UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Facoltà di Ingegneria

Corso di Economia Applicata all'Ingegneria

prof.ssa Maria Sole Brioschi

Matematica finanziaria

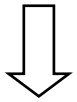
DEC-L02

Corso 60001 – Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Edile – Anno Accademico 2008/2009

Sommario della lezione

- Valore temporale del capitale e costo opportunità del capitale
- Capitalizzazione, valore futuro e composizione degli interessi
- Attualizzazione e valore attuale
- Annuity e perpetuity
- Piano di ammortamento del debito
- Tasso annuo nominale (TAN) e tasso annuo effettivo (TAE)
- Tassi di interesse non costanti
- Tassi nominali *vs* tassi reali

1 € di oggi vale più, meno o come 1 € tra un anno?



- **Valore temporale del capitale** (*time value of money*)
  Tiene conto del fatto che 1 € disponibile oggi può essere investito per generare nel futuro un ritorno positivo; pertanto 1 € disponibile oggi è valutato più di 1 € disponibile domani (primo principio della finanza)

- *Esempio*
  Se è possibile investire € 100 al 10% annuo, € 100 oggi diventano € 110 tra un anno

  Al 10%, € 110 tra un anno hanno lo stesso valore di € 100 oggi!

- Se r è il tasso di interesse annuo e C il capitale disponibile oggi per l'investimento, l'investimento cresce di (1 + r) per ogni € investito
  In formule

$$C \Longrightarrow C * (1 + r)$$

Costo opportunità del capitale

- **Costo opportunità del capitale** (*opportunity cost of capital*)

  È definito come il miglior rendimento alternativo a cui si rinuncia quando viene effettuato un investimento
  - È utile per capire come rendere "omogenei" e quindi confrontabili flussi di cassa con manifestazione in momenti diversi

- *Esempio*
  Vi propongono due opportunità di investimento
  - Investire € 100.000 oggi in un progetto per avere tra un anno un ritorno atteso di € 110.000
  - Investire in titoli di stato al tasso annuo del 3%

- Investendo nel progetto avete un rendimento atteso del 10%, ma rinunciate al rendimento offerto dall'impiego alternativo del capitale (3%), che pertanto costituisce il vostro **costo opportunità** del capitale

✓ Costo opportunità del capitale : un'applicazione (1)

- Si consideri un progetto di acquisto per € 30.000 di una Radio con l'obiettivo di svilupparne l'attività e il prestigio e poterla rivendere dopo un anno. Si ipotizzi che
  - Il pagamento della Radio sia contestuale all'acquisto
  - Il progetto preveda l'assunzione di un giovane e bravo DJ
  - La remunerazione del DJ e gli altri costi di gestione ammontino complessivamente per il periodo a € 15.000 e i suddetti costi debbano essere pagati anticipatamente
  - La Radio possa essere rivenduta, dopo un anno, per € 47.000 (esiste già un acquirente affidabile disposto a pagare questo prezzo)

- In questa situazione la semplice somma algebrica dei flussi di cassa che descrivono l'investimento produce un risultato apparentemente positivo

Fonte: "Sistemi di controllo", Anthony et al.

✓ Costo opportunità del capitale : un'applicazione (2)

Incasso da cessione della Radio (A)	47.000
Esborso per l'acquisto della Radio (B)	30.000
Esborsi per il DJ e gli altri costi di gestione (C)	15.000
Esborso totale (D = B + C)	45.000
Differenza tra incassi ed esborsi (E = A – D)	2.000

- Poiché i flussi di cassa hanno manifestazione temporale diversa, non ha significato effettuare una semplice somma algebrica per valutare la convenienza dell'investimento
  - Infatti, un € disponibile oggi vale più di un € disponibile domani

- Il problema si risolve rendendo "omogenei" i due flussi, convertendoli in flussi di cassa confrontabili, dunque come se avessero tutti manifestazione nel medesimo istante

Fonte: "Sistemi di controllo", Anthony et al.

✓ Costo opportunità del capitale : un'applicazione (3)

	In € all'istante iniziale	Tasso di capitalizzazione	In € di un anno dopo
Incasso da cessione			€ **47.000**
Esborso per l'acquisto della Radio	€ **30.000**	**1,05** →	31.500
Esborso per il DJ e altri costi di gestione	**15.000**	**1,05** →	15.750
Esborsi totali	45.000		47.250
Risultato economico			**- 250**

- Come è stato determinato il fattore di conversione o tasso di capitalizzazione presente nella tabella che converte € disponibili oggi con € disponibili domani?

- È stato necessario verificare il rendimento di investimenti alternativi, comparabili, in termini di rischio e durata, al Progetto Radio

Fonte: "Sistemi di controllo", Anthony et al.

✓ Costo opportunità del capitale : un'applicazione (4)

- In particolare, si ipotizzi che il rendimento che si otterrebbe investendo sui mercati finanziari in un progetto alternativo avente lo stesso livello di rischio del Progetto Radio, ossia il costo opportunità del capitale, sia del 5%

- Se impiegassimo oggi i € 45.000 necessari al progetto (€ 30.000 + € 15.000) e li investissimo nel progetto alternativo, fra un anno disporremmo di una somma pari a

$$€\ 45.000 * (1 + 0{,}05) = €\ 47.500$$

- In sintesi, non conviene investire nel Progetto Radio perché l'entrata di cassa di € 47.000 generata dopo un anno dall'impiego del denaro (€ 45.000) risulta inferiore all'ammontare di € 47.250, costituito dall'esborso iniziale di € 45.000 più il corrispondente costo opportunità di € 2.250, di cui disporremmo dopo un anno investendo nel progetto alternativo

Fonte: "Sistemi di controllo", Anthony et al.

- **Valore futuro (*future value*, VF)**

  Il valore futuro è l'ammontare raggiunto da una somma di denaro, come conseguenza della maturazione di interessi in un determinato periodo

- *Esempio* - 1 periodo

  Investite € 1.000 al 12% annuo. Qual è il valore futuro tra un anno?

  $$VF = € 1.000 * (1 + 0{,}12) = € 1.120$$

  determinato dalla somma iniziale di € 1.000 più € 120 di interessi (12% * € 1000 = 120)

Composizione degli interessi (1)

- **Composizione degli interessi** (*compounding*)

  Qual è il valore futuro di € 1.000 investiti per 2 anni al 12% annuo?

  - Dopo un anno avete € 1.120 [€ 1.000 * (1 + 0,12)]
  - Questa somma viene investita per un altro anno, sempre al 12%
    Alla fine del secondo anno avete pertanto

  $$VF = € 1.120 *(1 + 0,12) = € 1.000 * (1 + 0,12) * (1 + 0,12) = € 1.254,4$$

  - Nel secondo periodo la crescita del capitale è pari a

  $$€ 1.254,4 - € 1.120 = € 134,4$$

  - Così composto
    - 12% sulla somma iniziale (€ 1.000) € 120,0
    - 12% sugli interessi del primo anno (€ 120) € 14,4

    € 134,4

Composizione degli interessi (2)

- **Composizione degli interessi**

  Il calcolo egli interessi viene effettuato anche sugli interessi maturati nei periodi precedenti

- Se si investe ad un tasso annuo r per t anni, il valore futuro di ogni € investito è pari a

$$(1 + r) * (1 + r) * .... * (1 + r) = (1 + r)^t$$

- *Esempio*

  a. **Interesse composto** - t periodi
  Il valore futuro di € 1.000 investiti al 12% annuo per 6 anni è

$$VF = € 1.000 * (1 + 0,12)^6 = € 1.973,8$$

  b. **Interesse semplice** – gli interessi vengono calcolati solamente sulla somma iniziale

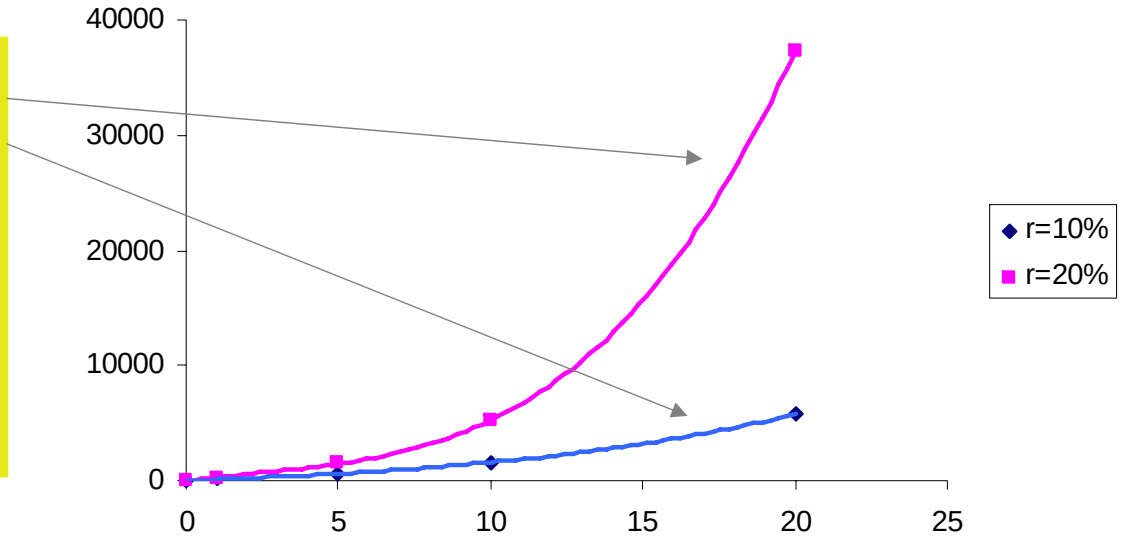
$$VF = € 1.000 * (1 + 0,12 * 6) = € 1.720$$

Composizione degli interessi (3)

- **Composizione degli interessi -** $(1 + r) * \ldots * (1 + r) = (1 + r)^t$

	Interessi su €1000 dopo t anni (€)			
r	t= 1	t= 5	t= 10	t= 20
10%	100	610.5	1,583.7	5,727.5
20%	200	1,488.0	5,191.7	37,337.6
	2x	2.4x	3.3x	6.5x

Il calcolo degli interessi viene effettuato anche sugli interessi maturati nei periodi precedenti



Valore attuale (1)

- **Attualizzazione e valore attuale**

  Il valore attuale è il valore oggi di una somma di capitale disponibile nel futuro

- *Esempio* - Attualizzazione - 1 periodo
  - Quanto si deve investire oggi con un tasso annuo dell'11% per ottenere € 2.000 tra un anno?
  - La risposta a questa domanda è il valore attuale di € 2.000 tra un anno all'11%
  - Sappiamo dalle formule del valore futuro che $VA * (1 + 0{,}11) = € 2.000$
  - Pertanto $$VA = \frac{€\ 2.000}{(1 + 0{,}11)} = € 1.801{,}8$$

- *Esempio* - Attualizzazione - t periodi
  - E per ottenere € 2.000 tra 5 anni?

$$VA * (1 + 0{,}11)^5 = € 2.000 \Rightarrow VA = \frac{€\ 2.000}{(1 + 0{,}11)^5} = € 1.186{,}9$$

- **Attualizzazione e valore attuale**

$$VF = VA * (1 + r)^t$$

  - Quattro variabili: VF, VA, r, t
  - Date 3 qualsiasi di esse è possibile risolvere per la quarta

$$r = (VF/VA)^{1/t} - 1$$

$$t = \frac{\ln VF - \ln VA}{\ln(1 + r)} = \frac{\ln (VF/VA)}{\ln(1 + r)}$$

$$VA = \frac{VF}{(1 + r)^t}$$

Valore attuale (3)

- *Esempio*

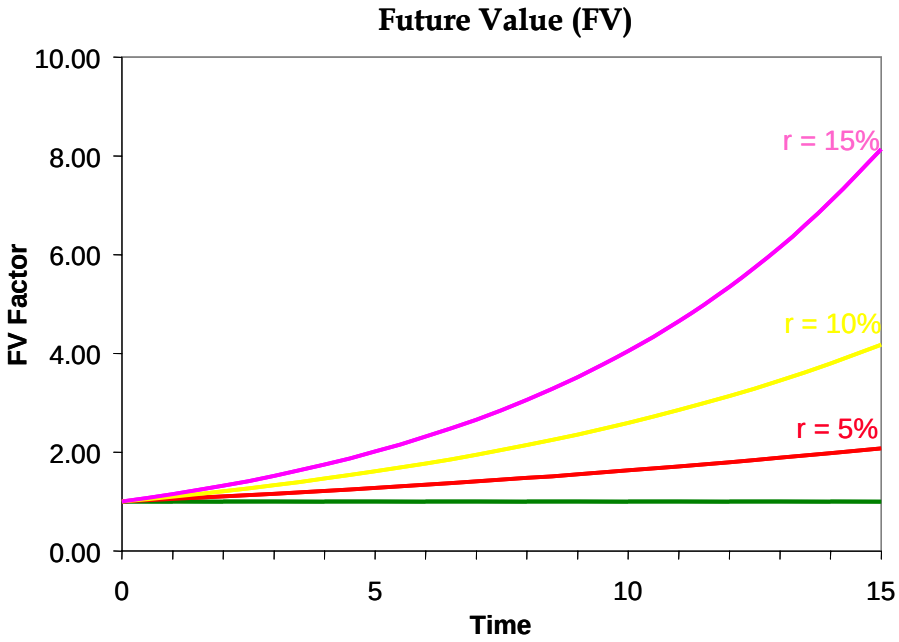
  - Se il vostro investimento raddoppia in 5 anni, qual è il tasso annuo?

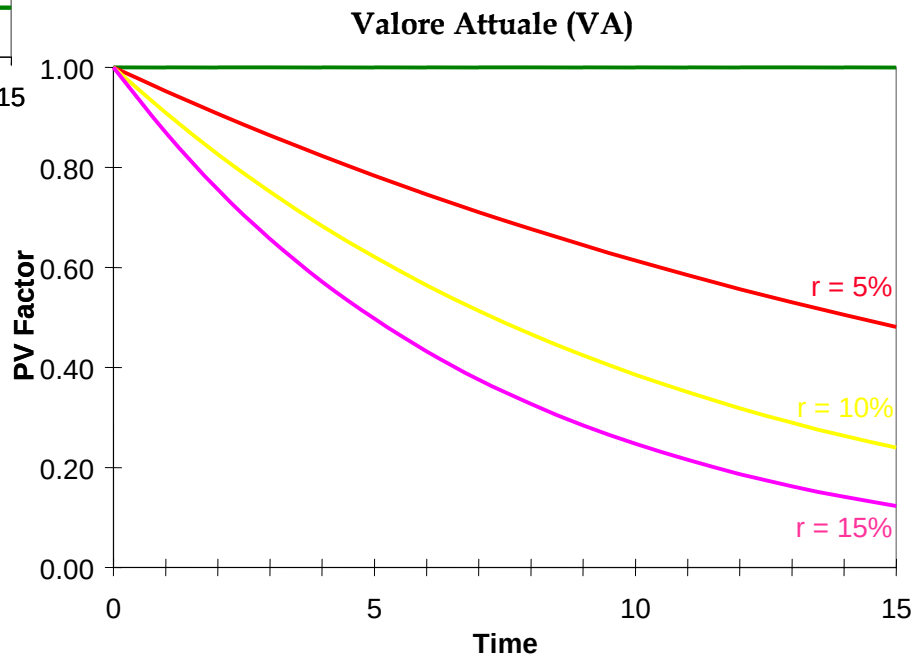
$$r = (2/1)^{1/5} - 1 = 0{,}1487 \quad = \quad 14{,}87\%$$

  - Ad un tasso del 30% quanto tempo ci vuole affinché l'investimento raddoppi?

$$t = \ln(2/1) \; / \; \ln(1{,}3) = 2{,}64 \text{ anni}$$

Valore futuro e valore attuale





- **Flussi di cassa multipli**

- *Esempio*
  r = 9% con flussi di cassa alla fine del periodo

Anno	1	4	6
Flusso (€)	2.500	900	3.600

  - Qual è il VA della serie e qual è il VF dopo sette anni?

$$VA = \frac{2.500}{(1,09)^1} + \frac{900}{(1,09)^4} + \frac{3.600}{(1,09)^6} = 5.077,7$$

$$VF = 2.500 * (1 + 0,09)^6 + 900 * (1 + 0,09)^3 + 3.600 * (1 + 0,09)^1 = 9.282,3$$

$$= VA * (1 + r)^t = 5.077,7 * (1 + 0,09)^7 = 9.282,3$$

Annuity (rendita annua) (1)

- **Annuity**

  Serie di flussi di cassa costanti percepiti ad intervalli regolari (ogni anno) per un certo periodo di tempo

  – Qual è il VA di una serie di flussi costanti C per T anni al tasso r?

$$VA = \frac{C}{(1+r)^1} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{C}{(1+r)^{t-1}} + \frac{C}{(1+r)^T} \qquad (1)$$

moltiplicando per (1+ r)

$$(1+r) * VA = C + \frac{C}{(1+r)^1} + \frac{C}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{C}{(1+r)^{T-2}} + \frac{C}{(1+r)^{T-1}} \qquad (2)$$

sottraendo la (1) dalla (2) si ottiene

$$r * VA = C - C/(1+r)^T \Rightarrow \boxed{VA = \frac{C}{r} - \frac{C}{r} * \frac{1}{(1+r)^T}}$$

- **Valore futuro di una annuity**

Partendo dalla formula appena calcolata

$$VA = \frac{C}{r} - \frac{C}{r} * \frac{1}{(1+r)^T}$$

$$FV = VA * (1+r)^T$$

$$= \frac{C}{r} * (1+r)^T - \frac{C}{r}$$

$$= \frac{C}{r} * \left((1+r)^T - 1\right)$$

- **Numero di pagamenti / flussi di cassa di una annuity**

Partendo dalla formula appena calcolata

$$FV = \frac{C}{r} * \left((1 + r)^T - 1 \right)$$

$$1 + \frac{FV * r}{C} = (1 + r)^T$$

$$\ln \left((1 + r)^T \right) = T * \ln (1 + r) = \ln \left(1 + \frac{FV * r}{C} \right)$$

$$T = \frac{\ln \left(1 + \frac{FV * r}{C} \right)}{\ln (1 + r)}$$

- **Annuity**

Valore attuale

$$VA = \frac{C}{r} * \left(1 - \frac{1}{(1+r)^T}\right)$$

Valore futuro

$$FV = \frac{C}{r} * \left((1+r)^T - 1\right)$$

Numero di pagamenti

$$T = \frac{\ln\left(1 + \frac{FV*r}{C}\right)}{\ln(1+r)}$$

Flussi di cassa

$$C = \frac{FV*r}{\left((1+r)^T - 1\right)}$$

- **Annuity**
- *Esempi*

C = 4.000
r = 0,08
T = 6

Qual è il VA di un'annuity della durata di 6 anni con pagamenti di € 4.000 al tasso r = 8%?

$$VA = (C/r) * [1 - 1/(1+r)^T] = (4.000/0,08) * [1 - 1/(1 + 0,08)^6]$$
$$= € 18.491,5$$

Prendete a prestito € 30.000 oggi al tasso del 12% e scegliete di ripagarlo con un'annuity di 10 anni
Qual è il pagamento annuale?

$$30.000 = (C/0,12) * [1 - 1/(1 + 0,12)^{10}] \Rightarrow C = 30.000/5,65$$
$$= € 5.309,5$$

VA = 30.000
r = 0,12
T = 10

- *Esempio*

Valore attuale dei rimborsi

– Miss Smart accetta di ripagare il suo prestito bancario in 24 rate mensili da € 500 ciascuna
Se il tasso di interesse applicato dalla banca è dello 0,75% su base mensile, qual è il valore attuale della serie di pagamenti?

$$VA = (C/r) * [1 - 1/(1+r)^T]$$

$$VA_{24} = (500/0{,}0075) * [1-1/(1{,}0075)^{24}] = € 10.944{,}57$$

C = 500
r = 0,0075
T = 24

Growing annuity (rendita annua a rendimento crescente) (1)

- **Growing annuity**

  Se in una annuity il flusso di cassa C_t (t = 1 … T) cresce ad un tasso costante g, se cioè

  C_1

  $C_2 = C_1 * (1 + g)$

  $C_3 = C_2 * (1+g)$

  …

  $C_T = C_{T-1} * (1 + g) = C_1 * (1 + g)^{T-1}$

  l'annuity è denominata a rendimento crescente e il suo valore attuale è

$$VA = \frac{C_1}{r - g} - \frac{C_1}{r - g} * \frac{(1 + g)^T}{(1 + r)^T}$$

- **Growing annuity**

- *Esempio*

$C_1 = 400 * (1 + 0{,}03) * 5.000$
$r = 0{,}10$
$g = 0{,}03$
$T = 20$

Si consideri il caso di una miniera d'oro in cui abbiamo il diritto di estrarre oro per i prossimi 20 anni. Si prevede di estrarre 5.000 once d'oro all'anno. Il prezzo dell'oro oggi (t = 0) è di 400 €/oncia ma ne si stima un tasso di crescita del 3% all'anno. Il tasso di sconto è pari al 10%

Calcolare il VA della rendita annua a rendimento crescente

$$VA = \frac{C_1}{r - g} - \frac{C_1}{r - g} * \frac{(1 + g)^T}{(1 + r)^T}$$

$$VA = \frac{2.060.000}{0{,}10 - 0{,}03} - \frac{2.060.000}{0{,}10 - 0{,}03} * \frac{(1 + 0{,}03)^{20}}{(1 + 0{,}10)^{20}}$$

$$= € 21.527.973$$

Perpetuity (rendita perpetua) (1)

- **Perpetuity**

Si tratta di un'annuity con flussi di cassa che continuano all'infinito

$$VA = \frac{C}{(1+r)^1} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \ldots \qquad (1)$$

moltiplicando per (1+ r) si ottiene

$$(1+r) * VA = C + \frac{C}{(1+r)^1} + \frac{C}{(1+r)^2} + \ldots \qquad (2)$$

sottraendo la (1) dalla (2) otteniamo

$$r * VA = C \quad \Rightarrow \quad \boxed{VA = \frac{C}{r}}$$

- **Perpetuity**
- *Esempi*

C = 4.000
r = 0,08

Qual è il VA di una perpetuity con pagamenti di € 4.000 nell'ipotesi di un tasso di interesse r = 8%?

$$VA = C/r = 4.000/0,08 = € 50.000$$

Quanto vale un'obbligazione irredimibile (che non scade mai) che paga una cedola del 6% nell'ipotesi di un tasso di interesse pari al 9%?

$$VA = C/r = 60/0,09 = € 667$$

C = 6% *1.000
r = 0,09

Growing perpetuity (rendita perpetua a rendimento crescente) (1)

- **Growing perpetuity**

  Se in una perpetuity il flusso di cassa C_t (t = 1 … T) cresce ad un tasso costante g per sempre, se cioè

  C_1

  $C_2 = C_1 * (1 + g)$

  $C_3 = C_2 * (1+g)$

  …

  $C_T = C_{T-1} * (1 + g) = C_1 * (1 + g)^{T-1}$

  …

  la perpetuity è denominata a rendimento crescente e il suo valore attuale è

$$VA = \frac{C_1}{r - g}$$

Growing perpetuity (2)

- **Growing perpetuity**

- *Esempio*

$C_1 = 60$
$r = 0{,}09$
$g = 0{,}02$

Si consideri l'obbligazione irredimibile (che non scade mai) dell'esempio precedente, supponendo ora che la cedola iniziale del 6% cresca ad un tasso annuo del 2%

Calcolare il VA della rendita perpetua a rendimento crescente nell'ipotesi di un tasso di interesse pari al 9%

$$VA = \frac{C_1}{r - g}$$

$$VA = \frac{60}{0{,}09 - 0{,}02} = € 857$$

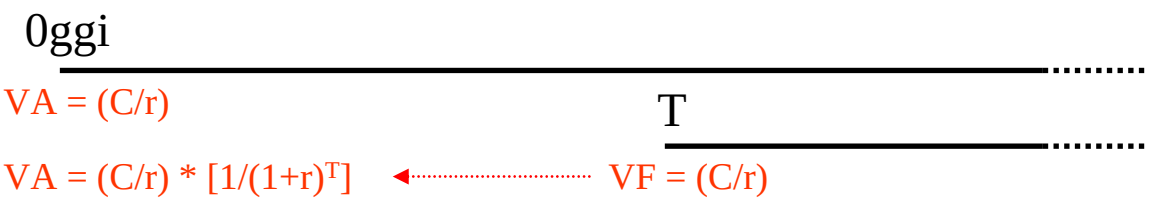
Annuity vs perpetuity (1)

- Che relazione c'è tra un'annuity e una perpetuity?
- È facile verificare (sia graficamente che dalle formule) che una annuity per T periodi può essere pensata come la differenza tra una perpetuity da oggi e una perpetuity da T

- Annuity

$VA = (C/r) - (C/r) * [1/(1+r)^T]$

- Perpetuity



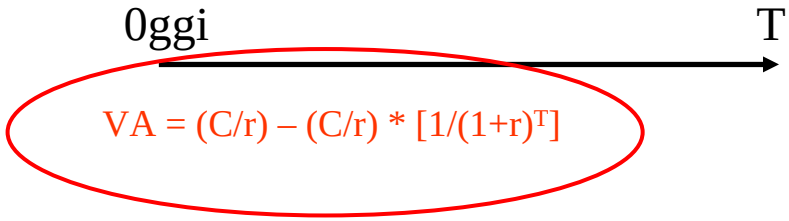
$VA = (C/r)$

$VA = (C/r) * [1/(1+r)^T]$ ⟵ $VF = (C/r)$

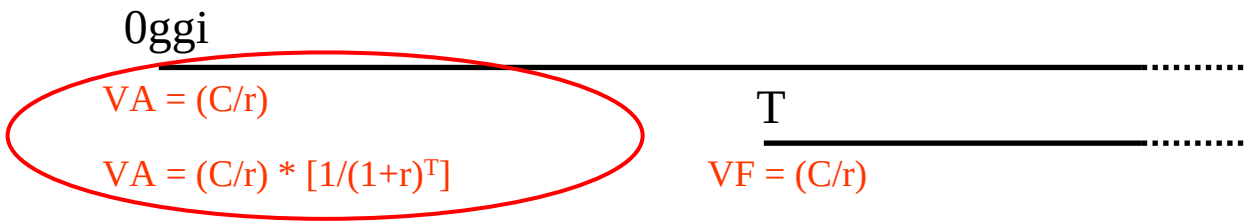
Annuity vs perpetuity (2)

- Che relazione c'è tra un'annuity e una perpetuity?
- È facile verificare (sia graficamente che dalle formule) che una annuity per T periodi può essere pensata come la differenza tra una perpetuity da oggi e una perpetuity da T

- Annuity



- Perpetuity



Piano di ammortamento del debito (1)

- **Piano di ammortamento del debito**

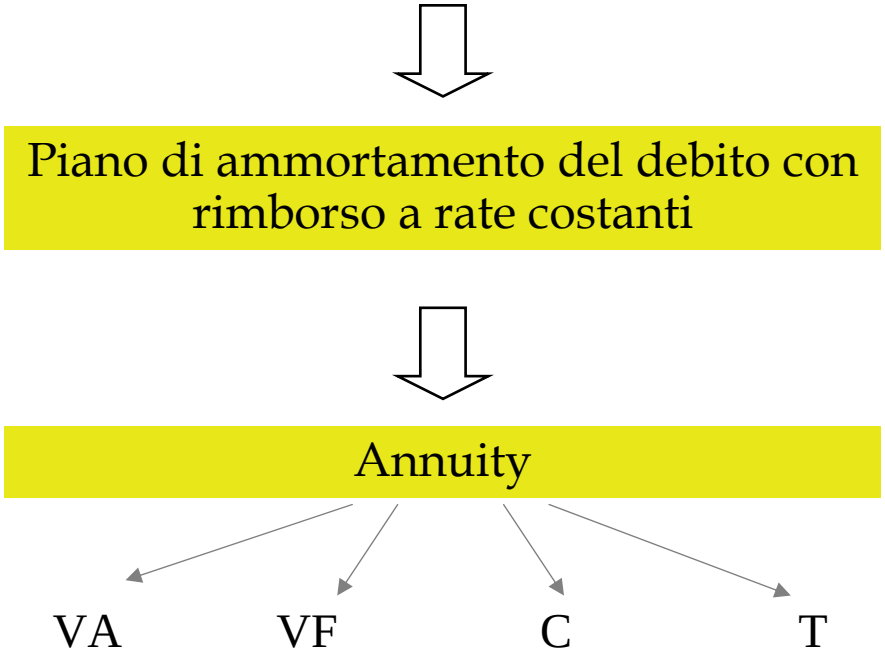
  Suddivide ciascun pagamento relativo al rimborso di un debito nelle due componenti di
  - Rimborso del capitale
  - Pagamento degli interessi

- Se il piano di rimborso deciso dai contraenti (di cui uno è tipicamente una banca) avviene a rate costanti, allora si prospetta la fattispecie dell'annuity e di conseguenza si possono applicare tutte le formule ad essa riconducibili

Piano di ammortamento del debito (2)

- *Esempio*

Il signor Rossi prende a prestito € 1.000 rimborsabili in cinque rate annuali costanti a partire dalla fine del prossimo anno
A quanto ammonta ciascuna rata se il tasso di interesse applicato dalla banca è pari al 10% annuo?



Piano di ammortamento del debito (3)

- In questo caso, l'obiettivo è quello di calcolare il flusso di cassa di un'annuity di 5 anni che oggi vale € 1.000 nell'ipotesi di un tasso pari al 10%

$$VA = \frac{C}{r} * \left(1 - \frac{1}{(1+r)^T}\right)$$

VA = 1.000
r = 0,10
T = 5

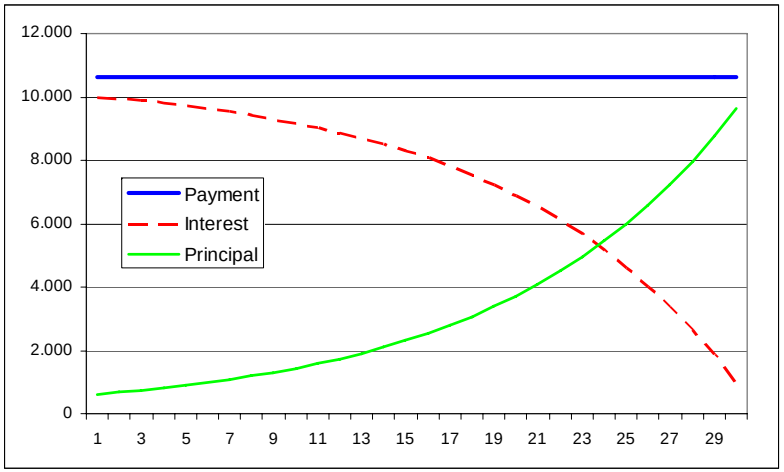
$$C = \frac{VA * r}{1 - (1+r)^{-T}}$$

$$C = \frac{1.000 * 0,1}{1 - (1+0,1)^{-5}} = 263,8$$

Piano di ammortamento del debito (4)

Piano di ammortamento del debito

Example	**Constant Payment Mortgage**				
Loan amount	1.000				
Term	5				
Interest rate	10%				
Payment	263,8				
Year	**Beg. Bal.**	**Principal**	**Interest**	**Payment**	**End Bal.**
1	1000,0	163,8	100,0	263,8	836,2
2	836,2	180,2	83,6	263,8	656,0
3	656,0	198,2	65,6	263,8	457,8
4	457,8	218,0	45,8	263,8	239,8



- La rata di ogni periodo è scomponibile nelle due componenti capitale e interessi
- La componente di interessi di ciascun periodo si calcola come prodotto tra il tasso di interesse applicato dalla banca (10%) e l'indebitamento alla fine del periodo precedente
- La componente di rimborso del capitale in ciascun periodo è la differenza tra l'ammontare della rata e la componente di interessi

- La componente di rimborso di capitale è crescente e la componente di pagamento degli interessi è decrescente a formare una rata costante per T periodi

Piano di ammortamento del debito (5)

- Si riprenda l'alternativa 4 – Cartucce riciclate dell'esercizio 2 della SCG-E04 in cui l'impianto di riciclaggio delle cartucce veniva acquistato tramite l'accensione di un prestito bancario a rate costanti; si calcoli la rata annua e la si scomponga nelle componenti di rimborso del capitale e di interessi

$$C = \frac{VA * r}{1-(1+r)^{-T}}$$

Anno	Indebitamento		Rata	Capitale	Interessi r=8%
	Inizio	Fine			
1	5,000,000	4,439,638	960,362	560,362	400,000
2	4,439,638	3,834,447	960,362	605,191	355,171
3	3,834,447	3,180,841	960,362	653,606	306,756
4	3,180,841	2,474,946	960,362	705,895	254,467
5	2,474,946	1,712,580	960,362	762,366	197,996
6	1,712,580	889,224	960,362	823,356	137,006
7	889,224	0	960,362	889,224	71,138

Tasso annuo nominale e tasso annuo effettivo (1)

- **Tasso Annuo Nominale (TAN) ed Effettivo (TAE)**

  I tassi di interesse sono solitamente indicati su base annua (TAN), ma il calcolo degli interessi può avvenire più di una volta all'anno e quindi restituire un interesse effettivo (TAE) diverso da quello nominale (TAN)

- *Esempio*

  Investendo € 100 per un anno ad un tasso del 10%, si ottiene con

  - Composizione annuale
    $100 * (1 + 0{,}1)^1 = 110 \quad \Rightarrow$ € 10 interest
  - Composizione semestrale
    $100 * (1 + 0{,}1/2)^2 = 110{,}25 \quad \Rightarrow$ € 10,25 interest
  - Composizione mensile
    $100 * (1 + 0{,}1/12)^{12} = 110{,}47 \Rightarrow$ € 10,47 interest

Tasso annuo nominale e tasso annuo effettivo (2)

- **Trasformazione del TAN nei tassi di interesse con frequenza maggiore**

Annualized Interest Rate Quotation Basis	*Interest per Period*	*Length of Period*
Annually compounded	*r*	1 year
Semiannually compounded	*r*/2	6 months
Quarterly compounded	*r*/4	3 months
Monthly compounded	*r*/12	1 month
Weekly compounded	*r*/52	1 week
Daily compounded	*r*/365	1 day
Compounded *m* times a year	*r*/m	1/m years

Fonte: Grinblatt and Titman (2002)

Tasso annuo nominale e tasso annuo effettivo (3)

- **Tasso Annuo Effettivo (TAE)**

Il tasso annuo effettivo corrispondente ad un tasso nominale del 10% è

Compounding period	TAE
semiannual	10.25%
monthly	10.47%
weekly	10.51%

Componendo m volte all'anno con un TAN pari a r,

$$TAE = (1 + r/m)^m - 1$$

$$TAN = r = m * [(1 + TAE)^{1/m} - 1]$$

Investendo una somma C per t anni ad un tasso annuo nominale r, con m composizioni degli interessi all'anno, il valore futuro sarà

$$VF = C * (1 + r/m)^{m * t}$$

Tasso annuo nominale e tasso annuo effettivo (4)

- **Tasso Annuo Nominale (TAN) ed Effettivo (TAE)**

$$TAE = (1 + r/m)^m - 1$$

$$TAN = r = m * [(1 + TAE)^{1/m} - 1]$$

- *Esempio*

Se ad un prestito è associato un TAN del 16%, qual è il tasso annuo effettivo con rimborsi su base semestrale?

Il tasso semestrale è pari a TAN/2, cioè all'8%

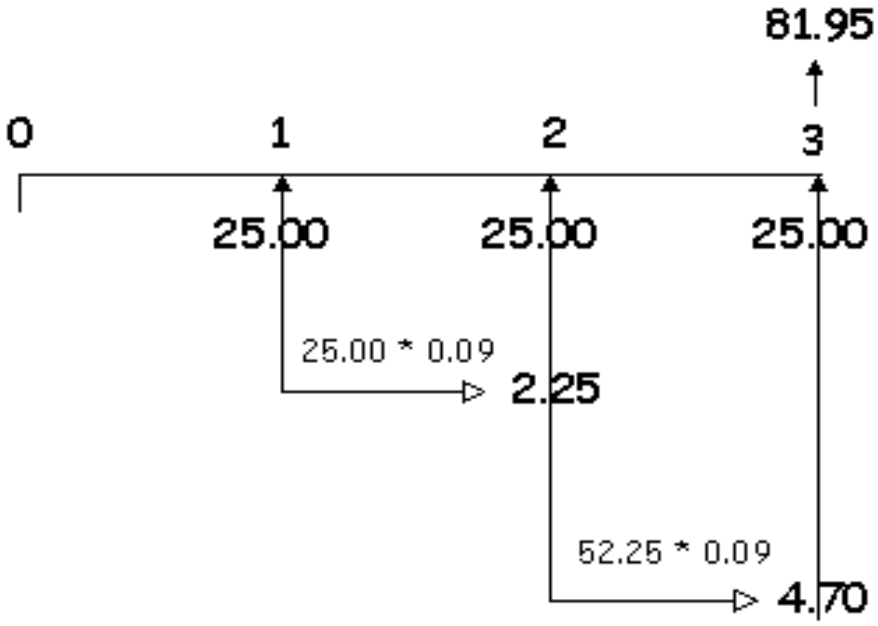
$$TAE = (1 + r/m)^m - 1 = (1 + 0{,}16/2)^2 - 1 = 0{,}1664 \text{ o } 16{,}64\%$$

Tasso annuo nominale e tasso annuo effettivo (5)

- *Esempio*

Qual è il valore futuro di € 25 investiti alla fine di ognuno dei prossimi tre anni se il tasso di interesse di riferimento è pari al 9% composto annualmente?

Un'annuity di 25 € su tre anni al 9% può essere illustrata in questo modo



Tasso annuo nominale e tasso annuo effettivo (6)

Il valore futuro dell'annuity si calcola come segue

$$FV = 25.00\left[\frac{(1+0.09)^3 - 1}{0.09}\right] = 81.9525$$

Come cambia il risultato se il tasso annuale (9%) viene composto mensilmente?

Il totale di € 82,26 dato dalle tre somme è maggiore del valore di € 81,95 prima calcolato per l'annuity con composizione annuale perchè la composizione degli interessi all'interno dei periodi aumenta il tasso effettivo dell'investimento

$$FV = 25(1+\frac{0.09}{12})^{24} = 29.91$$

$$FV = 25(1+\frac{0.09}{12})^{12} = 27.35$$

$$FV = 25(1+\frac{0.09}{12})^{0} = 25.00$$

$$\sum FV = 82.26$$

- **Tassi di interesse non costanti**

- *Esempio*
  Se si investono € 100 e si ottiene l'11% durante il primo anno, il 9% durante il secondo anno e il 13% durante il terzo anno, quale sarà il valore futuro dopo 3 anni?

$$FV = 100 * (1 + 0{,}11) * (1 + 0{,}09) * (1 + 0{,}13) = € 136{,}72$$

Qual è il VA di € 100 tra 4 anni se i tassi di interesse sono l'8% (year 1), il 12% (year 2), il 6% (year 3) e il 13% (year 4)?

$$VA = \frac{100}{(1 + 0{,}08) * (1 + 0{,}12) * (1 + 0{,}06) * (1 + 0{,}13)} = € 69{,}02$$

Tassi nominali *vs* tassi reali (1)

- **Tasso di interesse reale vs nominale (*Real vs nominal interest rates*)**

  - Tasso di interesse nominale = tasso di mercato

    Investendo € 100 per un anno al 10% $\Rightarrow$ € 110

  - Cosa succede se l'inflazione annuale è pari al 7%?

    Abbiamo bisogno di € 107 alla fine dell'anno per mantenere inalterato il potere d'acquisto dell'investimento iniziale

  - Qual è il nostro "real return", ovvero il tasso di interesse reale?

    (1+10%)/(1+7%) = 1,028 $\Rightarrow$ The real return is 2,8%

Attualizzare i flussi di cassa reali con tassi reali !
Attualizzare i flussi di cassa nominali con tassi nominali !

Tassi nominali *vs* tassi reali (2)

- **Tasso di interesse reale vs nominale**

  Siano
  - r il tasso di sconto reale
  - p il tasso di inflazione
  - i il tasso di sconto nominale

  Il legame tra r e i è dato dalla **Relazione di Fisher**

$$(1+i) = (1+r) * (1+p)$$

  È possibile utilizzare questa equazione per convertire tassi di interesse nominali in reali e viceversa

Tassi nominali *vs* tassi reali (3)

- *Esempio*

  Si consideri una perpetuity che stacca il primo pagamento di € 100 (nominali) al periodo 4

  Si supponga che i flussi di cassa crescano in termini reali del 2% (r) per periodo e che il tasso di inflazione (p) sia pari al 5%
  Qual è il VA della perpetuity con un tasso di sconto del 10%?

- *Soluzione*

  Il tasso di crescita nominale si calcola a partire dalla Relazione di Fisher

$$(1+g) = (1+g_r) * (1+p)$$

$$g = (1 + 0{,}02) * (1 + 0{,}05) - 1 = 0{,}071$$

$$VA = \frac{C}{i-g} \cdot \frac{1}{(1+i)^3} = \frac{100}{0{,}029} \cdot 0{,}7513 = €2.591$$

Il valore della perpetuity è "portato indietro" di 3 periodi

Sintesi della lezione (1)

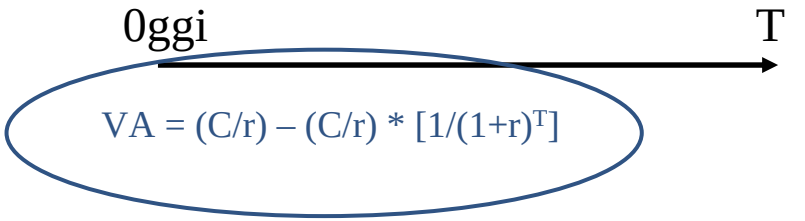
- Il **valore futuro** (VF) è l'ammontare raggiunto da un investimento lungo un periodo di tempo
- Il processo di calcolo del valore futuro è chiamato **composizione**
- Il **valore attuale** (VA) esprime il valore presente di un investimento, mediante l'attualizzazione dei flussi di cassa futuri
- Il legame tra VF e VA è dato dalla relazione

$$VF = VA * (1 + r)^T$$

- **Annuity** e **perpetuity** costituiscono particolari configurazioni di flussi di cassa
  - Una annuity per T periodi può essere pensata come la differenza tra una perpetuity da oggi e una perpetuity da T

Sintesi della lezione (2)

- Annuity



- Perpetuity

- I tassi di interesse sono solitamente indicati su base annua (TAN), ma il calcolo degli interessi può avvenire m volte all'anno

$$TAE = (1 + r/m)^m - 1$$

$$TAN = r = m * [(1 + TAE)^{1/m} - 1]$$

- **Relazione di Fisher** - (1+i) = (1+r) x (1+p)