposta di una diade risulta

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})^T = \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \,. \tag{1.31}$$

Osserviamo che si definisce *determinante* di un tensore **A** il determinante della matrice delle sue componenti:

$$\det \mathbf{A} = \det[\mathbf{A}] \,, \tag{1.32}$$

che risulta essere una quantità invariante, al variare del sistema di riferimento scelto.

Consideriamo la funzione $\mathrm{tr} : \mathrm{Dya} \to \mathbb{R}$ che ad ogni diade $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ associa il prodotto scalare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$:

$$\mathrm{tr}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) := \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \,; \tag{1.33}$$

poiché ogni tensore è rappresentabile come combinazione lineare di diadi, è immediato estendere l’applicazione tr a tutto lo spazio Lin, in modo che l’estensione sia lineare. Per ogni tensore **A** si ha, in componenti,

$$\mathrm{tr}\mathbf{A} = A_{ij}\,\mathrm{tr}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = A_{ij}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = A_{ij}\delta_{ij} = A_{ii} \,, \tag{1.34}$$

e tr**A** si chiama *traccia* di **A**. Valgono le seguenti proprietà:

$$\mathrm{tr}\mathbf{A} = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^T)\,,\ \ \mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})\,. \tag{1.35}$$

Dati due tensori **A** e **B** si definisce *prodotto scalare* di **A** e **B** il numero

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathrm{tr}(\mathbf{AB}^T)\,. \tag{1.36}$$

Osserviamo che se **S**∈Sym e **W**∈Skw allora risulta: $\mathbf{S}\cdot\mathbf{W} = 0$.

Dalla definizione di prodotto scalare discende la seguente definizione di *modulo* (o *norma*) di un tensore **A**:

$$\|\mathbf{A}\| := \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{\mathrm{tr}(\mathbf{AA}^T)}\,. \tag{1.37}$$

Focalizziamo ora l'attenzione si una proprietà importante dei tensori antisimmetrici:

$$\text{se } \mathbf{W}\in \mathrm{Skw} \Rightarrow \exists!\, \mathbf{w}\in\mathscr{V} \ \text{ t.c. } \ \mathbf{Wu} = \mathbf{w}\times\mathbf{u}\,,\ \ \forall \mathbf{u}\in\mathscr{V}\,; \tag{1.38}$$

il vettore **w** si dice *asse* di **W** e **W** è il *tensore assiale* di **w**; la relazione tra un tensore assiale e il suo asse è:

$$W_{ij} = \varepsilon_{jik} w_k = -\varepsilon_{ijk} w_k\,,\quad \text{cioè } \mathbf{W} = -\mathbf{ew}\,, \tag{1.39}$$

ovvero

$$w_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} W_{jk}\,,\quad \text{cioè } \mathbf{w} = -\frac{1}{2}\mathbf{eW}\,, \tag{1.40}$$

essendo **e** il *tensore di Ricci*, o *tensore permutatore*, un tensore del terzo ordine la cui generica componente cartesiana coincide con il simbolo di permutazione (1.9):

$$(\mathbf{e})_{ijk} = \varepsilon_{ijk}\,. \tag{1.41}$$

Dato un tensore **A**∈Lin si definisce *cofattore* di **A** l'unico elemento $\mathbf{A}^*$ di Lin tale che

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{Aa}\times\mathbf{Ab}\,,\quad \text{con } \mathbf{a}, \mathbf{b}\in\mathscr{V}; \tag{1.42}$$

se $\det\mathbf{A} > 0$, ovvero **A**∈Lin$^+$, indicando con Lin$^+$ la collezione di tutti i tensori del secondo ordine con determinante positivo, allora risulta

$$\mathbf{A}^* = (\det\mathbf{A})\mathbf{A}^{-T}\,, \tag{1.43}$$

dove $\mathbf{A}^{-T} = (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.

Indichiamo con Dev l'insieme dei tensori aventi traccia nulla, detti *deviatori*, e con Sph l'insieme dei tensori multipli dell'identità, detti *sferici*. Il secondo *teorema di decomposizione in somma* afferma che ogni tensore può decomporsi in un unico modo nella somma di un deviatore e di un tensore sferico, ovvero

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\mathrm{D} + \mathbf{A}_\mathrm{I}, \tag{1.44}$$

dove $\mathbf{A}_\mathrm{D}$ e $\mathbf{A}_\mathrm{I}$ sono rispettivamente il *deviatore* e la *parte sferica* (o *idrostatica*) di $\mathbf{A}$, e valgono

$$\mathbf{A}_\mathrm{I} := \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\mathbf{A})\mathbf{I}\,, \quad \mathbf{A}_\mathrm{D} := \mathbf{A} - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\mathbf{A})\mathbf{I}\,. \tag{1.45}$$

Sph e Dev sono sottospazi vettoriali di Lin e si può dimostrare che l'uno è il *complemento ortogonale* dell'altro, ovvero

$$\mathrm{Lin} = \mathrm{Sph} \oplus \mathrm{Dev}\,, \tag{1.46}$$

la stessa proprietà che vale, come abbiamo visto, per Sym e Skw.

Dato un tensore $\mathbf{A} \in \mathrm{Lin}$ si definiscono *autocoppie* le coppie ordinate $(\lambda, \mathbf{u})$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ ed $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ tali che

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\,; \tag{1.47}$$

λ è detto *autovalore* o *componente principale* di $\mathbf{A}$ ed $\mathbf{u}$ *autovettore* di $\mathbf{A}$; esso individua una direzione detta *direzione principale* di $\mathbf{A}$. La (1.47) si scrive anche

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}\,, \tag{1.48}$$

che è un sistema algebrico lineare omogeneo, il quale ammette soluzione diversa da quella banale $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ se e solo se

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0\,; \tag{1.49}$$

la (1.49) è un equazione cubica in λ, detta *equazione caratteristica* di $\mathbf{A}$ o *equazione secolare*, che risolta fornisce i tre autovalori λ_i di $\mathbf{A}$. Essa si può scrivere nel modo seguente:

$$\lambda^3 - i_1(\mathbf{A})\lambda^2 + i_2(\mathbf{A})\lambda - i_3(\mathbf{A}) = 0\,, \tag{1.50}$$

dove i coefficienti introdotti $i_1(\mathbf{A})$, $i_2(\mathbf{A})$, $i_3(\mathbf{A})$ risultano indipendenti dal riferimento e sono detti *invariante* rispettivamente di *primo*, *secondo* e *terzo ordine*, o anche *invariante lineare*, *quadratico* e *cubico*; le loro espressioni sono:

$$\begin{aligned} i_1(\mathbf{A}) &= \mathrm{tr}\mathbf{A}\,, \\ i_2(\mathbf{A}) &= (\det\mathbf{A})\mathrm{tr}\mathbf{A}^{-1} = \mathrm{tr}\mathbf{A}^*\,, \\ i_3(\mathbf{A}) &= \det\mathbf{A}\,. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Se $\mathbf{A}$ è simmetrico allora si dimostra che i tre autovalori λ_i sono tutti reali, e si possono organizzare secondo una successione monotona non crescente: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$; inoltre gli autovettori associati sono mutuamente ortogonali, cioè

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij}\,. \tag{1.52}$$

Se inoltre A è *definito positivo*, ovvero risulta

$$\mathbf{A}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} > 0\,, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} - \{\mathbf{0}\}, \tag{1.53}$$

allora si dimostra che gli autovalori sono tutti reali e positivi.

Nella base formata dagli autovettori $\{\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j\}$ $\mathbf{A}$ ha la seguente rappresentazione diagonale:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \tag{1.54}$$

ovvero la seguente *rappresentazione spettrale*:

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}_3\,. \tag{1.55}$$

Un particolare sottogruppo di Inv è il gruppo dei tensori *ortogonali*, Orth, cioè dei tensori $\mathbf{Q}\in$Lin che conservano il prodotto scalare:

$$\mathbf{Q} \in \mathrm{Orth} \text{ se } \mathbf{Q}\mathbf{u}\cdot\mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\,,\ \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{V}\,, \tag{1.56}$$

ovvero preservano la norma e l'angolo:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2\,, \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \cos\theta\ . \tag{1.57}$$

Si verifica facilmente che un tensore è ortogonale se e solo se

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}\,, \quad \text{ovvero } \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}. \tag{1.58}$$

Si dimostra altresì che per queste trasformazioni $\mathbf{Q}$ risulta: $(\det\mathbf{Q})^2 = 1$. I tensori con $\det\mathbf{Q} = -1$ sono detti *riflessioni*; mentre i tensori con $\det\mathbf{Q} = +1$ sono detti *rotazioni*.

Se indichiamo con Rot ≡ $\text{Orth}^+ \subset$ Lin la collezione delle rotazioni, è immediato vedere che Rot non è uno spazio vettoriale. Inoltre l'equazione caratteristica per un tensore rotazione **Q**

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \text{tr}\mathbf{Q}) = 0$$

ammette la soluzione $\lambda = 1$, per cui esiste un vettore **k** tale che

$$\mathbf{Qk} = \mathbf{k}\,.$$

Si definisce *asse di rotazione* il vettore **k** corrispondente all'autovalore $\lambda = 1$. Una rappresentazione della rotazione **Q** in termini dell'asse di rotazione **k**, con $\|\mathbf{k}\| = 1$, e dell'ampiezza della rotazione φ è data dalla seguente *formula di Rodriguez*:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{k},\varphi) = \mathbf{I} + \sin\varphi \mathbf{W}(\mathbf{k}) + (1 - \cos\varphi)\mathbf{W}^2(\mathbf{k})\,, \tag{1.59}$$

nella quale **W** è il tensore assiale di **k**.

Rispetto ad una assegnata base dello spazio $\mathscr{V}$ è possibile rappresentare un vettore e un tensore mediante le relative componenti cartesiane; al variare della base in $\mathscr{V}$ evidentemente tali componenti varieranno. In particolare per effetto di una rotazione **Q** del sistema di riferimento per le componenti di un vettore **v** risulta:

$$v_j{}^* = Q_{ji} v_i \ , \quad \mathbf{v}^* = \mathbf{Qv}\,, \tag{1.60}$$

ovvero

$$v_j = Q_{ij} v_i{}^* \ , \quad \mathbf{v} = \mathbf{Q}^T \mathbf{v}^*\,. \tag{1.61}$$

Di conseguenza per un tensore **T**, posto $\mathbf{v} = \mathbf{Tu}$, si ha:

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{T}^* \mathbf{u}^* = \mathbf{QTu} = \mathbf{QTQ}^T \mathbf{u}^*\,, \tag{1.62}$$

e dunque si ottiene la seguente formula di trasformazione:

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{QTQ}^T\,. \tag{1.63}$$

Si dice che un vettore **v** è *obiettivo* quando in un generico cambiamento di osservatore q risulta:

$$\mathbf{v}^* = q \circ \mathbf{v} = q(\mathbf{v}) = \mathbf{Qv}\,; \tag{1.64}$$

analogamente, un tensore **T** è obiettivo quando

$$\mathbf{T}^* = q \circ \mathbf{T} = q(\mathbf{T}) = \mathbf{QTQ}^T\,. \tag{1.65}$$

Un esempio di vettore obiettivo in meccanica del continuo è la tensione $\mathbf{t}(p)$ in un punto p di un corpo materiale: è naturale supporre che essa dipenda solo dalla posizione relativa, ovvero dalla differenza di posizione, dei punti del corpo.

Dato un versore **e** la diade simmetrica

$$\mathbf{P} = \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \tag{1.66}$$

si chiama *proiettore ortogonale*. Infatti preso un qualunque vettore **v** di $\mathcal{V}$ il vettore

$$\mathbf{P}\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} = \mathbf{v}_{\mathbf{e}} \tag{1.67}$$

rappresenta la proiezione ortogonale di **v** su **e**. Inoltre la differenza

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\mathbf{e}} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} \tag{1.68}$$

rappresenta la proiezione ortogonale di **v** sul piano ortogonale ad **e**, per la quale risulta:

$$\mathbf{v}_{\perp} = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{v} = \mathbf{P}_{\perp}\mathbf{v}\,; \tag{1.69}$$

il tensore

$$\mathbf{P}_{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \tag{1.70}$$

è detto *proiettore (ortogonale) complementare*. Ovviamente

$$\mathbf{P} + \mathbf{P}_{\perp} = \mathbf{I}\,. \tag{1.71}$$

L'insieme delle trasformazioni lineari di Lin in sé lo indichiamo con LinLin e i suoi elementi C, D, K sono detti *tensori del quarto ordine*. Poiché Lin è uno spazio vettoriale, allora LinLin possiede tutta la struttura algebrica di un insieme di trasformazioni lineari di uno spazio vettoriale in sé. In particolare, è immediato trasferire ai tensori del quarto ordine le definizioni di somma, moltiplicazione per uno scalare e prodotto di composizione:

$$\begin{aligned} &(\mathsf{C} + \mathsf{D})\mathbf{A} := \mathsf{C}\mathbf{A} + \mathsf{D}\mathbf{A}\,, \\ &(\alpha\mathsf{C})\mathbf{A} := \alpha(\mathsf{C}\mathbf{A})\,, \\ &(\mathsf{C}\mathsf{D})\mathbf{A} := \mathsf{C}(\mathsf{D}\mathbf{A})\,, \end{aligned} \tag{1.72}$$

la definizione di tensore trasposto:

$$\mathsf{C}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathsf{C}^T\mathbf{B}\,,\ \ \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{Lin}\,, \tag{1.73}$$

di tensore invertibile e di tensore inverso:

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I}\,, \tag{1.74}$$

di diade:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})\mathbf{U} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U})\mathbf{A}\,,\ \ \forall \mathbf{U} \in \mathrm{Lin}\,. \tag{1.75}$$

Ricordando inoltre che $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i)$ è una base di Lin, segue che ogni tensore del quarto ordine $\mathbf{C}$ ammette la seguente rappresentazione:

$$\mathbf{C} = C_{ijhk}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \otimes (\mathbf{e}_h \otimes \mathbf{e}_k)\,, \tag{1.76}$$

dove i numeri

$$C_{ijhk} = (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{C}(\mathbf{e}_h \otimes \mathbf{e}_k) \tag{1.77}$$

sono le *componenti* di $\mathbf{C}$ nel riferimento cartesiano individuato dagli $\mathbf{e}_i$.

Infine, per *modulo* di $\mathbf{C}$ si può adottare la seguente definizione:

$$\|\mathbf{C}\| := \sup \frac{\|\mathbf{C}\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}\,,\ \ \mathbf{A} \in \mathrm{Lin} - \{\mathbf{0}\}\,. \tag{1.78}$$

2. CALCOLO VETTORIALE E TENSORIALE

Sia D un insieme aperto di $\mathcal{E}$. Un *campo* su D è una funzione Ψ definita su D e con valori in uno spazio vettoriale a dimensione finita $\mathcal{F}$. Si ha un *campo scalare*, *vettoriale*, *tensoriale* a seconda che $\mathcal{F}$ coincida rispettivamente con $\mathbb{R}$, con $\mathcal{V}$, e con Lin (oppure LinLin).

Un esempio di campo scalare tratto dalla Meccanica del Continuo è la funzione $\rho(p)$ che ad ogni punto p di D associa la *densità* nel punto p; un esempio di campo vettoriale è la funzione $\mathbf{p}(p)$ che ad ogni punto p di D associa il suo vettore posizione

$$\mathbf{p}(p) = p - o\,; \tag{2.1}$$

un esempio di campo tensoriale è la funzione $\mathbf{T}(p)$ che ad ogni punto p di D associa lo *stato tensionale* nel punto (sforzo di Cauchy).

Diremo che un campo scalare φ è *differenziabile* nel punto $\mathbf{x}$ se esiste un vettore $\mathbf{w}$ che soddisfa la seguente:

$$\varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + O(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2)\,, \quad \text{quando } \mathbf{y} \to \mathbf{x}. \tag{2.2}$$

Se un tale vettore esiste, è unico; scriveremo $\mathbf{w} = \nabla\varphi(\mathbf{x})$ e chiameremo $\nabla\varphi(\mathbf{x})$ il *gradiente* di φ in $\mathbf{x}$. Le derivate parziali di φ in $\mathbf{x}$, che indichiamo brevemente con la virgola $\varphi,_i(\mathbf{x})$, sono definite come:

$$\varphi,_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_i = (\nabla \varphi(\mathbf{x}))_i \,. \tag{2.3}$$

Più in generale, sia $\mathcal{W}$ uno spazio vettoriale a dimensione finita dotato di prodotto interno, e sia Ψ un campo su D, cioè una trasformazione da D a $\mathcal{W}$. Per esempio, $\mathcal{W}$ potrebbe essere lo spazio vettoriale $\mathcal{V}$ o lo spazio dei tensori Lin. Allora diremo che Ψ è differenziabile nel punto $\mathbf{x} \in D$ se esiste una funzione lineare $\mathcal{G}[\cdot]$ da $\mathcal{V}$ in $\mathcal{W}$ tale che

$$\Psi(\mathbf{y}) - \Psi(\mathbf{x}) = \mathcal{G}[\mathbf{y} - \mathbf{x}] + O(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2), \quad \text{quando } \mathbf{y} \to \mathbf{x}. \tag{2.4}$$

Se $\mathcal{G}$ esiste, è unica; scriveremo $\mathcal{G} = \nabla\Psi(\mathbf{x})$ e chiameremo $\nabla\Psi(\mathbf{x})$ il *gradiente* di Ψ in $\mathbf{x}$. Non è difficile mostrare che la trasformazione lineare $\nabla\Psi(\mathbf{x})$ può essere calcolata usando la formula seguente:

$$\nabla\Psi(\mathbf{x})[\mathbf{v}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \Psi(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{v})\Big|_{\alpha=0} \,. \tag{2.5}$$

Chiaramente, il gradiente di un campo scalare regolare è un vettore, mentre il gradiente di un campo vettoriale regolare è un tensore doppio.
Si dirà inoltre che Ψ è differenziabile su D se è differenziabile in ogni punto di D.
Indicheremo con $\nabla^{(2)}\Psi$ il gradiente di $\nabla\Psi$, ovvero il gradiente secondo di Ψ, e così via.

In componenti i gradienti di uno scalare, di un vettore e di un tensore del secondo ordine si scrivono rispettivamente:

$$\begin{aligned} (\nabla f)_k &= f,_k \,, \\ (\nabla \mathbf{u})_{ik} &= u_i,_k \,, \\ (\nabla \mathbf{A})_{ijk} &= A_{ij},_k \,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Sia $\mathbf{u}$ un campo vettoriale su D e supponiamo che $\mathbf{u}$ sia differenziabile in un punto $\mathbf{x} \in D$. Allora la *divergenza* di $\mathbf{u}$ in $\mathbf{x}$ è lo scalare

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \operatorname{tr} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})\,; \tag{2.7}$$

le derivate parziali di $\mathbf{u}$ sono

$$u_i,_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \mathbf{e}_i \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_j = (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}))_{ij} \,, \tag{2.8}$$

quindi risulta

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = u_i,_i(\mathbf{x}) \,. \tag{2.9}$$

Il *rotore* di $\mathbf{u}$ in $\mathbf{x}$, che indichiamo con $\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{x})$, è definito come due volte il vettore assiale corrispondente alla parte antisimmetrica di $\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})$; cioè, $\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{x})$ è quell'unico vettore che soddisfa la seguente:

$$[\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})^T]\mathbf{a} = (\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{x})) \times \mathbf{a}\,, \tag{2.10}$$

per ogni vettore $\mathbf{a}$. Risulta: $\operatorname{rot}\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u}$, ovvero in componenti

$$(\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{x}))_i = \varepsilon_{ijk} u_k{,}_j(\mathbf{x})\,. \tag{2.11}$$

Sia $\mathbf{S}$ un campo tensoriale su D, e supponiamo che $\mathbf{S}$ sia differenziabile in $\mathbf{x}$. Allora anche il campo tensoriale $\mathbf{S}^T$ è differenziabile in $\mathbf{x}$; la *divergenza* di $\mathbf{S}$ in $\mathbf{x}$, che indichiamo con $\operatorname{div}\mathbf{S}(\mathbf{x})$, è l'unico vettore che soddisfa la seguente:

$$[\operatorname{div}\mathbf{S}(\mathbf{x})]\cdot \mathbf{a} = \operatorname{div}[\mathbf{S}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}], \tag{2.12}$$

per ogni vettore fissato $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$.
Allo stesso modo, definiamo *rotore* di $\mathbf{S}$ in $\mathbf{x}$, e lo indichiamo $\operatorname{rot}\mathbf{S}(\mathbf{x})$, l'unico tensore che soddisfa

$$[\operatorname{rot}\mathbf{S}(\mathbf{x})]\mathbf{a} = \operatorname{rot}[\mathbf{S}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}]\,, \tag{2.13}$$

per ogni $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$. Le derivate parziali di $\mathbf{S}$ sono date da

$$S_{ij}{,}_k(\mathbf{x}) = \frac{\partial S_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \mathbf{e}_i \cdot [\nabla\mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{e}_k]\mathbf{e}_j\,; \tag{2.14}$$

quindi

$$(\operatorname{div}\mathbf{S}(\mathbf{x}))_i = S_{ij}{,}_j(\mathbf{x})\,, \tag{2.15}$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{S}(\mathbf{x}))_{ij} = \varepsilon_{ipk} S_{jk}{,}_p(\mathbf{x})\,. \tag{2.16}$$

Sia φ un campo scalare differenziabile, e supponiamo che $\nabla\varphi$ sia differenziabile in $\mathbf{x}$. Allora definiamo *Laplaciano* di φ in $\mathbf{x}$, e lo indichiamo $\Delta\varphi(\mathbf{x})$, la quantità

$$\Delta\varphi(\mathbf{x}) = \operatorname{div}\nabla\varphi(\mathbf{x}). \tag{2.17}$$

Allo stesso modo definiamo il *Laplaciano* $\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$ di un campo vettoriale $\mathbf{u}$ con proprietà analoghe:

$$\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \operatorname{div}\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}). \tag{2.18}$$

Chiaramente

$$\Delta\varphi(\mathbf{x}) = \varphi{,}_{ii}(\mathbf{x})\,, \tag{2.19}$$

$$(\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}))_i = u_{i},_{jj}(\mathbf{x}) \ . \tag{2.20}$$

Infine, il *Laplaciano* $\Delta\mathbf{S}(\mathbf{x})$ di un campo tensoriale $\mathbf{S}$ sufficientemente regolare è l'unico tensore che soddisfa:

$$[\Delta\mathbf{S}(\mathbf{x})]\mathbf{a} = \Delta[\mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{a}] \ , \tag{2.21}$$

ovvero in componenti

$$(\Delta\mathbf{S}(\mathbf{x}))_{ij} = S_{ij},_{kk}(\mathbf{x}) \ . \tag{2.22}$$

Prima di riportare alcuni teoremi integrali molto utili in meccanica diamo le seguenti definizioni.

Si dice che un campo Ψ è di classe $C(D)$ se è continuo su D; che è di classe $C^1(D)$, o liscio in D, se è differenziabile su D e se il suo gradiente è continuo su D; che è di classe $C^{\mathrm{N}}(D)$, con N intero naturale, se è differenziabile N volte su D e i gradienti successivi sono continui su D fino all'ordine N incluso, ovvero Ψ è di classe $C^{\mathrm{N}}(D)$ se è di classe $C^{\mathrm{N}-1}(D)$ e il suo gradiente N–1-esimo $\nabla^{(\mathrm{N}-1)}\Psi$ è di classe $C^1(D)$. Analoghi significati hanno i simboli $C^{\mathrm{N}}(\overline{D})$, $C^{\mathrm{N}}(\partial D)$, dove $\overline{D} = D \cup \partial D$ e ∂D indicano rispettivamente la *chiusura* e la *frontiera* di D. Si dice altresì che Ψ è di *classe* C^{N} in $\overline{D}$ se Ψ è di classe C^{N} in D e per ogni $n \in \{0, 1, \ldots, \mathrm{N}\}$ il $\nabla^{(n)}\Psi$ si può estendere con continuità in $\overline{D}$.

Un campo Ψ è *analitico* in D se dato un qualunque punto $\mathbf{x}$ in D, Ψ può essere rappresentata mediante serie di potenza in un dato intorno di $\mathbf{x}$. Ovviamente, se Ψ è analitica, allora Ψ è di classe C^∞.

Si dice che una superficie S è di classe C^{N} se ne esiste una rappresentazione parametrica con funzioni di classe C^{N}.

Diremo che D è una *regione regolare* di $\mathscr{E}$ se:

(i) D è limitata;

(ii) ∂D è l'unione di un numero finito di superfici di classe C^1.

Per ogni regione regolare D è definito su ∂D il campo $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ dei *versori della normale esterna* a ∂D in $\mathbf{x} \in \partial D$. Questo campo risulta essere continuo nei *punti regolari* di ∂D, e cioè nei punti interni di ciascuna delle superfici che compongono ∂D.

Sia D una regione regolare di $\mathscr{E}$ e sia $\mathbf{u}$ un campo vettoriale sufficientemente regolare (di classe $C(\overline{D})$, differenziabile quasi ovunque in D e a supporto compatto); vale il seguente *Teorema della divergenza* (o *Teorema di Gauss*):

$$\int_D \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}v = \int_{\partial D} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}a \, . \tag{2.23}$$

Vale inoltre il seguente *Teorema del rotore*:

$$\int_D \operatorname{rot}\mathbf{u}\,\mathrm{d}v = \int_{\partial D} \mathbf{n}\times\mathbf{u}\,\mathrm{d}a\,, \tag{2.24}$$

ed il *Teorema di Stokes*:

$$\int_S \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}a = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{u}\cdot\mathbf{t}\,\mathrm{d}s\,, \tag{2.25}$$

essendo S una superficie orientata dello spazio avente la curva $\mathcal{C}$ come appoggio e $\mathbf{t}$ il versore tangente a $\mathcal{C}$ nel generico punto.

Sia D una regione regolare di $\mathcal{E}$ e sia $\mathbf{S}$ un campo tensoriale del secondo ordine sufficientemente regolare. Il teorema della divergenza in tal caso si scrive

$$\int_D \operatorname{div}\mathbf{S}\,\mathrm{d}v = \int_{\partial D} \mathbf{S}\mathbf{n}\,\mathrm{d}a\,, \tag{2.26}$$

come discende direttamente dalla (2.23) osservando che la divergenza di un tensore del secondo ordine è un vettore le cui componenti sono le divergenze dei vettori riga del tensore, cioè

$$\operatorname{div}\mathbf{S} = S_{ij},_j\,\mathbf{e}_i\,. \tag{2.27}$$

Inoltre per ogni campo vettoriale $\mathbf{u}$ di classe $C^1(\overline{D})$ vale la seguente relazione:

$$\int_{\partial D} \mathbf{S}\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}a = \int_D \operatorname{div}\mathbf{S}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}v + \int_D \mathbf{S}\cdot\nabla\mathbf{u}\,\mathrm{d}v\,, \tag{2.28}$$

ottenibile mediante la (2.23) e la (3.5). Quando $\mathbf{S} = \mathbf{I}$, poiché div $\mathbf{I} = \mathbf{0}$, si ottiene la (2.23) come caso particolare della (2.28).

3. IDENTITÁ NOTEVOLI

Sia φ un campo scalare, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due campi vettoriali, $\mathbf{S}$ un campo tensoriale, tutti di classe C^1 in D. Allora valgono le seguenti identità:

$$\nabla(\varphi\,\mathbf{v}) = \varphi\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\otimes\nabla\varphi\,, \tag{3.1}$$

$$\operatorname{div}(\varphi\,\mathbf{v}) = \varphi\ \operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi\,, \tag{3.2}$$

$$\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = (\nabla\mathbf{u})^T\,\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T\,\mathbf{u}\,, \tag{3.3}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{v}\,, \tag{3.4}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{S}^T\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{S}\cdot\nabla\mathbf{v}\,, \tag{3.5}$$

$$\operatorname{div}(\varphi\, \mathbf{S}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{S}\nabla\varphi\,. \tag{3.6}$$

Inoltre, supposti i campi di classe C^2 in D, risulta:

$$\operatorname{rot} \nabla\varphi = \mathbf{0}, \tag{3.7}$$
$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \tag{3.8}$$
$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \nabla\operatorname{div} \mathbf{u} - \Delta\mathbf{u}, \tag{3.9}$$
$$\operatorname{rot} \nabla\mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{3.10}$$
$$\operatorname{rot}(\nabla\mathbf{u}^T) = \nabla\operatorname{rot} \mathbf{u}, \tag{3.11}$$
$$\text{se } \nabla\mathbf{u} = -\nabla\mathbf{u}^T \;\Rightarrow\; \nabla\nabla\mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{3.12}$$
$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{S} = \operatorname{rot} \operatorname{div} \mathbf{S}^T, \tag{3.13}$$
$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{S})^T = \mathbf{0}, \tag{3.14}$$
$$(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{S})^T = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{S}^T, \tag{3.15}$$
$$\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{I}) = -[\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{I})]^T. \tag{3.16}$$

Dim. della (3.5):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{jk} B_{jk}\,, \quad (\nabla\mathbf{u})_{jk} = u_j,_k\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{A} = A_{jk},_k\, \mathbf{e}_j\,,$$
$$(A_{ji} u_j),_i = A_{ji},_i\, u_j + A_{ji} u_j,_i\,. \;\square$$

Dim. della (3.6):

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = A_{ik} u_k \mathbf{e}_i\,,$$
$$(\varphi A_{ij}),_j = \varphi A_{ij},_j + A_{ij}\varphi,_j\,. \;\square$$

APPENDICE

A1. Parte simmetrica e antisimmetrica di un tensore doppio

Siano

$$\operatorname{sym}\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\,, \quad \operatorname{skw}\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$

rispettivamente la parte simmetrica e la parte antisimmetrica di un tensore doppio **A**. Risulta:

$$\operatorname{sym}(\mathbf{A}^T) = \operatorname{sym}(\mathbf{A})\,;$$
$$\operatorname{skw}(\mathbf{A}^T) = -\operatorname{skw}(\mathbf{A})\,;$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sym}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathrm{sym}\mathbf{A} + \mathrm{sym}\mathbf{B}\,;\\
&\mathrm{skw}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathrm{skw}\mathbf{A} + \mathrm{skw}\mathbf{B}\,;\\
&\mathrm{sym}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}+\mathbf{b}\otimes\mathbf{a})\,, \quad \mathrm{skw}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}-\mathbf{b}\otimes\mathbf{a})\,;\\
&\mathrm{sym}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) = \mathrm{sym}(\mathbf{b}\otimes\mathbf{a})\,, \quad \mathrm{skw}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) = -\mathrm{skw}(\mathbf{b}\otimes\mathbf{a})\,.
\end{aligned}$$

Dim.

$$\mathrm{sym}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{A}+\mathbf{B})+(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T] = \frac{1}{2}[\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T] =$$
$$= \frac{1}{2}[(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)+(\mathbf{B}+\mathbf{B}^T)] = \mathrm{sym}\mathbf{A} + \mathrm{sym}\mathbf{B}$$

$$\mathrm{skw}(\mathbf{b}\otimes\mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b}\otimes\mathbf{a}-\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) = -\mathrm{skw}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\,. \square$$

A2. Componenti cartesiane del rotore di un tensore doppio

Sia $\mathbf{R} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, con $\mathbf{A} \in$ Lin. Posto:

$$R_{ij} = (\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_{ij} = \varepsilon_{ipk} A_{jk,p}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \varepsilon_{1pk} A_{1k,p} = A_{13,2} - A_{12,3} \qquad (\varepsilon_{123} = 1, \varepsilon_{132} = -1)\\
R_{22} &= \varepsilon_{2pk} A_{2k,p} = A_{21,3} - A_{23,1}\\
R_{33} &= \varepsilon_{3pk} A_{3k,p} = A_{32,1} - A_{31,2}\\
R_{12} &= \varepsilon_{1pk} A_{2k,p} = A_{23,2} - A_{22,3}\\
R_{21} &= \varepsilon_{2pk} A_{1k,p} = A_{11,3} - A_{13,1}\\
R_{13} &= \varepsilon_{1pk} A_{3k,p} = A_{33,2} - A_{32,3}\\
R_{31} &= \varepsilon_{3pk} A_{1k,p} = A_{12,1} - A_{11,2}\\
R_{23} &= \varepsilon_{2pk} A_{3k,p} = A_{31,3} - A_{33,1}\\
R_{32} &= \varepsilon_{3pk} A_{2k,p} = A_{22,1} - A_{21,2}
\end{aligned}$$

ovvero

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} A_{13,2} - A_{12,3} & A_{23,2} - A_{22,3} & A_{33,2} - A_{32,3} \\ A_{11,3} - A_{13,1} & A_{21,3} - A_{23,1} & A_{31,3} - A_{33,1} \\ A_{12,1} - A_{11,2} & A_{22,1} - A_{21,2} & A_{32,1} - A_{31,2} \end{bmatrix}.$$