ALGEBRA

- Le *somme algebriche* vanno calcolate tenendo conto del segno di ogni termine dell'espressione e del fatto che vale la *proprietà commutativa*. Es., -5+4 = +4-5 = -1.
- Il il segno del prodotto fra numeri relativi segue la *legge di composizione dei segni*: -*- = +, +*- = -, -*+ = -, +*+ = +. Ad es., (-1)(-2) = 2.
- Le operazioni aritmetiche hanno priorità diverse; in un'espressione, una moltiplicazione (o una divisione) va eseguita sempre prima delle somme (o sottrazioni). Ad es., 2*3+4 = 10 e non 14. Le parentesi, in un'espressione, possono alterare queste priorità. Ad es., 2*(3+4) = 14 e non 10.

esercizi sulle operazioni tra numeri relativi

1. +3-6;
2. -2+5;
3. 2+2;
4. -3-4;
5. +3 +4;
6. -5 +1;
7. 2+3;
8. 1+5;
9. - 2+3;
10. +1,-5;
11. - 2,3-1,5;
12. 1,8 -0,5;
13. 0,2 -3,4+1,3;
14. 0+(-3)=
15. (-3)+(-5,8);
16. -4 + (+3,2);
17. -3 + (-1.7);
18. -3 + (+1,7);
19. (-7) + (-7);
20. 1,3+(-0,2).
21. (+3) + (-2) + (-4);
22. (-1) + (-3) + (-5);
23. (-5)+ (+5)+ (-6);
24. (-4) + (-1) + (+4).

25. (2,5) + (+1,3) + (0,2);
26. (-2,1) + (-1,3) + (+4);
27. 2,3+(-1,2)+(+1,2);
28. -5+7-8+10;
29. -4+0,5-7,3+9,2.

Moltiplicazioni

1. (-5+2)(-3);
2. (-1+4-9)(+1);
3. (-8)(-7+4+3);
4. -4(5+2,5-4,5);
5. (-8,3+4,2-0,7)(-2);
6. (-1)(+2)(-6);
7. (+4)(-2)(+2);
8. 3(-3)(-2);
9. (+5)(-2)(+3);
10. 0,1·(+3)·(-0,4);
11. 0,2 (-3,5)·(+1,2);
12. -2,3(+0,9)·(-0, 5).

Dati dei numeri qualsiasi è possibile calcolare il loro Minimo Comune Multiplo ed il loro Massimo Comun Divisore secondo queste regole:

M.c.m.= è dato dal prodotto di tutti i fattori comuni e non comuni di ordine massimo

M.C.D.= è dato dal prodotto dei SOLI fattori di ordine massimo comuni

Esempio: Calcolare il mcm ed il MCD nella terna di numeri 45; 20; 50

La prima operazione da fare è scomporre in fattori primi i tre numeri

$45=5\cdot9=5\cdot3^2$

$20=5\cdot4=5\cdot2^2$

$50=5\cdot10=5\cdot2\cdot5=2\cdot5^2$

Il m.c.m. si ottiene prendendo tutti i fattori primi comuni di ordine massimo (cioè con la potenza maggiore) e non comuni sempre di ordine massimo quindi

m.c.m.= $5^2\cdot2^2\cdot3^2=25\cdot4\cdot9=900$

Il M.C.D. si ottiene prendendo solo il massimo tra i fattori comuni e quindi nel nostro caso

M.C.D. = 5

INFATTI: Non posso prendere 5^2 perchè $5^2=25$ e 25 è un divisore solo per il numero 50 mentre 5 divide sia 45, sia 20 sia 50.

ESERCIZI

Calcola m.c.m. e M.C.D. per le seguenti terne di numeri

1. 4; 8; 24
2. 6; 7; 21
3. 5; 10; 25
4. 2; 6; 9
5. 22; 33; 12
6. 45; 2; 30
7. 14; 28; 6

Operare con le frazioni

Ogni numero intero può essere scritto sotto forma di frazione: il numero 2 ad esempio è come se avesse 1 al denominatore infatti essendo l'operazione di frazione una divisione tra numeratore e denominatore si ha che 2:1=2.

La classificazione delle frazioni è la seguente:

- Apparente (se il numeratore è un multiplo del denominatore es: 4/2=2)
- Propria (se il numeratore è minore del denominatore es. 3/5)
- Impropria (se il denominatore è maggiore del numeratore es.: 5/3)

Un numero intero è una frazione particolare in cui il denominatore è = 1.

Una frazione (propria o impropria) può trasformarsi in un numero decimale limitato (es: $\frac{1}{2} = 1:2 = 0,5$), periodico illimitato ($\frac{1}{3} = 1:3 = 0,\overline{3}$) o periodico misto illimitato (es: $\frac{7}{6} = 7:6 = 1,1\overline{6}$)

Data una frazione si può calcolare

- La frazione **inversa** (si scambiano numeratore con denominatore e viceversa es: l'inverso di 2/3 è 3/2)
- La frazione **opposta** (viene cambiato il segno della frazione es: l'opposto di 2/3 è -2/3)
- La frazione **complementare** (una frazione il cui numeratore sommato al numeratore della frazione data da come risultato il denominatore es.: la frazione complementare di 3/7 è 4/7 perché 3+4=7)
- Le frazioni **equivalenti** (sono infinite perché si ottengono moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore per uno stesso numero)
-

ESERCIZI : Per ognuna delle seguenti frazioni scrivi la frazione inversa, opposta complementare e almeno tre equivalenti:

frazione	*inversa*	*opposta*	*complementare*	*equivalenti*		
$\frac{6}{7}$						
$-\frac{5}{8}$						
$+\frac{12}{15}$						
$-\frac{4}{15}$						
$\frac{22}{33}$						
$-\frac{9}{27}$						
$\frac{1}{3}$						
$-\frac{3}{5}$						
2						
$\frac{5}{7}$						

COME SI OPERA CON LE FRAZIONI???

Una frazione è **irriducibile** se numeratore e denominatore non sono semplificabili per un comune fattore

SOMMA

Per sommare algebricamente due frazioni che hanno denominatore diverso si procede nel seguente modo:

si calcola il mcm dei denominatori

1. si scrivono le frazioni equivalenti aventi lo stesso denominatore
2. si sommano algebricamente i numeratori

ES.: $\frac{5}{4}+\frac{3}{7}-\frac{1}{28}=$

Si calcola il m.c.m. effettuando per prima cosa la scomposizione in fattori primi dei denominatori e cioè:

$4=2^2$
$7=7$
$28=7\cdot 2^2$ quindi m.c.m. = 28

Consideriamo la prima frazione 28:4=7 quindi moltiplicherò il numeratore per 7
Per la seconda frazione farò 28:7=4 quindi moltiplicherò il numeratore per 4
Per la terza frazione farò 28:28=1 il suo numeratore resterà uguale.

Otterrò quindi: $\frac{5}{4}+\frac{3}{7}-\frac{1}{28}=\frac{35+12-1}{28}=\frac{46}{28}$ che semplificando per 2 diverrà $\frac{23}{14}$

ESERCIZI SULLA SOMMA ALGEBRICA DI FRAZIONI

1. $\frac{1}{2}+\frac{3}{6}=$
2. $-\frac{5}{2}+\frac{3}{8}=$
3. $-\frac{1}{2}-\frac{3}{6}=$
4. $4+\frac{3}{5}-\frac{6}{2}=$
5. $\frac{5}{12}-\frac{3}{4}-\frac{7}{5}=$
6. $\frac{7}{6}+\frac{3}{8}-\frac{5}{3}=$
7. $-\frac{1}{4}-\frac{3}{7}-\frac{9}{2}=$
8. $\frac{1}{18}+\frac{3}{9}-\frac{3}{4}=$
9. $\frac{1}{2}+\frac{3}{6}+\frac{5}{42}=$
10. $\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=$
11. $\frac{3}{100}+\frac{3}{5}=$
12. $\frac{7}{120}+\frac{3}{6}=$

La moltiplicazione tra due frazioni

Per **<u>moltiplicare</u>** due frazioni si opera nel seguente modo:

Se le frazioni sono irriducibili(cioè non si può semplificare numeratore e denominatore) si moltiplica numeratore con numeratore e denominatore con denominatore

Es: $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$ perchè si è semplificato 12 e 10 per 2

Oppure

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{{}^{1}2}{3}\cdot\frac{5}{4_{2}}=\frac{1\cdot 5}{3\cdot 2}=\frac{5}{6}$$

Per **<u>dividere</u>** due frazioni si opera nel seguente modo:

$\frac{2}{3} : \frac{5}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$ e cioè si moltiplica la prima frazione per l'inverso della seconda.

Esercizi sulle moltiplicazioni e divisioni di frazioni

1. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} =$

2. $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} =$

3. $-\frac{12}{13} \cdot \frac{26}{4} =$

4. $-\frac{27}{15} \cdot \frac{5}{9} =$

5. $-\frac{2}{8} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) =$

6. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} : \frac{1}{2} =$

7. $\frac{2}{3} : \frac{4}{6} =$

8. $\frac{12}{27} : \frac{10}{9} =$

9. $-\frac{12}{63} : \frac{15}{49} =$

10. $\frac{7}{3} \cdot \frac{15}{14} : \frac{1}{2} =$

11. $2 : \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{9} =$

12. $2 : \frac{2}{3} : \frac{3}{5} =$

13. $\frac{1}{4} : \frac{5}{4} \cdot 5 =$

14. $4 : \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{4} =$

15. $\frac{2}{3} : \left(-\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\right) =$

Espressioni con tutte le operazioni tra frazioni:

1. $\left[-2 \times \left(\frac{11}{90} - 2 + \frac{28}{15}\right) - 5 - \frac{1}{45}\right] \times \left\{-\left[-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} - 2\right) - \frac{1}{5}\right]\right\} =$

2. $\left\{\left(1 - \frac{3}{4}\right) : \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{2} \times \left(-\frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{1}{2} - 2\right)\right] - \frac{5}{4}\right\} : \left(-\frac{2}{15} + \frac{1}{5}\right)$

3. $\left\{\left(1 - \frac{1}{5}\right) : \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{9}\right) - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} : \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) - \frac{7}{10}\right]\right\} \times \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) =$

Calcolo letterale

- Nei calcoli si possono usare, delle lettere al posto dei numeri: in questo caso si parla di **Calcolo letterale**; la lettera indica *qualsiasi numero*. Ad esempio, l'espressione algebrica 2**a** può valere 4 se alla lettera **a** sostituiamo 2, o 6 se ad **a** sostituiamo 3.

- Due monomi possono essere sommati (o sottratti) tra loro **solo se la parte letterale dei due monomi è identica**. Quindi la somma algebrica avviene sommando tra loro i coefficienti numerici e riscrivendo la parte letterale: es. 2a-3a=-a (perché 2-3=-1)

- La moltiplicazione di due monomi avviene calcolando prima il segno, poi il risultato della parte numerica e infine il risultato della parte letterale che segue la **regola sulle potenze** che qui riassumiamo:

1. $\boxed{a^0 = 1}$ es. $\boxed{6^0 = \left(\frac{6}{5}\right)^0 = (-2)^0 = 1}$

2. $\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a}_{\text{n volte}}}$ es.: $\boxed{2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{4 volte}} = 16}$

3. $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ es.: $\boxed{3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2}$

4. $\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$ es.: $\boxed{5^2 \cdot 5^4 = 5^{2+4} = 5^6}$

5. $\boxed{a^n : a^m = a^{n-m}}$ es.: $\boxed{2^5 : 2^3 = 2^{5-3}}$

6. $\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$ es.: $\boxed{(2^3)^5 = 2^{3 \cdot 5} = 2^{15}}$

7. $\boxed{a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}}$ es.: $\boxed{3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}}$

Es. di moltiplicazione di monomi

$$2abx^2 \cdot 5a^2by = 2 \cdot 5 \cdot a \cdot a^2 \cdot b \cdot b \cdot x^2 \cdot y = 10a^3b^2x^2y$$

Esercizi sui monomi

- a-(a+b);
- a + (2a -b);
- a^2 - (a - b);
- (a+b)a^2+a^3;
- 2(a+b);

- $2a - a^2$;
- $(x+y)/2$;
- $\left(-\frac{1}{3}ab^3x + \frac{3}{2}a^3b^2\right) + \left(\frac{1}{5}a^3b^2 - a^4x + \frac{2}{3}ab^3x\right) =$
- $-ab^4\left(-\frac{1}{3}a^2b\right)$
- $-\frac{4}{5}a^2b^3\left(-\frac{10}{3}a^2bc\right)$
- $-\frac{16}{25}xb^3\left(\frac{5}{4}x^3b^4\right)$
- $2xy\left(-\frac{4}{3}yz\right)\left(-\frac{3}{8}x^2\right)$
- $-2a^2\left(-a^2b\right)\left(\frac{1}{4}ab^4\right)$
- $-\frac{3}{4}x^2b^3\left(\frac{4}{5}x^3b\right)$

E' possibile per i monomi calcolare il minimo comune multiplo e il massimo comun divisore

Esempio:

$12a^3x, \qquad 15b^2x^2y,$

$12a^3x = 3 \cdot 2^2 \cdot x \cdot a^3$
$15b^2x^2y = 3 \cdot 5 \cdot b^2 \cdot x^2 \cdot y$

$mcm = 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot y$
$MCD = 3 \cdot x$

Esercizi:

1. $-2a^3$, ab^2, $-8a^4b$, $-a^3b^5$
2. $12a^3b$, $4ab^2$, $8a^4$, $21a^3b^5$
3. $6xa^3$, $5a^2b^3$, $15xa^4$, $-18b^5$
4. 32, $10a^2b^3$, $15b^4xy$, $8y^3b^5$
5. $3a^3b^3$, $9a^2b^3$, $-12a^3b^2$
6. $15x^4y^2z$, $40x^2y^4z$, $35xy^2z^4$, $5xy^3z^3$
7. $25a^4b^2c^3$, $-15a^3b^2$, $5a^4bc^2$, $3a^5$
8. $64a^2b^3$, $16b^4a^3$, $24a^3b^5$

POLINOMI

- Si parla di polinomi quando si ha un'espressione di due o più monomi non riducibili (con parti letterali diverse).
- Valgono le quattro operazioni per i polinomi cioè somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione.
- Per la somma e la sottrazione, facendo attenzione ai segni dei singoli monomi che compongono i polinomi, valgono le regole dei monomi
- Per la moltiplicazione vanno moltiplicati tutti i termini del primo polinomio per tutti i termini del secondo polinomio

Es: ($(a+b)\cdot(c+d) = ac + bc + ad + bd$

Moltiplicazione di un monomio per un polinomio

- $-\frac{2}{3}a^2b^2\left(-\frac{27}{4}a\ b^2c\right)$
- $-\frac{1}{2}x\left(-\frac{1}{4}x\ y\right)\left(\frac{4}{5}y^2\right)$
- $-\frac{2}{3}a^2b^2\left(-\frac{27}{4}a\ b^2c\right)$
- $\left(2bc^2-\frac{3}{2}ab^2\right)\left(-\frac{7}{2}abc\right)=$
- $(-2h-3k-5hk)\left(-\frac{2}{5}h^3k\right)=$
- $\left(-4ab^3-\frac{3}{4}a^3b^2\right)\left(-\frac{4}{3}ab\right)=$
- $(4a^2+3b^3)\left(-\frac{7}{12}ab\right)=$
- $(4a^2+3b^3)\left(-\frac{7}{12}ab\right)=$

Moltiplicazione di due polinomi

- $(a^2-3b)(2a+3b^3)=$
- $(a^2-3b)(5a^3+3b)=$
- $\left(\frac{1}{2}a^2b-\frac{3}{4}b\right)\left(2a+\frac{3}{5}ab^3\right)=$
- $(-5x^2-2y)(x-3y^2)=$
- $a^2(a^2-3b)(2a+3b^3)=$
- $\frac{1}{2}a^2bx\left(\frac{2}{3}ab^2-b\right)\left(2a^2+\frac{5}{2}b^3x^4\right)=$

PRODOTTI NOTEVOLI

Vediamo ora cosa accade per alcuni prodotti di polinomi che vengono detti NOTEVOLI perché ogni volta che si incontrano nei calcoli possiamo abbreviare i calcoli applicando la formula che ne deriva:

quadrato di un binomio $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

infatti $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Somma per differenza o differenza di due quadrati $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

infatti $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

cubo di un binomio $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

infatti

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) =$$
$$a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

differenza di due cubi $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

somma di due cubi $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

esercizi

quadrati di binomio

1. $\left(4x + \frac{1}{3}y^2\right)^2 =$
2. $\left(\frac{4}{3}x + \frac{1}{2}y\right)^2 =$
3. $\left(\frac{1}{5}a + \frac{1}{2}bx^3\right)^2 =$
4. $\left(\frac{1}{5}a^2 + \frac{5}{2}ab\right)^2 =$
5. $\left(-\frac{3}{2}x + \frac{4}{5}xy\right)^2 =$
6. $\left(\frac{1}{6}x - 3xy^2\right)^2 =$
7. $\left(-\frac{1}{9}x^3 + \frac{3}{2}x\right)^2 =$
8. $\left(-\frac{2}{9}ab + \frac{3}{2}a\right)^2 =$
9. $\left(5x^3y^2 + \frac{5}{2}x\right)^2 =$
10. $\left(-9y^3 - \frac{1}{2}x\right)^2 =$

Cubi di binomio

1. $\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x\right)^3=$
2. $\left(-\frac{1}{2}ab^3-\frac{1}{4}c\right)^3=$
3. $\left(-3x^3+5x\right)^3=$
4. $\left(-2a^3-\frac{1}{2}b\right)^3=$
5. $\left(4a+\frac{1}{3}b^2\right)^3=$
6. $\left(+2xy+\frac{1}{2}x^2\right)^3=$
7. $\left(-4x-\frac{1}{3}y\right)^3=$
8. $\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x\right)^3=$
9. $\left(-\frac{4}{3}a^2+\frac{1}{3}ab\right)^3=$
10. $\left(-\frac{2}{3}y^2+4x\right)^3=$

Somma per differenza

1. $\left(3x^3+5x\right)\left(3x^3-5x\right)=$
2. $\left(-2a^3-\frac{1}{2}b\right)\left(-2a^3+\frac{1}{2}b\right)=$
3. $\left(4a+\frac{1}{3}b^2\right)\left(4a-\frac{1}{3}b^2\right)=$
4. $\left(+2xy+\frac{1}{2}x^2\right)\left(+2xy-\frac{1}{2}x^2\right)=$
5. $\left(4x-\frac{1}{3}y\right)\left(4x+\frac{1}{3}y\right)=$
6. $\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x\right)=$
7. $\left(\frac{4}{3}a^2+\frac{1}{3}ab\right)\left(\frac{4}{3}a^2-\frac{1}{3}ab\right)=$
8. $\left(-\frac{2}{3}y^2+4x\right)\left(-\frac{2}{3}y^2-4x\right)=$
9. $\left(2y+\frac{1}{3}x\right)\left(-2y+\frac{1}{3}x\right)=$
10. $\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x\right)=$

Scomposizione dei polinomi in fattori

Scomporre un polinomio in fattori significa trovare, quando è possibile, due o più polinomi che moltiplicati tra loro diano come risultato il polinomio di partenza.

In generale non esiste una regola ma è possibile utilizzare dei metodi particolari, abbastanza elementari che consentono di scomporre alcuni polinomi in fattori.

Raccoglimento a fattor comune

Con raccoglimento a fattor comune **TOTALE** si intende evidenziare i fattori comuni a tutti i monomi presenti nell'espressione in esame. Ad esempio:

b^2+4b

il fattore comune ad entrambi i monomi b^2 e $4b$ è la sola lettera b di primo grado, quindi il polinomio potrà essere scritto nel seguente modo

$b(b+4)$

infatti moltiplicando si ottiene nuovamente b^2+4b

Se fosse $6ab^4+8b^5$ Sarebbe $2b^4(3a+4b)$ infatti: per la parte numerica il MCD tra 6 e 8 è 2 per la parte letterale il MCD tra b^4 e b^5 è b^4

Esercizi

Scomporre in fattori le seguenti espressioni *mettendo in evidenza* in ciascuna di esse i fattori comuni

1. a^2+4a
2. $2+6a$;
3. a^3+a^2;
4. a^5+8a^3;
5. $-x^3-2x^2-5x$.
6. $x^2yz + 2xy^2 z + xyz^2$;
7. $4mn^2 - 6m^2n$;
8. $(1/9)a^3b^3 +(2/3) a^2b^4$;
9. $9axy-6a^2x$;
10. $5m^2+ l0m$;
11. $4a^2b^2 -6a^3b+8a^2b^3$;
12. $9a^3 +3a+3$.
13. $15a-20a^2+25ab$;
14. $x^{10} -x^8 +4x^6$;

15. $12xy^2 - 15xy + 18x^2y$;

16. $0{,}5a^3b^4 - 1{,}5ab^3$.

17. $a^3 - 4a^2 + 5a$;

18. $6x^3 - 12x^2y + 24x^4$;

19. $x^6y^4 - x^3y^3 + 4x^4y^2$

In un' espressione si può evidenziare anche una quantità più grande di un monomio, infatti nell'espressione

$(a+b)x^2 + (a+b)y + 2(a+b)x$

si vede subito che i tre termini hanno in comune il fattore $(a+b)$ ed è quello che si può mettere in evidenza

$(a+b)(x^2+y+2x)$

Esercizi

1. $x^2y(x-y) + 3x^3y(x-y) + 4xy^2(x-y)$.
2. $2(a-l)+x(a-1)-2xy(a-1)$;
3. $3x(a+1)+a+1-8x^2(a+1)$.
4. $(a-b)^2+2(a-b)-(a-b)ab$;
5. $(x+2y)^2 - 3(x+2y) + 2(x+2y)^3$.
6. $(3a+1)(2a-3)-4a(2a-3)-7(2a-3)$.
7. $(a-1)(a-2)(a-3)-3(a-1)(a-2)+(a-1)(a-2)^2a+(a-1)(a-2)$.
8. $(1/4)a^3b^2c^2+(3/2)a^2bc^2 - (5/4)a^2bc^4 + (1/8)a^2b^2c^2 - (5/2)a^2b^3c^3$.
9. $a(x-1)^2 + 2a(x-1)+3a(x-1)(x+2)$;
10. $a^2(2x-y)-a^3(2x-y) - 3(2x-y)$;
11. $(x+y)(2x-1)(x+3)-(x+y)^2(x+3)-(2x-1)^2(x+y)$;
12. $(a-1)^3(a+2)(2a-1)-(a-1)^2(2a-1)+(a+2)(a-1)(2a-1)^2$;
13. $-3n(n+2)^3 - 4n(n+2)(n+1) + (n+2)(n+1)^2$.

Il raccoglimento a fattor comune può essere anche **parziale**, il che vuol dire che è possibile in un polinomio scegliere i monomi su cui effettuare il raccoglimento.

Es.: $ax+x+ba+b$

Per risolvere questo esercizio le strade sono svariate ma tutte ugualmente percorribili, infatti prendiamo i primi due monomi $ax+x$ tra questi due posso mettere in evidenza x ottenendo $x(a+1)$, tra gli ultimi due monomi $ba+b$ posso mettere in evidenza b ottenendo $b(a+1)$ quindi scrivendo di seguito ottengo:

$ax+x+ba+b=x(a+1)+b(a+1)=$ $\mathbf{(a+1)(x+b)}$

perché $x(a+1)$ e $b(a+1)$ hanno in comune $(a+1)$

si poteva anche svolgere nel seguente modo, ovvero:

$ax+x+ba+b=$

$a(x+b) + x + b =$ (mettendo in evidenza a tra primo e terzo monomio e riscrivendo tutto il resto)

a(x+b)+(x+b)= **(x+b)(a+1)** esattamente identico al risultato di prima.

Esercizi:

1. $am - bm + ax - bx =$
2. $ab + b^2 + ay + by =$
3. $14ax + 35ay - 6bx - 15by =$
4. $8x^2 - 30xy + 4x^2m - 15xym =$
5. $ax^2 + ay^2 - x^2 - y^2 =$
6. $a^3 - a^2b + a - b =$
7. $x^2 - 2x + xy - 2y =$
8. $5ax - 5bx - 8a - 8b =$
9. $x^6 + x^4y^2 - x^2y^4 - y^6 =$
10. $8a^5 + 18a^2b^2 - 9b^5 - 4a^3b^3 =$

La scomposizione può avvenire anche se il polinomio è lo sviluppo di un prodotto notevole

Vediamo il caso **quadrato di un binomio**

Ad esempio ricordando la formula del quadrato di un binomio $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

Occorre ragionare nel seguente modo es: dato il polinomio $x^2 - 6x + 9 =$ in esso sono presenti due termini che possono essere il quadrato di qualcosa? La risposta è si perché x^2 è il quadrato di x e 9 è il quadrato di 3. Il binomio generatore dovrebbe quindi avere come termini x e 3, occorre ora verificare che il doppio prodotto di questi due termini dia effettivamente come risultato il terzo termine del polinomio di partenza cioè -6x. In effetti il prodotto tra 3 ed x da 3x che moltiplicato per 2 fornisce effettivamente 6x. Quindi siamo in presenza del quadrato di un binomio, l'ultima cosa da verificare è il segno che dobbiamo attribuire ad x e a 3. Il doppio prodotto nel polinomio di partenza è negativo quindi dalla regola di composizione dei segni vuol dire che o il 3 o la x sono negativi (è indifferente assegnare all'uno o all'altro il segno -) quindi il polinomio generatore sarà

$(x-3)^2$

Scomporre in fattori i seguenti polinomi sapendo che sono ***quadrati di binomi***

1. $x^2 - 6x + 9 =$
2. $x^2 + 4xy + 4y^2 =$
3. $4x^2 - 4x + 1 =$
4. $16x^2 - 8ab + b^2 =$
5. $x^6 + 2x^3y^2 + y^4 =$

6. $9x^2 + 4y^2 - 12xy =$

7. $16x^2 + \frac{8}{3}xy^2 + \frac{1}{9}y^4 =$

8. $\frac{1}{36}x^2 - x^2y^2 + 9x^2y^4 =$

Scomporre in fattori i seguenti polinomi sapendo che sono ***cubi di binomi***

1. $-\frac{1}{27}x^9 + \frac{1}{3}x^7 - x^5 + x^3$

2. $-b^3 - a^3b^2 - \frac{1}{3}a^6b - \frac{1}{27}a^9$

3. $-1 - 6y^4x^2 - 12x^4y^8 - 8x^6y^{12}$

4. $-8y^3 + 4y^2x - \frac{2}{3}yx^2 + \frac{1}{27}x^3$

5. $-a^3 - a^2b^2 - \frac{1}{3}ab^4 - \frac{1}{27}b^6$

Scomporre in fattori i seguenti polinomi sapendo che sono differenze tra due quadrati

1. $\frac{81}{4}x^2 - \frac{9}{16}y^2 =$

2. $9x^2z^6 - \frac{1}{16}y^2 =$

3. $100a^6x^2 - 1 =$

4. $9x^2 - \frac{4}{25}y^2 =$

5. $9x^2 - (x+y)^2 =$

6. $x^2 - (5y - 2x)^2 =$

7. $(x+2y)^2 - 25y^2 =$

8. $(a+b)^2 - \frac{1}{16}y^2 =$

FRAZIONI ALGEBRICHE

Le considerazioni fatte sulla scomposizione dei polinomi ci consente di effettuare una estensione del concetto di m.c.m. e M.C.D. dei polinomi.

Esempio: Dati i polinomi trovare m.c.m. e M.C.D.

a) a^2-4b^2

b) $3a^3+12a^2b+12ab^2$

c) $ax+2bx+ay+2by$

La prima operazione da fare è scomporre in fattori i polinomi, per cui

a) $(a-2b)(a+2b)$ essendo la differenza tra due quadrati

b) $3a(a^2+4ab+4b^2)=3a(a+2b)^2$ essendo un quadrato di binomio

c) $x(a+2b)+y(a+2b)=(a+2b)(x+y)$ (raccoglimento parziale e totale)

il m.c.m. sarà dato quindi da tutti i fattori comuni e non comuni di ordine massimo per cui

m.c.m.$=3a(a-2b)(a+2b)^2(x+y)$

Il M.C.D. sarà dato dai massimi dei soli fattori comuni a tutti i polinomi quindi

M.C.D.$= (a+2b)$

Esercizi:

Calcolare MCD e m.c.m. dei seguenti polinomi:

1. $3x+3y$; $15(x+y)$; $20(x^2-y^2)$
2. $(a-b)$; $(a-b)^2$; (a^2-b^2)
3. $15ab$; $10a^2b^2$; $a^3b-2a^2b^2+ab^3$
4. (x^2-9); x^2-6x+9; $(2x^2-6x)$
5. $7(x^2+y^2)$; $14(x^4-y^4)$; $21(x^2-y^2)$

SI CHIAMA FRAZIONE ALGEBRICA LA SCRITTURA A/B DOVE A E B SONO DEI POLINOMI

ES: $\frac{3x+3y}{x+y}=$ oppure $\frac{3xy}{2(x+y)}$ oppure $\frac{5x^2+3xy-1}{(x-1)(x+3))}$ etc.

Una frazione algebrica può alcune volte essere semplificata, occorre naturalmente per prima cosa scomporre i polinomi del numeratore e del denominatore in fattori, quindi:

$\frac{3x+3y}{x+y}=\frac{3(x+y)}{x+y}=3$ perchè i binomi (x+y) del numeratore e del denominatore possono essere semplificati.

Esercizi:

Semplificare le seguenti frazioni algebriche (dove è necessario raccogliere a fattor comune):

1. $-\frac{a^2b^3}{3ab}$
2. $\frac{15x-15a}{3x-3a}$
3. $\frac{a^2+ax}{2ax}$
4. $\frac{y+y^2}{2+2y}$
5. $\frac{18b^3+12b^2}{27b^3-12b}$
6. $\frac{2a^3-ax^2}{2a^2x-x^3}$
7. $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

Per le frazioni algebriche valgono le quattro operazioni di somma e sottrazione, moltiplicazione e divisione.

Vediamo come si effettua la **somma** algebrica:

Es: $\frac{1}{3x-3a}+\frac{3}{a}+\frac{3a}{x^2-a^2}=$ scomponiamo i denominatori

$\frac{1}{3(x-a)}+\frac{3}{a}+\frac{3a}{(x-a)(x+a)}=$ come per le frazioni tra numeri si calcola il m. c.m. dei denominatori

3a(x-a)(x+a) quindi sarà possibile scrivere un unico segno di frazione e:

$$\frac{1\cdot a(x+a)+3\cdot 3(x+a)(x-a)+3a\cdot 3a}{3(x-a)(x+a)}=\frac{ax+a^2+9(x^2-a^2)+9a^2}{3(x-a)(x+a)}=\frac{ax+a^2+9x^2-9a^2+9a^2}{3(x-a)(x+a)}=$$

$$=\frac{ax+9x^2+a^2}{3(x-a)(x+a)}$$

Esercizi

1. $\frac{y}{y-b}+\frac{b}{y+b}-\frac{by}{y^2-b^2}=$
2. $\frac{a}{2a+b}-\frac{a}{2a-b}=$
3. $\frac{b^2}{(a+b)^2}+\frac{a^2}{(a-b)^2}-\frac{(a^2+b^2)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}=$
4. $\frac{1}{x+y}+\frac{2}{3(x-y)}-\frac{3}{2x-2y}=$
5. $\frac{xy}{x+y}+\frac{xy}{x-y}-\frac{2xy^2}{x^2-y^2}=$
6. $\frac{a^2}{a+b}-\frac{b^2}{a-b}+\frac{2b^2}{a^2-b^2}=$
7. $\frac{2x^2-y^2}{x+y}-\frac{x^2+2y^2}{x-y}-\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}=$
8. $\frac{x}{x-1}-\frac{2x}{x+1}-\frac{x}{1-x^2}=$

9. $a^2+b^2+\dfrac{a^4+b^4}{a^2-b^2}=$

10. $\dfrac{a^2}{a-b}-\dfrac{b^2}{a+b}+\dfrac{2a^2-b^2}{a^2-b^2}$

Per quanto riguarda la moltiplicazione e la divisione si opera con lo stesso principio delle frazioni tra numeri:

es: $\dfrac{x^3y}{x-y}\cdot\dfrac{x^2+y^2-2xy}{x^2y^3}=$ si scompongono sia numeratore che denominatore (ove possibile)

$$\frac{x^3y}{x-y}\cdot\frac{(x-y)^2}{x^2y^3}=\frac{xx^2y}{x-y}\cdot\frac{(x-y)(x-y)}{x^2yy^2}=\frac{x(x-y)}{y^2}$$

Per quanto riguarda invece la divisione si procede come la moltiplicazione dopo aver invertito la frazione algebrica presente dopo il segno di divisione e scrivendo per al posto di diviso, quindi:

es: $\dfrac{x^3y}{x-y}:\dfrac{x^2}{x^2-y^2}=$ si inverte la seconda frazione algebrica

$\dfrac{x^3y}{x-y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2}=$ si scompongono sia numeratore che denominatore (ove possibile)

$$\frac{x^3y}{x-y}\cdot\frac{(x-y)(x+y)}{x^2}=\frac{xy(x+y)}{1}$$

Esercizi

1. $\dfrac{a-2}{2b}\cdot\dfrac{8b^2}{a^2-4}=$
2. $\dfrac{x^3+x^2}{ay-a}\cdot\dfrac{a^2y-a^2}{3x^2+3x}$
3. $\dfrac{a^2-4a+4}{x^2-2ax+a^2}\cdot\dfrac{x^2-ax}{a-2}=$
4. $\dfrac{ab+3bx}{2xy^2}\cdot\dfrac{4x^2y}{a^2b-9bx^2}=$
5. $\dfrac{15x-30}{2x}\cdot\dfrac{3x^2}{5x-10}=$
6. $\dfrac{ab+3bx}{2xy^2}\cdot\dfrac{4x^2y}{a^2b-9bx^2}=$
7. $\left(\dfrac{x+y}{2x-2y}-\dfrac{x-y}{2x+2y}+\dfrac{2y^2}{x^2-y^2}\right):\dfrac{2y}{x-y}=$
8. $\dfrac{a^2+ab}{a^2+b^2}\cdot\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}\right):\dfrac{a}{a-b}=$
9. $\left(\dfrac{a-2b}{b}+\dfrac{b-2a}{a}+2\right):\dfrac{a-b}{ab}=$
10. $\left(a+\dfrac{b-a}{1+ab}\right):\left[1-\dfrac{a(b-a)}{1+ab}\right]=$

RADICALI

Molto spesso quando si parla di radicali si associa ad un concetto molto complicato, ma non è così infatti per risolvere un radicale basta conoscere bene le proprietà delle potenze.

Un radicale è scritto generalmente nel seguente modo $\sqrt[n]{a^m}$ dove
n =indice
a = radicando
m = potenza

Risolvere un radicale (estrazione dalla radice) equivale a trovare un numero che elevato ad una potenza =all'indice della radice dia come risultato il radicando.

Es: $\sqrt[3]{27} =$ Esiste un numero che elevato alla 3ª dia come risultato 27? La risposta è si infatti $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$ quindi $\sqrt[3]{27} = 3$ e analogamente $\sqrt{4} = \pm 2$ e $\sqrt[4]{16} = \pm 2$ (In questi ultimi due casi davanti al risultato appare il segno + e – perchè l'elevazione a potenza pari di un numero negativo da come risultato comunque un numero positivo infatti $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$

Occorre quindi fare una distinzione tra radicali con indice pari e radicali con indice dispari:

radicali con indice pari: <u>la radice esiste sempre **solo** se il radicando è **positivo**</u> infatti se il radicando è negativo non si può trovare un numero che elevato ad una potenza pari dia come risultato un numero negativo es: $\sqrt{-9} =$ infatti $9 = 3^2$ ma $(-3) \cdot (-3)$ da sempre +9 come risultato

radicali con indice dispari: la radice **esiste sempre** anche se il radicando è negativo infatti $\sqrt[3]{-27} = -3$

Vale la seguente regola $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Un radicale dalle proprietà delle potenze si può scrivere nella seguente forma

$\boxed{a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}}$ quindi ad esempio $\boxed{\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3}$

Si deduce che *dividendo indice e potenza per il loro MCD si semplifica la frazione*

Esempio: $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = 3^{\frac{4}{8}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Un numero qualsiasi può essere scritto sotto forma di radicale basta elevarlo ad una potenza = all'indice della radice cioè $3 = \sqrt[3]{3^3}$

Nei calcoli talvolta è necessario poter ridurre due o più radicali allo stesso indice, quindi si assume come indice il mcm degli indici poi si moltiplica l'esponente del radicando per il dividendo del mcm dell'indice

Es. $\sqrt[3]{3}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt[4]{3^3}$

Il mcm tra 3; 2; 4 è 12 quindi l'indice della nuova radice sarà 12.Per calcolare la nuova potenza invece dovremo: per il primo radicale fare mcm : 3 =4 e moltiplicheremo l'esponente del radicando per 4; per il secondo radicale otterremo 12:2=6 e quindi moltiplicheremo l'esponente del radicando per 6 etc. quindi:

$\sqrt[12]{3^4}$ $\sqrt[12]{3^6}$ $\sqrt[12]{3^9}$

Esercizi: ***Semplifica ove possibile i seguenti radicali***

1. $\sqrt[4]{225}$
2. $\sqrt[4]{324}$
3. $\sqrt[8]{1296}$
4. $\sqrt[21]{a^7}$
5. $\sqrt[5]{a^{10}}$
6. $\sqrt[36]{4^{24}}$

Riduci allo stesso minimo comune indice le seguenti terne di radicali

1. $\sqrt{6}$ $\sqrt[3]{4}$ $\sqrt[6]{10}$
2. $\sqrt[9]{2x}$ $\sqrt{3ab}$ $\sqrt[12]{a^5b^6}$
3. $\sqrt{6}$ $\sqrt[3]{4}$ $\sqrt[6]{10}$

VALGONO LE SEGUENTI REGOLE

1. $\boxed{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a\cdot b\cdot c}}$ ES.: $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{30}$
2. $\boxed{\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$ ES.: $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$
3. $\boxed{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p=\sqrt[n]{a^{mp}}}$ ES.: $\left(\sqrt[3]{2^4}\right)^5=\sqrt[3]{2^{4\cdot5}}=\sqrt[3]{2^{20}}$
4. $\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}}$ ES: $\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}}=\sqrt[15]{2}$

Esercizi: Eseguire le moltiplicazioni o divisioni e semplificare dove possibile

1. $\sqrt{\dfrac{2}{a}}\cdot\sqrt{\dfrac{a^6}{8}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{a}}=$ r: $\dfrac{a^2}{2}$
2. $\sqrt[4]{\dfrac{x^3}{y^4}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{y}{x}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{x^2}{y}}=$ r: $\dfrac{x}{y}$
3. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}=$ r: $\sqrt[6]{72}$
4. $\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[8]{b^3}\cdot\sqrt{ab}=$ r: $\sqrt[24]{a^{32}b^{21}}$
5. $\sqrt{8}:\sqrt{2}=$ r:2

6. $\sqrt[3]{\frac{3}{125}} : \sqrt[3]{3} =$ r: $\frac{1}{5}$

Portare i fattori sotto il segno di radice e semplificare dove possibile

Es.: $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$

1. $3\sqrt{5} =$ $7\sqrt{2} =$ $4\sqrt{3} =$
2. $\frac{1}{2}\sqrt{8} =$ $3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}} =$ $\frac{a}{2}\sqrt{4b} =$
3. $\frac{2a}{3y-1}\sqrt{\frac{9y^2-1}{8a^2}} =$
4. $ab^3\sqrt[6]{\frac{a^2+1}{a^5b^{15}}} =$

Portare fuori dal segno di radice tutti i possibili fattori

Es: $\sqrt[3]{ab^3} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b^3} = b\sqrt[3]{a}$ oppure

$\sqrt[3]{8b^5} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{b^5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot b^3 \cdot b^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[3]{b^2} = 2b\sqrt[3]{b^2}$

1. $\sqrt{18} =$ $\sqrt[3]{24} =$ $\sqrt[3]{625} =$
2. $\sqrt[3]{54} =$ $\sqrt{24} =$ $\sqrt{108} =$
3. $\sqrt{9xy^2} =$ $\sqrt[3]{54a^3} =$ $\sqrt{200} =$
4. $\sqrt[4]{16x^8b^2} =$ $\sqrt[7]{a^7b^8c^9} =$ $\sqrt{\frac{a^3-a^2b}{ab^2+b^3}} =$
5. $\sqrt[5]{x^7+x^6} =$ $\sqrt[4]{\frac{80x^3y^6}{81}} =$ $\sqrt{\frac{20x^5y^3}{75}} =$

Calcolare le seguenti potenze di radicali e semplificare ove possibile

Es.: $\left(\sqrt{2}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^1 = 2\sqrt{2}$

1. $\left(\sqrt{3}\right)^4$ $\left(\sqrt{7}\right)^6$ $\left(\sqrt[3]{5}\right)^4$
2. $\left(\sqrt[4]{\frac{9}{20}}\right)^3$ $\left(\sqrt[8]{21}\right)^7$ $\left(\sqrt[4]{9}\right)^{12}$
3. $\sqrt[3]{\frac{-x^5a^4}{64}}$; $\sqrt[4]{3125a^{20}x^6}$; $\sqrt[7]{\frac{128}{2187}}$

4. $\sqrt[3]{\frac{-x^3y^3}{1000}}$; $\sqrt[4]{16a^4x^8}$; $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$

5. $\sqrt{\frac{-b^5c^4}{144}}$; $\sqrt[3]{\frac{125}{a^6b}}$; $\sqrt[4]{\frac{16}{t^9}}$

Mettere sotto il segno di un unico radicale e semplificare ove possibile i risultati:

Es: $\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}$ dove l'indice 4 è dato dal prodotto degli indici dei due radicali

1. $\sqrt{\sqrt[4]{3}}$ $\sqrt{\sqrt{16}}$ $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{15}x^6}}$

2. $\sqrt{2\sqrt{2}}$ $\sqrt{a^2\sqrt{\frac{1}{a^2}}}$ $\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{2}}}}}$

3. $y\sqrt{x\sqrt{\frac{1}{y}}}$ $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}}$ $a^3\sqrt{a^4\sqrt[6]{\frac{1}{a^5}}}$

4. $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{b^3}}\sqrt[4]{\frac{a^3}{\sqrt{b}}}$

Con i radicali è possibile effettuare delle somme algebriche. I radicali ridotti (cioè non ulteriormente semplificabili) possono essere sommati tra loro solo se sono identici come indice e come radicando

Cioè posso sommare tra loro $2\sqrt{2}$ e $-3\sqrt{2}$ ma non posso sommare tra loro $2\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2^4}$ che è -2.

Esempio :

$$\sqrt{5}+\sqrt{20}+\sqrt{45} = \sqrt{5}+\sqrt{4\cdot 5}+\sqrt{9\cdot 5} = \sqrt{5}+2\sqrt{5}+3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

Esercizi

1. $\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{50} =$
2. $\sqrt{27}+6\sqrt{3}-\sqrt{243} =$
3. $\sqrt{18}-\sqrt{32}+\sqrt{128} =$
4. $3\sqrt{3}+2\sqrt{27}-\sqrt{48} =$
5. $\sqrt{3}+\sqrt{432}+\sqrt{75}-\sqrt{363}+\sqrt{243}-\sqrt{507} =$
6. $\frac{1}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{27}}-\frac{5}{2}\sqrt[3]{54}+3\sqrt[3]{\frac{2}{125}}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{1-\frac{25}{27}} =$

RAZIONALIZZAZIONE

Una frazione in cui compaiano oltre ai numeri e alle lettere anche i radicali è detta irrazionale.

Molte volte nell'eseguire i calcoli, avere un radicale al denominatore rende le cose molto più difficili, quindi si adotta la tecnica della razionalizzazione cioè eliminare, mediante calcoli che non cambiano il valore della frazione stessa, il radicale presente al denominatore.

Es. $\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{a}{\sqrt{a}}\cdot 1 = \frac{a}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}} = \frac{a\sqrt{a}}{a} = \sqrt{a}$

Si verificano i seguenti casi

1. al denominatore è presente un radicale di indice 2? Allora si moltiplica numeratore e denominatore per lo stesso radicale (vedi esempio)
2. al denominatore è presente un radicale con indice diverso da 2? Si moltiplica numeratore e denominatore per un radicale che abbia lo stesso indice di quello del denominatore ma potenza del radicando tale da annullare la radice

   es: $\frac{a+b}{\sqrt[3]{b^2}}$ per razionalizzare dobbiamo moltiplicare per $\sqrt[3]{b}$ perché in questo modo il denominatore diventa $\sqrt[3]{b^2}\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{b^3} = b$ quindi $\frac{a+b}{\sqrt[3]{b^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{b}\,(a+b)}{b}$

3. la frazione è nella forma $\frac{a}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$? Si applica la regola dettata dal prodotto notevole somma per differenza o differenza tra due quadrati quindi se ho $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ moltiplicherò numeratore e denominatore per $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ se ho invece $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ moltiplicherò numeratore e denominatore per $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ perchè in entrambi i casi il prodotto $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \cdot \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = a - b$

esercizi

1. $\frac{6}{\sqrt[3]{4}}$
2. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{\sqrt{21}}$
3. $\frac{a\sqrt{b}}{b\sqrt{a}}$
4. $\frac{4}{\sqrt[10]{2^7}}$
5. $\frac{10}{\sqrt[3]{20}}$
6. $\frac{4}{\sqrt[10]{2^7}}$
7. $\frac{25}{10 - \sqrt{50}}$
8. $\frac{9x^2 - 4}{\sqrt{3x} + \sqrt{2}}$
9. $\frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$
10. $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x^2y} + \sqrt{xy^2}}$

EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

Il concetto introduttivo alle equazioni è rappresentato dalle uguaglianze. Se scriviamo 2=3 abbiamo scritto una uguaglianza non vera. Ma se scriviamo 2=2 questa uguaglianza è vera e ci troviamo di fronte ad una identità.

Definizione : Si chiama identità una equaglianza posta tra due espressioni algebriche , o tra due espressioni, che diventano formalmente identiche se si eseguono le operazioni in esse indicate.

Ad esempio l'espressione $a=a$ è una identità

Come pure $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ infatti è lo sviluppo del quadrato del binomio.

In questo tipo di espressioni ciò che si trova a sinistra dell'uguale si chiama "primo membro", ciò che si trova a destra "secondo membro".

Una identità è verificata se eseguendo le operazioni in essa indicate si ottengono risultati uguali.

Es.: Verificare l'uguaglianza $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

Svolgendo i calcoli al secondo membro si ottiene $(a+b)^2=a^2-2ab+b^2+4ab= a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

Quindi l'uguaglianza è verificata.

Vale la seguente proprietà

Aggiungendo i due membri di una uguaglianza la stessa quantità (numero o espressione) l'uguaglianza non cambia (è sempre verificata)

es: 2=2 aggiungiamo ad entrambi i membri la quantità 6 diviene
2+6=2+6
8=8

Questa regola vale anche se si effettua una sottrazione moltiplicazione o divisione $a + 3 = 5$ non cambierà se la trasformiamo così: $a + 3 - 3 = 5 - 3$ (abbiamo sottratto 3 ad ambo i membri) così come $2a = 4$ non cambierà se la trasformiamo in $2a/2 = 4/2$.

DEFINIZIONE Si chiama **equazione** una eguaglianza fra due espressioni algebriche che si trasforma in identità solo quando alle lettere in essa contenute si attribuiscono valori particolari

Risolvere una equazione significa trovarne le radici o soluzioni

Un'equazione che ha un numero finito di soluzioni (almeno una) si dice **DETERMINATA**

Un'equazione che non ha soluzioni si dice **ASSURDA** o **IMPOSSIBILE**

Un'equazione che ha un numero infinito di soluzioni si dice **INDETERMINATA**

Un'equazione si dice frazionaria o fratta se l'incognita o le incognite sono presenti al denominatore, altrimenti si dice INTERA.

Esempio di equazione: $2x=3$ x è l'**incognita** ovvero la lettera di cui bisogna trovare il valore affinchè l'uguaglianza diventi un'identità.

E' un'equazione di primo grado perchè l'incognita ha esponente 1

COME SI RISOLVONO?

Per la risoluzione delle equazioni di primo grado si fa riferimento alle proprietà delle uguaglianze quindi:

es: $2x=3$

l'uguaglianza non cambia se divido ambo i membri per 2 quindi ottengo $(2/2)x=3/2$

quindi $x=3/2$ che è la soluzione dell'equazione infatti sostituendo all'equazione di partenza il valore trovato al posto della x otterrò $2(3/2)=3$ cioè $3=3$

$x + 1 = 2$ è un'equazione di 1° grado poiché la **x**, lettera con cui si indica di solito il termine incognito, è alla potenza 1 sottraendo 1 da ambo i membri otterremo: $x + 1 -1 = 2 - 1$ cioè $x = 1$

Nella risoluzione si tende a fare in modo di avere tutti i termini con l'incognita a sinistra del segno di uguaglianza e tutti i termini noti (i numeri) a destra; il numero a destra del segno = dell'ultima espressione è la **soluzione** dell'equazione.

Altro esempio: l'equazione $3x = 9$ diventa (dividendo ambo i membri per 3) $3x/3 = 9/3$ cioè

$x = 3$

Si può accelerare il procedimento di risoluzione osservando che quando scriviamo $x + 1 -1 = 2 - 1$, come nell'esempio precedente, è come se dicessimo: un termine additivo (+ 1 nell'esempio) che compare da un lato del segno = può essere portato dall'altra parte cambiato di segno (l'equazione originaria era $x + 1 = 2$ che, portando + 1 a destra del segno =, diventa $x = 2 - 1$ ....). Allo stesso modo, un termine che in un membro moltiplica, portato all'altro membro dividerà; ad es., $3x = 9$ diventa, portando il 3 a destra del segno di uguaglianza, $x = 9/3$.

- Vale, in un'espressione letterale, la *proprietà distributiva*; ad es., $5(a + b) = 5a + 5b$, cioè il numero 5, che sta fuori della parentesi, moltiplica tutti (e soli) i termini additivi dentro la parentesi.
- Vale anche l'inverso: si possono raccogliere tutti i termini comuni presenti in un'espressione e ***metterli in evidenza***; ad esempio nell'espressione $7x + 7y$ possiamo mettere in evidenza il 7, che compare in entrambi i termini, ottenendo così $7(x + y)$.

Esercizi (Equazioni di 1° grado)

1. $x+3(1 -x) =2+5x$.
2. $4(1+x) - 3(2-x)=4+3x(1-1/3)$
3. $3-2(4x-3) =x-3(2x+5)$.
4. $5(2+x)=3(1+x)-2x-4(2-x)$.
5. $(7-3x)^2 + x = 5 - 3(5 -x)$
6. $2(x-3)-4(1 -2x) =3(x-l)$.
7. $3(x-1)-2x+5=4(x-2)+4$.
8. $3x^2-1-x=x(3x+1\}+5$.
9. $6(x+2)-3(x+4)+3=2x+4(x+1)$.
10. $2(x-3) -5(1 +x) -1 =x+2(1-x)$;
11. $(x-1)(x+1)+2(1-3x)=(x+2)(x-3)-3$.
12. $3-2(x+2)-(1+4x)=x-2(2x+1)$.

13. $3x(x-1) - (1+x)(-4) = 2x^2 - (1-x)(1+x) + 4$.

14. $2-[2x-(3-x)-4] = (1-2x)3+2-3x$;

15. $-2[x(x-1)-1+x(3-x)] = -2(1+5x)+4$.

16. $x-1+5(x-3)+(-2)^2 = 6(x-2)$.

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Qualsiasi equazione di 2° grado può essere scritta nella forma $ax^2+bx+c=0$, dove a è il coefficiente del termine di 2° grado, b il coefficiente del termine di 1° grado e c è il termine noto.

Le equazioni di secondo grado possono essere pure spurie o complete

Pure $ax^2+c=0$ manca il termine di primo grado (bx)

In questo caso le soluzioni sono $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Spurie $ax^2+bx=0$ manca il termine noto

In questo caso le soluzioni sono $x = -\frac{b}{a}$ e $x=0$

Complete $ax^2+bx+c=0$ sono presenti tutti e tre i termini

In questo caso le soluzioni si trovano applicando la formula risolutiva

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Valgono le seguenti considerazioni:

il termine b^2-4ac viene chiamato delta Δ e:

1) se $\Delta>0$ allora l'equazione ha due soluzioni reali e distinte

2) se $\Delta<0$ allora l'equazione non ha soluzioni (infatti la radice quadrata di un numero negativo non esiste) o è **IMPOSSIBILE**

3) se $\Delta=0$ allora l'equazione ha una soluzione (o due soluzioni coincidenti) infatti sparisce la radice nella formula risolutiva.

In particolare la formula risolutiva si deduce da un semplice ragionamento. La generica equazione di 2° grado viene trasformato in un *quadrato di un binomio*. Ad es. $ax^2+bx+c=0$, può diventare, moltiplicando tutti i termini per 4a, $4a^2x^2+4abx+4ac=0$; se portiamo il termine 4ac a secondo membro e addizioniamo b^2 ad ambo i membri (operazione che lascia comunque inalterata la validità della relazione di uguaglianza), otterremo l'equazione $4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$; è facile rendersi conto che l'espressione a primo membro è lo sviluppo del quadrato del binomio 2ax+b e che, pertanto, possiamo scrivere $(2ax+b)^2=b^2-4ac$; effettuando le opportune manipolazioni otterremo, finalmente, la formula generale di risoluzione che, come si vede, individua 2 soluzioni

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Esercizi: Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado pure.

Es.: $4x^2 - 16 = 0$ -> $\rightarrow$ $x^2 = 4$ $\rightarrow$ $x = \pm\sqrt{4}$ $\rightarrow x = \pm 2$

1. $5x^2 - 80 = 0$
2. $4x^2 - 64 = 0$
3. $-3x^2 + 75 = 0$
4. $-6x^2 + 24 = 0$
5. $3x^2 - 27 = 0$
6. $2x^2 - 242 = 0$
7. $\frac{1}{2}x^2 - 8 = 0$
8. $\frac{1}{3}x^2 - 27 = 0$
9. $-\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5} = 0$
10. $6x^2 - 6 = 0$
11. $9x^2 - 36 = 0$
12. $7x^2 - 28 = 0$
13. $-7x^2 + 63 = 0$
14. $-5x^2 + 20 = 0$
15. $-8x^2 + 72 = 0$

Esercizi: Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado spurie.

Es.: $4x^2 - 16x = 0$ -> $\rightarrow$ $x(x - 16) = 0$ per la legge di annullamento del prodotto vuol dire che uno dei due fattori è =0 allora avremo o x=0 o x-16=0 da cui le due soluzioni

X=0 e x=16

1. $9x^2 - 18x = 0$
2. $20x^2 + 400x = 0$
3. $13x^2 - 26x = 0$
4. $\frac{1}{2}x^2 + 3x = 0$

5. $-\frac{4}{5}x^2 - \frac{8}{3}x = 0$

6. $\frac{7}{3}x^2 - 14x = 0$

7. $\frac{43}{23}x^2 - x = 0$

8. $-\frac{9}{5}x^2 + \frac{2}{3}x = 0$

9. $4(x-1) - 3x^2 = (x-2)(x+2) + 5x$ $[0, \frac{1}{4}]$

10. $(x+2)^2 - 5x + 2 = 3(2-x)$ $[0,4]$

11. $(x+5)^2 - (x-1)(2x+1) = 13(x+2)$ $[0,-3]$

12. $5(x-2) + (x+1)(3x-3) = 2(x-2)^2 - 21$ $[0,3]$

13. $[x - 4(1-x) + 2](x-1) = 2(1-2x) - x$ $[0, \frac{2}{5}]$

14. $(x+1)(x-2)(x-3) - (x-1)(x+2)(x-3) = 0$ $[0,3]$

15. $-\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{8}x = 0$

16. $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}x = 0$

Esercizi: Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado complete

Risolvi l'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$

Essendo questa equazione completa dovremo applicare la formula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ dove

a=1; b=-5; c=6 quindi

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

1. $x^2 - x + 1 = 0$

2. $3x^2 - 2x + 8 = 0$

3. $x^2 - 8x + 18 = 0$

4. $2x^2 + 6x + 4 = 0$ $[-1,-2]$

5. $2x^2 + 5x - 12 = 0$ $[\frac{3}{2}, -4]$

6. $6x^2 - 17x + 5 = 0$ $[\frac{5}{2}, \frac{1}{3}]$

7. $6x^2 + 4x - 32 = 0$ $[2, -\frac{8}{3}]$

8. $32x^2 - 20x + 3 = 0$ $[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}]$

9. $10x^2 + 11x + 3 = 0$ $[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}]$

10. $2x^2 - x - 28 = 0$ $[4, -\frac{7}{2}]$

11. $8x^2 - 10x - 3 = 0$ $[\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}]$

12. $5x^2 - 13x + 6 = 0$ $[2, \frac{3}{5}]$

13. $6x(4 - x) - 30 = x(7 - 4x)$ $[1, \frac{15}{2}]$

14. $4x^2 - 4x(x + 2) + (x + 2)^2 = 0$ $[2]$

15. $\frac{x}{2}(x - 2) - 3(x - 3) - 1 = 0$ $[4]$

16. $4x^2 = 2(x - 1)(x + 3) + x(x + 3)$ $[6,1]$

17. $\frac{x^2 + 4x}{6} + 35 = \frac{9x + 36}{2}$ $[17,6]$

18. $(2x - 3)(2x + 1) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ $[\frac{13}{6}, -\frac{1}{2}]$

Sistemi lineari

Consideriamo una equazione di primo grado a due incognite x ed y.

3x-4y=2

Se pensiamo di attribuire in essa all'incognita y il valore 1 si ottiene la sola equazione in incognita x

3x-4=2

Ossia 3x=6

Che ammette soluzione x=2

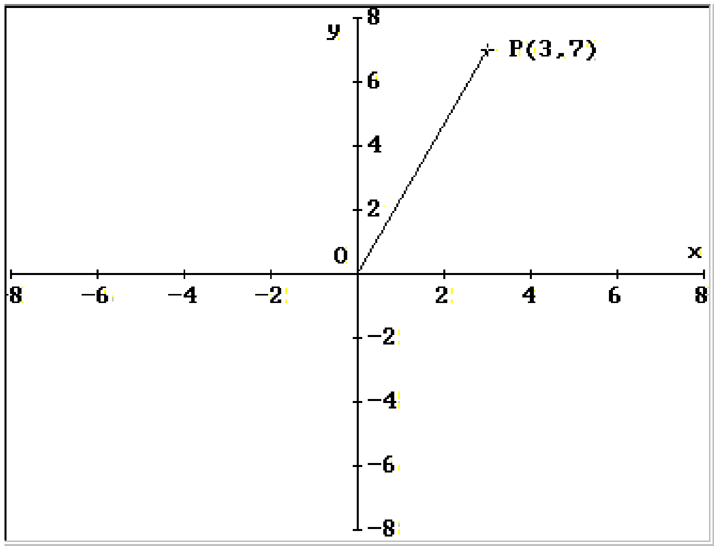
La coppia di valori y=1 e x=2 costituisce una soluzione dell'equazione.

Fissando per la y un altro valore si otterra per la x un valore diverso da 2 che sarà comunque soluzione dell'equazione di partenza.

Possiamo dire che l'equazione di primo grado in due incognite assume infinite coppie di valori che sono soluzione.

In particolare se scriviamo l'equazione generica di primo grado a due incognite nella forma y=ax+b è possibile trovare una relazione tra equazioni e punti su un ***piano cartesiano*** (Su un piano viene definito un sistema di riferimento costituito da una coppia di rette ortogonali fra loro dette asse delle ***ascisse*** (normalmente orizzontale e si indica con x) e asse delle ***ordinate*** (di solito verticale e indicato con y) sui quali viene definita una unità di misura.

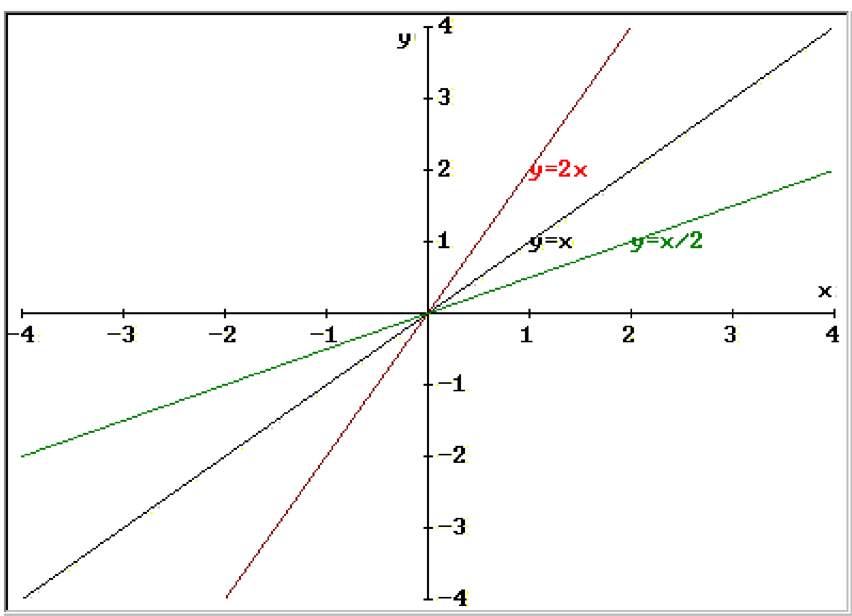
Ogni punto P sul piano è individuato univocamente sul piano cartesiano da una coppia di numeri detti ***coordinate*** del punto P. Ad esempio il punto P(3,7) determina un punto che dista 3 unità dall'asse verticale e 7 unità dall'asse orizzontale (v. figura)



Il punto di incontro degli assi cartesiani viene chiamato ***origine*** e ha coordinate P(0,0).

La relazione algebrica y=ax+b definisce una retta sul piano cartesiano; il termine a viene chiamato ***coefficiente angolare*** della retta, mentre il termine b esprime la distanza del punto di incontro della retta con l'asse y dall'asse orizzontale.

Il significato del coefficiente angolare può essere chiarificato dalla seguente figura che mostra il grafico delle tre rette: y=x, y=2x, y=x/2; si può osservare che, maggiore è l'entità del coefficiente angolare maggiore sarà l'inclinazione della retta rispetto l'asse x.



Un insieme di 2 equazioni in cui compaiano le stesse due incognite (ad es. x e y) soddisfatte contemporaneamente dagli stessi valori è un ***sistema di equazioni*** a 2 incognite; i due valori che soddisfano entrambe le equazioni sono le *soluzioni* del sistema. Tale definizione può essere generalizzata al caso in cui le equazioni e le incognite siano n (n qualsiasi): in tal caso parliamo di *sistema di n equazioni a n incognite*.

Il metodo più semplice di risoluzione è quello di *sostituzione* che consiste nel risolvere una delle due equazioni rispetto una delle incognite e sostituire l'espressione ottenuta al posto della stessa incognita nell'altra equazione. Ad es., dato il sistema

$$\begin{cases} y + 1 = 2x \\ y - 2 = 3x \end{cases}$$

possiamo scrivere la prima equazione come y=2x-1 e sostituire l'espressione a destra del segno = al posto della y nella seconda equazione ottenendo, così,

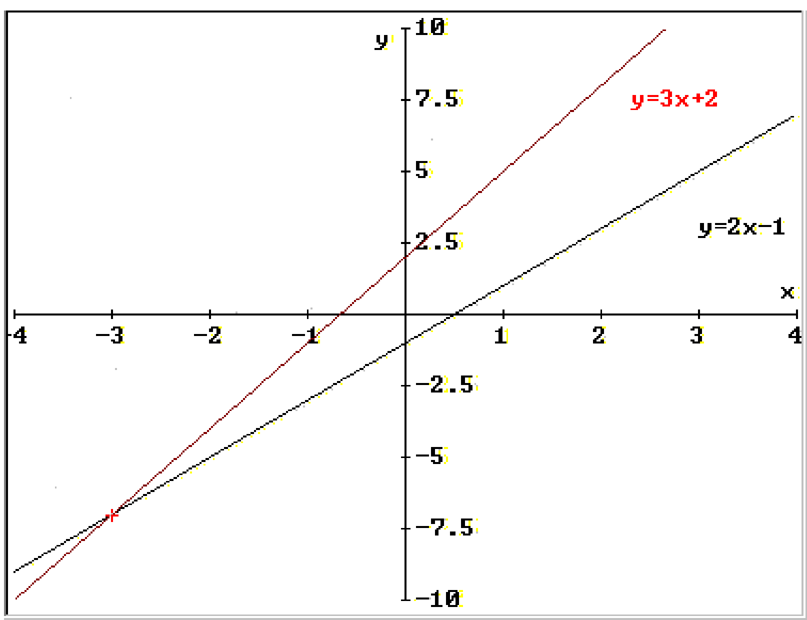
$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ (2x - 1) - 2 = 3x \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x - 3x = 1 + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x - 1 \\ - x = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

la y si trova sostituendo la x trovata precedentemente nell’altra equazione

$$\begin{cases} y = 2 \cdot (-3) - 1 = -6 - 1 = -7 \\ x = -3 \end{cases}$$

Quindi la coppia di valori trovati, e cioè x=-3 e y=-7 sono la soluzione del sistema cioè la soluzione contemporanea di tutte e due le equazioni.

I sistemi di equazioni hanno un preciso significato geometrico; innanzitutto, le due equazioni determinano altrettante rette (v. figura): le soluzioni del sistema sono le coordinate del punto in cui si incontrano (come ci si può rendere conto osservando la figura).



Esercizi

Sistemi di 2 equazioni con 2 incognite

1. $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + 2y = -17 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x + y = -8 \\ -2x + y = 10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x + 1 = 4y \\ 6x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{4x - y}{6} + \frac{x}{4} = 1 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2y - \frac{3(x + 3)}{2} = -5 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + 2y = 2(2x - y + 5) \\ 2 - 3x = y - 1 + 2(x + 6) \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x - 5 = 2(y + 1) - 8 \\ 2(x - 1) = 3(1 - 2y) + 9 \end{cases}$

13. $\begin{cases} -[x - 3(y - 1)] + 2x = 3 \\ 2(3x - y) + 3(1 - x) = -12 \end{cases}$

14. $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 9y = \frac{1}{15}x - \frac{1}{3}y - \frac{4}{9} \\ \frac{x}{3} + \frac{8}{5} = 5\left(1 - \frac{y}{25}\right) \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2 + y - xy = x^2 + 2x + (4 - x)(x + y) \\ xy + \frac{2}{15} = (1 + y)(x - 1) + \frac{3}{5} \end{cases}$