CAPITOLO 6

TRIGONOMETRIA

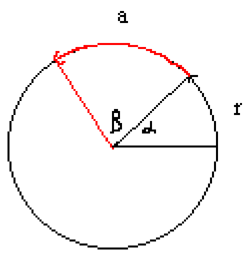
Teoria in sintesi

- Le principali unità di misura degli angoli piani sono: il grado sessagesimale (*deg* sulle calcolatrici), il grado centesimale (*grad* sulle calcolatrici) e l'angolo radiante (*rad* sulle calcolatrici). In matematica viene usata abitualmente la misura lineare degli angoli che ha come unità di misura il **radiante**.Tale modalità di misurazione si fonda sulla corrispondenza biunivoca che sussiste tra gli angoli al centro di una circonferenza e gli archi corrispondenti, e consente di trasferire il problema della misura di un angolo alla misura di un arco rettificato.

Si dice angolo **radiante** quell'angolo α al centro di una circonferenza che sottende un arco avente misura uguale al raggio. La **misura in radianti** di un generico angolo β è data dal rapporto β/α.

In base alla proporzionalità diretta tra angoli β al centro ed i relativi archi di lunghezza α in una circonferenza, possiamo scrivere:

$$\beta : \alpha = a : r$$



Dalla relazione sopra indicata si mette in evidenza che la misura in radianti di un angolo è uguale alla misura lineare di un arco, calcolata rispetto al raggio della circonferenza cui angolo ed arco appartengono.
Se β è l'angolo giro, allora l'arco *a* ad esso corrispondente è tutta la circonferenza: di conseguenza abbiamo la proporzione:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2\pi r}{r}$$

cioè:

$$\beta / \alpha = 2\pi$$

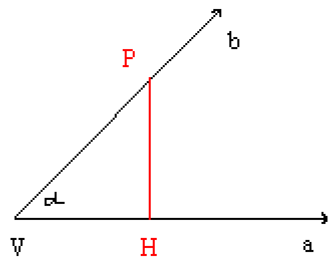
che indica che l'angolo giro è 2π volte l'angolo radiante.

- Stabilite le convenzioni di misura in radianti e ricordando che un angolo è definito positivo quando viene scelto il verso antiorario, consideriamo un angolo orientato α di vertice V e lati *a* e *b*. Preso sulla seconda semiretta un punto P arbitrario, purché distinto dal vertice V, proiettiamolo sulla prima semiretta *a*: sia H il piede della perpendicolare da P su *a*.

Consideriamo nel triangolo rettangolo VHP i rapporti fra i segmenti orientati:

HP / VP   VH / VP   HP / VH

Si dimostra che: *HP / VP   VH / VP   HP / VH* dipendono unicamente dall'angolo α e non dalla scelta del punto P sulla semiretta *b*.[1]



- I tre rapporti scritti in precedenza individuano allora tre funzioni dell'angolo α che vengono chiamate:

$\frac{HP}{VP} = sin\,\alpha$ $\frac{VH}{VP} = cos\,\alpha$ $\frac{HP}{VH} = tg\alpha$ (rispettivamente seno, coseno e tangente di α)

Passando dagli angoli alle loro misure relative dobbiamo sottolineare che: *la funzione tangente è definita per* $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$ con $k \in$ Z.

Ricordiamo che i valori per il quali tg α non è definita sono quelli che annullano la funzione coseno. Infatti vale la seguente identità:

$$\text{tg } \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha \quad \text{con } \alpha \neq \pi/2 + k\pi \text{ e } k \in Z$$

- Una relazione che riveste particolare importanza, essendo la versione goniometrica del teorema di Pitagora è l'identità fondamentale della trigonometria. Riferendosi alla figura precedente e applicando il teorema di Pitagora al triangolo VHP si ha: $(VH)^2 + (HP)^2 = (VP)^2$. Dividendo questa relazione per $(VP)^2$ (sempre nell'ipotesi P $\neq$ V) si ha:

$$\left(\frac{VH}{VP}\right)^2 + \left(\frac{HP}{VP}\right)^2 = 1$$

da cui:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

- Oltre ai rapporti definiti possiamo introdurre anche i loro reciproci, con i quali si ottengono funzioni che riportiamo nel seguente riquadro insieme ai valori di α per i quali esse non sono definite:

cosec α = 1 / sin α	$\alpha \neq k\pi$	con $k \in$ Z
sec α = 1 / cos α	$\alpha \neq \pi/2 + k\pi$	
cotg α = cos α / sin α	$\alpha \neq k\pi$	

(rispettivamente cosecante di α , secante di α, e cotangente di α)

[1] La dimostrazione è riportata nell'appendice a trigonometria.

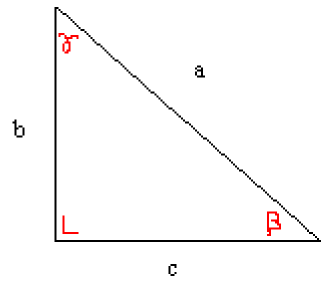
NOTO	**senα**	**cosα**	**tgα**
senα	senα	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$	$\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$
cosα	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	cosα	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$
tgα	$\dfrac{\text{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$	tgα
cotgα	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\text{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\text{ctg}\alpha}$

VALORI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI PARTICOLARI

α	**senα**	**cosα**	**tgα**
15° = π/12	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
18° = π/10	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}}$
30° = π/6	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45° = π/4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60° = π/3	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90° = π/2	1	0	non esiste
180° = π	0	-1	0
270° = 3/2π	-1	0	non esiste
0° = 360° = 2π	0	1	0

ANGOLI COMPLEMENTARI, SUPPLEMENTARI ED ESPLEMENTARI

Consideriamo un triangolo rettangolo ABC di lati *a*, *b*, *c* ed angoli β e γ oltre all'angolo retto (come in figura).



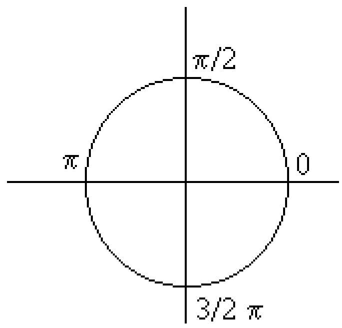
Si ha che $b/a = sin\ \beta$ e $b/a = cos\ \gamma$. Poiché il rapporto b/a è il medesimo deve valere la seguente relazione: sin β = cos γ. Ma β e γ sono angoli complementari, pertanto γ = π/2 - β; possiamo quindi riscrivere le relazioni sopra indicate così: $sin\ \beta = cos\ (\pi/2 - \beta)$ (1) . Uscendo dall'ambito geometrico strettamente determinato dai triangoli rettangoli e riferendosi ad angoli di misura relativa α qualsiasi non è difficile riconoscere che le relazione (1) continua a valere.

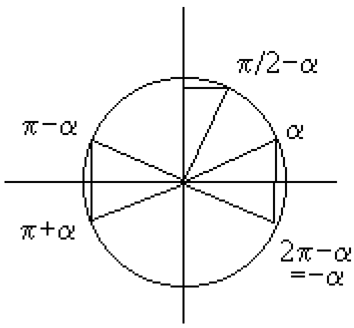
Angoli complementari: $sin\ \alpha = cos\ (\pi/2 - \alpha)$
$cos\ \alpha = sin\ (\pi/2 - \alpha)$

Da queste due si può ottenere la relazione per la tangente e la cotangente di angoli complementari:
tg α = sin α / cos α = cos (π/2 - α) / sin (π/2 - α) = cotg (π/2 - α).

$tg\ \alpha = cotg\ (\pi/2 - \alpha)$ $\quad \forall\ \alpha \neq \pi/2 + k\pi$
$cotg\ \alpha = tg\ (\pi/2 - \alpha)$ $\quad \forall\ \alpha \neq k\pi$

Da evidenti simmetrie sulla circonferenza si deducono poi i valori delle funzioni trigonometriche di altri archi particolari.





Angoli supplementari: $sin\ \alpha = sin\ (\pi - \alpha)$
$cos\ \alpha = -\ cos\ (\pi - \alpha)$
$tg\ \alpha = -\ tg\ (\pi - \alpha)$

Angoli esplementari: $sin\ \alpha = -\ sin\ (2\pi - \alpha)$
$cos\ \alpha = cos\ (2\pi - \alpha)$
$tg\ \alpha = -\ tg\ (2\pi - \alpha)$

Angoli opposti: *$\sin\alpha = -\sin(-\alpha)$*
$\cos\alpha = \cos(-\alpha)$
$tg\ \alpha = -tg(-\alpha)$

Esempi

1. Si vuole calcolare la misura in radianti dell'angolo interno α del pentagono regolare.

SOLUZIONE

Da un teorema di geometria sappiamo che la somma degli angoli di un poligono è data da tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due: dunque per un poligono di n lati, dà (n –2) angoli piatti. Nel nostro caso poiché si tratta di un poligono regolare di n = 5 lati e altrettanti angoli α, abbiamo: 5 α° = (5 – 2) 180°, ovvero α° = 108°. Per avere la misura di α in radianti, possiamo impostare proporzione:

$$108° : 180° = \alpha : \pi$$

da cui si ha: $\alpha = 3/5\ \pi$.

2. Quale relazione sussiste tra gli angoli che misurano (in gradi) α = 100° e β = 460° ?

SOLUZIONE

Essi differiscono di un giro completo, pertanto diremo che α *è congruente* a β.

3. Gli angoli che misurano (in radianti) π/2 e 15/2 π *sono congruenti*?

SOLUZIONE

Questi due angoli differiscono di 7π, ossia tre giri e mezzo, perciò non sono *congruenti*.

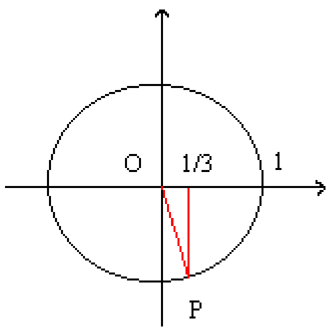
4. Determinare i valori delle funzioni dell'angolo α di cui è assegnato il coseno: cos α = 1/3, sapendo che 3/2 π < α < 2π.

SOLUZIONE

L'intervallo a cui appartiene α ci dice che il suo seno e la sua tangente saranno negativi. Perciò la scelta del segno è stabilita.
Avremo:

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\frac{1}{9}} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

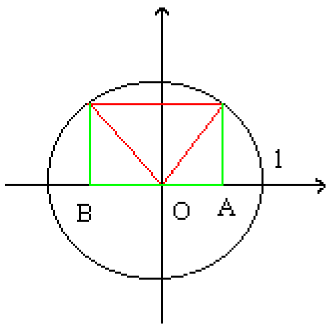
$$tg\ \alpha = \sin\alpha / \cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\ 3 = -\ 2\sqrt{2}$$



5. Sapendo che sin α = $\frac{2}{\sqrt{5}}$, determinare i valori di cos α e tg α.

SOLUZIONE

Le informazioni che dà questo testo non sono sufficienti a determinare l'angolo α univocamente. Infatti dalla rappresentazione grafica emerge che abbiamo due angoli che soddisfano la relazione sin α = $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Il primo ha il valore del coseno pari alla distanza OA ed il secondo è la distanza OB, con segno negativo.



Avremo cioè:

$\cos \alpha_1 = +\sqrt{1-\frac{4}{5}} = 1/\sqrt{5}$ $\quad$ $\mathrm{tg}\, \alpha_1 = 2/\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 2$

$\cos \alpha_2 = -\, 1/\sqrt{5}$ $\quad$ $\mathrm{tg}\, \alpha_2 = -\, 2.$

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

1. Dopo aver disegnato gli archi corrispondenti a cos α = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, trovare dell'arco nel quarto quadrante le altre funzioni trigonometriche.

2. Sapendo che α è acuto e positivo e che sen α = 3/5 calcolarne le altre funzioni trigonometriche.

3. Ragionando solo sulla circonferenza goniometrica completare con i segni > = < le seguenti:

$$sen\frac{\pi}{6}..........sen\frac{\pi}{6}+sen\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{6}..........\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}$$

$$sen\frac{\pi}{6}-sen\frac{\pi}{3}..........0$$

$$\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}..........0$$

4. Ragionando solo sulla circonferenza goniometrica provare che:

sen(π – α) = sen α

sen (π/2 – α) = cos α

sen $(\pi + \alpha) = -$ sen α

sen $(2\pi - \alpha) = -$ sen α

5. Semplificare le seguenti espressioni:

   $tg(\pi + \alpha)sen(\pi-\alpha)\ cos(\pi + \alpha) + tg^2(\pi-\alpha)cos^2(-\alpha)=$

   $sen^4\alpha - sen^2\alpha - cos^4\alpha + cos^2\alpha =$

6. Verificare le seguenti identità:
   a. $tg\ \alpha + cotg\ \alpha = 1/(\sin\alpha \cdot \cos\alpha)$
   b. $tg^2\ \alpha - \sin^2\alpha = tg^2\ \alpha \cdot \sin^2\alpha$
   c. $\dfrac{sin\alpha + cos\alpha}{sin\alpha - cos\alpha} = \dfrac{tg\alpha + 1}{tg\alpha - 1}$

SOLUZIONI

1. $\sin\alpha = -1/2$; $tg\ \alpha = -1/\sqrt{3}$; $cotg\ \alpha = -\sqrt{3}$
2. $\cos\alpha = 4/5$; $tg\ \alpha = 3/4$; $cotg\ \alpha = 4/3$
3. a. < b. < c. < d. >

5. a. 0 b. 0

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

1. Senza usare la calcolatrice, utilizzando le funzioni degli angoli noti, calcolare il valore delle seguenti espressioni:
   a. $\sin(3/4\ \pi)\cos(\pi/3) - tg(\pi/6)\ tg(4/3\ \pi)$ $[\sqrt{2}/4 - 1]$
   b. $\sqrt{2}\cos(\pi/4) + 2\sqrt{3}\sin(\pi/3)$ [4]
   c. $\dfrac{sin^2(7/6\pi) + cos^2(-7/3\pi)}{tg(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})cos(\pi-\frac{\pi}{6}) + cot\,g(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{3})}$ $[(2\sqrt{3}-1)^{-1}]$

2. Determinare per quali valori del parametro reale *k* hanno significato le seguenti relazioni. Calcolare poi le restanti funzioni dell'angolo.
   a. $\sin\alpha = k^2 - 4$ $[-\sqrt{5} \le k \le -\sqrt{3} \lor \sqrt{3} \le k \le \sqrt{5}]$
   b. $\cos\alpha = 2 - \sqrt{k}$ $[1 \le k \le 9]$
   c. $\cos\alpha = 1 - 2/k$ $\quad \pi < \alpha < 1.5\ \pi$ $[1 < k < 2]$
   d. $tg\ \alpha = k^2 - 2k$ $\quad 1.5\ \pi < \alpha \le 2\pi$ $[0 \le k \le 2]$

3. Utilizzando le relazioni fra le funzioni di angoli associati, semplificare le seguenti espressioni, trasformandole in modo che contengano il solo argomento α:

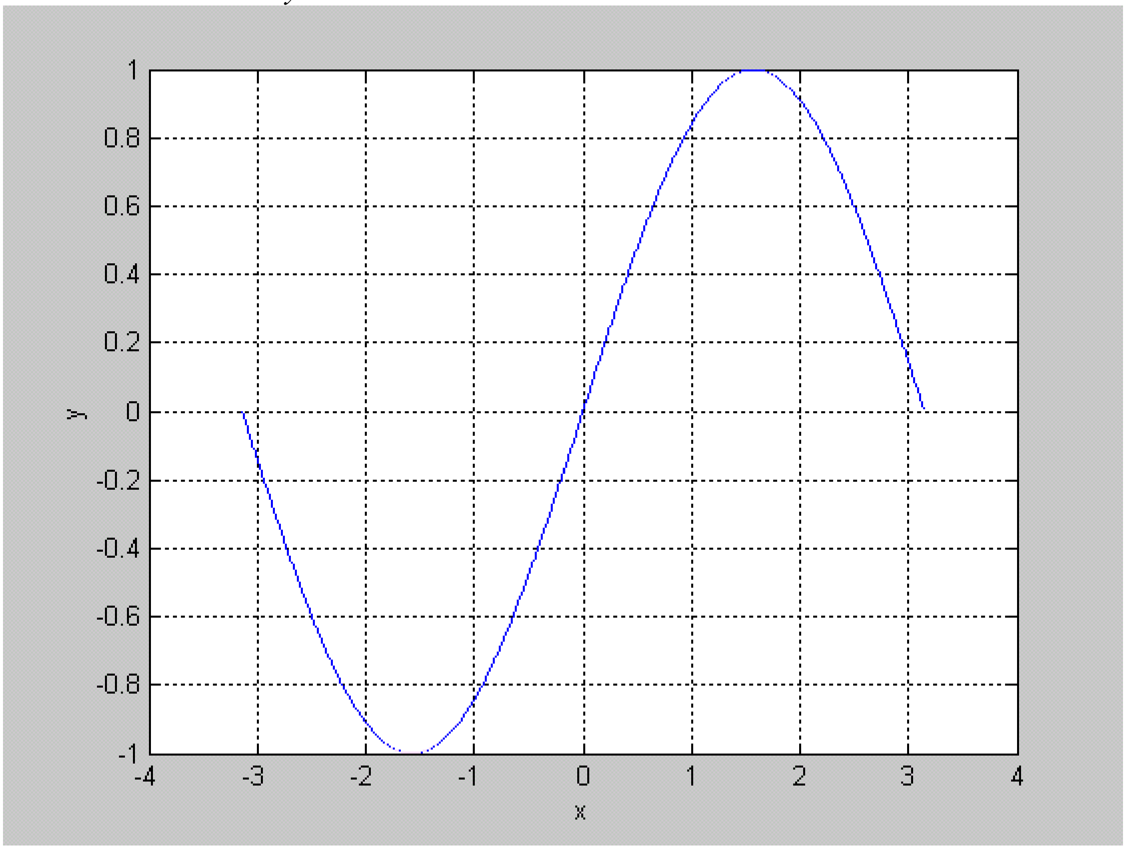
a. $sin(\pi + \alpha) \cdot sin(\pi - \alpha) + sin(\pi/2 - \alpha) \cdot cos(-\alpha) + 1$ $[2cos^2\ \alpha]$
b. $(tg\ \alpha + 1)\ (-1 - tg(\pi - \alpha)) + 2\ cos^2\ (\pi/2 - \alpha) + 2\ cos^2\ (\alpha - 3\pi)$ $[(cos\ \alpha)^{-2}]$
c. $\dfrac{1 - sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{tg(\pi + \alpha)} + tg\alpha + \dfrac{1 + cos(5\pi + \alpha)}{sin(-\alpha)cos(-\alpha)}$ $[sin\ \alpha]$

4. Stabilire quali relazioni devono valere tra gli angoli α e β affinché valgano le seguenti uguaglianze:
a. $sin\ \alpha - cos\ \beta = 0$ $[\alpha + \beta = \pi/2 + 2k\pi \lor \alpha - \beta = \pi/2 + 2k\pi]$
b. $sin\ \alpha + cos\ \beta = 0$ $[\alpha - \beta = -\pi/2 + 2k\pi \lor \alpha + \beta = 3/2\ \pi + 2k\pi]$
c. $tg\ \alpha + tg\ \beta = 0$ $[\alpha = -\beta + k\pi]$

FUNZIONI GONIOMETRICHE

Con le scelte fatte sulla definizione dell'angolo, possiamo considerare le funzioni goniometriche come *funzioni reali di variabile reale*, scriverne le equazioni nelle abituali denominazioni delle variabili $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$…. e rappresentarne i grafici in un sistema di riferimento xOy *monometrico*.

- Cominciamo con $y = \sin x$.



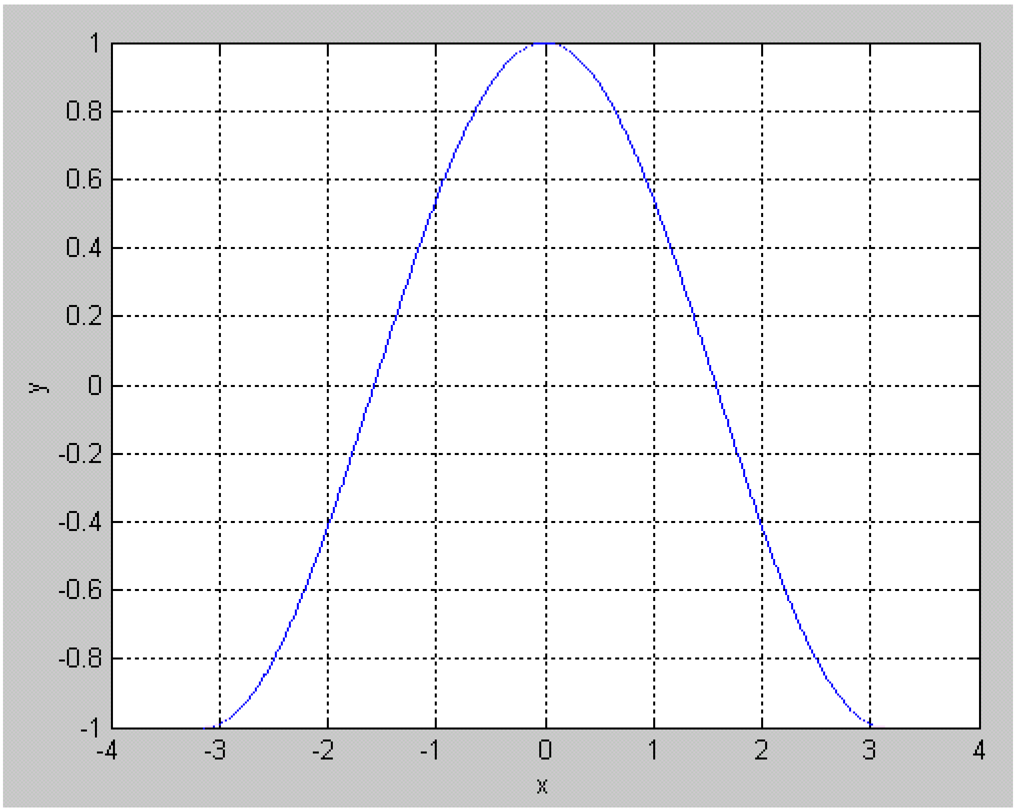
La curva rappresentata viene chiamata *sinusoide*.
Vediamo alcune caratteristiche interessanti.

- **Periodicità**: la funzione è stata rappresentata per $x \in [-\pi,\pi]$, intervallo di ampiezza pari a 2π. Pertanto il periodo della funzione è $T = 2\pi$. La parte di grafico nella semiretta delle ascisse negative va interpretata come inversione del verso di rotazione sulla circonferenza goniometrica.
- **Limitatezza**: il codominio della funzione non può assumere valori al di fuori dell'intervallo $y \in [-1, 1]$. Questa caratteristica si esprime dicendo che $y = \sin x$ è una funzione limitata: il valore -1 è il minimo ed il valore 1 è il massimo, tra quelli che essa può assumere.
- **Estremanti:** per la periodicità della funzione ci sono infiniti punti in cui essa assume il valore di massimo, di ascissa $x = \pi/2 + 2k\pi$ con $k \in Z$, e infiniti punti in cui essa assume il valore di minimo, di ascissa $x = -\pi/2 + 2k\pi$ con $k \in Z$
- **Zeri**: sono da segnalare anche gli infiniti punti in cui la sinusoide interseca l'asse delle ascisse, ovvero gli infiniti zeri della funzione $y = \sin x$, di ascissa $x = k\pi$, con k intero relativo.
- **Simmetrie**: la sinusoide ha molte simmetrie assiali e centrali: evidenziamo solo le due più significative.

a. la curva è simmetrica rispetto all'origine O: infatti la funzione seno è *dispari* e $\forall x \in R$ vale: $\sin(- x) = - \sin x$;

b. il grafico è simmetrico rispetto alla retta di equazione $x = \pi/2$. infatti secondo la relazione tra gli archi supplementari, vale: $\forall x \in R$, $\sin(\pi - x) = \sin x$. Ora, gli archi $\alpha_1 = \pi - x$ e $\alpha_2 = x$ sono simmetrici rispetto a $x = \pi/2$, che è il loro punto medio: $(\alpha_1 + \alpha_2)/2 = \pi/2$.

Rappresentiamo ora la funzione $y = \cos x$:



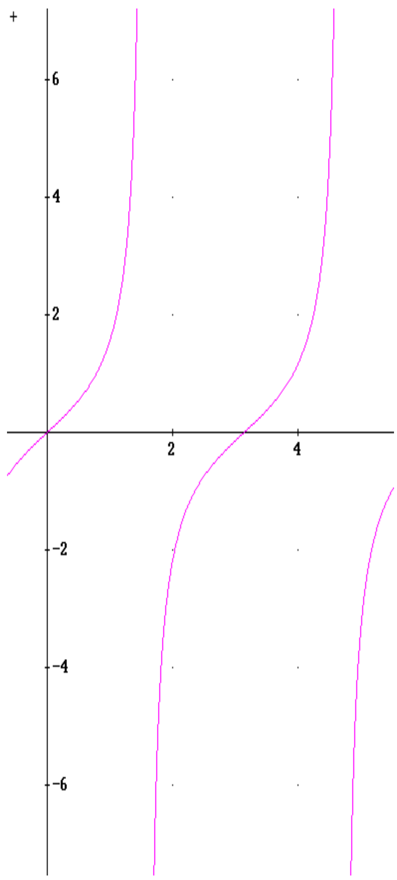
Potremmo seguire il procedimento adottato per la funzione seno in riferimento alla circonferenza goniometrica. Ma ricordiamo l'identità trovata nel paragrafo precedente:

$$\forall x \in R \text{ vale: } \cos x = \sin(x + \pi/2)$$

Quindi il grafico della funzione coseno può essere ottenuto dal grafico della sinusoide mediante l'applicazione di una traslazione di vettore **v** $(-\pi/2, 0)$.

La curva ottenuta viene chiamata cosinusoide. La simmetria della sinusoide rispetto alla retta $x = \pi/2$ si trasforma nella simmetria della cosinusoide rispetto all'asse delle ordinate, ossia al fatto che la funzione coseno è una funzione pari, per la quale vale: $\forall x \in R$: $\cos(-x) = \cos x$.
Anche le altre proprietà della funzione coseno sono ereditate dalla funzione seno.

Analizziamo ora il grafico della funzione y = tg x:



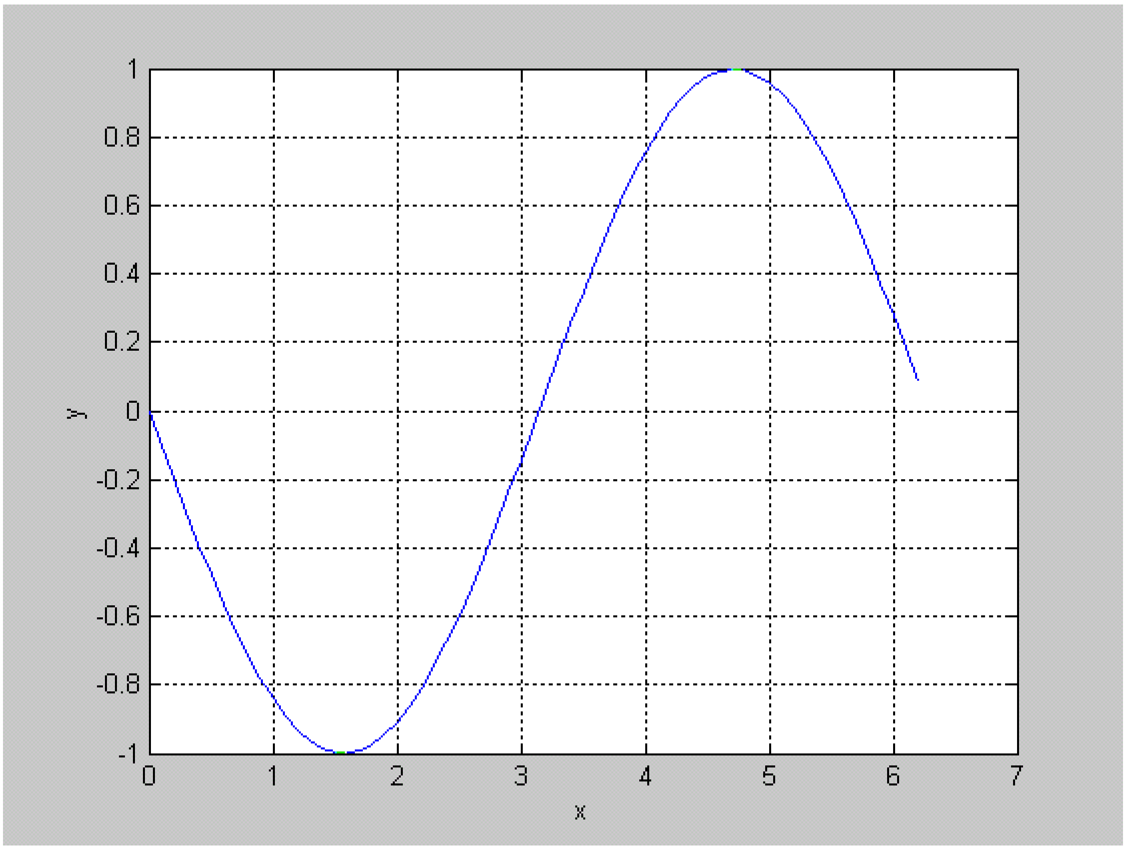
- **non è limitata:** e il suo codominio è tutto l'asse reale;
- **non ha estremanti**
- **non è definita in x = π/2**: perciò anche il dominio non sarà costituito da tutto l'asse reale.
- **Periodicità**: T = π;
- **Dominio**: D = $\left\{ x \in R : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\}$
- **Codominio**: C = R
- **Zeri**: $x = k\pi$, con $k \in$ Z
- In corrispondenza dei valori esclusi dal dominio, abbiamo che tutte le rette di equazioni $x = \pi/2 + k\pi$ sono **asintoti verticali** per la funzione
- Ogni zero della funzione è anche centro di simmetria per il suo grafico; in particolare questo è simmetrico rispetto all'origine: vuol dire che la funzione tangente è dispari:

$$\forall x \neq \pi/2 + k\pi \quad \text{vale} \quad tg\,(-x) = -\,tg\,x.$$

<u>**Esempi**</u>

- Rappresentare il grafico della funzione $y = sin\,(x - \pi)$ per $x \in [0, 2\pi]$.

Il grafico della funzione data si costruisce a partire dal grafico della funzione $y = sin\,x$ a cui si è applicata una traslazione di vettore **v** (π,0).
Ossia:

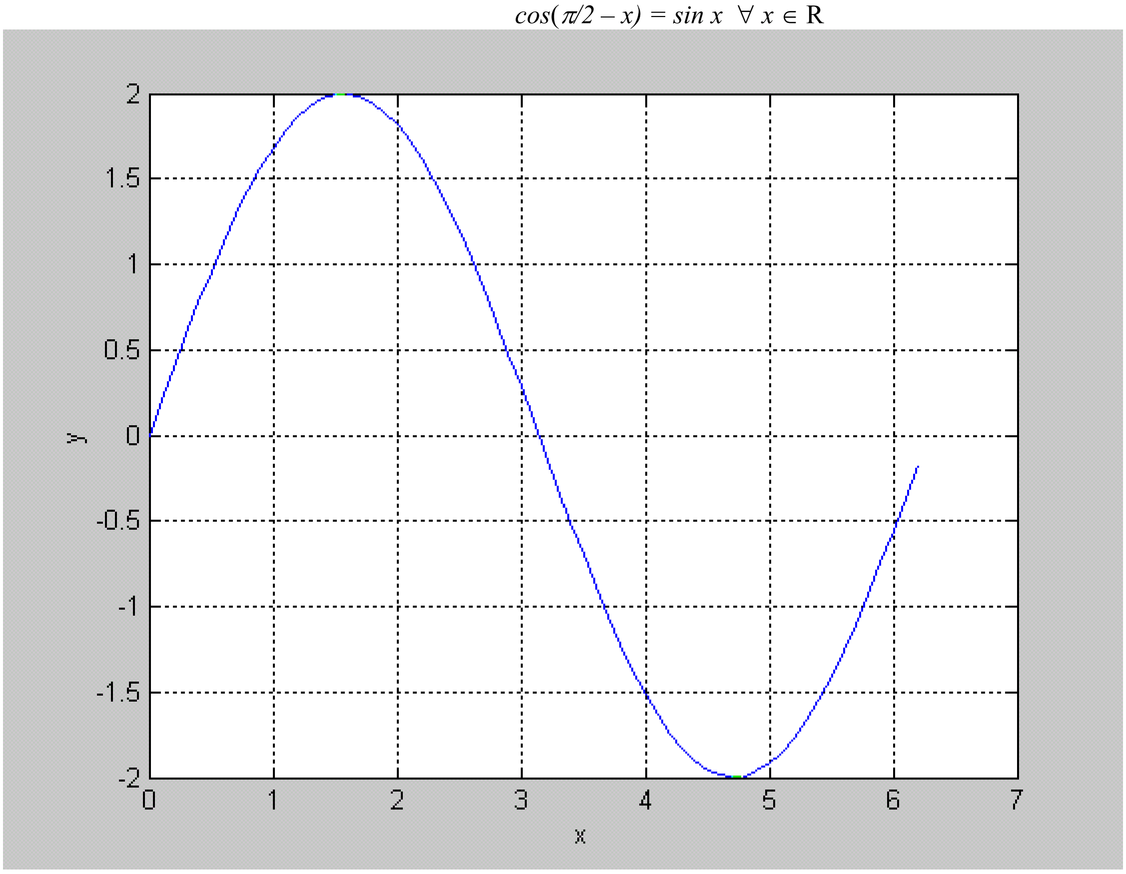


Questo è il grafico della funzione $y = - \sin x$. Per verificare la validità dell'affermazione, si consideri l'identità: $\sin (x - \pi) = \sin (- (\pi - x)) = - \sin(\pi - x) = - \sin x$ per ogni x reale.

- Rappresentare il grafico della funzione $y = 2 \cos (\pi/2 - x)$ per $x \in [0, 2\pi]$.

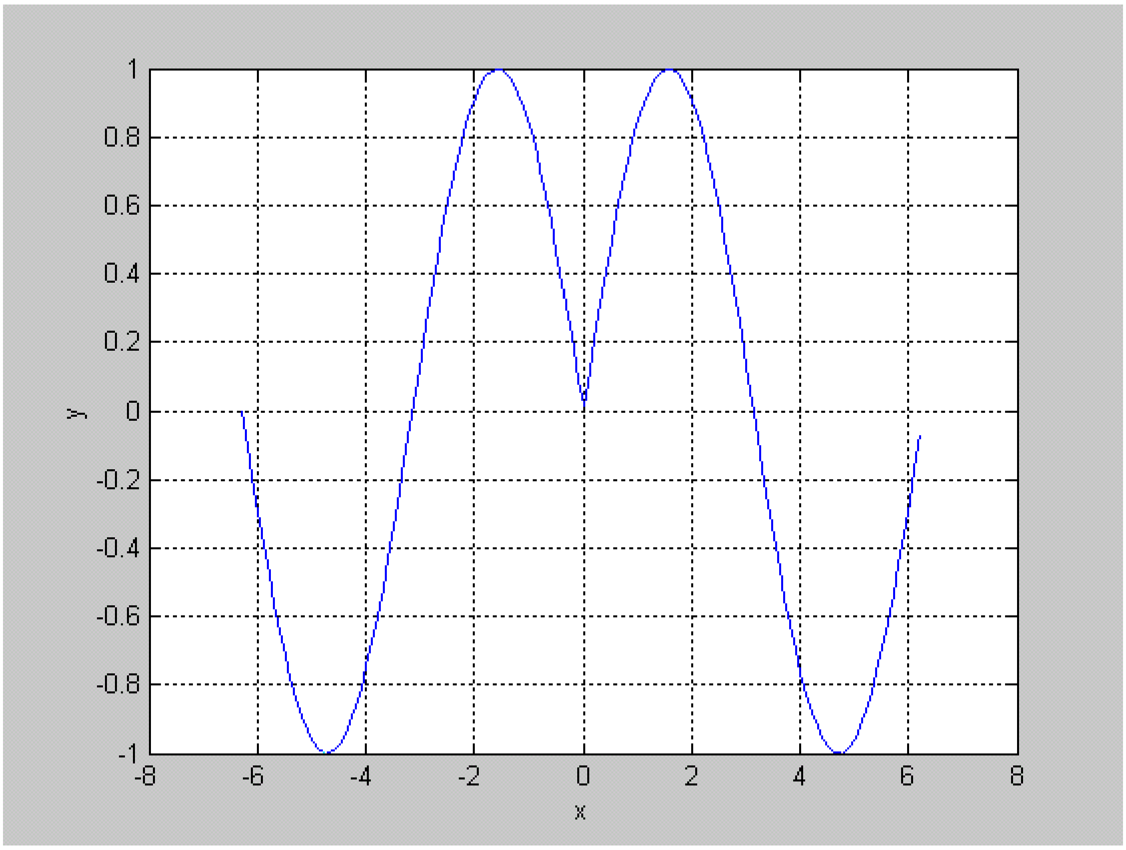
Il grafico della funzione proposta si ottiene dal grafico di $y = \cos x$ mediante una traslazione di vettore **v** $(\pi/2, 0)$ e una dilatazione di 2 unità lungo l'asse delle y. Si vuole ricordare che la funzione coseno è una funzione pari e che vale l'identità:

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin x \quad \forall x \in \mathrm{R}$$



- Rappresentare la funzione $y = sin\ |x|$ in $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

Il grafico della funzione indicata si determina a partire dal grafico della funzione $y = sin\ x$, ribaltando nel semipiano delle x negative la parte di grafico che sta nel semipiano delle $x \geq 0$.



TEST DI AUTOVALUTAZIONE

Rappresentare i grafici delle seguenti funzioni goniometriche per $x \in [-2\pi, 2\pi]$ avendo cura di indicare da quale grafico si deduce e quali sono le trasformazioni applicate:

a. $y = -\sin(\pi/2 - x)$
b. $y = \cos|x|$
c. $y = tg(\pi/2 - x)$
d. $y = 1-\cos(x - \pi)$

SOLUZIONI

a. $y = sin\ x$: traslazione di vettore $\mathbf{v}(\pi/2, 0)$ e riflessione rispetto all'asse delle x;
b. $y = cos\ x$: riflessione nel semipiano delle $x < 0$ della parte di grafico che sta nel semipiano delle $x \geq 0$;
c. $y = tg\ x$: riflessione rispetto all'asse delle x e traslazione di vettore $\mathbf{v}(\pi/2, 0)$;
d. $y = cos\ x$: traslazione di vettore $\mathbf{v}(\pi, 0)$, riflessione rispetto all'asse delle x e traslazione di vettore $\mathbf{v}(1, 0)$.

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

1. La funzione $y = sin\ x$ è una funzione:
a. limitata, ossia il suo codominio è [-1,1];
b. illimitata;
c. sempre positiva;

d. sempre negativa. [a]

2. La funzione $y = \cos(\pi/2 - x)$
a. è definita solo per $x \in [-\pi/2, 3/2\ \pi]$;
b. è periodica di periodo $T = \pi$;
c. è per ogni x la funzione $y = \sin x$;
d. è illimitata [c]

3. La determinazione delle funzioni $y = \cos x$ e $y = \sin x$:
a. è legata alla misura dell'angolo in radianti;
b. dipende sia dalla definizione della misura lineare dell'angolo, che dal suo orientamento, positivo in senso antiorario e negativo in senso orario;
c. non dipende dall'angolo scelto;
d. nessuna delle precedenti risposte è corretta. [b]

4. La funzione $y = tg\, x$:
a. è illimitata;
b. esiste per ogni valore di x reale;
c. ha $x = \pi/2$ come unico asintoto verticale. [a]

5. L'espressione $\sin \alpha = 3k - 1$ con k reale ha senso se:
a. $2 < k < 3$;
b. $1 < k < 4/3$;
c. $1 \leq k \leq 2$;
d. $0 \leq k \leq 2/3$. [d]

6. Il grafico della funzione $y = \sin(x + \pi/4)$:
a. è ottenuto dal grafico di $y = \sin x$ mediante una traslazione di vettore $\mathbf{v}(\pi/4, 0)$
b. è ottenuto dal grafico di $y = \sin x$ mediante una traslazione di vettore $\mathbf{v}(\pi, 0)$
c. è ottenuto dal grafico di $y = \sin x$ mediante una traslazione di vettore $\mathbf{v}(-\pi/4, 0)$
d. è ottenuto dal grafico di $y = \sin x$ mediante una traslazione di vettore $\mathbf{v}(-\pi/2, 0)$
[c]

7. Il grafico della funzione $y = 3\cos x$:
a. è ottenuto dal grafico di $y = \sin x$ mediante una traslazione di vettore $\mathbf{v}(\pi/4, 0)$
b. è ottenuto dal grafico di $y = \cos x$ mediante una traslazione di vettore $\mathbf{v}(\pi, 0)$
c. è ottenuto dal grafico di $y = \cos x$ mediante una dilatazione di 1/3 sull'asse y
d. è ottenuto dal grafico di $y = \cos x$ mediante una dilatazione di 3 sull'asse y.
[d]

8. Il grafico della funzione $y = \cos 2x$:
a. è ottenuto dal grafico di $y = \cos x$ mediante una dilatazione di ½ sull'asse x
b. è ottenuto dal grafico di $y = \cos x$ mediante una dilatazione di 2 sull'asse x
c. è ottenuto dal grafico di $y = \cos x$ mediante una traslazione di vettore $\mathbf{v}(\pi/4, 0)$
d. è ottenuto dal grafico di $y = \sin x$ mediante una traslazione di vettore $\mathbf{v}(\pi/2, 0)$
[a]

9. La funzione $y = cotg\, x$:
a. è l'inversa della funzione $y = tg\, x$
b. è la reciproca della funzione $y = tg\, x$
c. è limitata
d. nessuna delle precedenti risposte è corretta.
[b]

10. La funzione $y = 1/\sin x$
a. è limitata tra $[-1,1]$ visto che lo è la funzione $y = \sin x$
b. è sempre definita per ogni valore di x reale
c. è illimitata
d. essendo $-1 \leq \sin x \leq 1$, la funzione sarà definita per $y < -1 \vee y > 1$.
[c]

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

- *PRIMO GRADO, elementari*

sinx = h
cosx = h
con $h \in [-1, 1]$

Ricordando la definizione delle funzioni *sinx* e *cosx* queste equazioni si risolvono intersecando la circonferenza (di equazione $x^2 + y^2 = 1$) con l'equazione

1. $y = h$
2. $x = h$

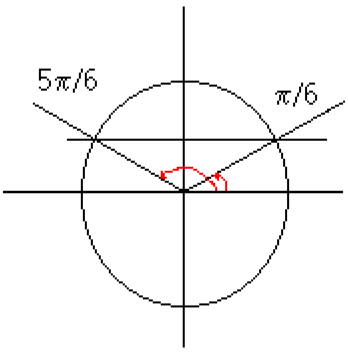
(che rappresenta una retta)

Esempio

- sen x = ½

Può essere interpretata come : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 1/2 \end{cases}$

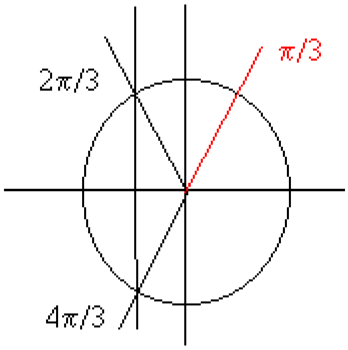
disegnando la circonferenza goniometrica e la retta y = 1/2 si ha:



I punti di intersezione sono posizionati nel primo quadrante: x = π/6,
e nel secondo, x = π – π/6 = 5π/6
In questo modo abbiamo trovato le due soluzioni, ma ricordando che la funzione seno è periodica di periodo 2π se voglio ottenere tutte le soluzioni dell'equazione ho:
x = π/6 + 2kπ,
x = 5π/6 + 2kπ, con $k \in \mathbf{Z}$

- cos x = -1/2

Disegnando la circonferenza goniometrica e la retta x = -1/2 si ha:



In questo caso i punti di intersezione sono posti nel secondo e terzo quadrante.
L'arco con cos x = + ½ è x = π/3,
quindi quello posto nel secondo quadrante sarà
x = π – π/3 = 2/3 π
mentre quello nel terzo quadrante sarà.
x = π + π/3 = 4/3 π
Le soluzioni sono quindi, tenendo conte del periodo:
x = 2/3 π +2kπ,
x = 4/3 π +2kπ, con $k \in \mathbf{Z}$.

- *PRIMO GRADO, lineari*

3. asenx + bcosx = h

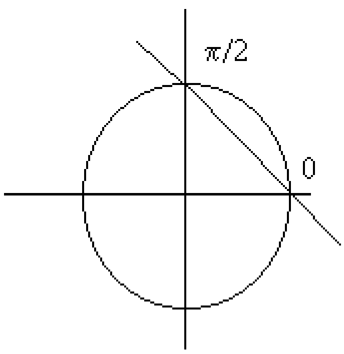
Si risolvono intersecando la circonferenza (di equazione $x^2 + y^2 = 1$) con l'equazione

ay + bx =h(che rappresenta una retta)

Esempi

- senx + cos x =1

Si pone *y = senx, x= cosx* e si interseca la retta *y = -x + 1* così ottenuta con la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$



Si ottengono i punti (0,1) e (1,0) che corrispondono alle soluzioni x = 0, x = π/2

considerando poi il periodo si ha:x = 0 + 2kπ, x = π/2 + 2kπ, con $k \in \mathbf{Z}$.

- *SECONDO GRADO*

1. Se l'equazione data contiene <u>una sola funzione trigonometrica</u> si risolve mediante la **formula generale delle equazioni di secondo grado**, ossia $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
2. Se contiene più di una funzione si cerca, mediante le formule viste precedentemente, di trasformarla in una che contenga una sola funzione trigonometrica.

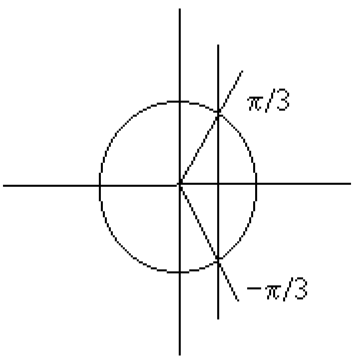
<u>Esempio</u>

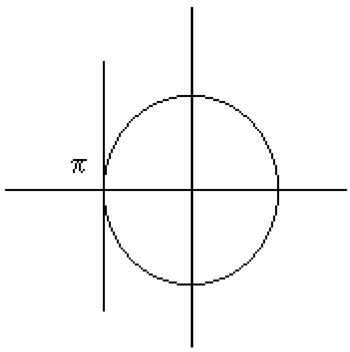
- $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

Applicando la formula risolutiva si ha:

$$\cos x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = -1; 1/2$$

ora risolvo le equazioni cos x = ½, cos x = -1





x = π/3 +2kπ, x = π +2kπ,

x = -π/3 +2kπ, con $k \in \mathbf{Z}$.

- Risolvere : $\cos^2 x - \text{sen}^2 x + \cos x = 0$

E' di secondo grado, ed in essa non compare una sola funzione goniometrica; ricordando che

$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ si ha:

$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos x = 0$

$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

da cui si ottiene l'equazione precedente .

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

1. Risolvere le seguenti equazioni:
   a. sen (2x –π/2) = ½
   b. $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$
   c. $\cos x = \text{sen}^2 x - \cos^2 x$
   d. sen (π/4 + x) + sen (π/4 –x) = 1
   e. sen x = sen 2x
   f. 2 cos x + 2 sen x = $\sqrt{3}+1$

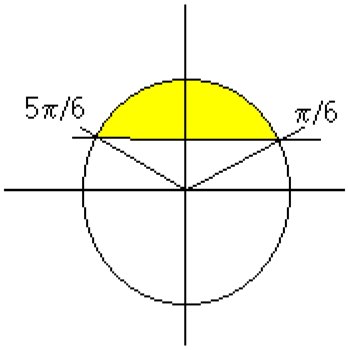
SOLUZIONI

a. [x = π/3 +2kπ, x=2π/3 + 2kπ]
b. [x = 2kπ, x = ±2π/3 + 2kπ]
c. [x = π + 2kπ, x = ±π/3 + 2kπ]
d. [x = ±π/4 + 2kπ]
e. [x = kπ, x = ±π/3 + 2kπ]
f. [x = π/6 + 2kπ, x = π/3 + 2kπ]

RISOLUZIONE DI DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

DISEQUAZIONI ELEMENTARI

Consideriamo ad esempio la disequazione sen x > ½



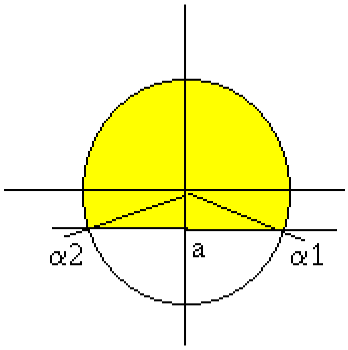
Disegnando la circonferenza e la retta y = ½ cerco tutti gli archi per cui l'ordinata è maggiore di ½, ed ottengo la soluzione

$$\pi/6 + 2k\pi < x < 5\pi/6 + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbf{Z}.$$

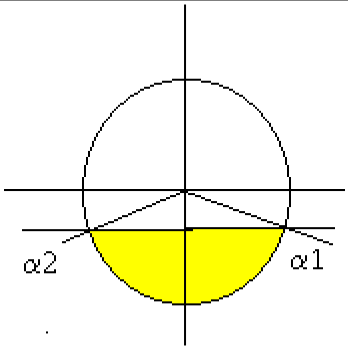
quindi ricordando che $-1 \le \text{sen}\,\alpha \le 1$; $-1 \le \cos\alpha \le 1$

Disequazione: $\text{sen}\, x > a$

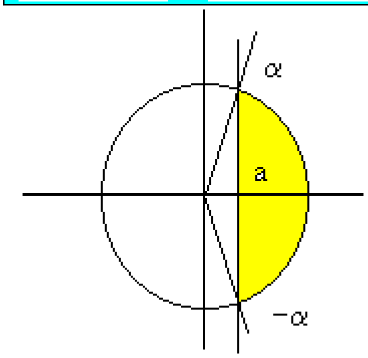
$a \ge 1$:	impossibile
$a < -1$:	sempre vera
$a = -1$:	vera $\forall x \ne \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$
$-1 < a < 1$:	$\alpha 1 + 2k\pi < x < \alpha 2 + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$



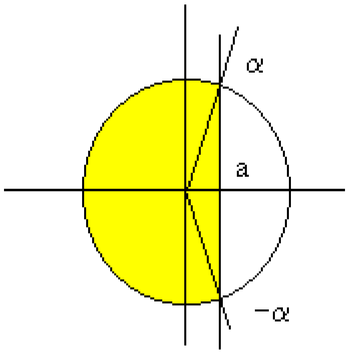
Disequazione $\operatorname{sen} x < a$	
$a \le -1$:	impossibile
$a > 1$:	sempre vera
$a = 1$:	vera $\forall x \ne \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$-1 < a < 1$:	$\alpha 2 + 2k\pi < x < 2\pi - \alpha 2 + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$



Disequazione $\cos x > a$	
$a \ge 1$:	impossibile
$a < -1$:	sempre vera
$a = -1$:	vera $\forall x \ne \pi + 2k\pi$
$-1 < a < 1$:	$-\alpha + 2k\pi < x < \alpha + 2k\pi$, con $\alpha = \arccos a$, $k \in \mathbf{Z}$



Disequazione $\cos x < a$	
$a \ge 1$:	sempre vera
$a < -1$:	impossibile
$a = -1$:	vera $\forall x \ne \pi + 2k\pi$
$-1 < a < 1$:	$\alpha + 2k\pi < x < 2\pi - \alpha + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$



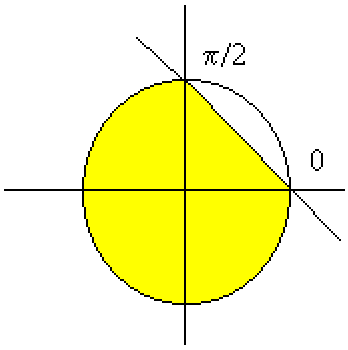
DISEQUAZIONI LINEARI

Nel caso di una disequazione lineare del tipo asenx + bcosx > (<) h si procede come per l'equazione corrispondente, cioè si risolve intersecando la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ con la disequazione ay + bx >h (che rappresenta un semipiano)

Esempio

- senx + cos x <1

Si pone *y = senx, x= cosx* e si interseca il sempipiano *y < -x + 1* così ottenuto con la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$



Si ottiene così la soluzione: $\pi/2 + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$

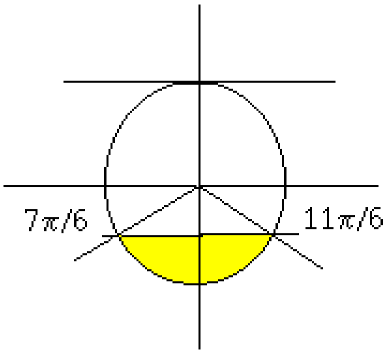
DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Si risolvono come le disequazioni di secondo grado, scegliendo gli intervalli interni o esterni alle soluzioni trovate, si ottengono così delle disequazioni di primo grado che si risolvono come precedentemente visto.

Esempio

- $2sen^2x - sen\,x - 1 > 0$

risolvendo l'equazione $2sen^2x - sen\,x - 1 = 0$ ottengo, mediante la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado: sen x = 1 sen x = -1/2, da cui, prendendo i valori esterni si ha:
sen x > 1 sen x < -1/2
cioè:



sen x >1 non dà soluzioni, mentre sen x < ½ ha come soluzioni $7\pi/6 + 2k\pi < x < 11\pi/6 + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$

Esistono identità goniometriche, alcune importanti, altre meno. A titolo di esempio riportiamo le formule di addizione. Altre si trovano in Appendice.

FORMULE DI ADDIZIONE

$\text{sen}(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$$

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

1. Risolvere le seguenti disequazioni:

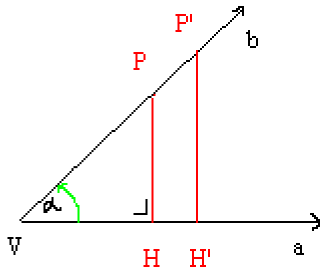
   a. $\cos x > 1/2$
   b. $2\cos^2 x - \cos x < 0$
   c. $\text{sen}\, x + \cos 2x < 1$
   d. $\cos x - \sqrt{3}\,\text{sen}\, x > 0$
   e. $\sqrt{3}\,\text{sen}\, x + \cos x > 1$
   f. $\dfrac{2\cos x - 3}{\text{sen}x} \geq 0$

SOLUZIONI

a. $[-\pi/3 + 2k\pi < x < \pi/3 + 2k\pi]$
b. $[\pi/3 + 2k\pi < x < \pi/2 + 2k\pi,\ 3\pi/2 + 2k\pi < x < 5\pi/3 + 2k\pi]$
c. $[\pi/6 + 2k\pi < x < 5\pi/6 + 2k\pi\ ,\ \pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi]$
d. $[-5\pi/6 + 2k\pi < x < \pi/6 + 2k\pi]$
e. $[\ 2k\pi < x < 2\pi/3 + 2k\pi]$
f. $[\ \pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi]$

APPENDICE

- Dimostriamo che dato l'angolo in figura

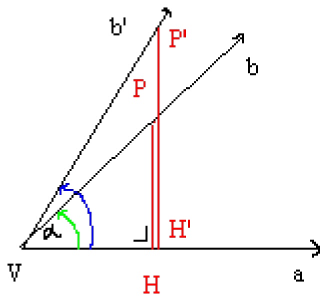


i rapporti *HP / VP* , *VH / VP*, *HP / VH* dipendono unicamente dall'angolo α e non dalla scelta del punto P sulla semiretta *b*.

Consideriamo sulla semiretta *b* un altro punto P' ≠ P ≠ V e proiettiamolo sulla retta *a* nel punto H ≠ H'. I triangoli VHP e VH'P' sono simili perché triangoli con i lati paralleli. Dunque avremo:

H'P' / VP' = HP / VP ; VH'/ VP' = VH / VP ; H'P' / VH' = HP / VP

I rapporti sopra indicati rimangono perciò costanti al variare del punto P sulla semiretta *b*, cioè dipendono solamente dall'angolo α. Infatti, solo se variasse l'angolo i triangoli che si otterrebbero non sarebbero più simili, come evidenziato in figura.



- **FORMULE DI TRIGONOMETRIA**

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta}$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE
(si ottengono dalle precedenti ponendo α = β)

$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

tg 2α = $\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

FORMULE DI BISEZIONE
(si ottengono dalle precedenti dimezzando l'angolo α)

sin $\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-cos\,\alpha}{2}}$
cos $\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+cos\,\alpha}{2}}$
tg $\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}} = \dfrac{1-cos\,\alpha}{sin\,\alpha} = \dfrac{sin\,\alpha}{1+cos\,\alpha}$

FORMULE PARAMETRICHE
(espressioni di sin α, cos α in funzione razionale di t = tg $\dfrac{\alpha}{2}$)

sin α = $\dfrac{2t}{1+t^2}$
cos α = $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
tg α = $\dfrac{2t}{1-t^2}$

FORMULE DI PROSTAFERESI

sin p + sin q = 2 sin $\dfrac{p+q}{2}$ cos $\dfrac{p-q}{2}$
sin p – sin q = 2 cos $\dfrac{p+q}{2}$ sin $\dfrac{p-q}{2}$
cos p + cos q = 2 cos $\dfrac{p+q}{2}$ cos $\dfrac{p-q}{2}$
cos p – cos q = - 2 sin $\dfrac{p+q}{2}$ sin $\dfrac{p-q}{2}$

FORMULE DI WERNER

sin α sin β = ½ [cos (α - β) – cos (α + β)]
cos α cos β = ½ [cos (α + β) + cos (α - β)]
sinα cos β = ½ [sin (α + β) + sin (α - β)]