SUCCESSIONI DI FUNZIONI

Sia dato un qualunque intervallo (a,b) e sia data una legge h che ad ogni numero naturale n associa una ed una sola funzione f_n definita in (a,b). Si definisce così una **successione di funzioni** (f_n). Come per le successioni numeriche cerchiamo di introdurre il concetto di successione convergente: fissiamo ad arbitrio x_0 in (a,b) e consideriamo la successione numerica $(f_n(x_0))$; possiamo allora studiare tale successione numerica cercando di determinarne il carattere, in particolare studiandone la possibile convergenza ad un numero reale. Se tale successione converge diciamo che (f_n) **converge in** x_0. Ripetiamo quindi tale procedimento per ogni punto x_0 fissato in (a,b). Supponiamo adesso che l'insieme

$$A = \{x_0 \in (a,b) \quad \text{tali che la successione numerica} \quad (f_n(x_0)) \quad \text{converga}\}$$

sia non vuoto; diremo allora che la successione di funzioni (f_n) **converge puntualmente (o semplicemente) in** A. Se l'insieme A è non vuoto è possibile definire una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, detta **funzione limite** con la legge: "ad ogni $x_0 \in A$ tale f associa il valore del limite della successione numerica $(f_n(x_0))$"; diremo allora che (f_n) **converge puntualmente in** A **ad** f.

In simboli si ha

$$f(x) = \lim_n f_n(x) \qquad \forall x \in A$$

che per definizione di limite significa

$$\forall x \in A \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{tale} \quad \text{che} \quad \forall n > \nu \quad \text{risulta} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \tag{1}$$

La precedente relazione (1) mette in evidenza che l'indice ν della definizione di limite puntuale dipende sia dal punto x scelto in A che dall'ϵ considerato.

Come per le successioni numeriche possiamo enunciare il seguente

Criterio di Cauchy per la convergenza puntuale. *Sia (f_n) una successione di funzioni definite tutte in uno stesso insieme A. Condizione necessaria e sufficiente perché (f_n) converga puntualmente in $B \subset A$ è che*

$$\forall x \in B \quad \text{e} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{tale} \quad \text{che} \quad \forall n, m > \nu \quad \text{risulti} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Illustriamo adesso con qualche esempio i concetti sopra introdotti.

Esempio 1. Sia $f_n(x) = x^n$ con $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Sappiamo già che la successione geometrica (x^n) converge se e solo se $x \in]-1,1]$, che quindi è l'insieme A in cui la successione di funzioni data converge puntualmente;

inoltre, poiché $\lim_n x^n = 0$ se $x \in]-1,1[$, mentre $\lim_n x^n = 1$ per $x = 1$, la funzione limite è la funzione definita dalla legge

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in]-1,1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Cerchiamo adesso attraverso l'applicazione della (1) di mettere in evidenza la dipendenza di ν sia dal punto x scelto in $]-1,1[$ che dall'ϵ considerato. Per semplicità di calcolo supponiamo di studiare la convergenza solo in $]0,1[$; fissato $x \in]0,1[$ ed $\epsilon > 0$, consideriamo la disuguaglianza $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ che nel nostro caso si scrive

$$|x^n - 0| = x^n < \epsilon \tag{2}$$

Osserviamo intanto che se $\epsilon \geq 1$ la precedente disuguaglianza è banalmente verificata per ogni $n \in N$, perché $x \in]0,1[$; quindi consideriamo $\epsilon < 1$; per ricavare n dalla (2) consideriamo i logaritmi di ambo i membri, ottenendo così

$$\log x^n < \log\epsilon \Leftrightarrow n\log x < \log\epsilon \Leftrightarrow n > \frac{\log\epsilon}{\log x} \tag{3}$$

Poiché sia x che ϵ sono minori di 1, la frazione che compare nella (3) è un numero positivo; sarà allora sufficiente prendere come ν un numero intero maggiore di $\frac{\log\epsilon}{\log x}$; è allora chiaro che ν dipende sia dal punto x scelto in $]-1,1[$ che dall'ϵ considerato; ma possiamo osservare di più: se (tenendo fermo ϵ) facciamo tendere x ad 1, la frazione $\frac{\log\epsilon}{\log x}$ tenderà a $+\infty$ e quindi ν stesso dovrà tendere a $+\infty$; ciò significa che in questo caso **non è possibile determinare ν tale che se $n > \nu$ la (2) è verificata per ogni** $x \in]0,1[$.

Esempio 2. Sia $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ con $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Sia $x = 0$; allora si ha $f_n(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $f_n(0) \to 0$. Sia adesso $x \neq 0$; si ha facilmente $\lim_n f_n(x) = \lim_n \frac{x}{1+nx^2} = 0$, cosicché la successione considerata converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x) = 0$. Cerchiamo adesso di applicare la (1), in modo da determinare ν una volta fissati $x \in \mathbb{R}$ ed $\epsilon > 0$; occorre risolvere la disuguaglianza

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{1+nx^2}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{|x|}{1+nx^2} < \epsilon$$

Se $x = 0$ tale disuguaglianza è senz'altro vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia allora $x \neq 0$; risulta

$$|x| < \epsilon(1+nx^2) \Leftrightarrow \frac{|x| - \epsilon}{x^2\epsilon} < n \tag{4}$$

sarà allora sufficiente prendere come ν un numero intero maggiore di $\frac{|x|-\epsilon}{x^2\epsilon}$. La disuguaglianza (4) ancora una volta mette in luce la dipendenza di ν sia dal punto x scelto in $\mathbb{R}$ che dall'ϵ considerato; tuttavia, in questo caso, la dipendenza di ν da $x \in \mathbb{R}$ è solo apparente, come il seguente ragionamento mostra: una volta fissato ϵ, la funzione $g(x) = \frac{|x|-\epsilon}{x^2\epsilon}$ definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è superiormente limitata come proveremo; essa è una funzione pari (cioé tale che $g(x) = g(-x)$) e può quindi essere studiata solo per $x > 0$ (il che permette di eliminare il valore assoluto); calcolandone la derivata per $x > 0$ si ha

$$g'(x) = \frac{\epsilon x^2 - (x-\epsilon)2\epsilon x}{\epsilon^2 x^4} = \frac{\epsilon x(-x+2\epsilon)}{\epsilon^2 x^4} \qquad \forall x > 0$$

risulta così

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2\epsilon$$

Quindi il punto $x = 2\epsilon$ risulta un punto di massimo assoluto per g in $x > 0$; poiché, come già osservato, g è una funzione pari essa risulta superiormente limitata in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dal numero $g(2\epsilon) = \frac{1}{2\epsilon^2}$. Quanto osservato permette allora di affermare che, in questo caso, **è possibile scegliere un indice ν dipendente solo dall'ϵ fissato e non dal punto x scelto in $\mathbb{R}$ per il quale la (1) è verificata.** Ovviamente sarà sufficiente scegliere ν maggiore di $g(2\epsilon) = \frac{1}{2\epsilon^2}$.

L'ultimo Esempio 2 mette in luce un nuovo fenomeno: per certe successioni di funzioni convergenti puntualmente è possibile determinare un indice ν dipendente **solo** dall'ϵ fissato e **non** dal punto x scelto in $\mathbb{R}$ per il quale la (1) è verificata. Si ha allora un nuovo tipo di convergenza, evidentemente più forte della convergenza puntuale, che chiameremo **convergenza uniforme** (si noti che la successione dell'Esempio 1 non può convergere uniformemente in $]0,1[$). Diremo quindi che **una successione di funzioni (f_n) converge uniformemente ad una funzione f in un certo insieme** A se accadono i seguenti due fatti:

1) (f_n) converge puntualmente ad f in A

2) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad$ tale che $\quad \forall n > \nu \quad$ risulta $\quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in A \qquad (5)$

La condizione (5) mette in luce la **non dipendenza** di ν dal punto $x \in A$, ferma restando l'ovvia dipendenza di ν da ϵ.

Innanzitutto, enunciamo il seguente

Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme. *Sia (f_n) una successione di funzioni definite tutte in uno stesso insieme A. Condizione necessaria e sufficiente perché (f_n) converga uniformemente in $B \subset A$ è che*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall n, m > \nu \quad \text{risulti} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \quad \forall x \in B.$$

Un'altra (semplice, ma) utile condizione caratteristica per la convergenza uniforme è data dal seguente

Teorema 1. *Sia (f_n) una successione di funzioni tutte definite su un arbitrario intervallo (a,b) a valori in $\mathbb{R}$. Supponiamo che tale successione converga puntualmente in (a,b) ad una funzione f. Condizione necessaria e sufficiente perché (f_n) converga uniformemente ad f è che valgano le due condizioni seguenti:*

a) esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per $n > \nu$, le funzioni $|f_n - f|$ risultino limitate in (a,b)

b) $\lim_n \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in (a,b)\} = 0$

Dimostrazione. Dimostriamo la condizione necessaria. Le ipotesi sono allora: *sia (f_n) una successione di funzioni tutte definite su (a,b) a valori in $\mathbb{R}$. Supponiamo che tale successione converga puntualmente in (a,b) ad una funzione f. Inoltre (f_n) converga uniformemente ad f.*

Per definizione di convergenza uniforme si ha

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall n > \nu \quad \text{risulta} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in (a,b)$$

il che significa che per $n > \nu$ le funzioni $|f_n - f|$ risultano limitate in (a,b) da ϵ; quindi la condizione (a) è verificata. La (b) può allora essere provata osservando che dalla definizione di convergenza uniforme segue che ϵ è un maggiorante per l'insieme $\{|f_n(x) - f(x)| : x \in (a,b)\}$ per ogni $n > \nu$; quindi, per la definizione di estremo superiore si ha

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in (a,b)\} \leq \epsilon \quad \forall n > \nu$$

L'ultima disuguaglianza equivale alla tesi, cioé

$$\lim_n \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in (a,b)\} = 0$$

Dimostriamo la condizione sufficiente. Le ipotesi sono allora: *sia (f_n) una successione di funzioni tutte definite in (a,b) a valori in $\mathbb{R}$. Supponiamo che tale successione converga puntualmente in (a,b) ad una funzione f. Inoltre valgano la (a) e la (b).*

Osserviamo preliminarmente che l'ipotesi (a) serve a dare senso all'ipotesi (b), nella quale si considera l'estremo superiore di certi insiemi che, almeno definitivamente, sono superiormente limitati grazie alla (a).

Occorre provare che (f_n) converge uniformemente ad f. L'ipotesi

$$\lim_n \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in (a,b)\} = 0$$

significa che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall n > \nu \quad \text{risulta} \quad \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in (a,b)\} < \epsilon$$

Poiché, per la prima proprietà dell'estremo superiore si ha

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in (a,b)\} < \epsilon \quad \forall x \in (a,b), n > \nu$$

otteniamo la tesi.■

Osservazione. Le condizioni (1) e (2) del Teorema 1 sono senz'altro verificate se è possibile determinare una successione numerica infinitesima (a_n) tale che $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni $x \in (a,b)$. Tale osservazione è spesso utilizzata, quando non è semplice determinare l'estremo superiore di $|f_n - f|$. Poiché la convergenza uniforme è più forte della convergenza puntuale ha alcune conseguenze importanti sulla natura della funzione limite della successione e sul comportamento della stessa successione, che non possono essere determinate dalla convergenza semplice, come i seguenti Teoremi e controesempi mostrano.

Teorema 2 (o dello scambio dei limiti). *Sia (f_n) una successione di funzioni tutte definite in un arbitrario intervallo (a,b), convergente in (a,b) uniformemente ad una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in (a,b)$. Se, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = l_n \in \mathbb{R}$, allora la successione numerica (l_n) converge ad un certo $l \in \mathbb{R}$ e si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.*

Dimostrazione. Dal Criterio di Cauchy segue che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n, m > \nu$ risulta $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ per ogni $x \in (a,b)$. Si ha così

$$|l_n - l_m| \leq |l_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - l_m| <$$

$$|l_n - f_n(x)| + \frac{\epsilon}{3} + |f_m(x) - l_m| \qquad \forall n, m > \nu, \, \forall x \in (a,b) \tag{6}$$

Poiché $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = l_n, \lim_{x \to x_0} f_m(x) = l_m$, in corrispondenza all'$\epsilon$ fissato esiste $\delta > 0$ tale che $x \in (a,b), |x - x_0| < \delta, x \neq x_0$, implicano che $|f_n(x) - l_n| < \frac{\epsilon}{3}, |f_m(x) - l_m| < \frac{\epsilon}{3}$. Dalla (6), scritta per $x \in (a,b), |x - x_0| < \delta, x \neq x_0$, segue allora che

$$|l_n - l_m| < \epsilon \qquad \forall n, m > \nu.$$

La successione (l_n) verifica quindi il Criterio di Convergenza di Cauchy ed è pertanto convergente in $\mathbb{R}$ ad un certo $l \in \mathbb{R}$. Proviamo adesso che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. Dalla convergenza uniforme di (f_n) ad f in (a,b) e dalla convergenza di (l_n) ad l segue che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > \nu$ risulta $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ per ogni $x \in (a,b)$ ed anche $|l_n - l| < \frac{\epsilon}{3}$. Si ha così

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l| <$$

$$\frac{2\epsilon}{3} + |f_n(x) - l_n| \qquad \forall n > \nu,\ \forall x \in (a,b) \tag{7}.$$

Poiché $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = l_n$, in corrispondenza all'$\epsilon$ fissato esiste $\delta > 0$ tale che $x \in (a,b), |x - x_0| < \delta, x \neq x_0$, implicano che $|f_n(x) - l_n| < \frac{\epsilon}{3}$. Dalla (7), scritta per $x \in (a,b), |x - x_0| < \delta, x \neq x_0$, segue allora che

$$|f(x) - l| < \epsilon \qquad \forall x \in (a,b), |x - x_0| < \delta. \blacksquare$$

Il precedente risultato ha il seguente utile corollario

Corollario 3.*Sia (f_n) una successione di funzioni continue definite in un intervallo (a,b), convergente uniformemente ad una funzione f. Allora f è continua. Se, invece, (f_n) converge puntualmente ad una funzione f non continua, allora non può aversi convergenza uniforme.*

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che la continuità di ogni f_n implica che $l_n = \lim_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; d'altra parte $l = \lim_n l_n = \lim_n f_n(x_0) = f(x_0)$ da cui, per la tesi del precedente risultato, segue che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, che è la richiesta continuità di f. Poiché la rimanente parte della tesi è immediata, la dimostrazione è conclusa.$\blacksquare$

L'Esempio 1 (con $x \in [0,1]$) mostra, grazie al Corollario 3, che l'ipotesi di convergenza uniforme nel Teorema 2 (o nella prima parte del Corollario 3) non può essere tolta. Lo stesso esempio, con $x \in [0,1[$, dimostra che, pur senza convergenza uniforme, può aversi la continuità della funzione limite di una successione di funzioni continue; quanto detto prova che se eliminiamo l'ipotesi di uniforme convergenza dal Teorema 2 (o dal suo Corollario 3) tutto può accadere, riguardo alla continuità della funzione limite.

Teorema 4 (o di integrazione per successioni).*Sia (f_n) una successione di funzioni definite in un intervallo $[a,b]$ ivi integrabili secondo Riemann. Se (f_n) converge uniformemente ad una funzione f in $[a,b]$, allora anche f è integrabile secondo Riemann. Inoltre vale la seguente formula di "passaggio al limite sotto il segno di integrale"*

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la formula di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Fissato $\epsilon > 0$, sappiamo che esiste $\nu \in N$ tale che se $n > \nu$ risulta $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ per ogni $x \in (a,b)$; otteniamo così per $n > \nu$

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]dx \right| \leq$$
$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} dx = \epsilon$$

da cui la tesi.■

Corollario 5. *Sia (f_n) una successione di funzioni integrabili secondo Riemann definite in un intervallo $[a,b]$, convergente puntualmente ad una funzione f non integrabile secondo Riemann. Allora non può aversi convergenza uniforme.*

Corollario 6. *Sia (f_n) una successione di funzioni integrabili secondo Riemann definite in un intervallo $[a,b]$, convergente puntualmente ad una funzione f integrabile secondo Riemann. Se il passaggio al limite sotto il segno di integrale non è lecito, allora non può aversi convergenza uniforme.*

Esempio 3. Consideriamo la seguente successione di funzioni $(f_n)_{n\geq 2}$ definite nell'intervallo $[0,1]$ ponendo

$$f_n = \begin{cases} 4n^2 x & x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right] \\ 4n^2\left(\frac{1}{n} - x\right) & x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Il grafico di f_n è, per ogni $n \geq 2$, la spezzata unione del segmento di estremi i punti del piano $O = (0,0)$ e $A = (\frac{1}{2n}, 2n)$, del segmento di estremi i punti $A = (\frac{1}{2n}, 2n)$ e $B = (\frac{1}{n}, 0)$ e del segmento di estremi i punti $B = (\frac{1}{n}, 0)$ e $C = (1,0)$.

Osserviamo, allora, che ogni f_n vale zero per $x = 0$ e per $x \in [\frac{1}{n}, 1]$. Poiché $f_n(0) = 0$ per ogni $n \in N$ si ha $f_n(0) \to 0$. Sia ora $x \neq 0$; poiché la successione $\frac{1}{n}$ tende a zero per $n \to \infty$, per n abbastanza grande l'x scelto si troverà nell'intervallo $[\frac{1}{n}, 1]$ dove la corrispondente f_n vale zero; ne viene che la successione numerica $(f_n(x))$ è una successione definitivamente costante con termine generale definitivamente uguale a zero e quindi converge a zero. Allora la successione costruita converge puntualmente alla funzione $f(x) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$. È facile vedere che tutte le funzioni, così come la funzione limite, sono continue (e quindi integrabili secondo Riemann). Proviamo ora che per tale successione non è lecito il passaggio al limite sotto il segno di integrale; questo proverà che non è possibile eliminare l'ipotesi di uniforme convergenza nel Teorema 4. È facile vedere che

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \qquad \forall n \geq 2$$

mentre risulta

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

perché f è identicamente nulla.

Osserviamo, anche, che la successione geometrica studiata nell'Esempio 1, quando considerata nell'intervallo $[0,1]$, è un esempio di successione non convergente uniformemente, ma per la quale è lecito il passaggio al limite sotto il segno di integrale, come si prova con facili calcoli; ciò prova (assieme a quanto visto nell'Esempio 3), che se eliminiamo l'ipotesi di uniforme convergenza dal Teorema 4 tutto può accadere, riguardo alla liceità del passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Infine enunciamo soltanto un importante risultato che riguarda la derivabilità della funzione limite di una successione uniformemente convergente di funzioni derivabili

Teorema 7 (o di derivazione per successioni). *Sia (f_n) una successione di funzioni derivabili definite in un intervallo limitato (a,b), convergente in almeno un punto $x_0 \in (a,b)$. Supponiamo che $(f'_n(x))$ sia uniformemente convergente in (a,b) ad una funzione g. Allora (f_n) converge uniformemente ad una funzione $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, f risulta derivabile e si ha $f' = g$.*

I precedenti teoremi sono solo delle condizioni necessarie per la convergenza uniforme di una successione di funzioni; adesso presentiamo una importante condizione sufficiente per la convergenza uniforme di una successione di funzioni

Teorema del Dini. *Sia (f_n) una successione di funzioni continue tutte definite in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ a valori in $\mathbb{R}$. Supponiamo che tale successione sia crescente (risp. decrescente), cioé tale che $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ (risp. $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$) per ogni $x \in [a,b], n \in \mathbb{N}$, e che essa converga puntualmente ad una funzione continua $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. Allora (f_n) converge uniformemente ad f.*

Osserviamo che la successione di funzioni considerata nell'Esempio 1 è una successione decrescente di funzioni continue che converge puntualmente ad una funzione continua in $]0,1[$; ma come provato la convergenza non è uniforme. Questo significa che nel Teorema del Dini non è possibile eliminare l'ipotesi *"$[a,b]$ sia chiuso"*.

Vediamo, infine, altri esempi di studio di successioni

Esempio 4. Consideriamo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(t) = \frac{t^3}{1+n^2t^2} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Intanto, si ha $f_n(0) = 0 \to 0$; se $t \neq 0$, si ha anche $f_n(t) \to 0$. Quindi la successione data converge puntualmente alla funzione identicamente nulla su tutto $\mathbb{R}$. Poiché è chiaro che ogni $f_n - f = f_n$ non è limitata, il Teorema 1 permette di concludere che non vi può essere convergenza uniforme.

Esempio 5. Consideriamo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(t) = \frac{n^2t^2}{1+n^2t} \qquad t \in [0, +\infty[$$

Intanto, si ha $f_n(0) = 0 \to 0$; se $t \neq 0$, si ha $f_n(t) \to t$. Quindi $f_n \to f(t) = t$ puntualmente. Si ha

$$f_n(t) - f(t) = \frac{n^2t^2}{1+n^2t} - t = \frac{n^2t^2 - t - n^2t^2}{1+n^2t} = \frac{-t}{1+n^2t} \qquad t \in [0, +\infty[$$

Calcolando la derivata di $f_n - f$ otteniamo

$$D(f_n - f) = \frac{-(1+n^2t) + tn^2}{(1+n^2t)^2} = \frac{-1}{(1+n^2t)^2} < 0 \qquad \forall t \in [0, +\infty[$$

Quindi

$$\inf(f_n - f) = \lim_{t \to +\infty} \frac{-t}{1+n^2t} = \frac{-1}{n^2}, \sup(f_n - f) = (f_n - f)(0) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora $f_n - f$ è limitata per ogni $n \in \mathbb{N}$ e risulta

$$\sup\{|f_n(t) - f(t)| : t \in [0, +\infty[\} = \frac{1}{n^2} \to 0$$

il che equivale alla convergenza uniforme (Teorema 1).

Esercizio. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione

$$f_n(t) = \log \frac{nt^2}{1+nt} \qquad t \in [1, +\infty[$$

Esempio 6. Consideriamo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \frac{x^4}{1+n^2x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

che è una successione di funzioni continue. Osserviamo che si ha $f_n(0) = 0 \to 0$; se $x \neq 0$, si ha anche $f_n(x) = \frac{x^4}{1+n^2x^2} \to 0$. Quindi la successione data converge puntualmente alla funzione identicamente nulla su tutto $\mathbb{R}$, che è quindi continua. Poiché è chiaro che ogni $f_n - f = f_n$ non è limitata, il Teorema 1 permette di concludere che non vi può essere convergenza uniforme. Inoltre si osserva facilmente che la successione considerata è decrescente; ne segue che nel Teorema del Dini non è possibile levare l'ipotesi *"$[a, b]$ sia limitato"*.

Esempio 7. Consideriamo la successione di funzioni seguente

$$f_n(x) = \frac{1}{2n}\log(1 + nx^2) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Per $x = 0$ risulta $f_n(0) = 0$ e quindi $f_n(0) \to 0$; inoltre, per $x \neq 0$, risulta facilmente $\lim_n f_n(x) = \lim_n \frac{1}{2n}\log(1+nx^2) = 0$; quindi essa converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione f identicamente nulla. Poiché è chiaro che ogni $f_n - f = f_n$ non è limitata, il Teorema 1 permette di concludere che non vi può essere convergenza uniforme. Consideriamo adesso la successione delle derivate (f_n'); si ha facilmente

$$f_n'(x) = \frac{x}{1 + nx^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

successione che abbiamo già studiato nell'Esempio 2; sappiamo che essa converge uniformemente ad $f'(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Questo esempio mostra che l'ipotesi *"(a,b) sia limitato"* non può essere tolta nel Teorema 7.

SERIE DI FUNZIONI

Sia data una successione di funzioni (f_n) tutte definite in uno stesso intervallo (a, b) a valori reali. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + ... + f_n + ...$$

che è quindi una **serie di funzioni**; come per le serie numeriche consideriamo la successione delle somme parziali associata a tale serie, cioé la successione (s_k) dove $s_k = \sum_{n=1}^{k} f_n$; diremo che la serie data **converge puntualmente (risp. uniformemente) ad una funzione f, detta somma, in un insieme $A \subset (a, b)$ se (s_k) converge puntualmente (risp. uniformemente) ad f in A.** I Teoremi studiati relativi alle successioni di funzioni si traducono allora immediatamente nei seguenti risultati

Criterio di Cauchy per la convergenza semplice. *Sia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie di funzioni definite tutte in uno stesso insieme A. Condizione necessaria e sufficiente perché $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converga puntualmente in $B \subset A$ è che*

$$\forall x \in B \quad \text{e} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{tale} \quad \text{che} \quad \forall n > \nu, \forall p \in \mathbb{N} \quad \text{risulti}$$

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + ... + f_{n+p}(x)| < \epsilon.$$

Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme. *Sia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie di funzioni definite tutte in uno stesso insieme A. Condizione necessaria e sufficiente perché $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converga uniformemente in $B \subset A$ è che*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{tale} \quad \text{che} \quad \forall n > \nu, \forall p \in \mathbb{N} \quad \text{risulti}$$

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + ... + f_{n+p}(x)| < \epsilon \qquad \forall x \in B.$$

Teorema 8 (o dello scambio dei limiti). *Sia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie di funzioni definite tutte in uno stesso intervallo (a, b). Sia $x_0 \in (a, b)$ tale che esista $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = l_n \in \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente in (a, b) con somma una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ converge e, detta l la sua somma, si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. In particolare, se ogni f_n è continua anche f lo è.*

Teorema 9 (o di integrazione per serie). *Sia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una successione di funzioni integrabili secondo Riemann in un intervallo $[a, b]$, ivi convergente uniformemente con somma una funzione f. Allora f è integrabile secondo Riemann e si ha la seguente formula di "integrazione per serie"*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Teorema 10 (o di derivazione per serie). *Sia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una successione di funzioni derivabili definite in un intervallo limitato (a, b), convergente in almeno un punto $x_0 \in (a, b)$. Supponiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ sia uniformemente convergente in (a, b) ad una funzione g. Allora $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente ad una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, f risulta derivabile e si ha $f' = g$.*

Per quanto riguarda le serie di funzioni esistono anche altri tipi di convergenza. Diremo che una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge assolutamente** in $A \subset (a, b)$ se la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ converge puntualmente in $A \subset (a, b)$; è ovvio che la convergenza assoluta implica quella puntuale, come già noto dall'Analisi I. Diremo, poi, che una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge totalmente** in $A \subset (a, b)$ se accadono i seguenti due fatti:

1) ogni funzione $|f_n|$ è limitata in A

2) la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \sup\{|f_n(x)| : x \in A\}$ converge.

Osservazione. È immediato verificare che una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente in A se e solo se esiste una serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convergente tale che $|f_n(x)| \leq M_n$ per ogni $x \in A$ ed $n \in \mathbb{N}$. Tale osservazione è spesso utilizzata, quando non è semplice determinare l'estremo superiore delle funzioni elementi della serie.

Si ha il seguente Teorema

Teorema 11. *Se una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente in $A \subset (a,b)$, allora essa converge assolutamente ed anche uniformemente in A.*

Dimostrazione. Per ipotesi la serie data converge totalmente, quindi dal Criterio di Cauchy per le serie numeriche si ha che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{tale} \quad \text{che} \quad \forall n > \nu, \forall p \in \mathbb{N} \quad \text{risulta}$$

$$\sup|f_{n+1}(x)| + \sup|f_{n+2}(x)| + ... + \sup|f_{n+p}(x)| < \epsilon.$$

Per note proprietà del valore assoluto si ha anche che

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + ... + f_{n+p}(x)| \leq$$

$$|f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + ... + |f_{n+p}(x)| \leq$$

$$\sup|f_{n+1}(x)| + \sup|f_{n+2}(x)| + ... + \sup|f_{n+p}(x)| \qquad \forall x \in A.$$

Tutto quanto detto finora implica facilmente la tesi, grazie ai vari Criteri di Cauchy relativi ai vari tipi di convergenza delle serie.■

Proviamo invece con un semplice esempio che il viceversa di tale Teorema è falso, facendo quindi vedere che esistono serie di funzioni che convergono uniformemente, ma non totalmente.

Esempio 8. Consideriamo la successione di funzioni (ognuna costante in $\mathbb{R}$) definite ponendo $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ si riduce quindi alla serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge grazie al Criterio di Leibnitz per le serie a segni alterni; poiché ogni funzione è costante si ha in effetti la convergenza uniforme della serie data, in tutto $\mathbb{R}$. Tuttavia, la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup\{|f_n(x)| : x \in R\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge, perché essa è la serie armonica.

Ovviamente esistono esempi più sofisticati del precedente che provano che una serie di funzioni può convergere uniformemente, senza convergere totalmente; uno di essi sarà presentato in seguito (Esempio 11).

Esempio 9. Presentiamo adesso un esempio particolarmente interessante di studio di serie di funzioni.

Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n} \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

determinarne l'insieme di convergenza puntuale e studiarne la convergenza uniforme e totale. Quindi trovare la funzione somma.

Innanzitutto, osserviamo che fissato $x_0 \in \mathbb{R}$ la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx_0}}{n}$ è una serie a termini positivi; possiamo allora tentarne lo studio con il Criterio del Rapporto; si ha così

$$\lim_{n} \frac{\frac{e^{-(n+1)x_0}}{n+1}}{\frac{e^{-nx_0}}{n}} = \lim_{n} \frac{n}{n+1} e^{-nx_0} = e^{-nx_0}$$

Poiché $e^{-nx_0} < 1 \Leftrightarrow x_0 > 0, e^{-nx_0} > 1 \Leftrightarrow x_0 < 0$ si conclude che la serie data converge sicuramente per $x_0 > 0$, mentre non converge per $x_0 < 0$. Nel caso di $x_0 = 0$, il precedente criterio non è utile; tuttavia, risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx_0}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Quindi *la serie data converge se e solo se $x > 0$.* Nello stesso insieme non vi può essere convergenze uniforme; supponiamo, per assurdo, che la serie converga uniformemente in $]0, +\infty[$ ad una funzione f; applicando il Teorema 8 avremmo che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\lim_{x \to 0} \frac{e^{-nx}}{n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

dovrebbe convergere; ma come sappiamo dall'Analisi I, ciò non è possibile. Se invece consideriamo un insieme del tipo $[a, +\infty[, a > 0$, in esso abbiamo la convergenza totale (e quindi quella uniforme); infatti le funzioni $\frac{e^{-nx}}{n}$ sono decrescenti e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\max \left\{ \frac{e^{-nx}}{n} : x \in [a, +\infty[\right\} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-na}}{n} < +\infty$$

poiché a appartiene all'insieme di convergenza puntuale della serie data.

Da quanto detto segue allora che *la serie data converge uniformemente in un insieme $Y \subset]0, +\infty[$ se e solo se $\inf Y > 0$.*

Vediamo, ora, come è possibile calcolare la somma della serie. Facciamo ricorso alla serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} -e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} -(e^{-x})^n$$

che essendo una serie geometrica, con ragione e^{-x}, può essere studiata facilmente. Tale serie converge se e solo se $x \in]0, +\infty[$ e la sua funzione somma è la funzione

$$h(x) = -e^{-x}\frac{1}{1-e^{-x}} = -\frac{e^{-x}e^{x}}{e^{x}-1} = \frac{-1}{e^{x}-1}$$

Cerchiamo, adesso, tramite una integrazione per serie di risalire alla funzione somma della serie iniziale; occorre però garantire la convergenza uniforme della serie delle derivate nell'intervallo in cui si vuole applicare tale procedimento. Prendiamo $0 < x_1 < x_2$ ed osserviamo che la decrescenza delle funzioni e^{-x} in $]0, +\infty[$ permette di garantire la convergenza totale della serie $\sum_{n=1}^{\infty} -e^{-nx}$ in ogni intervallo del tipo $[a, +\infty[$; infatti si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\max\{|-e^{-nx}| : x \in [a, +\infty[\}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-na} < +\infty$$

poiché a appartiene all'insieme di convergenza puntuale della serie.

Ne segue che, qualunque sia la scelta di x_1, x_2, nell'intervallo $[x_1, x_2]$ possiamo effettuare l'integrazione per serie ottenendo così

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_1}^{x_2} -e^{-nx}dx = \int_{x_1}^{x_2}\frac{-1}{e^{x}-1}dx$$

da cui segue

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{e^{-nx_2}}{n} - \frac{e^{-nx_1}}{n}\right] = \int_{x_1}^{x_2}\frac{-1}{e^{x}-1}dx \tag{8}$$

Calcoliamo adesso una primitiva della funzione $\frac{-1}{e^{x}-1}$ attraverso il calcolo dell'integrale indefinito

$$\int \frac{-1}{e^{x}-1}dx$$

Effettuando la sostituzione $y = e^{x}$ siamo ricondotti al calcolo del seguente integrale indefinito

$$\int \frac{-1}{(y-1)y}dy$$

cioé di una semplice funzione razionale fratta; cerchiamo due costanti A, B tali che

$$\frac{A}{y-1} + \frac{B}{y} = \frac{-1}{(y-1)y}$$

È facile vedere che deve essere $A = -1, B = 1$; ne segue che

$$\int \frac{-1}{(y-1)y}dy = \int \left[\frac{-1}{y-1} + \frac{1}{y}\right] dx$$

Allora la primitiva cercata è la funzione

$$[\log y - \log(y-1)]_{y=e^x} = \log\frac{e^x}{e^x - 1}$$

Ritornando alla (8) otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{e^{-nx_2}}{n} - \frac{e^{-nx_1}}{n}\right] = \log\frac{e^{x_2}}{e^{x_2}-1} - \log\frac{e^{x_1}}{e^{x_1}-1}$$

Poiché le due serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx_2}}{n}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx_1}}{n}$ risultano convergenti per la scelta di x_1, x_2, la precedente uguaglianza può anche scriversi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx_2}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx_1}}{n} = \log\frac{e^{x_2}}{e^{x_2}-1} - \log\frac{e^{x_1}}{e^{x_1}-1} \tag{9}$$

Osserviamo adesso che

$$\lim_{x_2\to+\infty}\log\frac{e^{x_2}}{e^{x_2}-1} = 0$$

Inoltre, poiché $x_2 \in [x_1, +\infty[$ intervallo dove si ha convergenza totale della serie di partenza, è possibile effettuare il seguente scambio di limiti (Teorema 8)

$$\lim_{x_2\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx_2}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x_2\to+\infty}\frac{e^{-nx_2}}{n}$$

Poiché si ha $\lim_{x_2\to+\infty}\frac{e^{-nx_2}}{n} = 0$ otteniamo facilmente

$$\lim_{x_2\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx_2}}{n} = 0$$

Per quanto detto, se passiamo al limite nella (9) per $x_2 \to +\infty$, otteniamo

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx_1}}{n} = -\log\frac{e^{x_1}}{e^{x_1}-1} \qquad \forall x_1 \in]0, +\infty[$$

Ricaviamo così che la funzione somma della serie data è la funzione

$$f(x) = \log\frac{e^x}{e^x - 1} \qquad \forall x \in]0, +\infty[$$

Osservazione (relativa all'Esempio 9). Una volta provato che la serie delle derivate converge uniformemente in ogni $Y \subset]0, +\infty[$ con $\inf Y > 0$ e sapendo che la serie data converge in almeno un punto, avremmo potuto applicare il Teorema di derivazione per serie; infatti, (con le stesse notazioni usate sopra) tale Teorema garantisce che

$$f'(x) = h(x) \tag{10}$$

in ogni intervallo limitato contenuto in $]0, +\infty[$ e quindi per ogni $x \in]0, +\infty[$. Dalla (10), scelti due punti $0 < x_1 < x_2$, grazie al Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale possiamo scrivere allora che

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} h(x)dx$$

e quindi, conoscendo h, ricavare il valore della differenza $f(x_2) - f(x_1)$; se avessimo conosciuto il valore di f in almeno un punto avremmo potuto scegliere questo come punto x_1 o x_2, lasciando l'altro libero di variare in $]0, +\infty[$, ottenendo così l'espressione esplicita di f. Purtroppo, in questo caso, non conosciamo alcun valore della f e dobbiamo quindi procedere come fatto nell'Esempio 9.

Esempio 10. Un caso piuttosto semplice, ma che serve bene per chiarire quanto osservato prima, in cui è possibile applicare l'osservazione fatta relativamente all'Esempio 9 è il seguente: si consideri la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ che, come è facile vedere, converge in $[-1, 1[$; in particolare, in $x = 0$ la sua funzione somma f vale zero. La serie delle derivate è $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ che converge in $]-1, 1[$ alla funzione $h(x) = \frac{1}{1-x}$. Inoltre essa converge totalmente in ogni intervallo del tipo $[-h, h], h > 0$, contenuto in $]-1, 1[$. Dal Teorema di Derivazione per Serie segue poi che, per $x \in]-1, 1[$ si ha $f'(x) = h(x)$; quindi, come osservato sopra abbiamo

$$f(x) - f(0) = \int_0^x h(x)dx = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = [-\log(1-t)]_0^x = -\log(1-x)$$

Poiché $f(0) = 0$ come già osservato, abbiamo allora

$$f(x) = -\log(1-x) \qquad\qquad \forall x \in]-1, 1[$$

Adesso introduciamo, una famiglia molto importante di serie di funzioni, le cosiddette **serie di potenze**. Chiameremo serie di potenze una serie di funzioni del tipo

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y - y_0)^n$$

essendo $a_0 \in \mathbb{R}, a_n \in \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed essendo $y_0 \in \mathbb{R}$ un punto arbitrario (detto punto iniziale o centro). Poiché con la semplice posizione $x = y - y_0$ possiamo ricondurci al caso di $y_0 = 0$, d'ora in poi considereremo solo serie di potenze del tipo

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{11}$$

Ogni serie di potenze converge sicuramente nel punto $x = 0$ poiché in esso la serie si riduce al solo termine a_0. Consideriamo adesso il seguente insieme numerico

$$H = \{h \geq 0 \quad \text{tali che la serie (11) converga in} \quad h\}$$

che risulta un insieme non vuoto, poiché $0 \in H$; ha allora senso considerare il suo estremo superiore $r = \sup H$ che sarà quindi o un numero reale maggiore od uguale a zero (dal momento che $0 \in H$) oppure $+\infty$. Tale r si chiama **raggio di convergenza** della serie; il motivo di tale denominazione è spiegato dal successivo Teorema 13 alla cui dimostrazione occorre premettere il seguente

Lemma 12. *Data la serie di potenze (11), se essa converge in un punto $x^* \neq 0$, allora essa converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x| < |x^*|$*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che se la serie numerica $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^*)^n$ converge, il suo termine generale $a_n(x^*)^n$ tende a zero e quindi tale successione risulta limitata; esiste quindi $M > 0$ tale che $|a_n(x^*)^n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Adesso effettuiamo, per $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x| < |x^*|$, i seguenti calcoli

$$|a_n x^n| = \left| a_n (x^*)^n \frac{x^n}{(x^*)^n} \right| = |a_n (x^*)^n| \left| \frac{x^n}{(x^*)^n} \right| \leq M \left| \left(\frac{x}{x^*} \right)^n \right| \tag{12}$$

La (12) prova che la serie dei valori assoluti della serie (11) è maggiorata dalla serie

$$|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} M \left| \left(\frac{x}{x^*} \right)^n \right|$$

che è (definitivamente) una serie geometrica di ragione $\left| \frac{x}{x^*} \right|$ che per ipotesi è un numero minore di 1 e quindi è una serie convergente; ne viene che la serie (11) converge assolutamente nel punto x scelto come nella tesi.■

Teorema 13. *Data la serie di potenze (11) e detto r il suo raggio di convergenza, si hanno i seguenti fatti:*

a) se $r = 0$, la serie converge solo per $x = 0$

b) se $0 < r < +\infty$, la serie converge assolutamente per $x \in]-r, r[$ e non converge per $x \in (]-\infty, -r[\cup]r, +\infty[)$, mentre nulla può dirsi del comportamento della serie nei due punti $-r$ ed r. L'intervallo $]-r, r[$ si chiama <u>intervallo di convergenza</u> ed in ogni suo sottoinsieme chiuso e limitato la serie converge totalmente

c) se $r = +\infty$, la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed in ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ chiuso e limitato la serie converge totalmente.

Dimostrazione. La (a) della tesi è immediata dalla definizione di raggio di convergenza.

Sia ora vera la condizione (b) e sia $x \in]-r, r[$; ne segue che $|x| < r$. Per la definizione di estremo superiore ho che esiste $h_1 > 0$ tale che $h_1 \in H$ ed anche $|x| < h_1 < r$. Abbiamo quindi che la serie data converge in h_1 ed inoltre $|x| < h_1$; quindi per il Lemma 12 si ha convergenza assoluta in x. Inoltre, se per un certo $x^* \in (]-\infty, -r[\cup]r, +\infty[)$ vi fosse convergenza, per il Lemma 12 dovremmo avere convergenza in

ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x| < |x^*|$; poiché $|x^*| > r$, potremmo scegliere un $x \notin]-r,r[$, con $|x| < |x^*|$, in cui si ha convergenza. Avremmo così trovato un elemento di H, esattamente $|x|$, più grande dell'estremo superiore di H stesso, contro la definizione di estremo superiore. Per quanto riguarda il comportamento di una serie di potenze agli estremi del proprio intervallo di convergenza rinviamo all'Esempio 12 successivo.
Sia adesso K un sottoinsieme chiuso e limitato dell'intervallo di convergenza della serie e proviamo che in K si ha convergenza totale. A tal fine sia $[\alpha, \beta]$ un intervallo chiuso e limitato contenente K e contenuto nell'intervallo di convergenza della serie data. Osserviamo che si ha $|x| \leq \max(|\alpha|, |\beta|) = h_0 < r$ e quindi, per quanto già provato, convergenza assoluta in h_0; ma si ha anche

$$|a_n x^n| = |a_n||x|^n \leq |a_n| h_0^n$$

cosicché possiamo affermare che la serie dei valori assoluti della nostra serie è maggiorata dalla serie numerica convergente $|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| h_0^n$. Ne segue quindi la convergenza totale.
Infine per provare (c), osserviamo che se $\sup H = +\infty$, fissato un qualunque $x \in \mathbb{R}$ il numero $|x|$ non può essere maggiorante di H, dal momento che H non ha maggioranti; quindi esiste $h \in H$ tale che $|x| < h$. Il Lemma 12 permette di concludere la dimostrazione.■

Si ha anche il seguente importante Teorema (che non dimostriamo) relativo alla convergenza di una serie di potenze agli estremi dell'intervallo di convergenza

Teorema di Abel. *Sia $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze di raggio di convergenza $r \in]0, +\infty[$. Allora*
1) la serie converge totalmente in $[-r, b[$ (risp. $]a, r]$) con $b \in]-r, r[$ (risp. $a \in]-r, r[$) se e solo se converge assolutamente in $-r$ (risp. r)
2) la serie converge uniformemente in $[-r, b[$ (risp. $]a, r]$) con $b \in]-r, r[$ (risp. $a \in]-r, r[$) se e solo se converge in $-r$ (risp. r).

Esempio 11. Consideriamo la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ con $x \in [-1, 0]$; usando il Criterio del rapporto per le serie numeriche si vede facilmente che essa converge in $]-1, 0]$; inoltre, converge per $x = -1$ grazie al Criterio di Leibnitz; mentre non converge se $x < -1$. Il Teorema di Abel permette di concludere che in $[-1, 0]$ si ha convergenza, uniforme ma non totale. Abbiamo così un altro esempio di serie di funzioni convergente uniformemente, ma non totalmente, come annunciato dopo l'Esempio 8.
I precedenti risultati mettono in evidenza l'importanza di determinare l'estremo superiore dell'insieme H, cioé il raggio di convergenza della serie di potenze (11); a tal fine sono molto utili i due criteri seguenti

Teorema 14. *Sia data la serie (11). Supponiamo che valga almeno una delle condizioni seguenti:*

i) esista $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = l$ *con* $l \in [0, +\infty[$ *oppure* $l = +\infty$

ii) ogni a_n *sia positivo ed esista* $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ *con* $l \in [0, +\infty[$ *oppure* $l = +\infty$.

Allora si ha la seguente tesi

j) se $l = 0$ *si ha* $r = +\infty$

jj) se $l = +\infty$ *si ha* $r = 0$

jjj) se $l \in]0, +\infty[$ *si ha* $r = \frac{1}{l}$.

Dimostrazione. Diamo la dimostrazione solo nel caso della radice n-esima, poiché nell'altro è del tutto analoga. Sia $l = 0$; allora, applicando il Criterio della radice alla serie $|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$, ricaviamo che $\lim_n \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_n |x| \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; quindi la serie (11) converge assolutamente e quindi semplicemente in tutto $\mathbb{R}$. Sia $l = +\infty$; allora, applicando il Criterio della radice alla serie $|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$, ricaviamo che $\lim_n \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_n |x| \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$; quindi, la serie (11) non converge assolutamente in alcun $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$; se essa convergesse puntualmente in qualche punto diverso da zero, per il Lemma 12 dovrebbe convergere assolutamente in qualche altro punto diverso da zero, fatto che, come appena osservato, non è possibile; quindi $r = 0$. Infine, sia $l \in]0, +\infty[$; applicando ancora il Criterio della radice alla serie $|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$, ricaviamo che $\lim_n \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_n |x| \sqrt[n]{|a_n|} = l|x|$; se, adesso, $l|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{l}$ si ha convergenza (assoluta) della serie (11), mentre se $l|x| > 1 \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{l}$ non può aversi convergenza assoluta della serie (11); se, essa convergesse puntualmente in qualche punto $x^* \notin \left]-\frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right[$, per il Lemma 12 dovrebbe convergere assolutamente in qualche altro punto con valore assoluto maggiore di $\frac{1}{l}$, fatto che, come appena osservato, non è possibile; quindi $r = \frac{1}{l}$.■

Esempio 12. Consideriamo le tre serie di potenze seguenti

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

per le quali è facile vedere, grazie al Teorema 14, che $r = 1$; la prima di esse non converge in nessuno dei due estremi dell'intervallo di convergenza; la seconda converge per $x = -1$ grazie al Criterio di Leibnitz per le serie a termini di segno alterno, mentre non converge per $x = 1$, punto nel quale ogni funzione vale $\frac{1}{n}$, cosicché essa per $x = 1$ si riduce alla serie armonica; infine la terza serie converge sia per $x = -1$ che per $x = 1$, addirittura assolutamente; infatti la serie dei valori assoluti (per $x = -1$ o $x = 1$) è la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che come sappiamo è una serie convergente.

Le serie di potenze hanno anche altre proprietà molto buone

Teorema 15.*Sia data la serie (11). Se consideriamo la serie delle funzioni derivate delle funzioni della serie (11), cioé la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{13}$$

(nella quale, per $n = 1$ e $x = 0$, si pone $0^0 = 1$) otteniamo ancora una serie di potenze. Si ha allora che le due serie (11) e (13) hanno lo stesso raggio di convergenza, mentre agli estremi dell'intervallo di convergenza possono avere comportamento differente. Inoltre, la funzione somma g della serie (13) è la funzione derivata della funzione somma f della serie (11).

Dimostrazione. Supponiamo, innanzitutto, che la serie (13) abbia raggio di convergenza $r_2 \in]0, +\infty[$; sia quindi $x_0 \in] - r_2, r_2[$; si ha

$$|a_n x_0^n| = \left| n a_n x_0^{n-1} \frac{x_0}{n} \right| \leq |n a_n x_0^{n-1}| \qquad \text{per } n \text{ sufficientemente grande}$$

dal momento che, definitivamente, si ha $\left|\frac{x_0}{n}\right| \leq 1$; quindi, in x_0 converge anche la serie (11); il suo raggio di convergenza, che denotiamo con r_1, è allora non inferiore ad r_2. Supponiamo che $r_1 > r_2$ e sia $x_0 \in]r_2, r_1[$; se, adesso, $x_1 \in]x_0, r_1[$ si ha

$$|n a_n x_0^{n-1}| = |a_n x_1^n| \left| \frac{n}{x_1} \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{n-1} \right| \leq M \left| \frac{n}{x_1} \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{n-1} \right|$$

poiché la convergenza della serie (11) in x_1 implica che $|a_n x_1^n|$ è superiormente limitata; poiché la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{n}{x_1} \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{n-1} \right|$ converge, come si vede facilmente applicando, per esempio, il Criterio del rapporto, otteniamo che la serie (13) deve convergere in x_1 che si trova fuori dalla chiusura dell'intervallo di convergenza della stessa serie di potenze. La contraddizione ottenuta conclude la dimostrazione in questo caso. Poiché con procedimento analogo si prova che il raggio di convergenza della serie (11) è 0 (risp. $+\infty$) se e solo se quello della serie (13) è 0 (risp. $+\infty$), il Teorema è completamente provato.■

L'ultima affermazione del Teorema 15 equivale a dire che $f' = g$, uguaglianza che può anche essere usata, una volta conosciuta la g, per risalire alla f attraverso una semplice integrazione (infatti si ha $\int_0^x g(t)dt = f(x)$ per ogni $x \in] - r, r[$; si veda la precedente Osservazione relativa all'Esempio 9 ed il successivo Esempio 10). Inoltre, poiché come già osservato, la serie (13) è ancora una serie di potenze ad essa può essere applicato ancora il Teorema 15 ottenendo così che la funzione f somma della serie (11) è dotata di derivata seconda in $] - r, r[$ la quale sarà la funzione somma della serie delle derivate seconde delle funzioni della serie (11). Procedendo in questo modo otteniamo che la funzione somma f della serie (11) è dotata di derivate di tutti gli ordini in $]-r,r[$; diremo, allora, che f è una funzione di classe C^∞ in $]-r,r[$ (in simboli $f \in C^\infty(]-r,r[)$); inoltre, la derivata di ordine k della funzione somma della (11) è la funzione somma della serie delle derivate di ordine k delle funzioni della serie (11), per ogni $k \in \mathbb{N}$. Da quanto detto segue che $f(x_0) = a_0$ e $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, come lo studente può facilmente provare.

Supponiamo adesso che f sia una funzione di classe C^∞ in un certo intervallo $]-r,r[$; ci chiediamo se è possibile trovare una serie di potenze (11) di cui f sia la funzione somma, almeno in un sottointervallo di $]-r,r[$. Si può dimostrare che la risposta a questa domanda è in generale negativa. Tuttavia in molti importanti casi è possibile dare una risposta positiva alla domanda precedente, come segue. Innanzitutto, osserviamo che essendo f di classe C^∞ possiamo scrivere la seguente serie di potenze, detta **Serie di Taylor** associata alla f

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots\dots\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots\dots\dots\dots \qquad (14)$$

dove x_0 si chiama punto iniziale; se $x_0 = 0$ la serie viene detta di Mac Laurin.

Denotiamo con $r > 0$ il raggio di convergenza di tale serie di potenze. Diremo che f **è sviluppabile in serie di Taylor (o di MacLaurin)** se la serie (14) risulta convergente in $]x_0 - r, x_0 + r[$ e la sua somma è proprio la funzione f. Il seguente risultato è una importante condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di Taylor (o di Mac Laurin)

Teorema 16. *Sia $f \in C^\infty(]x_0 - r, x_0 + r[)$. Supponiamo che valga una delle due condizioni seguenti:*
i) esista $M > 0$ tale che $|f^{(n)}(x)| \leq \frac{Mn!}{r^n}$ per ogni $n \in N, x \in]x_0 - r, x_0 + r[$
ii) esista $H > 0$ tale che $|f^{(n)}(x)| \leq H$ per ogni $n \in N, x \in]x_0 - r, x_0 + r[$.
Allora f é sviluppabile in serie di Taylor (o di Mac Laurin) in $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Una importante conseguenza di quanto visto finora per le serie di potenze è che se una funzione f è somma di una serie di potenze, tale serie di potenze è unica e che se una funzione f è somma di una serie di potenze essa è anche sviluppabile in serie di Taylor (o di Mac Laurin);ne segue che possiamo senz'altro affermare che se una funzione f è somma di una serie di potenze, tale serie è la serie di Taylor (o di Mac Laurin) della funzione stessa.

Il Teorema 16 può essere applicato alle funzioni $e^x, \cos x, \sin x$ per trovare i seguenti sviluppi in serie di Mac Laurin:

1) $f(x) = e^x$; poiché per ogni derivata di f si ha $f^{(k)}(x) = e^x$, abbiamo che la serie di Mac Laurin (**serie esponenziale**) associata ad f è la seguente

$$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots\dots\dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots\dots\dots$$

in ogni intervallo del tipo $]-\delta, \delta[$ tali derivate sono tutte limitate da e^δ e quindi la f considerata è sviluppabile in serie di Mac Laurin in ogni intervallo $]-\delta, \delta[$ e quindi in tutto l'insieme $\mathbb{R}$.

2) $f(x) = \cos x$; poiché le derivate della f considerata sono le seguenti

$$f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \sin x, f'^{\mathrm{v}}(x) = \cos x, \dots\dots.$$

abbiamo che la serie di Mac Laurin associata ad f è la seguente

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots\dots.$$

in ogni intervallo del tipo $]-\delta, \delta[$ tali derivate sono tutte limitate da 1 e quindi la f considerata è sviluppabile in serie di Mac Laurin in ogni intervallo $]-\delta, \delta[$ e quindi in tutto l'insieme $\mathbb{R}$.

3) $f(x) = \sin x$; poiché le derivate della f considerata sono le seguenti

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, f'^{\mathrm{v}}(x) = \sin x, \dots\dots.$$

abbiamo che la serie di Mac Laurin associata ad f è la seguente

$$\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots\dots.$$

in ogni intervallo del tipo $]-\delta, \delta[$ tali derivate sono tutte limitate da 1 e quindi la f considerata è sviluppabile in serie di Mac Laurin in ogni intervallo $]-\delta, \delta[$ e quindi in tutto l'insieme $\mathbb{R}$.

Calcoliamo ora lo sviluppo in serie di Mac Laurin di altre funzioni seguendo un differente procedimento (già utilizzato in precedenza; dove?) che sfrutta alcuni dei Teoremi enunciati per le serie di funzioni

4) $f(x) = \mathrm{arctg}x$; per sviluppare tale funzione non è conveniente usare il Teorema 16 che richiede il calcolo di tutte le derivate della f che in questo caso non è semplice (non è agevole trovare una formula di ricorrenza); possiamo invece procedere osservando che $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ che può essere pensata come somma di una serie geometrica di ragione $-x^2$; infatti, se $|-x^2| < 1$, cioé se $|x| < 1$, risulta

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$$

Attraverso una integrazione per serie possiamo poi risalire allo sviluppo seguente di $f(x) = \text{arctg}x$ valido per $x \in]-1, 1[$

$$\text{arctg}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{15}$$

La serie a secondo membro ha come raggio di convergenza $r = 1$, ma essa converge anche per $x = 1$ poiché in tale punto diventa una serie a segni alterni a cui si può applicare facilmente il Criterio di Leibnitz; analogamente essa converge per $x = -1$, sempre grazie al Criterio di Leibnitz. Quindi detta g la funzione somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ definita in $[-1, 1]$, tale serie converge uniformemente a g per il Teorema di Abel; ne segue che g è continua in $[-1, 1]$; poiché in $]-1, 1[$ la funzione g coincide con $\text{arctg}x$ che è anch'essa una funzione continua si ha $g(-1) = \text{arctg}(-1), g(1) = \text{arctg}1$. Quindi la (15) è vera in $[-1, 1]$. Avendosi poi $g(1) = \frac{\pi}{4}$ otteniamo

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \Leftrightarrow \pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{2n+1}$$

Poiché la serie a secondo membro è una serie a segni alterni, che come è facile vedere verifica le ipotesi del Criterio di Leibnitz, dalla tesi dello stesso criterio segue che

$$\left| \pi - \sum_{n=0}^{k} \frac{4(-1)^n}{2n+1} \right| \leq \frac{4}{2(k+1)+1} \quad \forall k \in N$$

disuguaglianza che permette di calcolare un valore approssimato di π fissando a priori il grado di approssimazione; per esempio, se si chiede di calcolare π a meno di $\frac{1}{10^{100}}$ è sufficiente trovare un $k \in N$ tale che $\frac{4}{2(k+1)+1} \leq \frac{1}{10^{100}}$, il che accade, come è facile vedere, per $k \geq \frac{4 \times 10^{100} - 3}{2}$. Lasciamo allo studente il compito di provare che l'intervallo $[-1, 1]$ è il più ampio intervallo in cui la funzione $\text{arctg}x$ è sviluppabile in serie di Mac Laurin.

5) $f(x) = \log(1 - x)$; possiamo procedere come nell'esempio precedente considerando la derivata della f e sviluppando questa in serie geometrica di ragione $x \in]-1, 1[$; otteniamo così

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

da cui segue, per integrazione,

$$-\log(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

valida in $]-1, 1[$; poiché la serie a secondo membro converge anche per $x = -1$, ma non per $x = 1$, come nell'esempio precedente otteniamo che la ultima uguaglianza vale in $[-1, 1[$ (che è l'intervallo più ampio in cui la funzione data è sviluppabile in serie di Mac Laurin). In particolare, per $x = -1$ si ricava

$$-\log 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Attraverso la tesi del Criterio di Leibnitz, come fatto nel precedente esempio, si può trovare una maggiorazione dell'errore che si commette sostituendo al valore log2 un termine della successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

6) $f(x) = (1+x)^\alpha$; in questo caso si può provare che si ha il seguente sviluppo in serie di Mac Laurin (**serie binomiale**)

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \forall x \in]-1, 1[$$

essendo

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n+1)}{n!}$$

7) $f(x) = \arcsin x$; possiamo sviluppare la funzione derivata $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ in serie di Mac Laurin attraverso la serie binomiale con x sostituito da $-x^2$ ed $\alpha = -\frac{1}{2}$ ottenendo così

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n} \quad \forall x \in]-1, 1[$$

da cui con la solita integrazione segue

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x \in]-1, 1[$$

SERIE DI FOURIER

Sia data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π. Esempi di funzioni di questo tipo sono le funzioni trigonometriche elementari; altri esempi possono essere costruiti prolungando una funzione definita in $[-\pi, \pi[$ a tutto $\mathbb{R}$, in modo da essere periodica, con il procedimento che illustriamo nel seguente esempio.

Esempio 13. Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ con $x \in [-\pi, \pi[$ il cui grafico è il seguente

Se consideriamo gli intervalli $[-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$ con $k \in \mathbb{Z}$ abbiamo che

$$\mathbb{R} = \cup_{k \in \mathbb{Z}} [-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$$

con gli intervalli a due a due disgiunti; possiamo quindi definire una $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in modo che il grafico di F si ottenga per traslazione di ampiezza 2π da quello di f ponendo

$$F(x) = (x - 2k\pi)^2 \qquad \forall x \in [-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$$

La funzione così ottenuta è periodica di periodo 2π ed il suo grafico è il seguente

Diremo che f **è sviluppabile in serie di Fourier** in $X \subset \mathbb{R}$ se accade che

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \forall x \in X \tag{16}$$

essendo a_n, b_n i seguenti numeri reali

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \quad \forall n = 0, 1, 2...; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \quad \forall n = 1, 2...$$

La serie a secondo membro della (16) si chiama **serie di Fourier** associata alla funzione f. Osserviamo preliminarmente che se f è una funzione pari, allora $f(x)\cos nx$ è funzione pari ed $f(x)\sin nx$ è funzione dispari, cosicché, dalla simmetria dell'intervallo $[-\pi, \pi[$ rispetto all'origine, segue che

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx \quad \forall n = 0, 1, 2...;$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = 0 \quad \forall n = 1, 2...$$

Se invece f è una funzione dispari, allora $f(x)\cos nx$ è funzione dispari ed $f(x)\sin nx$ è funzione pari, cosicché, dalla simmetria dell'intervallo $[-\pi, \pi[$ rispetto all'origine, segue che

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2...;$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx \quad \forall n = 1, 2...$$

Come per tutte le serie di funzioni può accadere che essa converga in certi punti oppure non converga in alcun punto di $\mathbb{R}$; una volta provato che essa converge in certi punti, ci si pone il problema di vedere se la sua somma è uguale al valore che la f (che ha originato la serie) assume negli stessi punti; solo in caso di risposta positiva a questa duplice questione possiamo dire che f **è sviluppabile in serie di Fourier** in quei punti; è noto che una f come sopra detto può non essere sviluppabile in serie di Fourier, poiché può accadere che la serie non converga oppure, pur convergendo, non abbia per somma il valore di f nel punto considerato. Siamo quindi interessati a condizioni sufficienti che garantiscano non solo la convergenza della serie di Fourier associata ad una certa f, ma anche la convergenza al valore che f assume nei punti in cui la serie converge.

I seguenti risultati forniscono condizioni sufficienti piuttosto generali per la sviluppabilità in serie di Fourier

Teorema 17. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π che risulti anche continua a tratti in $[-\pi, \pi[$, cioé continua in $[-\pi, \pi[$ tranne al più un numero finito di punti $x_1, ...x_n$ nei quali esistono finiti i limiti destro e sinistro, che denoteremo con $f(x_i+)$ e $f(x_i-)$, rispettivamente. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia o derivabile in x_0 oppure (se non derivabile in x_0) sia continua in x_0 ed ivi possegga derivate destra e sinistra. Allora la serie di Fourier associata alla f converge in x_0 al numero $f(x_0)$.*

Teorema 18. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π che risulti anche continua a tratti in $[-\pi, \pi[$. Inoltre supponiamo che $[-\pi, \pi]$ possa essere diviso in un numero finito di intervalli in ognuno dei quali f sia monotòna. Allora la serie di Fourier associata alla f converge in ogni $x \in R$ al numero $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$. In particolare, nei punti in cui f è continua, la serie di Fourier converge ad $f(x)$.*

Osserviamo, anche, che nel caso in cui le due serie numeriche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ siano assolutamente convergenti, la serie di Fourier (16) converge totalmente, e quindi anche uniformemente, come si può provare facilmente; allora la sua funzione somma ha tutte quelle buone proprietà che tali tipi di convergenza comportano, secondo i Teoremi enunciati per le serie di funzioni; tuttavia, anche se non si ha la convergenza uniforme, per le serie di Fourier è sempre lecita la integrazione per serie come il seguente risultato, che non dimostriamo, prova

Teorema 19. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π che risulti anche continua a tratti in $[-\pi, \pi[$. Per ogni coppia di punti $x, x_0 \in [-\pi, \pi[$ risulta*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)dt$$

con la serie a secondo membro che converge uniformemente.

Infine notiamo che se abbiamo una f periodica di periodo diverso da 2π possiamo sempre tentare di svilupparla in serie di Fourier operando un cambiamento di variabile del tipo $y = ax$ che la trasformi in una funzione periodica di periodo 2π e cercando di sviluppare la nuova funzione in serie di Fourier, come il seguente esempio prova

Esempio 14. Sia

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1[\\ 1 & x \in [1,2[\\ 3-x & x \in [2,3[\end{cases}$$

Innanzitutto prolunghiamo f a tutto $\mathbb{R}$ in modo da ottenere una funzione periodica di periodo 3, come visto all'inizio di questo paragrafo sulle serie di Fourier, ottenendo così una funzione F avente il grafico seguente

Consideriamo adesso la restrizione della funzione F all'intervallo $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}[$ che ha la seguente legge di definizione

$$F(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-\frac{3}{2}, -1[\\ |x| & x \in [-1,1[\\ 1 & x \in [1, \frac{3}{2}[\end{cases}$$

Effettuiamo un cambiamento di variabile del tipo $y = ax$ che trasformi l'intervallo $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}[$ in $[-\pi, \pi[$; ovviamente a dovrà essere tale che ad $x = -\frac{3}{2}$ corrisponde $y = -\pi$; quindi si ha $-\pi = a(-\frac{3}{2})$ da cui segue $a = \frac{2\pi}{3}$. Con questo cambiamento di variabile otteniamo la seguente espressione analitica per la restrizione di G a $[-\pi, \pi[$

$$G(y) = F\left(\frac{3y}{2\pi}\right) = \begin{cases} 1 & y \in [-\pi, -\frac{2\pi}{3}[\\ |\frac{3y}{2\pi}| & y \in [-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[\\ 1 & y \in [\frac{2\pi}{3}, \pi[\end{cases}$$

La funzione G è periodica di periodo 2π, è continua in $\mathbb{R}$ e l'intervallo $[-\pi, \pi[$ può essere diviso in tre intervalli in ognuno dei quali G è monotòna. Allora la serie di Fourier associata alla G converge in $\mathbb{R}$ ed ha per somma $G(x)$. Andiamo adesso a calcolare i coefficienti della serie di Fourier di G; osserviamo che G è una funzione pari; quindi come già osservato $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, mentre

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} G(y)dy = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left|\frac{3y}{2\pi}\right| dy + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} dy\right] =$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{3y^2}{4\pi}\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} + \left[\pi - \frac{2\pi}{3}\right] = \frac{4}{3}$$

e, se $n \neq 0$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} G(y)\cos ny dy = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left|\frac{3y}{2\pi}\right| \cos ny dy + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \cos ny dy\right] =$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{3}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} y\cos ny dy + \left[\frac{\sin ny}{n}\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\right] =$$
$$\frac{2}{\pi}\left\{\frac{3}{2\pi}\left[y\frac{\sin ny}{n}\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} - \frac{3}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin ny}{n}dy - \frac{\sin\frac{2n\pi}{3}}{n}\right\} =$$
$$\frac{2}{\pi}\left\{\frac{3}{2\pi}\frac{2\pi}{3}\frac{\sin\frac{2n\pi}{3}}{n} - \frac{3}{2\pi}\left[-\frac{\cos ny}{n^2}\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} - \frac{\sin\frac{2n\pi}{3}}{n}\right\} =$$
$$\frac{3}{\pi^2 n^2}\left[\cos\frac{2n\pi}{3} - 1\right]$$

Otteniamo così

$$G(y) = \frac{4}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{\pi^2 n^2}\left[\cos\frac{2n\pi}{3} - 1\right]\cos ny \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Infine, per ottenere il richiesto sviluppo del prolungamento F della funzione f originaria è sufficiente sostituire nello sviluppo ottenuto per la G al posto di y la quantità $\frac{2\pi}{3}x$; ne segue che

$$F(x) = \frac{4}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{\pi^2 n^2}\left[\cos\frac{2n\pi}{3} - 1\right]\cos\left(\frac{2n\pi}{3}x\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

CENNI SULLA TEORIA DEGLI SPAZI METRICI

Sia S un insieme arbitrario. Supponiamo che esista una funzione $d : S \times S \to R$ verificante le proprietá seguenti

M1) $d(x,y) \geq 0 \qquad \forall x,y \in S$

M2) $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$

M3) $d(x,y) = d(y,x) \qquad \forall x,y \in S$

M4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \qquad \forall x,y,z \in S$

Una funzione siffatta si chiamerá <u>metrica o distanza</u>, mentre la coppia (S,d) sará detta <u>spazio metrico</u>.

La proprietá M4 si chiama proprietá triangolare della metrica.

Esempi.

1) Sia S arbitrario; poniamo

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

é facile vedere che valgono le proprietá M1,M2,M3,M4.

2) Consideriamo R e poniamo $d(x,y) = |x-y|$ per ogni $x,y \in R$; che d sia una metrica é immediato da verificare grazie alle proprietá del valore assoluto.

3) Consideriamo R^n e poniamo (metrica euclidea)

$$d(\overline{x},\overline{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

per ogni $\overline{x},\overline{y}$ di coordinate $(x_1, x_2, ...x_n)$ e $(y_1, y_2, ...y_n)$, rispettivamente. Solo la proprietá M4 necessita di una verifica essendo le altre immediate. Per fare ció occorre prima provare la seguente **disuguaglianza di Cauchy-Schwartz**

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

per ogni $a_1, a_2....a_n, b_1, b_2....b_n \in R$. La precedente disuguaglianza é banalmente verificata se $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$ perché ció equivale a dire che tutti gli a_i sono uguali a 0. Se invece $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$ consideriamo la seguente catena di disuguaglianze

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\lambda^2 a_i^2 + 2\lambda a_i b_i + b_i^2\right] =$$
$$\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

che é valida per ogni $\lambda \in R$; dalla teoria delle disequazioni di secondo grado sappiamo allora che deve essere

$$\Delta = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0$$

da cui segue facilmente la tesi. Utilizzando adesso questa disuguaglianza proviamo la condizione M4:

$$d^2(\overline{x},\overline{y}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}[(x_i - z_i) + (z_i - y_i)]^2 =$$
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)(z_i - y_i) \leq$$
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2} =$$
$$\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2}\right\}^2 = \{d(\overline{x},\overline{z}) + d(\overline{z},\overline{y})\}^2$$

da cui la tesi.

4) $C^0[a,b]$ denoti l'insieme delle funzioni reali continue definite nell'intervallo $[a,b]$; é facile vedere che esso é uno spazio metrico se poniamo $d(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}$ per ogni $f, g \in C^0[a,b]$ (si osservi che il max esiste per il Teorema di Weierstrass). Tale metrica si chiama metrica Lagrangiana

5) $C^0[a,b]$ puó essere reso spazio metrico anche introducendo la seguente metrica (detta integrale) $d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ per ogni $f,g \in C^0[a,b]$.

6) l_∞ denoti l'insieme delle successioni reali $\overline{x} = (x_n)$ limitate; esso diventa spazio metrico se poniamo $d(\overline{x},\overline{y}) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in N\}$

7) c_0 denoti l'insieme delle successioni reali $\overline{x} = (x_n)$ convergenti a zero; esso diventa spazio metrico se poniamo $d(\overline{x},\overline{y}) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in N\}$

8) l_1 denoti l'insieme delle successioni reali $\overline{x} = (x_n)$ tali che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ risulti convergente; esso diventa spazio metrico se poniamo $d(\overline{x},\overline{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|$

9) siano $(S_1,d_1),(S_2,d_2)$ due spazi metrici; l'insieme prodotto cartesiano $S_1 \times S_2$ diventa uno spazio metrico con ognuna delle tre seguenti metriche (come é facile verificare)

$$\rho_1((s_1,s_2),(h_1,h_2)) = d_1(s_1,h_1) + d_2(s_2,h_2)$$

$$\rho_2((s_1,s_2),(h_1,h_2)) = \sqrt{d_1^2(s_1,h_1) + d_2^2(s_2,h_2)}$$

$$\rho_\infty((s_1,s_2),(h_1,h_2)) = \max\{d_1(s_1,h_1), d_2(s_2,h_2)\}$$

per ogni $(s_1,s_2),(h_1,h_2) \in S_1 \times S_2$. La definizione di ognuna delle tre metriche considerate puó essere estesa in modo ovvio al caso del prodotto di un qualunque numero finito di spazi metrici.

Dato uno spazio metrico (S,d) chiameremo intorno sferico di centro x_0 e raggio r (che denoteremo con il simbolo $B(x_0,r)$) l'insieme dei punti $x \in S$ che distano da x_0 meno di r, cioé in simboli

$$B(x_0,r) = \{x \in S : d(x_0,x) < r\}$$

La famiglia degli intorni sferici in uno spazio metrico (S,d) gode delle seguenti fondamentali proprietá di immediata verifica:

I1) $x_0 \in B(x_0,r)$ per ogni $x_0 \in S$

I2) l'intersezione di due intorni sferici di x_0 contiene un intorno sferico di x_0

I3) per ogni $B(x_0,r)$ e per ogni $y \in B(x_0,r)$ esiste $B(y,p) \subset B(x_0,r)$

I4) se $x \neq y$ in S, allora esistono $B(x,r_x)$ e $B(y,r_y)$ che non hanno punti comuni.

Introduciamo adesso altre nozioni che useremo spesso in seguito; in esse (S,d) denoterá uno spazio metrico ed X un suo sottoinsieme proprio non vuoto:

a) un punto $A \in X$ si dice interno ad X se esiste $B(A,r) \subset X$

b) un punto $A \in S$ si dice esterno ad X se esiste $B(A,r) \subset S \setminus X$

c) un punto $A \in S$ si dice di accumulazione per X se in ogni $B(A,r)$ esiste almeno un punto di X distinto da A; é facile vedere che tale definizione é equivalente a dire che ogni $B(A,r)$ contiene infiniti punti di X distinti da A; infatti, é chiaro che se $B(A,r)$ contiene infiniti punti di X distinti da A ne contiene almeno uno distinto da A; viceversa, sia $Q \in B(A,r) \cap X, Q \neq A$; scegliamo ora r_1 minore di r e della distanza $d(Q,A)$ in modo che $B(A,r_1)$ sia contenuto in $B(A,r)$ e non contenga Q; per definizione di punto di accumulazione deve esistere $Q_1 \in B(A,r_1) \cap X, Q_1 \neq A$; procediamo come prima, scegliendo ora r_2 minore di r_1 e della distanza $d(Q_1,A)$ in modo che $B(A,r_2)$ sia contenuto in $B(A,r_1)$ e non contenga Q_1; per definizione di punto di accumulazione deve esistere $Q_2 \in B(A,r_2) \cap X, Q_2 \neq A$; continuando in questo modo troviamo infiniti punti di X distinti da A che si trovano tutti in $B(A,r)$.

d) un punto $A \in S$ si dice di frontiera per X se in ogni $B(A,r)$ esistono sia punti di X che punti di $S \setminus X$

e) un punto $A \in X$ si dice isolato per X se esiste $B(A,r)$ la cui intersezione con X é costituita solo dal punto A.

Il disegno seguente illustra i precedenti concetti; in esso l'insieme X é dato dall'unione dell'insieme Y e del punto B; allora si ha che C é sia punto interno che di accumulazione per X,P é punto esterno ad X,F é punto di frontiera per X ed anche punto di accumulazione per X,B é punto isolato di X e non é di accumulazione per X.

Dato un insieme $X \subset (S,d)$ diremo che X é aperto se é vuoto o se, non essendo vuoto, ogni suo punto é interno, mentre diremo che X é chiuso se il suo complementare é aperto. La famiglia degli aperti e la famiglia dei chiusi godono delle seguenti importanti proprietá:

A1) l'$\emptyset$ e S sono aperti

A2) l'unione di una famiglia arbitraria di aperti é un aperto

A3) l'intersezione di una famiglia finita di aperti é un aperto

C1) l'$\emptyset$ e S sono chiusi

C2) l'unione di una famiglia finita di chiusi é un chiuso

C3) l'intersezione di una famiglia arbitraria di chiusi é un chiuso.

Dimostriamo la proprietá A2:sia $\mathcal{A}$ una famiglia di aperti A e sia $P \in \cup A$; deve esistere un $A_0 \in \mathcal{A}$ che contiene P e quindi contiene anche un $B(P, r)$, essendo A_0 aperto. Allora si ha $P \in B(P, r) \subset A_0 \subset \cup A$, da cui segue che P é interno a $\cup A$.

Dimostriamo la proprietá A3:sia $(A_i)_{i=1}^n$ una famiglia finita di aperti e sia $P \in \cap A_i$; quindi ogni A_i contiene P e quindi contiene anche un $B(P, r_i)$, essendo A_i aperto. Posto $r = \min\{r_1, r_2, ...r_n\}$ si ha $P \in B(P, r) \subset B(P, r_i) \subset A_i$, per ogni $i = 1, 2, ...n$, da cui segue che $P \in B(P, r) \subset \cap A_i$, cioé P é interno a $\cap A$.

Se in $(R, |\ |)$ consideriamo gli intervalli $]-1/n, 1/n[$, al variare di $n \in N$ abbiamo una famiglia infinita di insiemi aperti la cui intersezione é $\{0\}$ che non é un aperto; il che prova che nella proprietá A3 non é possibile togliere l'aggettivo "finita".

Le proprietá dei chiusi possono essere provate a partire da quelle degli aperti, usando la definizione di chiuso e quindi le formule di De Morgan di teoria degli insiemi. Se in $(R, |\ |)$ consideriamo gli insiemi $[1/n, +\infty[$, al variare di $n \in N$ abbiamo una famiglia infinita di insiemi chiusi, la cui unione é $]0, +\infty[$ che non é un chiuso; il che prova che nella proprietá C3 non é possibile togliere l'aggettivo "finita".

Indicheremo con $\overset{o}{X}$ (<u>interno</u> di X) l'insieme dei punti interni ad X, con DX (<u>derivato</u> di X) l'insieme dei punti di accumulazione di X e con FX o con ∂X (<u>frontiera</u> di X) l'insieme dei punti di frontiera di X. Chiamiamo <u>chiusura</u> di X (che si denota con $\overline{X}$) l'unione di X e di ∂X. Valgono i seguenti fatti di semplice verifica:

1) X é aperto se e solo se $X = \overset{o}{X}$

2) X é chiuso se e solo se $X = \overline{X}$

3) X é chiuso se e solo se $DX \subset X$

4) X é chiuso se e solo se $\partial X \subset X$

5) $\overline{X} = X \cup DX$

6) $X \subset Y$ implica che $\overset{o}{X} \subset \overset{o}{Y}$, $\overline{X} \subset \overline{Y}$

7) $\partial X = \partial(S \setminus X)$

Dimostriamo la 3: sia X un chiuso; proveremo che $DX \subset X$, cioé che ogni elemento di DX si trova in X. Sia $P \in DX$ e per assurdo supponiamo che $P \notin X$; allora $P \in S \setminus X$ che é un insieme aperto, perché X é chiuso per ipotesi; quindi esiste $B(P, r) \subset S \setminus X$; ma poiché $P \in DX$ in ogni suo intorno, e quindi anche in $B(P, r)$, devono esistere punti di X.Assurdo.

Viceversa, supponiamo che $DX \subset X$ e proviamo che X é chiuso, facendo vedere che $S \setminus X$ é aperto. A tal fine sia $P \in S \setminus X$; ne segue che $P \notin X$ ed a maggior ragione che $P \notin DX$; da questo ultimo fatto segue che esiste $B(P, r)$ che non contiene punti di X distinti da P; ma neanche P sta in X, come giá notato; quindi $B(P, r) \subset S \setminus X$ che é cosí un aperto.

Dimostriamo la 4: grazie alla 3 giá provata sará sufficiente dimostrare che

$$\partial X \subset X \Longleftrightarrow DX \subset X$$

sia $\partial X \subset X$; proveremo che $DX \subset X$, cioé che ogni elemento di DX si trova in X. Sia $P \in DX$ e per assurdo supponiamo che $P \notin X$; allora $P \in S \setminus X$. Inoltre, per ogni $B(P, r)$ esiste $Q \in B(P, r) \cap X, Q \neq P$ poiché $P \in DX$. Quindi $P \in \partial X \subset X$.Assurdo.

Viceversa, supponiamo che $DX \subset X$ e proviamo che $\partial X \subset X$. A tal fine sia $P \in \partial X$ con $P \notin X$; poiché $P \in \partial X$ ogni $B(P, r)$ contiene punti di X, necessariamente distinti da P, poiché stiamo supponendo che $P \notin X$; quindi $P \in DX$, da cui $P \in X$.Assurdo.

Diremo che un insieme A é <u>denso</u> in B se $A \subset B$ e se $\overline{A} = \overline{B}$ (per esempio Q é denso in R). Diremo che un insieme A é <u>discreto</u> se $DA = \emptyset$ (per esempio N é discreto in R). Diremo che un insieme A é <u>perfetto</u> se $A = DA$ (per esempio un cerchio chiuso in R^2 é perfetto).

Diremo che un insieme A é <u>limitato</u> se esiste un intorno sferico $B(x_0, r)$ che lo contiene. La nozione di limitatezza é strettamente legata a quella di <u>diametro</u> di un insieme; chiameremo diametro di un insieme A in uno spazio metrico (S, d) l'estremo superiore dell'insieme delle $d(x, y)$ al variare di x, y in A, cioé in simboli

$$d_A = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

Ovviamente,$d_A \in [0, +\infty]$. Vale il seguente risultato di facile dimostrazione

Teorema 1. *Un sottoinsieme A di uno spazio metrico é limitato se e solo se $d_A < +\infty$*

Abbiamo visto che su uno stesso insieme possono essere introdotte piú metriche differenti. Diremo che due metriche d_1, d_2 introdotte sullo stesso insieme S sono <u>equivalenti</u> se per ogni $x_0 \in S$ si verificano i seguenti due fatti

E1) per ogni $B_1(x_0, r_1)$ in d_1 esiste $B_2(x_0, r_2)$ in d_2 tale che $B_2(x_0, r_2) \subset B_1(x_0, r_1)$

E2) per ogni $B_2(x_0, r_2)$ in d_2 esiste $B_1(x_0, r_1)$ in d_1 tale che $B_1(x_0, r_1) \subset B_2(x_0, r_2)$

L'importanza di questa nozione di equivalenza fra metriche risiede nel fatto che molti dei concetti giá introdotti per descrivere la struttura metrica di S, rimangono invariati passando da una metrica ad una equivalente. L'unico fra essi che non si conserva per passaggio da una metrica ad una equivalente é quello di "limitatezza", nel senso che é possibile trovare insiemi $X \subset S$ che sono limitati rispetto ad una certa metrica d_1, ma non lo sono rispetto ad un'altra metrica d_2 equivalente alla prima. Per esempio sia (S, d_1) uno spazio metrico tale che $d_{1S} = +\infty$ (per esempio R); introduciamo in esso una nuova metrica d_2 ponendo

$$d_2(x, y) = \frac{d_1(x, y)}{1 + d_1(x, y)} \qquad \forall x, y \in S$$

L'unica delle proprietá della metrica che necessita di una verifica é la proprietá M4; siano $x, y, z \in S$; osserviamo, ricordando che $d_1(x, y) \le d_1(x, z) + d_1(z, y)$, che valgono le seguenti disuguaglianze

$$\begin{gathered} d_2(x, y) = \frac{d_1(x, y)}{1 + d_1(x, y)} \le \frac{d_1(x, z) + d_1(z, y)}{1 + d_1(x, z) + d_1(z, y)} = \\ \frac{d_1(x, z)}{1 + d_1(x, z) + d_1(z, y)} + \frac{d_1(z, y)}{1 + d_1(x, z) + d_1(z, y)} \le \\ \frac{d_1(x, z)}{1 + d_1(x, z)} + \frac{d_1(z, y)}{1 + d_1(z, y)} = d_2(x, z) + d_2(z, y) \end{gathered}$$

dove la prima disuguaglianza é dovuta alla crescenza della funzione $t \to \frac{t}{1+t}$ in $[0, +\infty[$. Poiché risulta evidente che $d_2(x, y) < 1$ per ogni $x, y \in S$, lo stesso spazio S é limitato nella metrica d_2, mentre non lo é nella metrica d_1; questo esempio servirá al nostro scopo una volta che faremo vedere che le due metriche cosí introdotte sono equivalenti. Sia $x_0 \in S$ e sia $B_1(x_0, r_1)$ un suo intorno sferico rispetto a d_1; consideriamo la disequazione

$$\frac{r}{1 - r} \le r_1 \qquad \forall r \in [0, 1[$$

che, come é facile vedere, ha come insieme di soluzioni l'intervallo $[0, \frac{r_1}{1+r_1}]$; preso un $r_2 \in [0, \frac{r_1}{1+r_1}]$ si ha per ogni $y \in B_2(x_0, r_2)$

$$d_1(x_0, y) = \frac{d_2(x_0, y)}{1 - d_2(x_0, y)} < \frac{r_2}{1 - r_2} \le r_1$$

da cui segue che $B_2(x_0, r_2) \subset B_1(x_0, r_1)$ (si noti che nella precedente disuguaglianza si é fatto uso della crescenza della funzione $r \to \frac{r}{1-r}$ in $[0, 1[$). Viceversa, sia $B_2(x_0, r_2)$ un intorno sferico rispetto a d_2 con $r_2 < 1$; consideriamo la disequazione

$$\frac{r}{1 + r} \le r_2 \qquad \forall r \in [0, +\infty[$$

che, come é facile vedere, ha come insieme di soluzioni l'intervallo $[0, \frac{r_2}{1-r_2}]$; preso un $r_1 \in [0, \frac{r_2}{1-r_2}]$ si ha per ogni $y \in B_1(x_0, r_1)$

$$d_2(x_0, y) = \frac{d_1(x_0, y)}{1 + d_1(x_0, y)} < \frac{r_1}{1 + r_1} \leq r_2$$

da cui segue che $B_1(x_0, r_1) \subset B_2(x_0, r_2)$ (si noti che nella precedente disuguaglianza si é fatto uso della crescenza della funzione $r \to \frac{r}{1+r}$ in $[0, +\infty[$). Abbiamo cosí provato che le due metriche d_1, d_2 introdotte prima sono equivalenti. Una importante condizione sufficiente affinché due metriche siano equivalenti é data dalla validitá della seguente disuguaglianza

$$\exists M_1, M_2 > 0 \quad \text{tali che} \quad M_1 d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq M_2 d_2(x, y) \qquad \forall x, y \in S \tag{C}$$

É facile vedere che tale condizione é sufficiente per l'equivalenza di due metriche sullo stesso insieme S ed é anche molto semplice vedere che il concetto di limitatezza é invariante rispetto a metriche equivalenti verificanti in piú la condizione (C) (cioé insiemi limitati per una metrica d_1 restano limitati per ogni metrica d_2 tale che la coppia d_1, d_2 verifica (C), anche se ovviamente i valori del diametro di un insieme rispetto a due metriche verificanti la (C) sono diversi); il fatto che la limitatezza sia invariante per coppie di metriche verificanti (C), ci permette anche di affermare che la condizione (C) non é necessaria per l'equivalenza di due metriche, grazie all'esempio portato in precedenza di spazio metrico non limitato rispetto ad una metrica e limitato rispetto ad un'altra equivalente alla prima. La condizione (C) puó essere usata per provare che le tre metriche $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$ introdotte nello spazio prodotto $S_1 \times S_2$ sono equivalenti (d'ora in poi le chiameremo <u>metriche prodotto</u>). A tal fine osserviamo che valgono le seguenti catene di disuguaglianze

$$\rho_1((s_1, s_2), (h_1, h_2)) = d_1(s_1, h_1) + d_2(s_2, h_2) \leq$$

$$\max\{d_1(s_1, h_1), d_2(s_2, h_2)\} + \max\{d_1(s_1, h_1), d_2(s_2, h_2)\} =$$

$$2 \max\{d_1(s_1, h_1), d_2(s_2, h_2)\} = 2\rho_\infty((s_1, s_2), (h_1, h_2))$$

$$\rho_\infty((s_1, s_2), (h_1, h_2)) = \max\{d_1(s_1, h_1), d_2(s_2, h_2)\} \leq$$

$$d_1(s_1, h_1) + d_2(s_2, h_2) = \rho_1((s_1, s_2), (h_1, h_2))$$

cosicché ρ_1, ρ_∞ verificano la (C). Inoltre,

$$\rho_\infty((s_1, s_2), (h_1, h_2)) = \max\{d_1(s_1, h_1), d_2(s_2, h_2)\} = \max\left\{\sqrt{d_1^2(s_1, h_1)}, \sqrt{d_2^2(s_2, h_2)}\right\} \leq$$

$$\max\left\{\sqrt{d_1^2(s_1, h_1) + d_2^2(s_2, h_2)}, \sqrt{d_1^2(s_1, h_1) + d_2^2(s_2, h_2)}\right\} =$$

$$\sqrt{d_1^2(s_1, h_1) + d_2^2(s_2, h_2)} = \rho_2((s_1, s_2), (h_1, h_2))$$

$$\rho_2((s_1,s_2),(h_1,h_2)) = \sqrt{d_1^2(s_1,h_1)+d_2^2(s_2,h_2)} \leq$$

$$\sqrt{\max^2\{d_1(s_1,h_1),d_2(s_2,h_2)\}+\max^2\{d_1(s_1,h_1),d_2(s_2,h_2)\}} =$$

$$\sqrt{2}\max\{d_1(s_1,h_1),d_2(s_2,h_2)\} = \sqrt{2}\rho_\infty((s_1,s_2),(h_1,h_2))$$

cosicché anche ρ_2, ρ_∞ verificano la (C).

Una volta introdotto il concetto di intorno sferico che serve per stabilire quando due elementi in uno spazio metrico possono dirsi "vicini", possiamo anche introdurre il concetto di <u>successione convergente</u>:

diremo che una successione $(x_n) \subset (S,d)$ converge ad x_0 se accade che per ogni $B(x_0,r)$ esiste $\nu \in N$ tale che per ogni $n > \nu$ risulta $x_n \in B(x_0,r)$;

é facile vedere che questo fatto equivale a provare che $\lim_n d(x_n,x_0) = 0$; anche negli spazi metrici useremo la notazione di limite usata per i limiti di successioni reali. La proprietá I4 degli intorni permette di dimostrare che ogni successione convergente ha un solo limite; é anche facile vedere che ogni successione estratta da una convergente converge allo stesso limite. Osserviamo che nel caso dello spazio metrico $(R, |\ \ |)$ una successione converge nel senso della metrica introdotta se e solo se converge nel senso dell'Analisi I (verifica banale). Ma in Analisi I sono state considerate anche successioni divergenti a $+\infty, -\infty$; ci si chiede se questo tipo di convergenza puó essere vista come convergenza in un opportuno spazio metrico, cosí da unificare le varie definizioni. Questo puó essere fatto come segue:

consideriamo l'insieme $R^* = R \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ (che prende il nome di "R ampliato o esteso") e quindi consideriamo una funzione $\phi : R^* \to [-\pi/2, \pi/2]$ definita ponendo

$$\phi(h) = \begin{cases} \text{arctg} h & h \in R \\ \frac{\pi}{2} & x = +\infty \\ -\frac{\pi}{2} & x = -\infty \end{cases}$$

e quindi la funzione $d^* : R^* \times R^* \to R$ definita ponendo

$$d^*(x,y) = |\phi(x) - \phi(y)| \qquad \forall x,y \in R^*$$

É facile vedere che (R^*, d^*) é uno spazio metrico tale che

$$d^*(x_n,x_0) \to 0 \iff x_n \overset{\text{An.I}}{\longrightarrow} x_0$$

nei casi $(x_n) \subset R, x_0 \in R^*$. É infatti facile vedere che un intorno di x_0 secondo la metrica d^*, pur non essendo in generale un intervallo di centro x_0, é tuttavia un intervallo contenente al suo interno x_0; ne viene allora che la metrica d^* ristretta ad R non é quella euclidea, ma é equivalente ad essa; inoltre un intorno di $+\infty$

in d^* é un intervallo del tipo $]a, +\infty[$, cosí come un intervallo di $-\infty$ in d^* é un intervallo del tipo $]-\infty, b[$; questi fatti garantiscono che la convergenza di una successione in (R^*, d^*) é esattamente la convergenza in R studiata in Analisi I. Quindi il problema posto all'inizio ha soluzione positiva.

Tornando adesso alle successioni negli spazi metrici in generale, osserviamo che vale il seguente

Teorema 2. *Sia $X \subset (S, d)$. Allora, $x_0 \in DX$ se e solo se esiste $(x_n) \subset X, x_n \neq x_0$, per ogni $n \in N$ tale che $\lim_n x_n = x_0$*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in DX$; allora in $B(x_0, 1)$ troviamo un elemento di X diverso da x_0, che chiamiamo x_1. In $B(x_0, 1/2)$ troviamo un elemento di X diverso da x_0, che chiamiamo x_2. In $B(x_0, 1/3)$ troviamo un elemento di X diverso da x_0, che chiamiamo x_3. Cosí proseguendo, nel generico $B(x_0, 1/n)$ troviamo un elemento di X diverso da x_0, che chiamiamo x_n. Si costruisce quindi una successione $(x_n) \subset X, x_n \neq x_0$ tale che $d(x_n, x_0) < 1/n$ per ogni $n \in N$ e quindi tale che $\lim_n d(x_n, x_0) = 0 \iff \lim_n x_n = x_0$. Viceversa, é sufficiente applicare la definizione di limite per provare che in ogni intorno di x_0 esistono infiniti x_n, che sono punti di X distinti da x_0.■

Sia ora $f : X \to (S', d')$ con $X \subset (S, d)$ e sia $x_0 \in DX$; se $l \in S'$, diremo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se per ogni $B(l, \delta) \subset (S', d')$ esiste $B(x_0, r) \subset (S, d)$ tale che $f(x) \in B(l, \delta)$ per ogni $x \in B(x_0, r) \cap X, x \neq x_0$.

Come per le successioni vale il Teorema di Unicitá del Limite, grazie alla proprietá I4 di cui gode la famiglia degli intorni sferici di uno spazio metrico. Si hanno anche i seguenti risultati la cui dimostrazione é del tutto simile a quella dei corrispondenti risultati per le funzioni reali di variabile reale

Teorema 3. *Sia $f : X \to (S', d')$ con $X \subset (S, d)$ e siano $x_0 \in DX$ ed $l' \in S'$. Condizione necessaria e sufficiente affinché*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l'$$

é che per ogni successione $(x_n) \subset X \setminus \{x_0\}$ con $\lim_n x_n = x_0$ risulti

$$\lim_n f(x_n) = l'$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l'$. Sia $B(l', \delta) \subset (S', d')$ un arbitrario intorno sferico di l'; esiste $B(x_0, r) \subset (S, d)$ tale che $f(x) \in B(l', \delta)$ per ogni $x \in B(x_0, r) \cap X, x \neq x_0$. Prendiamo una successione $(x_n) \subset X \setminus \{x_0\}$ con $\lim_n x_n = x_0$; per definizione di limite di una successione, esiste $\nu \in N$ tale che per $n > \nu$ risulta $x_n \in B(x_0, r)$; poiché $(x_n) \subset X \setminus \{x_0\}$, abbiamo che $x_n \in B(x_0, r) \cap X, x_n \neq x_0$ per ogni $n > \nu$; quindi si ha $f(x_n) \in B(l', \delta)$ per ogni $n > \nu$. Questo vuol dire che $\lim_n f(x_n) = l'$. Proviamo adesso il viceversa, supponendo per assurdo che non si abbia $\lim_{x \to x_0} f(x) = l'$, nonostante che per ogni successione $(x_n) \subset X \setminus \{x_0\}$ con $\lim_n x_n = x_0$ risulti $\lim_n f(x_n) = l'$. Dalla negazione della definizione di limite segue che esiste $B(l', \delta)$ tale che per ogni $B(x_0, r)$ é possibile trovare $x_r \in B(x_0, r) \setminus X, x_r \neq x_0$, con $f(x_r) \notin B(l', \delta)$. Scegliendo $r = 1/n$, al variare di n in N é possibile costruire una successione $x_n \in B(x_0, 1/n) \cap X, x_n \neq x_0$, cioé una successione convergente ad x_0, ma tale che $f(x_n) \notin B(l', \delta)$ per ogni $n \in N$. Allora tale successione contraddice la ipotesi.■

Teorema 4.*Sia $f : X \to (S', d')$ con $X \subset (S, d)$ e siano $x_0 \in DX$ ed $l' \in S' \setminus f(X)$ tali che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l'$; inoltre siano $g : f(X) \to (S'', d'')$ ed $l'' \in (S'', d'')$ tali che $\lim_{y \to l'} g(y) = l''$. Allora si ha*

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = l''$$

Sia ora $f : X \to (S', d')$ con $X \subset (S, d)$ e sia $x_0 \in X$; diremo che f é <u>continua</u> in x_0 se x_0 é un punto isolato per X oppure se, non essendo isolato, si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Diremo che f é continua in tutto X se é continua in ogni suo punto. In questo caso, i due ultimi teoremi sono validi eliminando le ipotesi $x_n \neq x_0$ nel primo e $l' \notin f(X)$ nel secondo.

Un'osservazione molto utile per il calcolo del limite di una funzione é la seguente. Sia $f : X \subset (S, d) \to (S', d')$ una funzione e sia $\overline{x}$ un punto di accumulazione per X. Come sappiamo,ha allora senso studiare il problema seguente

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) \tag{1}$$

A tale proposito si ha il risultato seguente

Teorema 5.*Siano $f, X, \overline{x}$ come sopra.Condizione necessaria affinché il limite (1) esista é che per ogni sottoinsieme B di X, avente $\overline{x}$ come punto di accumulazione,esista il limite seguente*

$$\lim_{x \to \overline{x}} f_{|B}(x) \tag{2}$$

ed abbia lo stesso valore del limite (1).

É allora chiaro che valgono i seguenti fatti

1) se esistono due restrizioni di f a due sottoinsiemi B e C di X, aventi come punto di accumulazione $\overline{x}$,tali che i limiti (2) sono diversi,allora il limite (1) non puó esistere.

2) se,per una certa restrizione di f ad un sottoinsieme B di X, avente $\overline{x}$ come punto di accumulazione,risulta che il limite (2) vale λ, allora il limite (1) o é uguale a λ oppure non esiste.

Per esempio, si voglia calcolare il

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

dove la funzione é definita in $R^2 \setminus (0,0)$. Consideriamo la restrizione della funzione data all'insieme $x = 0$ (che ha $(0,0)$ come punto di accumulazione); poiché la funzione vale identicamente zero su tale insieme, il limite di tale restrizione vale pure 0. Adesso consideriamo la restrizione all'insieme $y = x^2$ (che ha $(0,0)$ come punto di accumulazione); poiché tale restrizione vale identicamente uno su tale insieme, il limite di tale restrizione vale pure 1. Avendo trovato due restrizioni opportune aventi limiti diversi, possiamo concludere che il limite studiato non esiste.

La precedente osservazione puó essere completata nel caso di funzioni fra spazi euclidei con le seguenti altre di grande utilitá pratica. Innanzitutto osserviamo che se $(\overline{x}_p) \subset R^n, \overline{x} \in R^n$ e $\overline{x}_p = (x_p^1, x_p^2, ...x_p^n), \overline{x} = (x^1, x^2, ...x^n)$, otteniamo che

$$\lim_p \overline{x}_p = \overline{x} \Longleftrightarrow \lim_p x_p^i = x^i \qquad \forall i = 1, ...n$$

Se inoltre $f : R^n \to R^m$, dove $f = (f_1, f_2, ...f_m), f_i : R^n \to R, i = 1, 2...m$, risulta anche

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = \overline{l} \Longleftrightarrow \lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f^i(\overline{x}) = \overline{l}^i \qquad \forall i = 1, ...m$$

Possiamo quindi limitarci allo studio di funzioni aventi R come codominio. Quanto diremo é valido per funzioni definite in un sottoinsieme X di un qualunque R^n, ma per comoditá di scrittura porremo $n = 2$. Sia $f : A \to R$ una funzione di due variabili reali e sia $\overline{P}(\overline{x}, \overline{y})$ un punto di accumulazione per A. Come giá detto,ha senso studiare il problema seguente

$$\lim_{(x,y)\to(\overline{x},\overline{y})} f(x,y) \tag{3}$$

Se il limite (3) assume il valore λ, la restrizione della funzione f ad una qualunque retta per $\overline{P}$ deve avere limite uguale a λ quando $(x, y) \to (\overline{x}, \overline{y})$ (se ovviamente tale retta incontra X in un insieme che ha $\overline{P}$ come punto di accumulazione). La definizione di limite (studieremo solo il caso $\lambda \in R$, potendosi procedere in modo del tutto simile per i casi $\lambda = +\infty, -\infty$) ci dice che fissato $\epsilon > 0$ esiste $B(\overline{P}, \delta)$ tale che per ogni $P \in B(\overline{P}, \delta) \cap X, P \neq \overline{P}$, risulta

$$|f(P) - \lambda| < \epsilon \tag{4}$$

Quindi su ogni retta per il punto $\overline{P}$ troviamo un segmento σ_δ di centro O e semiampiezza δ tale che per ogni punto $P \in X \cap \sigma_\delta, P \neq \overline{P}$, la relazione (4) é verificata. Viceversa, supponiamo che la restrizione della funzione f ad una qualunque retta per $\overline{P}$ (che incontra X in un insieme che ha $\overline{P}$ come punto di accumulazione) abbia limite uguale a λ quando $(x, y) \to (\overline{x}, \overline{y})$ e che su ogni retta per il punto $\overline{P}$ possiamo troviamo un segmento σ_δ di centro $\overline{P}$ e semiampiezza maggiore od uguale a un certo numero $\delta > 0$ tale che per ogni punto $P \in X \cap \sigma_\delta, P \neq \overline{P}$, la relazione (4) é verificata. Allora, facendo ruotare la generica retta per $\overline{P}$ attorno al punto in esame, tali segmenti descriveranno un insieme contenente un cerchio γ di centro $\overline{P}$ e raggio maggiore od uguale al numero δ tale che per ogni punto $P \in X \cap \gamma, P \neq \overline{P}$, la relazione (4) é verificata; per la definizione di limite data in precedenza, questo significa che

$$\lim_{(x,y)\to(\overline{x},\overline{y})} f(x, y) = \lambda$$

Sorge ora il problema di determinare in quale caso si verifica il fenomeno sopra descritto. Per comoditá di scrittura, supponiamo che $\overline{P} = O$; sia $y = mx$ la generica retta r per O e sia $H \subset R$ l'insieme degli $m \in R$ tali che la retta $y = mx$ incontra X in un insieme avente O come punto di accumulazione. La restrizione di f a tale retta é allora una funzione $f_m(x) = f(x, mx)$ definita in $Y_m = \{x \in R : \exists y \in R, \text{con} \quad (x, y) \in r \cap X\} \subset R$; ovviamente $x = 0$ é un punto di accumulazione per Y_m. Supponiamo che f_m non sia costante, altrimenti un qualunque $\delta > 0$ va bene, e supponiamo anche che $\lim_{x\to 0} f_m(x) = \lambda$ per ogni $m \in R$, altrimenti per quanto giá osservato il limite (3) non esiste. Per la definizione di limite di funzioni reali di variabile reale otteniamo che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_m > 0 \quad \text{tale che} \quad \forall x \in Y_m \quad \text{con} \quad 0 < |x| < \delta_m \quad \text{risulta} \quad |f_m(x) - \lambda| < \epsilon$$

(nella definizione si é indicato con δ_m il piú grande fra i valori per i quali essa vale, una volta fissato ϵ; si puó provare che esiste ϵ_0 tale che per ogni $0 < \epsilon < \epsilon_0$ risulta $\delta_m \in R$, altrimenti f_m sarebbe costante). Osserviamo che all'intervallo $]-\delta_m, \delta_m[$ in cui varia x corrisponde sulla retta r un segmento di estremi i punti di coordinate $(-\delta_m, -m\delta_m), (\delta_m, m\delta_m)$ la cui semiampiezza é data dal numero $\delta_m\sqrt{1 + m^2}$ che é positivo, per ogni $m \in H$. Supponiamo, intanto, che il numero $\delta^* = \inf\{\delta_m\sqrt{1 + m^2} : m \in H\}$ sia positivo. Adesso osserviamo anche che la scelta dell'equazione esplicita della retta ci impone di trascurare la retta di equazione $x = 0$; occorre allora fare la restrizione di f a tale retta e calcolarne quindi il limite per $y \to 0$ (supponendo che tale retta incontri X in un insieme che ha O come punto di accumulazione). Supponiamo ancora che tale limite valga λ, altrimenti per quanto giá osservato il limite (3) non esiste; dalla definizione di limite segue allora che fissato lo stesso ϵ considerato in precedenza esiste $\delta^{**} > 0$ tale che se $0 < |y| < \delta^{**}$ (con y nel dominio della restrizione) vale la (4). Quindi il numero $\delta = \min(\delta^*, \delta^{**})$ é il numero positivo cercato, poiché quanto detto in precedenza permette di affermare che su ogni retta per O (che incontra X in un insieme avente O come punto di accumulazione) é possibile determinare un segmento σ_δ di ampiezza maggiore od uguale a δ tale che per ogni punto $P \in X \cap \sigma_\delta, P \neq O$, la relazione (4) é verificata.

Osservazione 1.Una condizione sufficiente perché $\delta^* > 0$ é che $\inf\{\delta_m : m \in H\} > 0$ in quanto $\sqrt{1+m^2} \geq 1$ per ogni $m \in R$.

Osservazione 2.Se esiste $m_0 \in \overline{H}$ tale che $\lim_{m \to m_0} \delta_m = 0$, allora sicuramente $\delta^* = 0$ poiché $\lim_{m \to m_0} \delta_m \sqrt{1+m^2} = 0$.

Quindi puó essere conveniente cominciare con l'esame dell'insieme $\{\delta_m : m \in H\}$ cercandone l'estremo inferiore. In particolare segue che se H é limitato, allora i due casi descritti nelle precedenti osservazioni sono i soli possibili. Se non si presenta alcuno dei due casi sopra descritti, cioé se accade che $0 = \inf\{\delta_m : m \in H\} = \lim_{m \to \infty} \delta_m$, é allora necessario andare a studiare l'insieme $\{\delta_m \sqrt{1+m^2} : m \in H\}$.

Gli esempi seguenti illustrano la situazione ora descritta

Esempio 1. Questo esempio illustra il fenomeno indicato nella precedente Osservazione 1. Si consideri il seguente

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{|x|(|x|+|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

dove la funzione é definita in $R^2 \setminus (0,0)$. Innanzitutto osserviamo che la restrizione della funzione alla retta $x = 0$ é la funzione identicamente nulla e quindi ha limite zero per $y \to 0$. Adesso consideriamo la restrizione della funzione ad una qualunque retta del tipo $y = mx$; abbiamo cosí il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|(|x|+|mx|)}{\sqrt{x^2+(mx)^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|(1+|m|)}{\sqrt{1+m^2}} = 0$$

Per definizione di limite otteniamo quindi

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_m > 0 \quad \text{tale che} \quad \forall x \in R \setminus \{0\} \quad \text{con} \quad 0 < |x| < \delta_m \quad \text{risulta} \quad \left| \frac{|x|(1+|m|)}{\sqrt{1+m^2}} \right| < \epsilon$$

Ne viene che

$$\delta_m = \epsilon \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|} \qquad \forall m \in R$$

Essendo la funzione δ_m pari, possiamo studiarla solo per $m \geq 0$; calcolandone la derivata prima e studiandone il segno, troviamo che δ_m ha minimo e che tale minimo si ottiene per $m = 1$; poiché $\delta_1 = \epsilon\sqrt{2}/2$ siamo nel primo caso sopra considerato. Quindi possiamo affermare, senza studio ulteriore, che il limite iniziale vale 0.

Esempio 2.Questo esempio illustra il fenomeno indicato nella precedente Osservazione 2. Si consideri il seguente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x-y}$$

dove la funzione é definita in $R^2 \setminus \{x = y\}$. Innanzitutto osserviamo che la restrizione della funzione alla retta $x = 0$ é la funzione identicamente nulla e quindi ha limite zero per $y \to 0$. Adesso consideriamo la restrizione della funzione ad una qualunque retta del tipo $y = mx, m \neq 1$; abbiamo cosí il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x(1-m)} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{1-m} = 0$$

Per definizione di limite otteniamo quindi

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta_m > 0 \quad \text{tale che} \quad \forall x \in R \setminus \{0\} \quad \text{con} \quad 0 < |x| < \delta_m \quad \text{risulta} \quad \left|\frac{mx}{1-m}\right| < \epsilon$$

Ne viene che

$$\delta_m = \epsilon\frac{|1-m|}{|m|} \qquad \forall m \in R, m \neq 1; 0.$$

É allora facile vedere che $\lim_{m\to 1} \delta_m = 0$. Ne segue che il limite considerato non esiste.

Esempio 3.Gli esempi che adesso stiamo per presentare dimostrano che se $0 = \lim_{m\to\infty} \delta_m$, é allora necessario andare a studiare l'insieme $\{\delta_m\sqrt{1+m^2} : m \in H\}$, in quanto puó accadere sia che tale insieme abbia estremo inferiore positivo sia che tale insieme abbia estremo inferiore nullo.

Consideriamo il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$$

dove la funzione é definita in $R^2 \setminus \{(0,0)\}$. Per $x = 0$ otteniamo che la funzione si riduce a $|y|$ il cui limite é ovviamente zero,se $y \to 0$. Consideriamo la restrizione ad una qualunque retta $y = mx$; otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+(mx)^2}{|x|+|mx|} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|(1+m^2)}{1+|m|} = 0$$

Come in precedenza possiamo calcolare δ_m ed otteniamo

$$\delta_m = \epsilon\frac{1+|m|}{1+m^2} \qquad \forall m \in R$$

É facile vedere che $\lim_{m\to\infty} \delta_m = 0$; studiamo quindi l'insieme

$$\{\delta_m\sqrt{1+m^2} : m \in R\} = \{\epsilon\frac{1+|m|}{1+m^2}\sqrt{1+m^2} : m \in R\} = \{\epsilon\frac{1+|m|}{\sqrt{1+m^2}} : m \in R\}$$

Tenendo presente che $\frac{1+|m|}{\sqrt{1+m^2}}$ é una funzione pari e studiandola quindi attraverso la derivata prima solo per $m \geq 0$, ci accorgiamo che l'estremo inferiore dell'insieme sopra considerato é positivo cosicché possiamo affermare che il limite di partenza vale zero.

Consideriamo il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+\sqrt{|xy|}}$$

dove la funzione é definita in $R^2 \setminus \{x=0\}$. Consideriamo la restrizione ad una qualunque retta $y = mx$; otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+(mx)^2}{|x|+\sqrt{|mx^2|}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|(1+m^2)}{1+\sqrt{|m|}} = 0$$

Come in precedenza possiamo calcolare δ_m ed otteniamo

$$\delta_m = \epsilon \frac{1+\sqrt{|m|}}{1+m^2} \qquad \forall m \in R$$

É facile vedere che $\lim_{m\to\infty} \delta_m = 0$; studiamo quindi l'insieme

$$\{\delta_m \sqrt{1+m^2} : m \in R\} = \{\epsilon \frac{1+\sqrt{|m|}}{1+m^2} \sqrt{1+m^2} : m \in R\} = \{\epsilon \frac{1+\sqrt{|m|}}{\sqrt{1+m^2}} : m \in R\}$$

Poiché

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1+\sqrt{|m|}}{\sqrt{1+m^2}} = 0$$

otteniamo che l'estremo inferiore dell'insieme sopra considerato é nullo cosicché possiamo affermare che il limite di partenza non esiste.

Osserviamo,inoltre,che (solo!) nel caso di funzioni di due variabili possiamo anche considerare le coordinate polari

$$\begin{cases} x = \overline{x} + \rho\cos\theta \\ \\ y = \overline{y} + \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

e quindi la funzione

$$f_\theta(\rho) = f(\overline{x} + \rho\cos\theta, \overline{y} + \rho\sin\theta)$$

calcolandone poi il limite per ρ tendente a zero;se tale limite,al variare di θ nell'insieme H dei θ per cui la semiretta che forma con l'asse delle ascisse un tale angolo incontra X in un insieme che ha O come punto di accumulazione, risulta sempre uguale a λ ed inoltre il numero

$$\delta = \inf\{\delta_\theta : \theta \in H\}$$

risulta positivo,allora possiamo affermare come in precedenza che il limite (3) vale λ.

Osserviamo anche che in uno spazio metrico euclideo puó accadere che un punto si muova allontanandosi dall'origine, o come si suol dire tendendo a ∞; é possibile allora introdurre le seguenti nuove definizioni di limite

1) diremo che $(P_n) \subset R^n$ tende a ∞ e scriveremo

$$\lim_n P_n = \infty$$

se e solo se

$$\forall K > 0 \quad \exists \nu \in N \quad : \quad \forall n > \nu \quad \text{risulta} \quad d(P_n, \Theta) > K$$

2) data $f : X \subset (R^n, d) \to R^m$, X non limitato, diremo che

$$\lim_{P \to \infty} f(P) = l \in R^m$$

se e solo se

$$\forall B(l, \delta) \subset (R^m, d) \quad \exists \rho > 0 \quad : \quad \forall P \in X, d(P, \Theta) > \rho \quad \text{risulta} \quad f(P) \in B(l, \delta)$$

3) data $f : X \subset (R^n, d) \to R^m$ e $P_0 \in DX$, diremo che

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = \infty$$

se e solo se

$$\forall K > 0 \quad \exists B(P_0, \rho) \subset (R^n, d) \quad : \quad \forall P \in X \cap B(P_0, \rho), P \neq P_0 \quad \text{risulta} \quad d(f(P), \Theta) > K$$

4) data $f : X \subset (R^n, d) \to R^m$, X non limitato, diremo che

$$\lim_{P \to \infty} f(P) = \infty$$

se e solo se

$$\forall K > 0 \quad \exists \rho > 0 \quad : \quad \forall P \in X, d(P, \Theta) > \rho \quad \text{risulta} \quad d(f(P), \Theta) > K$$

Ovviamente quanto detto in precedenza circa il modo di calcolare un limite attraverso l'uso di opportune restrizioni vale anche per le ultime definizioni di limite considerate.

Osserviamo anche che se consideriamo lo spazio $\dot{R^n} = R^n \cup \{\infty\}$ i vari tipi di convergenza introdotti possono essere ottenuti usando un'opportuna metrica su $\dot{R^n}$, cosí come fatto per R^*; tuttavia, in questo caso la metrica da considerare si introduce in modo molto complicato ed é quindi preferibile definire le nuove nozioni di limite direttamente come fatto sopra, e non come caso particolare di un'unica definizione di limite data attraverso una metrica.

Abbiamo detto all'inizio che analoghi ragionamenti possono essere fatti per i limiti di funzioni definite in sottoinsiemi di R^n a valori in un qualunque spazio metrico; in questo caso é peró piú conveniente usare le equazioni parametriche della retta, per ridurre il calcolo del limite sempre a quello di funzioni di una variabile.

Ritorniamo adesso allo studio delle funzioni continue fra spazi metrici generali, cioé non necessariamente euclidei. Le funzioni continue possono essere caratterizzate studiando le immagini inverse degli insiemi aperti e degli insiemi chiusi del loro codominio; occorre peró prima introdurre il concetto di <u>metrica indotta</u>: dato uno spazio metrico (S, d) ed un suo sottoinsieme X possiamo definire una metrica $d_{|X}$ su X ponendo

$$d_{|X}(x, y) = d(x, y) \qquad\qquad \forall x, y \in X$$

cioé semplicemente considerando la restrizione di d all'insieme $X \times X$; la metrica $d_{|X}$ cosí definita su X é quella che viene chiamata metrica indotta. Gli intorni sferici di un punto $x_0 \in X$ nella metrica indotta sono allora gli insiemi del tipo

$$B_{|X}(x_0, r) = \{x \in X : d_{|X}(x_0, x) < r\} = B(x_0, r) \cap X$$

Prima di usare tale nozione per caratterizzare le funzioni continue, osserviamo che si hanno i seguenti fatti di facile dimostrazione:

1) se $Y \subset X \subset (S, d)$ e Y é aperto (o chiuso) in (S, d), allora Y é aperto (o chiuso) in $(X, d_{|X})$

2) se $Y \subset X \subset (S, d)$ e Y é aperto (o chiuso) in $(X, d_{|X})$, allora non é vero, in generale che Y é aperto (o chiuso) in (S, d) (per provare quest'ultimo fatto é sufficiente osservare che $]0, 1[\cap Q$ é aperto in $(Q, |\ |)$, ma non in $(R, |\ |)$, e che $[0, 1] \cap Q$ é chiuso in $(Q, |\ |)$, ma non in $(R, |\ |)$)

Si ha adesso il seguente

Teorema 6. *Sia $f : X \to (S', d')$ con $X \subset (S, d)$. Ognuna delle due seguenti condizioni é necessaria e sufficiente per la continuitá di f in X:*

1) $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$ é aperto nella metrica indotta su X, per ogni insieme aperto $A \subset (S', d')$

2) $f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\}$ é chiuso nella metrica indotta su X, per ogni insieme chiuso $C \subset (S', d')$

Dimostrazione: Dimostriamo prima la 1). Supponiamo f continua e proviamo che $f^{-1}(A)$ é aperto nella metrica indotta su X, per ogni insieme aperto $A \subset (S', d')$. Sia $x_0 \in f^{-1}(A) \subset X$; proveremo che x_0 é interno ad $f^{-1}(A)$ rispetto alla metrica indotta $d_{|X}$. Essendo A aperto ed avendosi $f(x_0) \in A$ esiste $B(f(x_0), r) \subset A$; per la continuitá di f esiste $B_{|X}(x_0, \delta)$ in $(X, d_{|X})$ tale che $f(x) \in B(f(x_0), r)$ per ogni $x \in B_{|X}(x_0, \delta)$; quindi $B_{|X}(x_0, \delta) \subset f^{-1}(A)$ che era quanto volevamo provare. Viceversa, sia $f^{-1}(A)$ aperto nella metrica indotta su X, per ogni insieme aperto $A \subset (S', d')$. Proveremo che f é continua in ogni $x_0 \in X$. Sia $B(f(x_0), r)$ un intorno sferico di $f(x_0)$; esso é un insieme aperto di (S', d') e quindi anche $f^{-1}(B(f(x_0), r))$ é un aperto di $(X, d_{|X})$ che ovviamente contiene x_0; esiste quindi $B_{|X}(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), r))$ il che equivale a dire che $f(B_{|X}(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), r)$; quindi f é continua in x_0. Dimostriamo adesso la 2). Supponiamo f continua e proviamo che $f^{-1}(C)$ é chiuso nella metrica indotta su X, per ogni insieme chiuso $C \subset (S', d')$. Sia x_0 un punto di accumulazione per $f^{-1}(C)$ nella metrica indotta su X. Allora, per uno dei teoremi precedenti esiste $(x_n) \subset f^{-1}(C) \setminus \{x_0\}$ che converge ad x_0 nella metrica $d_{|X}$; la continuitá di f implica che $(f(x_n))$ converge a $f(x_0)$, che quindi deve trovarsi nella chiusura di C, che peró é chiuso: ne segue che $f(x_0) \in C$. Quindi $x_0 \in f^{-1}(C)$ che risulta cosí chiuso; infatti, l'arbitrarietá di x_0 nella precedente dimostrazione prova che $f^{-1}(C)$ contiene il proprio derivato. Viceversa, sia $f^{-1}(C)$ chiuso nella metrica indotta su X, per ogni insieme chiuso $C \subset (S', d')$. Proveremo che f é continua in X dimostrando che $f^{-1}(A)$ é aperto nella metrica indotta su X, per ogni insieme aperto $A \subset (S', d')$ e quindi applicando quanto giá dimostrato. Sia A un aperto in (S', d'); allora $H = S' \setminus A$ é chiuso e quindi anche $f^{-1}(H)$ é chiuso in $(X, d_{|X})$; poiché si vede facilmente che $f^{-1}(H) = X \setminus f^{-1}(A)$, segue che $f^{-1}(A)$ é aperto in $(X, d_{|X})$; quindi f é continua per la prima parte della dimostrazione.■

Sappiamo anche che R^n é uno spazio lineare o vettoriale; quindi in R^n abbiamo due strutture, quello di spazio metrico e quella di spazio lineare. Esse sono legate fra loro dal seguente risultato di facile dimostrazione

Teorema 7. *Le funzioni $h : R^n \times R^n \to R^n, g : R \times R^n \to R^n$ definite ponendo $h(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x} + \overline{y}, g(\lambda, \overline{x}) = \lambda \overline{x}$ sono continue dagli spazi prodotto $R^n \times R^n$ e $R \times R^n$, rispettivamente, allo spazio R^n.*

Chiameremo <u>spazio lineare metrico</u> ogni spazio lineare in cui puó essere introdotta una metrica rispetto alla quale le operazioni di somma fra vettori e di prodotto per gli scalari sono continue. Altri esempi di spazi lineari metrici sono gli spazi metrici introdotti all'inizio, cioé $C^0[a, b]$, sia con la metrica Lagrangiana che quella integrale, l_∞, c_0, l_1. Una prima importante conseguenza di tale definizione é che se S é uno spazio metrico ed S' é uno spazio lineare metrico, dato un qualunque numero finito di funzioni continue da S ad

S', una qualunque loro combinazione lineare é ancora una funzione continua. Nel caso in cui $S' = R$ é anche possibile provare, con le stesse dimostrazioni dell'Analisi I, che il prodotto ed il quoziente di funzioni continue sono continue in tutto il loro insieme di definizione e che vale il Teorema della Permanenza del segno.

Introduciamo adesso una nozione di grande importanza per tutta l'Analisi Matematica. Sia (S, d) uno spazio metrico e sia X un suo sottoinsieme. Diremo che X é sequenzialmente compatto se da ogni successione di X é possibile estrarre una successione convergente ad un elemento di X. Dimostriamo, innazitutto, il seguente risultato

Teorema 8. *Ogni insieme sequenzialmente compatto é chiuso e limitato*

Dimostrazione. Sia X sequenzialmente compatto, sia $x_0 \in DX$ e sia $(x_n) \subset X$ una successione convergente ad x_0; per l'ipotesi su X, esiste una estratta (x_{n_k}) che converge ad un $y_0 \in X$. Noti teoremi sui limiti implicano che $y_0 = x_0$ e quindi che $x_0 \in X$. Allora, X é chiuso. Adesso, supponiamo che X non sia limitato; non esiste quindi alcun intorno sferico che contiene X. Ed allora fissato $y_0 \in X$, per ogni $n \in N$ esiste $x_n \in X$ tale che $x_n \notin B(y_0, n) \iff d(x_n, y_0) \geq n$. La successione $(x_n) \subset X$ cosí costruita deve avere una estratta (x_{n_k}) convergente ad un certo $x_0 \in X$; abbiamo quindi

$$n_k \leq d(x_{n_k}, y_0) \leq d(x_{n_k}, x_0) + d(x_0, y_0) \qquad \forall k \in N$$

che é assurdo, poiché il primo membro tende a $+\infty$, mentre l'ultimo é superiormente limitato. Quindi si ha la tesi.■

Il viceversa di tale risultato é falso se lo spazio metrico considerato é del tutto arbitrario, come i seguenti esempi mostrano:

1) sia $X = (1 + \frac{1}{n})^n$ in $(Q, |\ |)$. É noto che ogni elemento di X é contenuto in $[2, 3]$, quindi X é limitato. Inoltre, in R la successione considerata converge al numero e, che quindi é l'unico punto di accumulazione; ma $e \in R \backslash Q$ e quindi l'insieme X ha derivato vuoto in Q; ne segue che X é chiuso. Ma X non é sequenzialmente compatto, perché un'eventuale estratta convergente dovrebbe convergere al numero irrazionale e;

2) sia $X = \{f_n(t) = t^n, n \in N\} \subset C^0[0, 1]$. É facile vedere che X é limitato, perché ogni f_n é non negativa ed ha massimo 1. Inoltre, se $t = 1$ si ha $\lim_n f_n(1) = 1$, mentre se $t \in [0, 1[$ si ha $\lim_n f_n(t) = 0$; questo significa, che, punto per punto, la successione (f_n) converge alla funzione (**non continua!**)

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, 1[\\ 1 & t = 1 \end{cases}$$

Supponiamo, adesso che una qualunque estratta dalla (f_n) converga nella metrica lagrangiana di $C^0[0,1]$ ad una funzione f; avremo cosí

$$0 \leq |f_{n_k}(t) - f(t)| \leq \max\{|f_{n_k}(t) - f(t)| : t \in [0,1]\} = d(f_{n_k}, f) \to 0$$

per ogni $t \in [0,1]$; quindi per quanto osservato sopra circa la convergenza punto per punto della f_n, dovrebbe aversi, per l'unicitá del limite, $f(t) = g(t)$ per ogni $t \in [0,1]$, il che non é possibile visto che g non é continua. Quindi X non é sequenzialmente compatto. Poiché con analogo ragionamento si puó provare che X ha derivato vuoto, segue anche che X é chiuso.

Tuttavia nel caso di R^n ogni insieme chiuso e limitato é anche sequenzialmente compatto. Ladimostrazione di tale fatto, dovuto a Heine-Borel, si basa sul seguente

Teorema di Bolzano-Weierstrass. *Ogni insieme $X \subset R^n$ infinito e limitato ammette un punto di accumulazione.*

Dimostrazione. La dimostrazione sará fatta nel caso di $n = 2$ per non complicare la notazione, ma quanto diremo vale per un qualunque R^n. Essendo X un insieme limitato esiste un intorno circolare e quindi un rettangolo Δ che lo contiene. Δ puó essere pensato come prodotto cartesiano di due intervalli chiusi e limitati di R, cosicché avremo $\Delta = [a,b] \times [c,d]$. Innanzitutto dividiamo Δ in quattro rettangoli tracciando i segmenti che congiungono i punti medi di due lati opposti. Almeno uno dei quattro rettangoli cosí ottenuti deve contenere infiniti punti di X, altrimenti X sarebbe finito. Sia esso $\Delta_1 = [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$; osserviamo che $b_1 - a_1 = (b-a)/2, d_1 - c_1 = (d-c)/2$ ed anche che $a \leq a_1, b \geq b_1, c \leq c_1, d \geq d_1$ per costruzione. Quindi procediamo in modo analogo, dividendo Δ_1 in altri quattro rettangoli con lo stesso metodo ed ancora osserviamo che uno di essi (che chiameremo $\Delta_2 = [a_2, b_2] \times [c_2, d_2]$) deve contenere infiniti punti di X; sempre per costruzione si ha $b_2 - a_2 = (b-a)/2^2, d_2 - c_2 = (d-c)/2^2$ ed anche che $a_1 \leq a_2, b_1 \geq b_2, c_1 \leq c_2, d_1 \geq d_2$. Procedendo in questo modo si costruisce una successione decrescente di rettangoli $\Delta_n = [a_n, b_n] \times [c_n, d_n]$, tali che

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, d_n - c_n = \frac{d-c}{2^n}, \quad a_n \leq a_{n+1}, b_n \geq b_{n+1}, c_n \leq c_{n+1}, d_n \geq d_{n+1} \qquad \forall n \in N$$

La monotonia della successioni $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ permette di affermare che esse sono regolari; inoltre, poiché $a \leq a_n, b_n \leq b, c \leq c_n, d_n \leq d$, per ogni $n \in N$, esse saranno convergenti; esistono quindi $A, B, C, D \in R$ tali che

$$\lim_n a_n = A, \lim_n b_n = B, \lim_n c_n = C, \lim_n d_n = D \qquad (L)$$

Poiché

$$b_n - a_n = (b-a)/2^n, d_n - c_n = (d-c)/2^n$$

passando al limite nelle precedenti uguaglianze per $n \to \infty$ otteniamo

$$B - A = 0 \quad , \quad D - C = 0$$

Dimostreremo adesso che il punto $Q(A, C)$ é il punto di accumulazione cercato. Sia I un intorno sferico di centro $Q(A, C)$; é possibile allora considerare un quadrato $\Gamma = [A - \epsilon, A + \epsilon] \times [C - \epsilon, C + \epsilon] \subset I$. Per le relazioni di limite (L) e per la definizione di limite esiste $\nu \in N$ tale che per ogni $n > \nu$ risulta

$$A - \epsilon < a_n, b_n < A + \epsilon \quad , \quad C - \epsilon < c_n, d_n < C + \epsilon$$

il che significa che $\Delta_n \subset \Gamma \subset I$ per ogni $n > \nu$. Poiché, per costruzione, ogni Δ_n contiene infiniti punti di X, anche I conterrá infiniti punti di X, il che prova quanto si voleva.∎

Teorema di Heine-Borel. *Ogni insieme $X \subset R^n$ chiuso e limitato é sequenzialmente compatto.*

Dimostrazione. Sia $(x_n) \subset X$. Se (x_n) ha un'estratta costante, non abbiamo piú nulla da provare. Se tale fatto non si verifica, l'insieme costituito dai termini di tale successione é infinito. Essendo anche limitato per ipotesi, ad esso possiamo applicare il Teorema di Bolzano-Weierstrass. Tale insieme ammette, quindi, un punto x_0 di accumulazione; ovviamente x_0 é punto di accumulazione anche per X e quindi appartiene ad X, perché insieme chiuso. Osserviamo inoltre che l'intorno $B(x_0, 1)$ contiene almeno un punto x_{n_1} della nostra successione; considero quindi $B(x_0, 1/2)$ che deve contenere infiniti punti della successione data e quindi ne conterrá sicuramente uno x_{n_2} con $n_2 > n_1$; considero quindi $B(x_0, 1/3)$ che deve contenere infiniti punti della successione data e quindi ne conterrá sicuramente uno x_{n_3} con $n_3 > n_2$; cosí procedendo, costruisco un'estratta (x_{n_k}) tale che $x_{n_k} \in B(x_0, 1/k)$ per ogni $k \in N$,cioé tale che $d(x_{n_k}, x_0) < 1/k$; quindi $d(x_{n_k}, x_0) \to 0$ il che prova la tesi.∎

Teorema 9. *Sia $f : X \subset (S, d) \to (S', d')$ una funzione continua. Se $Y \subset X$ é sequenzialmente compatto, anche $f(Y)$ lo é.*

Dimostrazione. Sia $(f(x_n))$ una successione in $f(Y)$; dalla successione $(x_n) \subset Y$ possiamo estrarre una sottosuccessione (x_{n_k}) che converge ad un elemento $x_0 \in Y$, grazie all'ipotesi su Y. Ma essendo f continua, otteniamo che $(f(x_{n_k}))$ converge a $f(x_0) \in f(Y)$.∎

Teorema di Weierstrass. *Sia $f : X \subset (S, d) \to R$ una funzione continua. Se $Y \subset X$ é sequenzialmente compatto, allora f assume su Y il proprio minimo ed il proprio massimo.*

Dimostrazione. Il precedente teorema garantisce che $f(Y)$ é sequenzialmente compatto; quindi il Teorema di Heine-Borel ci permette di affermare che tale insieme é chiuso e limitato in R. Ne viene che $f(Y)$ é dotato di estremo inferiore e di estremo superiore finiti, che devono appartenere a $f(Y)$; se infatti non vi appartenessero, basterebbe notare che essi sono due punti di accumulazione per $f(Y)$ (che é chiuso) per arrivare ad una contraddizione. Quindi essi sono rispettivamente minimo e massimo per f.■

Il precedente teorema ci permette di introdurre una versione piú generale dello spazio metrico $C^0[a, b]$. Consideriamo un insieme X sequenzialmente compatto contenuto in uno spazio metrico (S, d) e quindi l'insieme $C^0(X)$ delle funzioni reali continue definite su X. Tale insieme diventa uno spazio metrico, come é facile verificare, se poniamo $d(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}$.

Anche per funzioni fra spazi metrici generali possiamo introdurre il concetto di <u>uniforme</u> <u>continuità</u>; data $f : (S, d) \to (S', d')$ diremo che essa é uniformemente continua se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in S, d(x, y) < \delta$ risulta $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Come nel caso delle funzioni reali di variabile reale é facile provare che ogni funzione uniformemente continua é continua, mentre gli stessi esempi portati in Analisi I dimostrano che esistono funzioni continue non uniformemente continue. Si ha il seguente

Teorema di Cantor-Heine. *Sia $f : X \subset (S, d) \to (S', d')$ continua. Se X é sequenzialmente compatto, allora f é uniformemente continua.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che f non sia uniformemente continua. Allora

$$\exists \bar\epsilon > 0 \quad \text{tale che} \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta, y_\delta \in X \quad \text{con} \quad d(x_\delta, y_\delta) < \delta \quad \text{e} \quad d'(f(x_\delta), f(y_\delta)) > \bar\epsilon$$

L'arbitrarietá di δ ci permette di scegliere $\delta = 1/n$ con $n \in N$. Al variare di $n \in N$ costruiamo due successioni $(x_n), (y_n) \subset X$ tali che

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad d'(f(x_n), f(y_n)) > \bar\epsilon$$

Ricordando, ora, che X é sequenzialmente compatto, estraiamo una sottosuccessione (x_{n_k}) dalla (x_n) in modo che converga ad un $x_0 \in X$. Poiché $d(x_{n_k}, y_{n_k}) < 1/n_k$ anche la successione (y_{n_k}) converge ad x_0. Per la continuitá di f abbiamo che $\lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k f(y_{n_k}) = f(x_0)$ che contrasta con la disuguaglianza $d'(f(x_n), f(y_n)) > \bar\epsilon$.■

La nozione di sequenziale compattezza puó essere usata anche per stabilire quando due insiemi "sufficientemente vicini" hanno intersezione non vuota. Occorre intanto dare la seguente definizione: dati due insiemi $X, Y \subset (S, d)$ chiameremo loro distanza il numero reale non negativo

$$d(X, Y) = \inf\{d(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

É ovvio che se $X \cap Y \neq \emptyset$, allora $d(X, Y) = 0$. Ma puó accadere che due insiemi disgiunti abbiano distanza nulla; per esempio una iperbole ha distanza zero dai suoi asintoti, cosí come l'intervallo $[a, b[$ ha distanza nulla da un qualunque insieme contenente il punto b. Ci si chiede allora quando due insiemi con distanza nulla hanno almeno un punto comune; una importante condizione sufficiente é fornita dal seguente

Teorema 10. *Siano $X, Y \subset (S, d)$ due insiemi chiusi, uno almeno dei quali sia sequenzialmente compatto. Allora se $d(X, Y) = 0$ si ha $X \cap Y \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Per definizione

$$d(X, Y) = \inf\{d(x, y) : x \in X, y \in Y\} = 0$$

Quindi, in corrispondenza ad ogni $n \in N$, esistono $x_n \in X, y_n \in Y$ tali che $d(x_n, y_n) < 1/n$ per ogni $n \in N$. Supponiamo che X sia sequenzialmente compatto; allora dalla successione (x_n) se ne puó estrarre una (x_{n_k}) convergente ad un $x_0 \in X$. Si ha anche

$$0 \leq d(y_{n_k}, x_0) \leq d(y_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) \leq \frac{1}{n_k} + d(x_{n_k}, x_0) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

e quindi $\lim_k y_{n_k} = x_0$. x_0 é quindi un punto della chiusura di Y, che peró é chiuso e quindi $x_0 \in Y$. Allora $X \cap Y \neq \emptyset$.■

In particolare, se uno dei due insiemi é costituito solo da un punto, essendo esso sequenzialmente compatto, dal fatto che la distanza di questo punto dall'altro insieme Y (che supponiamo chiuso) é zero, segue ovviamente che il punto appartiene ad Y.

Un altro concetto fondamentale é quello di connessione. Sia (S, d) uno spazio metrico e sia X un sottoinsieme di S; diremo che X é <u>connesso</u> se non esistono due sottoinsiemi A, B di X non vuoti tali che $X = A \cup B, \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ (dove la chiusura si intende nella metrica indotta su X). Non é difficile dimostrare il seguente risultato

Teorema 10. *Sia (S, d) uno spazio metrico e sia X un sottoinsieme di S. Condizione necessaria e sufficiente affinché X sia connesso é che valga una almeno delle seguenti due condizioni:*

1) non esistono due sottoinsiemi A, B di X non vuoti, aperti (nella metrica indotta) tali che $X = A \cup B, A \cap B = \emptyset$

2) non esistono due sottoinsiemi A, B di X non vuoti, chiusi (nella metrica indotta) tali che $X = A \cup B, A \cap B = \emptyset$

Osserviamo che é possibile provare che:

1) se A é connesso, anche $\overline{A}$ é connesso

2) se A, B sono non vuoti, connessi e con $A \cap B \neq \emptyset$, allora anche $A \cup B$ é connesso.

Determiniamo gli insiemi connessi nel caso particolare, ma molto importante, dello spazio metrico euclideo R

Teorema 11. *I sottoinsiemi connessi di R sono tutti e solo gli intervalli.*

Dimostrazione.Sia I un intervallo di R, che per assurdo supponiamo non connesso. Allora esistono due sottoinsiemi A, B di I non vuoti tali che $I = A \cup B, \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. Scelgo $a \in A, b \in B$ e per fissare le idee suppongo $a < b$. Considero $X = \{z \in A : a \leq z < b\}$ che sicuramente é non vuoto, perché contiene a ed é superiormente limitato da b. Sia $z_0 = \sup X$ ed osservo che $z_0 \in [a, b] \subset I$, poiché I é un intervallo. Allora $z_0 \in A$ oppure $z_0 \in B$. Suppongo $z_0 \in B$. Per la seconda proprietá dell'estremo superiore ho che fissato $\epsilon > 0$ esiste $z_\epsilon \in X \subset A$ tale che $z_0 - \epsilon < z_\epsilon < z_0$; quindi $z_0 \in \overline{A}$. Allora $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Assurdo. Allora $z_0 \notin B$ e quindi $z_0 \in A$. Si ha cosí $\emptyset \neq]z_0, b[\subset [a, b] \subset I$; l'intervallo $]z_o, b[$ non puó contenere punti di A,altrimenti verrebbe contraddetta la prima proprietá del sup; quindi esso é tutto contenuto in B, il che vuol dire che $z_0 \in \overline{B}$. Allora $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Assurdo. Viceversa, sia I un sottoinsieme connesso di R, che per assurdo non sia intervallo; allora esistono $a_1, a_2, b \in R$ con $a_1 < b < a_2$ tali che $a_1, a_2 \in I, b \notin I$. Considero $A = I \cap]-\infty, b[, B =]b, +\infty[$ ed osservo che entrambi sono sottoinsiemi di I non vuoti la cui unione é proprio I. Inoltre, $\overline{A} \subset]-\infty, b], \overline{B} \subset [b, +\infty[$ e quindi $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$.Assurdo.■

Le funzioni continue si comportano molto bene nei confronti degli insiemi connessi come dimostra il seguente risultato

Teorema 12. *Siano $(S, d), (S', d')$ due spazi metrici ed $f : S \to S'$ una funzione continua. Se $X \subset S$ é un connesso, allora $f(X)$ é un connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f(X)$ non sia connesso in S'; esistono quindi suoi sottoinsiemi A, B non vuoti la cui unione é $f(X)$ e tali che $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. Considero $E = f^{-1}(A), F = f^{-1}(B)$ ed osservo che $E, F \neq \emptyset, X = E \cup F$. Inoltre $\overline{E} \cap F = E \cap \overline{F} = \emptyset$; infatti, se esistesse $z \in \overline{E} \cap F$, avrei, innanzitutto

$f(z) \in B$; inoltre, se fosse $z \in E$ avrei $f(z) \in A \cap B \subset \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ che é assurdo; allora dovrebbe aversi $z \in DE \setminus E$; quindi dovrebbe esistere $(z_n) \subset E$ convergente a z. Per la continuitá di f dovrebbe aversi $\lim_n f(z_n) = f(z)$, da cui $f(z) \in \overline{A}$; ancora $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$, che é assurdo. In modo analogo si prova che $E \cap \overline{F} = \emptyset$, contro l'ipotesi di connessione posta su X.∎

Teorema di esistenza degli zeri. *Sia $f : X \subset (S, d) \to R$ continua con X connesso. Supponiamo esistano $x_1, x_2 \in X$ tali che $f(x_1)f(x_2) < 0$. Allora esiste $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Il Teorema precedente ci assicura che $f(X)$ é connesso in R e quindi, come giá provato, esso é un intervallo, che viste le nostre ipotesi, deve contenere sia numeri positivi che numeri negativi; quindi deve contenere anche lo zero.∎

Teorema di Darboux. *Sia $f : X \subset (S, d) \to R$ continua con X connesso e sequenzialmente compatto. Allora X assume tutti i valori compresi fra il proprio minimo ed il proprio massimo.*

La dimostrazione di questo teorema é del tutto simile a quella dell'analogo teorema per le funzioni reali di variabile reale e viene quindi omessa. Un altro importante risultato relativo agli spazi lineari metrici é il seguente

Teorema 13. *In uno spazio lineare metrico (S, d) ogni $X \neq \emptyset, X \neq S$ ha frontiera non vuota.*

Dimostrazione. Siano $p \in X, q \in S \setminus X$. Consideriamo l'insieme $\Sigma = \{z_\lambda = \lambda p + (1 - \lambda)q, \lambda \in [0, 1]\}$ che come sappiamo dall'algebra lineare é un segmento in S. É facile vedere che Σ é un chiuso di S ed é anche connesso, perché immagine di $[0, 1]$ mediante l'applicazione continua $\lambda \to z_\lambda$. Ovviamente, $E = \Sigma \cap \overline{X} \neq \emptyset$ ed anche $F = \Sigma \cap \overline{S \setminus X} \neq \emptyset$. Inoltre, E, F sono chiusi in Σ e $E \cup F = \Sigma$. Essendo Σ connesso deve essere $\overline{E} \cap F = E \cap \overline{F} = E \cap F \neq \emptyset$. Quindi $E \cap F = (\Sigma \cap \overline{X}) \cap (\Sigma \cap \overline{S \setminus X}) \neq \emptyset$ il che implica che $\overline{X} \cap \overline{S \setminus X} \neq \emptyset$. Poiché $\overline{X} \cap \overline{S \setminus X} = \partial X$ abbiamo la tesi.∎

Sia (S, d) uno spazio lineare metrico e sia X un suo sottinsieme non vuoto. Diremo che X é <u>connesso per segmenti</u> se presi due qualunque punti $x_1, x_2 \in X$ esiste una spezzata tutta contenuta in X che li congiunge. Ogni insieme connesso per segmenti é connesso; infatti, per assurdo supponiamo che X connesso per segmenti non sia connesso; allora esistono due sottoinsiemi A, B di X non vuoti tali che $X = A \cup B, \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. Scelgo $a \in A, b \in B$ e li congiungo con una spezzata $\sigma(a, b)$; é facile vedere che esistono due vertici $p, q \in \sigma(a, b)$ consecutivi tali che $p \in A, q \in B$ e denoto con I il segmento che li congiunge. Allora $A_1 = I \cap A, B_1 = I \cap B$ sono non vuoti, hanno per unione I ed inoltre $\overline{A}_1 \cap B_1 \subset \overline{A} \cap B = \emptyset, A_1 \cap \overline{B}_1 \subset A \cap \overline{B} = \emptyset$, contro la connessione di I. Quindi abbiamo la tesi.

Il viceversa é in generale falso; infatti in R^2 consideriamo l'insieme $C = \{(x, y) : x = \cos\theta, y = \sin\theta, \theta \in [0, 2\pi]\}$ (cioé la circonferenza di centro l'origine e raggio 1); C puó essere vista come l'insieme immagine dell'intervallo $[0, 2\pi]$ mediante l'applicazione $\theta \to (\cos\theta, \sin\theta)$ da R in R^2 che é continua, poiché tali sono le sue componenti; quindi C é un connesso di R^2, ma ovviamente non é connesso per segmenti.

Il viceversa é peró vero se X é aperto.

Teorema 14.*Sia X un insieme aperto di uno spazio lineare metrico. Se X é connesso, allora X é connesso per segmenti.*

Dimostrazione. Dimostreremo che preso un qualunque punto $p \in X$ esso puó essere congiunto mediante una spezzata con un qualunque altro punto $q \in X$. A tal fine, sia A il sottoinsieme dei punti $q \in X$ per i quali esiste una spezzata congiungente p e q tutta contenuta in X. É ovvio che $A \neq \emptyset$, poiché $p \in A$. Proviamo intanto che A é aperto. Sia $q \in A$; essendo X aperto esiste $B(q, r) \subset X$; preso $z \in B(q, r)$, z puó essere congiunto a q mediante un segmento contenuto in $B(q, r) \subset X$. Sappiamo,inoltre, che esiste una spezzata contenuta in X che congiunge q e p;aggiungendo a tale spezzata il segmento da q a z, otteniamo una spezzata congiungente p con z tutta contenuta in X. Quindi $B(q, r) \subset A$, che é, cosí, aperto. Considero, adesso, $B = X \setminus A$ e provo che, se B é non vuoto, deve essere aperto. Sia $q \in B$;essendo X aperto esiste $B(q, r) \subset X$;preso $z \in B(q, r)$, z puó essere congiunto a q mediante un segmento contenuto in $B(q, r) \subset X$ e quindi nessun punto di $B(q, r)$ puó appartenere ad A, altrimenti come fatto in precedenza, potremmo costruire una spezzata congiungente q e p tutta contenuta in X, il che vuol dire che q dovrebbe appartenere ad A. Ne viene cosí che $B(q, r) \subset X \setminus A$. Quindi, se B fosse non vuoto, X sarebbe unione di due aperti,non vuoti e disgiunti, contro l'ipotesi di connessione. Ne segue che $B = \emptyset$, cioé che $X = A$ che é quanto volevamo provare.■

Introduciamo infine il concetto di spazio metrico completo. Dato uno spazio metrico (S,d), ogni successione $(x_n) \subset (S, d)$ tale che

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\nu \in N \quad \text{tale che} \quad \forall n, m > \nu \quad \text{risulta} \quad d(x_n, x_m) < \epsilon$$

sará detta successione di Cauchy o fondamentale. Lo spazio metrico (S, d) si dirá completo se ogni sua successione di Cauchy risulta convergente. Dall'Analisi I sappiamo che R é completo se dotato della metrica euclidea, mentre Q con la metrica indotta da R non lo é; infatti la successione $(1 + 1/n)^n$ risulta di Cauchy in R e quindi anche in Q, ma come sappiamo non converge in Q. Il fatto che R sia completo permette di provare il seguente

Teorema 15. *Lo spazio euclideo R^n é completo.*

Dimostrazione. Sia $(\overline{x}_p)$ una successione di Cauchy in R^n, dove $\overline{x}_p = (x_p^1, x_p^2, ...x_p^n)$ per ogni $p \in N$. Poiché

$$|x_q^i - x_m^i| \leq d(\overline{x}_q, \overline{x}_m) \qquad \forall q, m \in N, i = 1, 2, ...n$$

anche le successioni $(x_p^i) \subset R$ sono di Cauchy, per ogni $i = 1, 2, ...n$. Quindi esiste $x^i \in R$ tale che $\lim_p x_p^i = x^i$ per ogni $i = 1, 2, ...n$. Come sappiamo queste relazioni di limite implicano che $(\overline{x}_p)$ converge in R^n all'elemento $\overline{x} = (x^1, x^2, ...x^n)$, che é quanto volevamo.■

Lo spazio $C^0(X), X$ sequenzialmente compatto é pure completo se dotato della metrica Lagrangiana (v. Pagani,Salsa,vol.II). Mentre se $X = [a, b]$ e la metrica é quella integrale, tale spazio metrico non é completo, come proveremo adesso. Consideriamo $X = [0, 1]$ e quindi la successione

$$x_n(t) = n\left(\sqrt{t + \frac{1}{n}} - \sqrt{t}\right) \qquad n \in N$$

Fissato $t \in]0, 1]$ si ha

$$\lim_n x_n(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

(abbiamo usato il limite $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{t+h}-\sqrt{t}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$). Calcoliamo adesso

$$\int_0^1 \left| x_n(t) - \frac{1}{2\sqrt{t}} \right| dx$$

dove l'integrale va inteso in senso generalizzato, perché la funzione integranda é generalmente continua. Osserviamo intanto che dal Teorema di Lagrange applicato alla funzione $g(t) = \sqrt{t}$ nell'intervallo $[t, t + 1/n]$ risulta che esiste $c \in]t, t + 1/n[$ tale che

$$n\left(\sqrt{t + \frac{1}{n}} - \sqrt{t}\right) = \frac{1}{2\sqrt{c}} \leq \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

cosicché possiamo eliminare il valore assoluto dentro l'integrale e scrivere

$$\int_0^1 \left| x_n(t) - \frac{1}{2\sqrt{t}} \right| dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2\sqrt{t}} - x_n(t) \right] dx =$$

$$\left[\sqrt{t} - n\left(\frac{2}{3}\sqrt{\left(t + \frac{1}{n}\right)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{t^3} \right) \right]_0^1 =$$

$$1 - n\left(\frac{2}{3}\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} - \frac{2}{3} \right) + n\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{n^3}} = 1 - n\left(\frac{2}{3}\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{n}}$$

Passando al limite per $n \to \infty$ otteniamo

$$\lim_n \int_0^1 \left[\frac{1}{2\sqrt{t}} - x_n(t) \right] dx = 0$$

(abbiamo usato il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$). Allora poiché si ha

$$d_1(x_n, x_m) \le \int_0^1 \left| x_n(t) - \frac{1}{2\sqrt{t}} \right| dx + \int_0^1 \left| \frac{1}{2\sqrt{t}} - x_m(t) \right| dx$$

risulta facilmente che (x_n) é una successione di Cauchy nel nostro spazio metrico. Supponiamo adesso che essa converga ad una funzione $g \in C^0[0,1]$ nella metrica considerata; allora si ha

$$\int_0^1 \left| g(t) - \frac{1}{2\sqrt{t}} \right| dx = \int_0^1 |g(t) - x_n(t)| \, dx + \int_0^1 \left| x_n(t) - \frac{1}{2\sqrt{t}} \right| dx$$

da cui, visto quanto detto in precedenza, segue che

$$\int_0^1 \left| g(t) - \frac{1}{2\sqrt{t}} \right| dx = 0$$

Da noti risultati sulla teoria dell'integrazione svolta in Analisi I segue che

$$\left| g(t) - \frac{1}{2\sqrt{t}} \right| = 0$$

almeno in $]0,1]$. Ma ció porta alla contraddizione seguente

$$g(0) = \lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{2\sqrt{t}} = +\infty$$

Questo mostra che (x_n) non puó convergere nella metrica integrale, pur essendo una successione di Cauchy. Ricordiamo anche che, negli spazi metrici completi, vale il Teorema di Banach-Caccioppoli per il quale rimandiamo al testo Pagani,Salsa,vol.II. Qui vogliamo solo osservare che tale teorema non vale in spazi metrici non completi; infatti in $S =]0, 1/4]$ l'applicazione $f(x) = x^2$, pur essendo una contrazione, non ha punti fissi; inoltre, tale teorema non vale se consideriamo applicazioni lipschitziane che non siano contrazioni; infatti, in $S = c_0$ consideriamo l'applicazione $T : S \to S$ definita ponendo

$$T(x) = (1, x_1, x_2, ...) \qquad \forall x \in S$$

É facile vedere che

$$d(T(x), T(y)) \le d(x, y) \qquad \forall x, y \in S$$

Se T avesse un punto fisso $\overline{x} = (x_1, x_2, ...)$ dovrebbe accadere che

$$(1, x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, x_3.....)$$

da cui dovrebbe seguire che

$$1 = x_1; x_1 = x_2; x_2 = x_3; .....x_n = x_{n+1}..... \qquad \forall n \in N$$

e quindi

$$1 = x_n \qquad \forall n \in N$$

contro il fatto che $\overline{x} \in c_0$.

Esercizio. Sempre in $S = c_0$ si consideri l'applicazione

$$T(x) = (1 - d(\Theta, \overline{x}), x_1, x_2, ...) \qquad \forall x \in S$$

da S in S e si dimostri che pur avendosi

$$d(T(x), T(y)) \leq d(x, y) \qquad \forall x, y \in S$$

essa non ha punti uniti.

Infine osserviamo che negli spazi metrici completi il concetto di sequenziale compattezza é equivalente ad altri due importanti concetti come stabilisce il seguente risultato che non proviamo

Teorema 16. *Sia (S, d) uno spazio metrico completo e sia X un suo sottoinsieme. Le tre condizioni seguenti sono allora equivalenti:*

1) X é sequenzialmente compatto

2) X é compatto, cioé per ogni famiglia $\mathcal{A}$ di aperti di S la cui unione contiene X (per questo motivo essa sará chiamata ricoprimento o copertura di X) esiste una sottofamiglia finita la cui unione contiene X

3) X é totalmente limitato, cioé per ogni $\epsilon > 0$ esiste un ricoprimento finito di aperti per X ognuno con diametro minore od uguale ad ϵ,ed anche chiuso.

ALCUNI ESEMPI RELATIVI ALLA TEORIA DELLE FUNZIONI DIFFERENZIABILI DI PIÙ VARIABILI REALI

1. Esempio di funzione non continua in un punto, che possiede tutte le derivate direzionali nello stesso punto.

La funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right)^2 & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

non è continua nell'origine, come si vede considerando la sua restrizione alla parabola $y = x^2$, che ha limite uguale ad $\frac{1}{4}$ per $x \to 0$; tuttavia essa ha derivate direzionali in ogni direzione nell'origine; se infatti consideriamo un versore (v_1, v_2) per calcolare tale derivata direzionale dobbiamo calcolare il

$$\lim_{t\to 0} \frac{\left(\frac{t^3v_1^2v_2}{t^4v_1^4+t^2v_2^2}\right)^2}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{tv_1^4v_2^2}{(t^2v_1^4+v_2^2)^2}$$

che vale sempre 0 sia nel caso $v_2 = 0$ che nel caso $v_2 \neq 0$.■

2. Esempio di funzione non differenziabile in un punto, che possiede tutte le derivate direzionali nello stesso punto ed è ivi continua.

Sia data la funzione seguente

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|^{2+\alpha}}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

essendo α un fissato numero reale tale che $0 < \alpha < 1$. È ben noto che si ha $|2x|y|^2| \leq x^2 + y^4$ in $\mathbb{R}^2$ cosicché

$$0 \leq \left|\frac{x|y|^{2+\alpha}}{x^2+y^4}\right| \leq \frac{1}{2}|y|^\alpha$$

disuguaglianza da cui segue facilmente la continuità della f nell'origine. Sia adesso $\overline{v} = (v_1, v_2)$, con $v_2 \neq 0$, un versore arbitrario; si ha

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(t\overline{v}) - f(\overline{0})}{t}\right| = \lim_{t\to 0}\left|\frac{t^{3+\alpha}v_1|v_2|^{2+\alpha}}{t^2(v_1^2+t^2v_2^4)}\frac{1}{t}\right| = \lim_{t\to 0}\left|t^\alpha\frac{v_1|v_2|^{2+\alpha}}{v_1^2+t^2v_2^4}\right| = 0;$$

notiamo anche che se $v_2 = 0$ si ha facilmente $f_x(0,0) = 0$, cosicché possiamo concludere che f ammette derivate direzionali in qualunque direzione in $\overline{0}$ (ed esse valgono tutte 0). Proviamo adesso che non si ha differenziabilità di f nell'origine. Se vi fosse differenziabilità dovrebbe accadere (con $\overline{h} \neq \overline{0}$) che

$$\lim_{\|\overline{h}\|\to 0} \frac{f(\overline{0}+\overline{h}) - f(\overline{0}) - (\nabla f(\overline{0}), \overline{h})}{\|\overline{h}\|} = 0;$$

scegliamo allora $\overline{h} = (h^2, h), h \neq 0$; si vede facilmente (la dimostrazione viene lasciata allo studente) che con una tale scelta di $\overline{h}$ il precedente limite non vale zero; quindi f non è differenziabile nell'origine.

La funzione appena studiata è anche un esempio di funzione non differenziabile per la quale vale la identità

$$(\nabla f(\overline{x}_0), \overline{v}) = f_{\overline{v}}(\overline{x}_0) \qquad \forall \overline{v} \in \mathbb{R}^n, \|\overline{v}\| = 1.■$$

3. Esempio di funzione differenziabile in un punto, ma con derivate parziali non continue nello stesso punto.

Si consideri la seguente $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dato che f, definita in tutto $\mathbb{R}^2$, non cambia scambiando il ruolo di x ed y, tutto quanto diremo per f_x varrà anche per f_y; si ha $f(x,0) = x^2 \sin\frac{1}{x^2}, f(0,0) = 0$ cosicché esiste $f_x(0,0) = 0$; inoltre, per $(x,y) \neq (0,0)$ si ha $f_x(x,y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$ da cui segue facilmente la non continuità di f_x nell'origine (si studi la restrizione alla prima bisettrice). Come già detto, avremo allora $f_y(0,0) = 0$, e per $(x,y) \neq (0,0)$ anche $f_y(x,y) = 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$ da cui segue facilmente la non continuità di f_y nell'origine (si studi la restrizione alla prima bisettrice). Tuttavia, f è differenziabile nell'origine; infatti,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-(f_x(0,0)x+f_y(0,0)y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0.\blacksquare$$

4. Esempio di funzione non derivabile composta da funzioni derivabili.

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dell'Esempio 2 che è non differenziabile nell'origine, ma risulta ivi derivabile in ogni direzione, e quindi le funzioni $g_1(x) = x^2, g_2(x) = x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabili in ogni punto di $\mathbb{R}$; la funzione composta $f(g_1, g_2)$ è definita come segue

$$(f(g_1,g_2)(x) = \begin{cases} \frac{x^2|x|^{2+\alpha}}{x^4+x^4} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = \frac{|x|^\alpha}{2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

che, come noto dall'Analisi I, non è derivabile nell'origine (si ricordi che $0 < \alpha < 1$).$\blacksquare$

5. Versione più generale del Teorema di Schwarz ed esempio di funzione per la quale non si ha la invertibilità dell'ordine di derivazione.

Innanzitutto osserviamo che si ha la seguente versione (che non dimostriamo) del Teorema di Schwarz, più generale di quella contenuta nel testo

Teorema di Schwarz.*Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, A$ aperto. Sia $\overline{x}_0 \in B(\overline{x}_0, r) \subset A$. Supponiamo che $\overline{v}, \overline{w}$ siano due versori di $\mathbb{R}^n$ tali che esistano le derivate $f_{\overline{v}}, f_{\overline{w}}, f_{\overline{v}\overline{w}}$ in tutto $B(\overline{x}_0, r)$ con $f_{\overline{v}\overline{w}}$ continua in $\overline{x}_0$. Allora esiste $f_{\overline{w}\overline{v}}(\overline{x}_0)$ e si ha $f_{\overline{w}\overline{v}}(\overline{x}_0) = f_{\overline{v}\overline{w}}(\overline{x}_0)$.*$\blacksquare$

Consideriamo, adesso, la funzione definita come segue

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Notiamo intanto che $f_x(0,0)$ esiste e vale zero, in quanto derivata della funzione di una variabile $x \to f(x,0)$ che risulta identicamente nulla; in modo analogo si prova che $f_y(0,0)=0$; calcoliamo adesso $f_x(x,y)$ negli altri punti di $\mathbb{R}^2$; si ha

$$f_x(x,y) = \frac{[y(x^2-y^2)+2x^2y](x^2+y^2)-2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{yx^4+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}.$$

Per calcolare $f_y(x,y)$ è sufficiente osservare che $f(x,y)=-f(y,x)$; ne segue che

$$f_y(x,y) = -\frac{xy^4+4y^2x^3-x^5}{(x^2+y^2)^2} \qquad \forall (x,y) \neq (0,0).$$

Calcoliamo adesso $f_{xy}(0,0)$; a tal fine si ha

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} -\frac{y^5}{y^5} = -1,$$

mentre dall'identità $f(x,y)=-f(y,x)$ segue che $f_{yx}(0,0)=1$.■

Esercizio. Provare che per la funzione $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\frac{x}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

si ha $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.■

ESTREMI VINCOLATI

Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange. *Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, A$ aperto, una funzione di classe C^1 in A. Siano $g_i : A \to \mathbb{R}, i = 1,2,....p, p < n$, funzioni, anch'esse di classe C^1 in A. Supponiamo che esista un punto $\overline{z}_0 \in A \cap \{\overline{z} : g_i(\overline{z}) = 0, i = 1,2,....p\}$ che sia punto di estremo relativo vincolato per f sotto le condizioni $\overline{g}_i = \overline{0}, i = 1,2,....p$. Inoltre, la matrice i cui elementi sono le funzioni g_{ix_j} abbia rango massimo in $\overline{z}_0$. Allora esistono unici $\lambda_1^0, \lambda_2^0, ...\lambda_p^0 \in \mathbb{R}$ (detti Moltiplicatori di Lagrange) tali che*

$$\nabla f(\overline{z}_0) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^0 \nabla g_i(\overline{z}_0) = \overline{0}.$$

Dimostrazione. La dimostrazione sarà fatta nel caso $n=2, p=1$. Supponiamo, tanto per fissare le idee, che $\overline{z}_0$ sia un punto di massimo relativo vincolato per f, cioé che esista un intorno $U \subset A$ di $\overline{z}_0$ tale che

$$f(\overline{z}) \leq f(\overline{z}_0) \qquad \forall \overline{z} \in U \quad \text{con} \quad g_1(\overline{z}) = 0 \qquad (6).$$

L'ipotesi

"la matrice i cui elementi sono le funzioni g_{ix_j} abbia rango massimo in $\overline{z}_0$" si traduce allora nella condizione $\nabla g(\overline{z}_0) \neq \overline{0}$. Operando sulla restrizione di g all'intorno U, dal Teorema del Dini e dal Teorema di Derivazione della Funzione Implicita ricaviamo l'esistenza di $B(\overline{x}_0, h_0)$ e $B(\overline{y}_0, k_0)$ con $B(\overline{x}_0, h_0) \times B(\overline{y}_0, k_0) \subset U$ e di un'unica funzione $\overline{\rho} : B(\overline{x}_0, h_0) \to B(\overline{y}_0, k_0)$ di classe C^1 in $B(\overline{x}_0, h_0)$ tale che $\overline{\rho}(\overline{x}_0) = \overline{y}_0$ e $\overline{g}(\overline{x}, \overline{\rho}(\overline{x})) = \overline{0}$ per ogni $\overline{x} \in B(\overline{x}_0, h_0)$. Posto, adesso, $\phi(\overline{x}) = f(\overline{x}, \overline{\rho}(\overline{x}))$ per ogni $\overline{x} \in B(\overline{x}_0, h_0)$, possiamo concludere, grazie alla (6), che

$$\phi(\overline{x}) = f(\overline{x}, \overline{\rho}(\overline{x})) \leq f(\overline{x}_0, \overline{y}_0) = f(\overline{x}_0, \overline{\rho}(\overline{x}_0)) = \phi(\overline{x}_0) \qquad \forall \overline{x} \in B(\overline{x}_0, h_0)$$

avendo tenuto conto del fatto che $\overline{x} \in B(\overline{x}_0, h_0)$ implica che $(\overline{x}, \overline{\rho}(\overline{x})) \in U$ e che $\overline{g}(\overline{x}, \overline{\rho}(\overline{x})) = \overline{0}$. Poiché la funzione ϕ è di classe C^1 in $B(\overline{x}_0, h_0)$, deve aversi $\nabla\phi(\overline{x}_0) = \overline{0}$. Dal Teorema di Derivazione delle Funzioni Composte segue allora che

$$\overline{0} = \nabla\phi(\overline{x}_0) = J_{f,\overline{x}}(\overline{x}_0, \overline{y}_0) + J_{f,\overline{y}}(\overline{x}_0, \overline{y}_0) J_{\overline{\rho}}(\overline{x}_0) \qquad (7).$$

Poiché (si veda l'Osservazione 1)

$$J_{\overline{\rho}}(\overline{x}_0) = -\left[J_{\overline{g},\overline{y}}(\overline{x}_0, \overline{y}_0)\right]^{-1} J_{\overline{g},\overline{x}}(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$$

dalla (7) abbiamo che

$$\overline{0} = J_{f,\overline{x}}(\overline{x}_0, \overline{y}_0) - J_{f,\overline{y}}(\overline{x}_0, \overline{y}_0)\left[J_{\overline{g},\overline{y}}(\overline{x}_0, \overline{y}_0)\right]^{-1} J_{\overline{g},\overline{x}}(\overline{x}_0, \overline{y}_0);$$

d'altra parte è ovvio che

$$\overline{0} = J_{f,\overline{y}}(\overline{x}_0, \overline{y}_0) - J_{f,\overline{y}}(\overline{x}_0, \overline{y}_0)\left[J_{\overline{g},\overline{y}}(\overline{x}_0, \overline{y}_0)\right]^{-1} J_{\overline{g},\overline{y}}(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$$

cosicché il vettore $\overline{\lambda}_0 = -\left\{\left[J_{\overline{g},\overline{y}}(\overline{x}_0, \overline{y}_0)\right]^{-1} J_{\overline{g},\overline{x}}(\overline{x}_0, \overline{y}_0)\right\}^T$ verifica la condizione $\nabla f(\overline{z}_0) + \overline{\lambda}_0^T J_{\overline{g}}(\overline{z}_0) = \overline{0}$. Proviamo, infine, l'unicità del moltiplicatore. Se $\overline{\lambda}_1$ fosse un altro vettore di $\mathbb{R}^p$ tale che $\nabla f(\overline{z}_0) + \overline{\lambda}_1^T J_{\overline{g}}(\overline{z}_0) = \overline{0}$, si avrebbe anche che $(\overline{\lambda}_0^T - \overline{\lambda}_1^T) J_{\overline{g}}(\overline{z}_0) = \overline{0}$; le componenti del vettore $\overline{\lambda}_0^T - \overline{\lambda}_1^T$ sarebbero quindi soluzione del sistema $\overline{y}^T J_{\overline{g}}(\overline{z}_0) = \overline{0}$, dove $\overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ ... \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$, di $n+p$ equazioni lineari nelle p incognite $y_1, y_2, ...y_p$, che ammette solo la soluzione nulla per l'ipotesi fatta su $J_{\overline{g}}(\overline{z}_0)$ (si usi il Teorema di Rouché-Capelli). Quindi $\overline{\lambda}_0 = \overline{\lambda}_1$.■

Osservazione 2. Supponiamo che valgano le ipotesi del Teorema precedente. Allora la sua tesi può essere scritta come segue: esiste un vettore $\overline{\lambda}_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 \\ ... \\ ... \\ \lambda_p^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ (le cui componenti vengono a volte dette *"moltiplicatori di Lagrange"*) tale che

$$f_{z_j}(\overline{z}_0) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^0 g_{iz_j}(\overline{z}_0) = 0 \qquad \forall j = 1, 2, ...n + p \qquad (8).$$

Il punto $\begin{pmatrix} \overline{z}_0 \\ \overline{\lambda}_0 \end{pmatrix}$ è allora un punto critico per la funzione (detta *Funzione Lagrangiana*) seguente

$$\mathcal{L}(\overline{z}, \overline{\lambda}) = f(\overline{z}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(\overline{z}) \qquad \overline{z} \in A, \overline{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ ... \\ ... \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \qquad (9)$$

(si tenga anche conto del fatto che $\overline{g}(\overline{z}_0) = \overline{0}$).■

Teorema 7.*Siano $f, g_1, g_2, ...g_p : A \subset \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}, A$ aperto, $p+1$ funzioni di classe C^2 in A. Posto $S = \{\overline{x} \in A : g_i(\overline{x}) = 0, i = 1, 2, ...p\}$, sia $\overline{x}_0 \in S$ un punto di estremo relativo vincolato per f rispetto ad S tale che la matrice Jacobiana $J_{\overline{g}}(\overline{x}_0)$, dove $\overline{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ ... \\ ... \\ g_m \end{pmatrix}$, abbia caratteristica p, e sia $\overline{\lambda}_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 \\ \lambda_2^0 \\ ... \\ ... \\ \lambda_p^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ il relativo moltiplicatore di Lagrange. Denotiamo con $C(S, \overline{x}_0)$ l'insieme delle direzioni tangenziali ai vincoli, cioé l'insieme*

$$C(S, \overline{x}_0) = \{\overline{h} \in \mathbb{R}^{n+p} : (\nabla g_i(\overline{x}_0), \overline{h}) = dg_i(\overline{x}_0)(\overline{h}) = 0, i = 1, 2, ...p\}$$

e con $q : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}$ la forma quadratica seguente

$$q(\overline{h}) = \sum_{i,j=1}^{n+p} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x}_0) h_i h_j \qquad \forall \overline{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ ... \\ ... \\ h_{n+p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+p}$$

dove si è posto $F(\overline{x}) = \mathcal{L}(\overline{x}, \overline{\lambda}_0) = f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^0 g_i(\overline{x}) : A \to \mathbb{R}$. Se $\overline{x}_0$ è un punto di massimo (risp. minimo) relativo vincolato per f rispetto ad S, allora $q(\overline{h}) \leq 0$ (risp. $q(\overline{h}) \geq 0$) per ogni $\overline{h} \in C(S, \overline{x}_0)$.

Il risultato seguente è, invece, una condizione sufficiente per la determinazione dei punti di estremo relativo vincolato

Teorema 8.*Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, A$ aperto, una funzione di classe C^2 in A. Sia $\overline{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ ... \\ ... \\ g_p \end{pmatrix} : A \to \mathbb{R}^p$ un'altra funzione, anch'essa di classe C^2 in A. Supponiamo che esista un punto $\overline{z}_0 \in A$ e un vettore*

$\overline{\lambda}_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 \\ ... \\ ... \\ \lambda_p^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ *tale che il punto* $\begin{pmatrix} \overline{z}_0 \\ \overline{\lambda}_0 \end{pmatrix}$ *sia punto critico per la funzione Lagrangiana* $\mathcal{L}$ *(definita dalla (9)). Inoltre, posto* $F(\overline{x}) = \mathcal{L}(\overline{x}, \overline{\lambda}_0), \overline{x} \in A$, *e* $q(\overline{h}) = \sum_{i,j=1}^{n+p} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{z}_0) h_i h_j$ *per ogni* $\overline{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ ... \\ ... \\ h_{n+p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+p}$, *si abbia* $q(\overline{h}) > 0$ *(risp.* $q(\overline{h}) < 0$*) per ogni vettore* $\overline{h} \in C(S, \overline{z}_0)$. *Allora,* $\overline{z}_0$ *è punto di minimo (risp. massimo) relativo vincolato per* f.

UN'OSSERVAZIONE SULL'ESATTEZZA DI FORME DIFFERENZIALI LINEARI

Enunciamo un'utile condizione sufficiente per l'esattezza di certe forme differenziali lineari.

Ricordiamo

a) che una curva piana regolare a tratti, semplice e chiusa viene detta *curva di Jordan*

b) che si ha il seguente

Teorema di Jordan. *Data una curva di Jordan essa divide il piano privato del sostegno della curva stessa in due aperti non vuoti connessi dei quali il sostegno della curva è la completa frontiera; uno di essi è non limitato, mentre l'altro, detto dominio di Jordan, è limitato.*

Definiamo, anche, un certo tipo di insieme piano, detto *insieme a connessione multipla* (o *p+1 volte connesso*). Sia γ_0 una curva di Jordan e sia D_0 il relativo dominio di Jordan; siano, poi, $\gamma_1, \gamma_2, ...\gamma_p$ delle curve di Jordan con sostegno contenuto nell'interno di D_0 e tali che, detti $D_1, D_2, ...D_p$ i relativi domini di Jordan, essi sianoa due a due disgiunti; l'insieme $A = \overset{o}{D}_0 \setminus (D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_p)$ è un aperto connesso che viene detto *insieme a connessione multipla* (o *p+1 volte connesso*). Ogni dominio di Jordan $D_i, i = 1, 2, ...p$, viene detto *lacuna.* Si ha il seguente

Teorema. *Sia* A *un insieme p+1 volte connesso. Siano* $X, Y : A \to \mathbb{R}$ *funzioni di classe* C^1 *tali che la forma differenziale* $\omega = Xdx + Ydy$ *sia chiusa. Supponiamo che per ogni lacuna* D_i *esista una curva di Jordan* δ_i *il cui relativo dominio* Δ_i *contiene* D_i, *ma ha intersezione vuota con le rimanenti lacune* $D_j, j \neq i$, *e tale che* $\int_{\delta_i} \omega = 0$. *Allora la forma differenziale* ω *è esatta.*

Il precedente risultato vale anche se qualche lacuna si riduce ad un punto e se A non è limitato.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

In questo paragrafo studieremo il problema di determinare *soluzioni o integrali* di alcuni tipi di equazioni differenziali; per esse è nota l'esistenza di tali soluzioni sotto le ipotesi che qui di seguito useremo.

I) **Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili.** Siano X, Y due funzioni reali di variabile reale definite, rispettivamente, in arbitrari intervalli (a, b) e (c, d), ivi continue. Chiameremo *equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili*, e scriveremo

$$y' = X(x)Y(y),$$

il problema di trovare funzioni y verificanti le seguenti condizioni:

I1) $y : (\alpha, \beta) \subseteq (a, b) \to (c, d)$

I2) $y \in C^1[(\alpha, \beta)]$

I3) si ha

$$y'(x) = X(x)Y(y(x)) \qquad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Una tale equazione viene detta del primo ordine perché la derivata di ordine massimo della funzione incognita che vi compare è la derivata prima.

Vediamo come si possono determinare gli integrali di una equazione differenziale a variabili separabili.

Supponiamo innanzitutto che l'insieme $\mathbb{K}_0 = \{k \in (c, d) : Y(k) = 0\}$ sia non vuoto; in tal caso ogni funzione $y(x) = k, k \in \mathbb{K}_0$, definita in tutto (a, b) verifica le condizioni precedenti (la dimostrazione viene lasciata allo studente); essa è quindi un *integrale costante* della equazione differenziale considerata.

Cerchiamo, adesso, soluzioni definite in un opportuno $(\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$ tali che nel loro insieme immagine non vi siano zeri della funzione Y. Se $y(x)$ è una siffatta soluzione, dovendo essere vera la condizione (I3) avremo

$$\frac{y'(x)}{Y(y(x))} = X(x) \qquad \forall x \in (\alpha, \beta) \tag{1.}$$

Considerando la restrizione della funzione Y all'intervallo $y[(\alpha, \beta)]$ abbiamo che essa non si annulla nel suddetto intervallo; la funzione $\frac{1}{Y}$ è così ivi continua e quindi dotata di primitive; sia A una di esse. Sia, poi, B una primitiva di X; dalla (1) integrando rispetto ad x su (α, β) si ricava

$$A(y(x)) = B(x) + c \qquad \forall x \in (\alpha, \beta) \tag{2.}$$

Osserviamo, ora, che A è derivabile e la sua derivata è $\frac{1}{Y}$, funzione sempre positiva o sempre negativa in $y[(\alpha,\beta)]$ (si ragioni per assurdo, applicando il Teorema di Esistenza degli Zeri); possiamo affermare che la derivata di A ha sempre lo stesso segno e quindi che A risulta invertibile. Detta A^{-1} la sua funzione inversa, applicandola alla (2), otteniamo

$$y(x) = A^{-1}(B(x)+c) \qquad \forall x \in (\alpha,\beta) \qquad (3).$$

È facile vedere (la dimostrazione viene lasciata allo studente) che la (3) fornisce un integrale, detto *integrale di secondo tipo*, dell'equazione in esame.

Ci chiediamo, adesso, se abbiamo così trovato tutti gli integrali dell'equazione considerata. Si abbia, intanto, $(\alpha,\beta) \neq (a,b)$; può, allora, accadere che esistano altri integrali (che chiameremo *integrali di tipo misto*) dell'equazione; infatti, supponendo, per esempio, che esista $c_0 \in R$ tale che

$$\lim_{x\to\alpha} A^{-1}(B(x)+c_0) = k \in \mathbb{K}_0$$

si vede abbastanza facilmente (la dimostrazione viene lasciata allo studente) che la funzione seguente

$$y(x) = \begin{cases} k & x \in (a,\alpha] \\ A^{-1}(B(x)+c_0) & x \in [\alpha,\beta) \end{cases}$$

è ancora un integrale dell'equazione. Soluzioni di tipo misto ne possono ovviamente esistere altre; per esempio si supponga che per due valori $c_1, c_2 \in R$ della costante $c \in R$ i corrispondenti integrali del secondo tipo, cioé

$$y_1(x) = A^{-1}(B(x)+c_1) \qquad x \in (\alpha_1,\beta_1)$$

$$y_2(x) = A^{-1}(B(x)+c_2) \qquad x \in (\alpha_2,\beta_2),$$

siano tali che $\beta_1 \leq \alpha_2$ ed inoltre

$$\lim_{x\to\beta_1} A^{-1}(B(x)+c_1) = \lim_{x\to\alpha_2} A^{-1}(B(x)+c_2) = k \in \mathbb{K}_0;$$

allora (la dimostrazione viene lasciata allo studente) anche la funzione seguente risulta soluzione dell'equazione data

$$y(x) = \begin{cases} A^{-1}(B(x)+c_1) & x \in (\alpha_1,\beta_1] \\ k & x \in [\beta_1,\alpha_2] \\ A^{-1}(B(x)+c_2) & x \in [\alpha_2,\beta_2) \end{cases}.$$

In definitiva, possiamo affermare che esistono soluzioni di tipo misto se

i) l'insieme $\mathbb{K}_0$ è non vuoto

ii) esiste una soluzione y^* del secondo tipo definita in un sottointervallo proprio (α, β) di (a, b),

iii) esiste $\lim_{x\to\alpha} Y(y^*(x)) \in \mathbb{K}_0$ oppure esiste $\lim_{x\to\beta} Y(y^*(x)) \in \mathbb{K}_0$.

Viceversa, supponiamo che $\overline{y} : (\alpha, \beta) \to (c, d)$ sia un integrale di tipo misto, tale che esistano x_1, x_2 con $Y(\overline{y}(x_1)) = 0, Y(\overline{y}(x_2)) \neq 0$ (per fissare le idee sia $x_1 < x_2$); se $Z = \{x \in [x_1, x_2[: Y(\overline{y}(x)) = 0\}$, allora Z ha massimo c (la dimostrazione viene lasciata allo studente); quindi $Y(\overline{y}_{|]c,x_2[}(x)) \neq 0$, cosicché la restrizione di $\overline{y}$ a $]c, x_2]$ è integrale del secondo tipo; inoltre, $\lim_{x\to c} Y(\overline{y}(x)) = 0$, ma anche $\lim_{x\to c} Y(\overline{y}(x)) = Y(\overline{y}(c))$, da cui $Y(\overline{y}(c)) = 0$; quindi esiste $\lim_{x\to c} \overline{y}(x) \in \mathbb{K}_0$. È allora ovvio che le tre condizioni sopra scritte sono anche necessarie per l'esistenza di integrali di tipo misto.■

Esempio 1. Consideriamo l'equazione $y' = y$ dove $X(x) = 1, Y(y) = y$ con $(a, b) = (c, d) = R$; la funzione $y(x) = 0, x \in R$, è l'unica (a meno di restrizioni) soluzione costante; cerchiamo adesso soluzioni $y(x)$ positive o negative nel proprio dominio (si noti che una soluzione del secondo tipo non può assumere valori positivi e valori negativi nello stesso intervallo, poiché altrimenti assumerebbe anche il valore 0); è facile vedere (la dimostrazione viene lasciata allo studente) che deve essere $y(x) = he^x$ con $h \in R, h \neq 0, x \in R$; poiché non vale la condizione (ii), possiamo concludere che non esistono soluzioni di tipo misto. ■

Esempio 2. Consideriamo l'equazione $y' = \sqrt{|y-1|}$ dove $X(x) = 1, Y(y) = \sqrt{|y-1|}$ con $(a, b) = (c, d) = R$; la funzione $y(x) = 1, x \in R$, è l'unica (a meno di restrizioni) soluzione costante; cerchiamo adesso soluzioni $y(x)$ che nel loro insieme immagine non abbiano il valore 1, quindi soluzioni y tali che $y(x) < 1$ oppure $y(x) > 1$ nel proprio dominio (si noti che una soluzione del secondo tipo non può assumere valori maggiori di 1 e valori minori di 1, poiché altrimenti in qualche punto dovrebbe valere 1). Se cerchiamo soluzioni con $y(x) > 1$ possiamo procedere come segue; dalla (I3) si ha

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)-1}} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{y(x)-1} = x + h \qquad h \in R;$$

deve essere $x + h > 0$ e quindi $x \in]-h, +\infty[= (\alpha, \beta)$; ne segue che le funzioni

$$y_h(x) = \frac{(x+h)^2}{4} + 1 :]-h, +\infty[\to]1, +\infty[, \qquad h \in R$$

sono soluzioni del secondo tipo; in modo analogo possiamo ricavare che le funzioni

$$y_k(x) = 1 - \frac{(x+k)^2}{4} :]-\infty, -k[\to]-\infty, 1[, \qquad k \in R$$

sono soluzioni del secondo tipo; abbiamo così determinato tutte le soluzioni dei primi due tipi dell'equazione data. Poiché sono verificate le condizioni (i) e (ii) ed inoltre vale la (iii), dal momento che

$$\lim_{x\to -h+} \frac{(x+h)^2}{4} + 1 = 1 \qquad , \qquad \lim_{x\to -k-} 1 - \frac{(x+k)^2}{4} = 1,$$

possiamo concludere che esistono anche soluzioni di tipo misto; tali sono infatti le funzioni seguenti

$$y_1(x) = \begin{cases} 1 & x \in]-\infty, -h] \\ \frac{(x+h)^2}{4} + 1 & x \in]-h, +\infty[\end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 1 - \frac{(x+k)^2}{4} & x \in]-\infty, -k[\\ 1 & x \in [-k, +\infty[\end{cases}$$

$$y_3(x) = \begin{cases} 1 - \frac{(x+k)^2}{4} & x \in]-\infty, -k[\\ 1 & x \in]-k, -h] \\ \frac{(x+h)^2}{4} + 1 & x \in]-h, +\infty[\end{cases} \qquad (\text{se} \quad k \geq h).\blacksquare$$

II) **Equazioni differenziali lineari di primo ordine a coefficienti non costanti.** Siano $a, g : (a, b) \to R$ due funzioni continue. Chiameremo *equazione differenziale lineare di primo ordine a coefficienti non costanti*, e scriveremo

$$y' + a(x)y = g(x),$$

il problema di trovare una funzione $y = y(x)$ soddisfacente le condizioni seguenti:

II1) $y : (a, b) \to R$

II2) $y \in C^1[(a, b)]$

II3) y verifica l'identità

$$y'(x) + a(x)y(x) = g(x) \qquad \forall x \in (a, b).$$

Una tale equazione viene detta del primo ordine perché la derivata di ordine massimo della funzione incognita che vi compare è la derivata prima.

Vediamo ora come si calcolano tali integrali. Si consideri, innanzitutto, l'equazione seguente, detta *equazione omogenea associata*,

$$y' = -a(x)y$$

che risulta essere una equazione a variabili separabili; essa ammette la soluzione costante $y(x) = 0$ in (a, b) ed inoltre le soluzioni non costanti (non contenenti 0 nel loro insieme immagine)

$$y(x) = e^{-A(x)+c} = ke^{-A(x)} \qquad k = e^c \neq 0, x \in (a, b)$$

essendo $A(x)$ una primitiva di $a(x)$ in (a, b); poiché non esistono integrali di tipo misto (osserviamo che le soluzioni del secondo tipo sono definite in (a, b) che è l'intervallo di massima ampiezza in cui può essere definita una soluzione; quindi esse non possono mai ricongiungersi a quella costante in qualche punto di tale intervallo per dare luogo a soluzioni di tipo misto) e poiché l'unica soluzione costante è quella identicamente nulla, possiamo scrivere in un unico modo tutti gli integrali dell'equazione omogenea associata come segue

$$y(x) = ke^{-A(x)} \qquad \forall k \in R, x \in (a, b).$$

Cerchiamo adesso una soluzione particolare dell'equazione completa nella famiglia di funzioni del tipo $y(x) = \gamma(x)e^{-A(x)}$ essendo γ una funzione arbitraria da determinare come segue: calcoliamo la derivata di y

$$y'(x) = \gamma'(x)e^{-A(x)} - \gamma(x)a(x)e^{-A(x)}$$

e sostituiamo nell'equazione completa sia y che y' ottenendo

$$y'(x) + a(x)y(x) = \gamma'(x)e^{-A(x)} - \gamma(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)\gamma(x)e^{-A(x)} = \gamma'(x)e^{-A(x)} = g(x);$$

ne segue che $\gamma(x)$ è una primitiva della funzione $g(x)e^{A(x)}$ calcolabile, quindi, mediante integrazione indefinita. Si dimostra, infine, che tutte e solo le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni del tipo

$$y(x) = ke^{-A(x)} + \gamma(x)e^{-A(x)} \qquad \forall x \in (a, b) \tag{4}$$

al variare di k in R; la (4) fornisce quello che si chiama *integrale generale* dell'equazione data.∎

Esempio 3. Consideriamo l'equazione $y' - 2\frac{y}{x} = x$, con $x \in]0, +\infty[$; applicando la formula (4) sopra ricavata otteniamo facilmente che l'equazione in esame ha come soluzioni tutte e solo le funzioni del tipo

$$y_h(x) = hx^2 + x^2 \ln x :]0, +\infty[\to R, \qquad h \in R.\blacksquare$$

III) **Equazioni differenziali lineari di ordine n a coefficienti costanti.** Siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n costanti reali e g una funzione continua definita in un intervallo (a, b). Chiameremo *equazione differenziale lineare di ordine n a coefficienti costanti*, e scriveremo

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = g(x),$$

il problema di trovare una funzione $y = y(x)$, soddisfacente le condizioni seguenti:

III1) $y : (a, b) \to R$

III2) $y \in C^n[(a, b)]$

III3) y verifica l'identità

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + a_2 y^{(n-2)}(x) + \ldots + a_n y(x) = g(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Una tale equazione viene detta di ordine n perché la derivata di ordine massimo della funzione incognita che vi compare è la derivata n-esima.

Si consideri, ancora, l'*equazione omogenea associata*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0$$

e si cerchi di risolverla trovando costanti $\lambda \in C$ in modo che la funzione $e^{\lambda x}$ sia una sua soluzione. Si ottiene facilmente la seguente equazione algebrica, detta *equazione caratteristica*,

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

avente per soluzione numeri $w_i \in C, i = 1, 2, ...s$, ognuno con molteplicità h_i. Si dimostra, poi, che ad ogni soluzione reale w_i, di molteplicità h_i, corrispondono i seguenti integrali dell'equazione omogenea

$$e^{w_i x}, x e^{w_i x}, \ldots, x^{h_i - 1} e^{w_i x} \tag{5}$$

mentre ad ogni coppia di soluzioni complesse coniugate $w_j = \alpha_j + i\beta_j, w_j = \alpha_j - i\beta_j$, di molteplicità h_j, corrispondono i seguenti integrali dell'equazione omogenea

$$x^p e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, x^p e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x \qquad \forall p \in \{0, 1, 2 \ldots, h_j - 1\} \qquad (6).$$

Si dimostra, infine, che tutte e solo le soluzioni dell'equazione omogenea associata si trovano da una qualunque combinazione lineare delle (5) e (6). Si dimostra anche che se a tale combinazione lineare si somma un integrale particolare dell'equazione completa si ottengono tutte e solo le soluzioni (o come suol dirsi l'*integrale generale*) dell'equazione completa. Quindi dette $y_1, y_2, \ldots, y_n$ le funzioni descritte nelle (5) e (6) ed y_0 una soluzione particolare dell'equazione completa, l'integrale generale dell'equazione completa si scriverà come segue

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n + y_0.$$

Occorre, allora, avere un metodo per trovare y_0 ; a tal fine possiamo usare il seguente *metodo di variazione delle costanti di Lagrange*. Si tratta di trovare n funzioni $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, derivabili, le cui derivate prime soddisfino il sistema seguente

$$\begin{cases} y_1(x)\gamma_1'(x)+ & y_2(x)\gamma_2'(x)+\ldots\ldots+ & y_n(x)\gamma_n'(x)=0 \\ y_1'(x)\gamma_1'(x)+ & y_2'(x)\gamma_2'(x)+\ldots\ldots+ & y_n'(x)\gamma_n'(x)=0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)}(x)\gamma_1'(x)+ & y_2^{(n-2)}(x)\gamma_2'(x)+\ldots\ldots+ & y_n^{(n-2)}(x)\gamma_n'(x)=0 \\ y_1^{(n-1)}(x)\gamma_1'(x)+ & y_2^{(n-1)}(x)\gamma_2'(x)+\ldots\ldots+ & y_n^{(n-1)}(x)\gamma_n'(x)=g(x) \end{cases}$$

Risolvendo il precedente sistema (che ha sempre soluzione unica, come può essere provato), troveremo le funzioni γ_i' integrando le quali otterremo le γ_i; si può allora far vedere che l'integrale particolare cercato ha la forma seguente

$$y_0 = y_1\gamma_1 + y_2\gamma_2 + \ldots + y_n\gamma_n.$$

Nel caso particolare in cui il termine noto è del tipo seguente

$$g(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x)$$

la soluzione particolare dell'equazione completa può anche essere cercata come segue, senza necessariamente usare il metodo di variazione delle costanti: si considera innanzitutto il numero complesso $\gamma = \alpha + i\beta$; e si vede quale è la sua molteplicità h come soluzione dell'equazione caratteristica (per convenzione si pone $h = 0$ se γ non risolve tale equazione); quindi si determinano due polinomi $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ aventi grado uguale al massimo grado dei polinomi $P_1(x)$ e $P_2(x)$ in modo che la funzione

$$y_0(x) = x^h e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$$

sia soluzione dell'equazione completa.

È spesso utile il seguente *Principio di Sovrapposizione*, valido **solo** per le equazioni lineari: sia data l'equazione lineare a coefficienti non necessariamente costanti

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = c_1g_1 + c_2g_2 \qquad (7).$$

Il Principio di Sovrapposizione (la dimostrazione viene lasciata allo studente) afferma che considerando una soluzione y_1 dell'equazione

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = g_1$$

ed una soluzione y_2 dell'equazione

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = g_2$$

la funzione

$$c_1 y_1 + c_2 y_2$$

è soluzione dell'equazione (7).■

IV) **Equazione differenziale del primo ordine di Bernoulli.** Siano $a, g : (a, b) \to R$ due funzioni continue. Chiameremo *equazione differenziale del primo ordine di Bernoulli*, e scriveremo

$$y' = a(x)y + g(x)y^m \qquad , \qquad m \in R,$$

il problema di trovare una funzione $y = y(x)$ soddisfacente le condizioni seguenti:

IV1) $y : (\alpha, \beta) \subset (a, b) \to R$

IV2) $y \in C^1[(\alpha, \beta)]$

IV3) y verifica l'identità

$$y'(x) = a(x)y(x) + g(x)y^m(x) \qquad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Una tale equazione viene detta del primo ordine perché la derivata di ordine massimo della funzione incognita che vi compare è la derivata prima.

Vediamo ora come si calcolano tali soluzioni. Osserviamo, innanzitutto, che se $m = 0$ oppure $m = 1$ l'equazione si riduce ad una equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti non costanti, già studiata; possiamo allora supporre che $m \neq 0, m \neq 1$. Osserviamo anche che:

j) se m è intero positivo, ogni soluzione y può assumere qualunque valore reale; in particolare $y(x) = 0$ in (a, b) è soluzione;

jj) se m è intero negativo, ogni soluzione y può assumere qualunque valore reale tranne 0;

jjj) se m non è intero, ma è positivo, ogni soluzione y può assumere qualunque valore reale non negativo; in particolare $y(x) = 0$ in (a, b) è soluzione;

jv) se m non è intero, ma è negativo, ogni soluzione y può assumere qualunque valore reale positivo.

Per calcolare le soluzioni occorre allora distinguere i seguenti casi:

1^o caso: $m \in R \setminus N, m > 0$**.** In questo caso, la funzione $y(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$ è soluzione. Vediamo come possiamo individuare soluzioni y positive; a tale fine poniamo $z(x) = [y(x)]^{1-m}, x \in (\alpha, \beta)$ (si osservi che $z(x) > 0$). Si ha così

$$z'(x) = (1-m)[y(x)]^{-m}y'(x) \qquad \forall x \in (\alpha,\beta).$$

Poiché y risulta soluzione dell'equazione, tale funzione deve verificare, come già detto, l'identità (IV3)

$$y'(x) = a(x)y(x) + g(x)y^m(x) \qquad \forall x \in (\alpha,\beta).$$

Moltiplichiamo, ora, ambo i membri di detta identità per $[y(x)]^{-m}$ ed otteniamo che

$$y'(x)[y(x)]^{-m} = a(x)y(x)[y(x)]^{-m} + g(x) \qquad \forall x \in (\alpha,\beta)$$

da cui segue

$$y'(x)[y(x)]^{-m} = a(x)[y(x)]^{1-m} + g(x) \qquad \forall x \in (\alpha,\beta) \qquad (8).$$

Osserviamo, ora che il primo membro della (8) è esattamente uguale a $\frac{z'(x)}{(1-m)}$ e che il primo addendo del secondo membro della (8) è esattamente uguale ad $a(x)z(x)$; quindi, da (8) segue che

$$\frac{z'(x)}{(1-m)} = a(x)z(x) + g(x) \qquad \forall x \in (\alpha,\beta).$$

Ciò significa che la funzione z verifica l'identità

$$z'(x) = (1-m)a(x)z(x) + (1-m)g(x) \qquad \forall x \in (\alpha,\beta) \qquad (9),$$

cioé che z è un integrale di una equazione lineare del primo ordine a coefficienti non costanti; viceversa, è anche facile vedere che se una funzione z verifica l'identità (9) allora la funzione $y(x) = \sqrt[1-m]{z(x)}, x \in (\alpha,\beta)$, verifica la identità (IV3). In tale modo abbiamo ricondotto lo studio dell'equazione di Bernoulli a quello della seguente equazione differenziale lineare

$$z' = (1-m)a(x)z + g(x).$$

Essa può essere risolta come già visto in (II); per trovare poi le soluzioni y dell'equazione di Bernoulli è sufficiente ricordare che $y(x) = \sqrt[1-m]{z(x)}$ per ogni $x \in (\alpha,\beta)$ e verificare che una funzione siffatta risolve l'equazione di Bernoulli (la dimostrazione viene lasciata allo studente).

Osserviamo che per i valori di m considerati, possiamo anche avere soluzioni che assumono sia valori positivi che il valore 0, dette di *tipo misto* (sotto condizioni analoghe a quelle considerate per l'esistenza di soluzioni di tipo misto nel caso di equazioni differenziali a variabili separabili); tali integrali non possono, però, esistere se $m > 1$; infatti, se y fosse soluzione di tipo misto, con $m > 1$, avremmo

$$y'(x) = a(x)y(x) + g(x)y^m(x) = y(x)[a(x) + g(x)y^{m-1}(x)] \qquad \forall x \in (\alpha, \beta);$$

posto $a_1(x) = a(x) + g(x)y^{m-1}(x)$, una tale funzione y dovrebbe verificare l'identità

$$y'(x) = a_1(x)y(x) \qquad \forall x \in (\alpha, \beta);$$

ne dovrebbe seguire che $y(x) = ke^{A(x)}$ essendo $A \in \int a(x)dx$; ma una tale y non può, ovviamente, assumere in un punto il valore 0 ed in un altro un valore positivo.

2^o caso: $m \in R \setminus N, m < 0$. Sia y una soluzione positiva; la posizione $z(x) = [y(x)]^{1-m}, x \in (\alpha, \beta)$, fornisce una soluzione della (9), mentre se z risolve la (9), la posizione $y(x) = [z(x)]^{\frac{1}{1-m}}, x \in (\alpha, \beta)$, fornisce una soluzione della equazione di Bernoulli (si ripetano i ragionamenti usati nel 1^o caso).

3^o caso: $m \in N, m \geq 3, m$ dispari. Detta y una funzione che non assuma mai il valore 0, il suo insieme immagine è contenuto in $]-\infty, 0[$ oppure in $]0, +\infty[$. Il numero $1-m$ è intero negativo pari; possiamo allora porre $z(x) = [y(x)]^{1-m}$, di modo che, come sopra, possiamo provare che z è soluzione positiva della (9); si noti che si ha anche

$$z(x) = [|y(x)|]^{1-m}, \qquad |y(x)| = [z(x)]^{\frac{1}{1-m}} \qquad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Viceversa, se z risolve la (9) in (α, β), le funzioni

$$[z(x)]^{\frac{1}{1-m}}, \quad -[z(x)]^{\frac{1}{1-m}}$$

sono soluzioni della equazione di Bernoulli (la dimostrazione viene lasciata allo studente). In questo caso mancano le soluzioni che assumono sia il valore 0 che valori non nulli, come può essere visto con lo stesso ragionamento seguito nel 1^o caso.

4^o caso: $m \in N, m \geq 2, m$ pari. Sia $m \geq 2$, intero pari; detta y una funzione che non assuma mai il valore 0, il suo insieme immagine è contenuto in $]-\infty, 0[$ oppure in $]0, +\infty[$. Il numero $1-m$ è intero negativo dispari; possiamo allora porre $z(x) = [y(x)]^{1-m}$, di modo che, come sopra, possiamo provare che z è soluzione della (9), che assume valori dello stesso segno di quelli assunti da y; si noti che se $y(x) > 0$ si ha $y(x) = [z(x)]^{\frac{1}{1-m}}$ per ogni $x \in (\alpha, \beta)$, mentre se $y(x) < 0$ si ha $-z(x) = [-y(x)]^{1-m} \Rightarrow -y(x) = [-z(x)]^{\frac{1}{1-m}} \Rightarrow y(x) = -[-z(x)]^{\frac{1}{1-m}}$, per ogni $x \in (\alpha, \beta)$. Viceversa, se z risolve la (9) in (α, β) ed ivi assume valori positivi, la funzione $[z(x)]^{\frac{1}{1-m}}$ è soluzione della equazione di Bernoulli, mentre se z risolve la (9) in (α, β) ed ivi assume valori negativi, la funzione $-[-z(x)]^{\frac{1}{1-m}}$ è soluzione della equazione di Bernoulli (la dimostrazione viene lasciata allo studente). In questo caso, come nel precedente, non vi sono altre soluzioni.

5^o caso: $m \in Z, m \leq -1, m$ **dispari.** Se y risolve l'equazione di Bernoulli in (α, β) possiamo porre $z(x) = [y(x)]^{1-m} = [|y(x)|]^{1-m}$ dal momento che $1 - m$ è intero positivo pari; z è, allora, soluzione positiva della (9). Viceversa, se z risolve la (9) ed è positiva, allora le funzioni $[z(x)]^{\frac{1}{1-m}}, \quad -[z(x)]^{\frac{1}{1-m}}$ risolvono l'equazione di Bernoulli (le dimostrazioni vengono lasciate allo studente).

6^o caso: $m \in Z, m \leq -2, m$ **pari.** Se y risolve l'equazione di Bernoulli in (α, β) possiamo porre $z(x) = [y(x)]^{1-m}$; dal momento che $1-m$ è intero positivo dispari, z ha lo stesso segno di y ed, al solito, è soluzione della (9). Viceversa, se z risolve la (9) ed è positiva, allora la funzione $[z(x)]^{\frac{1}{1-m}}$ risolve l'equazione di Bernoulli, mentre se z risolve la (9) ed è negativa, allora la funzione $-[-z(x)]^{\frac{1}{1-m}}$ risolve l'equazione di Bernoulli (le dimostrazioni vengono lasciate allo studente).∎

Esempio 4. Consideriamo l'equazione

$$\frac{y'}{2} - 2\frac{y}{x} = x\sqrt{y} \qquad x \in]0, +\infty[$$

e cerchiamo di determinare le sue soluzioni, che devono necessariamente essere funzioni non negative. La funzione $y(x) = 0, x \in]0, +\infty[$, è soluzione; cerchiamo adesso soluzioni positive; dalla teoria generale sappiamo che, posto $z(x) = \sqrt{y(x)} > 0$, z deve risolvere l'equazione

$$z' - 2\frac{z}{x} = x$$

già studiata nell'esempio 3; essa ammette il seguente integrale generale

$$z(x) = hx^2 + x^2 \ln x \qquad h \in R;$$

poiché z è positiva, deve aversi $h + \ln x > 0 \Leftrightarrow x > e^{-h}$, cosicché $(\alpha, \beta) =]e^{-h}, +\infty[$. Allora, le funzioni

$$y_h(x) = x^4(h + \ln x)^2 :]e^{-h}, +\infty[\to]0, +\infty[, h \in R,$$

sono soluzioni positive dell'equazione di Bernoulli considerata. La suddetta equazione ammette poi anche le seguenti altre soluzioni, come facilmente si verifica (la dimostrazione viene lasciata allo studente)

$$\tilde{y}_h(x) = \begin{cases} 0 & x \in]0, e^{-h}] \\ x^4(h + \ln x)^2 & x \in]e^{-h}, +\infty[\end{cases},$$

al variare di $h \in R$.∎

V) **Equazioni differenziali esatte**. Sia $A \subset R^2$ un insieme aperto connesso e siano $f, g : A \to R$ due funzioni continue, di cui la seconda non nulla. Chiameremo *equazione differenziale esatta*, e scriveremo

$$y' + \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = 0$$

il problema di trovare una funzione $y = y(x)$ soddisfacente le condizioni seguenti:

V1) $y : (\alpha, \beta) \subset (a, b) \to R$

V2) $(x, y(x)) \in A$ per ogni $x \in (\alpha, \beta)$

V3) $y \in C^1[(\alpha, \beta)]$

V4) y verifica l'identità

$$y'(x) + \frac{f(x,y(x))}{g(x,y(x))} = 0 \qquad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Assieme a tale equazione si consideri una condizione iniziale del tipo $y(x_0) = y_0$, dove $(x_0, y_0) \in A$. Queste equazioni possono essere risolte sotto l'ipotesi che la forma differenziale seguente

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

abbia primitive $U : A \to R$; si può infatti provare che l'equazione $U(x,y) = U(x_0, y_0)$ definisce implicitamente y come funzione di x in un intorno di x_0, grazie al Teorema del Dini; poiché y è anche derivabile, come facilmente si vede grazie al Teorema di Derivazione della funzione implicita, possiamo scrivere che

$$y'(x) = -\frac{U_x(x,y(x))}{U_y(x,y(x))} = -\frac{f(x,y(x))}{g(x,y(x))}$$

da cui segue che la funzione implicita ottenuta è la soluzione cercata del Problema di Cauchy considerato. A volte può accadere che la forma differenziale $fdx + gdy$ non sia esatta, ma si possa render tale moltiplicando ogni sua componente per una funzione ϕ della sola x oppure della sola y; allora per trovare una soluzione del Problema di Cauchy considerato possiamo operare come sopra sulla forma differenziale $\phi f dx + \phi g dy$; la funzione ϕ viene detta *fattore integrante*; essa sicuramente esiste se

i) $\frac{1}{g}(f_y - g_x) = h$ è funzione della sola x, nel qual caso il fattore integrante è $e^{\int h dx}$

ii) $\frac{1}{f}(f_y - g_x) = h$ è funzione della sola y (si noti che in questo caso deve essere $f \neq 0$), nel qual caso il fattore integrante è $e^{-\int h dy}$. ∎